

Конспект по дискретной математике  
На основе лекций Рабиновича А.С

Рустамова Дарина

2022

# Оглавление

# Глава 1

## Теория множеств

### 1.1 Основные понятия

**Множество** - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.

Мощность множества:  $|A|$

Если между двумя множествами  $A$  и  $B$  можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \quad (1.1)$$

**Теорема Кантора.** Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.

Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.

Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из  $n$  элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \quad (1.2)$$

где  $|A_n|$  - мощность множества подмножеств множества из  $n$  элементов  
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \quad (1.3)$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-2}| = \dots = 2^n|A_0| = 2^n \quad (1.4)$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из  $n$  элементов содержащих  $k$  элементов? Отвечаю.  $C_n^k$  - число подмножеств из  $k$  элементов.

Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (1.5)$$

## 1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

**Объединение**

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \quad (1.6)$$

**Пересечение**

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \quad (1.7)$$

**Дополнение**

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \quad (1.8)$$

**Вычитание**

$$A \setminus B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \quad (1.9)$$

**Сумма**

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad (1.10)$$

## 1.3 Законы теории множеств

### 1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.11)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.12)$$

### 2. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (1.13)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (1.14)$$

### 3. Закон идентичности

$$A \cup A = A \quad (1.15)$$

$$A \cap A = \emptyset \quad (1.16)$$

### 4. Закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.17)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.18)$$

### 5. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (1.19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (1.20)$$

### 6. Закон де-Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.21)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.22)$$

### 7. Закон нуля и единицы

$$0 = \emptyset \quad (1.23)$$

$$1 = \mathbb{U} \quad (1.24)$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (1.25)$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \quad (1.26)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad (1.27)$$

Пример некоторых доказательств.

**Закон поглощения**

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \quad (1.28)$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \quad (1.29)$$

**Закон скелливания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \quad (1.31)$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap B_n) \quad (1.32)$$

**Формула включения и исключения**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.33)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.34)$$

Доказательства оставляю читателю :)

**Задача 1.** Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

**Решение.** Возьмем  $A_3$  - числа, делящиеся на 3,  $A_5$  - числа, делящиеся на 5,  $A_7$  - числа, делящиеся на 7.

При этом,  $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$ ,  $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$ ,  $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$   $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$ ,  $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$ ,  $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$ ,  $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ:  $1000 - 543 = 457$

## Глава 2

# Элементы математической ЛОГИКИ

### 2.1 Основные понятия и операции

Пусть  $A$  - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \rightarrow a \vee b \quad (2.2)$$

$$A \cap B \rightarrow a \wedge b \quad (2.3)$$

$$\overline{A} \rightarrow \bar{a} \quad (2.4)$$

$$A - B \rightarrow a - b = a \wedge \bar{b} \quad (2.5)$$

$$A + b \rightarrow a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a}) \quad (2.6)$$

**Дистрибутивность**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (2.7)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (2.8)$$

**Поглощение**

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (2.9)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (2.10)$$

### Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.11)$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.12)$$

### Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a \quad (2.13)$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a \quad (2.14)$$

### Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.15)$$

2. Штрих Шеффера:

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.16)$$

3. Импликация:

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee b \quad (2.17)$$

4. Эквивалентность:

$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})} \quad (2.18)$$

### Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(0, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(1, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge f(1, 1, \dots, 1)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

### Совершенная конъюнктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(1, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(0, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \vee f(0, 0, \dots, 0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$



## 2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\bar{a} = 1 + a \quad (2.21)$$

$$a \wedge b = ab \quad (2.22)$$

$$a \vee b = a + b + ab \quad (2.23)$$

$$a + a = 0 \quad (2.24)$$

$$a - b = a \wedge \bar{b} = a(1 + b) = a + ab \quad (2.25)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.26)$$

$$a + b = b + a \quad (2.27)$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} = (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \quad (2.28)$$

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab \quad (2.29)$$

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + a(1 + b) = 1 + a + ab \quad (2.30)$$

$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \quad (2.31)$$

**Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ)** Получается из СДНФ заменой  $\vee$  на  $+$ ,  $\bar{x} = 1 + x$  и  $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1 + a)(1 + b)f(0, 0) + a(1 + b)f(1, 0) + (1 + a)bf(0, 1) + abf(1, 1) \quad (2.32)$$

## 2.3 Задачи

**Задача 2.** Проверить  $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

**Решение.**

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab$$

$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$

$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

**Задача 3.** Доказать  $a \rightarrow (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

**Решение.**

$$a \rightarrow (b \wedge c) = \bar{a} \vee (\overline{b \wedge c}) = \bar{a} \vee \overline{b} \mid \overline{c} = a \mid (b \mid c)$$

**Задача 4.** Доказать  $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

**Решение.**

$$\begin{aligned} a \downarrow (1 + (b - a) + b) &= a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) = \\ &= (1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \bar{a}ab = 0 \end{aligned}$$

# Глава 3

## Отношения

### 3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
=	$\sim$
$\wedge$	,
$\vee$	;
$\Rightarrow$	$\rightarrow$

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; \dots; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \quad (3.1)$$

Противоречие

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

**Отношения эквивалентности**

- Рефлексивность

$$A \sim A \quad (3.3)$$

- Симметричность

$$A \sim B \rightarrow B \sim A \quad (3.4)$$

- Транзитивность

$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \quad (3.5)$$

## Отношения порядка

- Рефлексивность

$$A \rightarrow A \quad (3.6)$$

- Антисимметричность

$$A \Rightarrow B, \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (3.7)$$

- Транзитивность

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{ то } A \Rightarrow C \quad (3.8)$$

## 3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \bar{A}; B \quad (3.9)$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} & P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow C \\ & P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C \\ & \overline{P_1, P_2, \dots, P_n} \vee C \\ & \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_n \vee C \\ & \overline{\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow (\bar{P}_n; C) \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow \bar{P}_n; C \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1.

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \quad (3.11)$$

Используем формулу ??, чтобы доказать

$$\begin{aligned} & A, \bar{A}; B \Rightarrow B \\ & \emptyset; B \Rightarrow B \end{aligned}$$

2.

$$A \Rightarrow B \rightarrow A \quad (3.12)$$

Так же заменяем  $B \rightarrow A$  формулой  $??$ , а далее используем  $??$ , то есть из последнего получаем первое выражение

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \overline{B}; A \\ A, B &\Rightarrow A \end{aligned}$$

3.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \quad (3.13)$$

Используя предыдущую формулу  $??$  переносим  $A$  налево

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно  $??$  и снова используем эту же формулу.

$$\begin{aligned} B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Доказано!

### 3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

**Задача 5.**

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$$

Используем формулу  $??$  получаем:

$$1 \Rightarrow \overline{(A \rightarrow B)}; ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$$

Теперь, согласно  $??$ , переносим  $\overline{A \rightarrow B}$  налево, убирая единицу, так как это является тавтологией:

$$A \rightarrow B \Rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$$

По аналогичной логике переносим  $C \rightarrow D, A \vee C$  налево:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$$

В результате получаем:

$$(A, A \rightarrow B) \vee (C, C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D$$

И, вспомнив ??:

$$B \vee D \Rightarrow B \vee D$$

**Задача 6.**

$$A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C \Rightarrow C$$

Используя правило транзитивности ?? приведем  $B \rightarrow D, D \rightarrow C$  к  $B \rightarrow C$ :

$$A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Далее:

$$(A, A \rightarrow C) \vee (B, B \rightarrow C) \Rightarrow C$$

И каждое из выражений  $A, A \rightarrow C$  и  $B, B \rightarrow C$ , согласно ??, изменяем:

$$C \Rightarrow C$$

**Задача 7.**

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \bar{A} \Rightarrow C$$

Следуя формулам из ??, переносим  $A$  вправо с отрицанием:

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Rightarrow A; C$$

$$A, B \vee C, D \Rightarrow A; C$$

Так как  $A, B \Rightarrow A$  и  $C, D \Rightarrow C$ :

$$A \vee C \Rightarrow A; C$$

$$A; C \Rightarrow A; C$$

**Задача 8.**

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$

Пользуясь ?? преобразуем  $A \rightarrow C$ , далее аналогично преобразуем новое выражение тоже пользуясь этой же формулой:

$$\begin{aligned}(\bar{A} \vee C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ \overline{(\bar{A} \vee C)} \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B\end{aligned}$$

Изменив первое выражение по правилу де Моргана, получаем:

$$\begin{aligned}(A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (A, \bar{C}) \vee (\bar{A}, B) &\Rightarrow A \vee B\end{aligned}$$

И, так как  $A, \bar{C} \Rightarrow A$  и  $\bar{A}, B \Rightarrow B$ , меняем:

$$A \vee B \Rightarrow A \vee B$$

## Глава 4

# Комбинаторика

### 4.1 Размещения

**Утверждение 1.** *Размещения без повторений - это упорядоченный набор из  $k$  различных элементов из некоторого множества различных  $n$  элементов, если  $k \leq n$ .*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4.1)$$

Предположим, у нас есть множество чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что  $\{1, 2\}$  и  $\{2, 1\}$  это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

**Утверждение 2.** *Размещения с повторениями - это упорядоченный набор из  $k$  элементов из некоторого множества различных  $n$  элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \quad (4.2)$$



Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество  $\{1, 2, 3\}$ . Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2\}, \dots, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

**Замечание.** Если бы  $k$  был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как  $\{1, 1, 2\}$ . То есть повторяться числа могут сколько угодно.

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам поможет **сочетания**.

## 4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

**Утверждение 3. Сочетания без повторений** - это способ выбрать  $k$  из  $n$  различных предметов без учета порядка.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.3)$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлечемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.

**Утверждение 4. Бином Ньютона** - это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} C_n^k \quad (4.4)$$

где  $C_n^k$  - биномиальные коэффициенты,  $n$  - неотрицательное целое число.

Например,

$$(x + y)^2 = x^0 y^2 + x^1 y^1 C_2^1 + x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (4.5)$$

$$(x + y)^3 = x^0 y^3 + x^1 y^2 C_3^1 + x^2 y^1 C_3^2 + x^3 y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + y^3 \quad (4.6)$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

**Утверждение 5. Треугольник Паскаля** - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & C_0^0 & & & \\ & & & & & C_1^1 & & \\ & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\ & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом  $n$  в бинOME Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.

Таким образом, коэффициенты из формулы ?? можно вывести используя треугольник Паскаля.

Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

**Следствие 5.1.** *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (4.7)$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниях повторение элементов? Возьмем все то же множество  $\{1, 2, 3\}$  и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 3\} \quad (4.8)$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.

У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категориям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

$$\begin{array}{l} 2\ 2\ |\ 5\ |\ 10\ 10 \\ 2\ |\ 5\ |\ 10\ 10\ 10 \\ 2\ 2\ 2\ |\ |\ 10\ 10 \end{array}$$

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем  $n - 1$  количество перегородок, и  $k + (n - 1)$  общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (4.9)$$

Формула ?? называется **сочетания с повторениями**.

**Утверждение 6.** *Сочетания с повторениями - это количество способов расположить  $n$  сортов на  $k$  местах, причем порядок перестановки неважен.*

## 4.3 Перестановки

У нас есть  $n$  различных элементов, как посчитать количество перестановок по  $n$  местам? Эта задача очень похожа на задачу из секции про размещения. У нас есть множество чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Как можно разместить 3 элемента из этого множества?

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$$

Или посчитать по формуле размещений без повторений, где  $k = n$ :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Именно формула выше и есть **формула для нахождения перестановок  $n$  различных элементов!**

$$P_n = n! = A_n^n \quad (4.10)$$

Теперь изменим наше множество на  $\{1, 1, 2, 3\}$ . Посмотрим на перестановки теперь:

$$\{1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{2, 1, 1, 3\}, \{3, 1, 1, 2\}, \dots$$

Можно заметить, что мы не учитываем перестановки между двумя одинаковыми элементами (в нашем случае единицами). Формула  $P_n = n!$  не подходит в данном случае. Если у нас есть  $n_1$  одинаковых элементов, то наша формула  $P_n = n!$  выдает в  $n_1!$  больше комбинаций, чем надо. Тогда преобразуем формулу:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (4.11)$$

Формула выше вычисляет **количество перестановок с повторениями.**

## 4.4 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 9.** Как посчитать число перестановок слова "манна"?

**Решение.** Посчитаем количество каждой буквы: м - 1, а - 2, н - 2. Обратимся к формуле перестановок с повторениями, так как буквы в нашем множестве повторяются:

$$P(1, 2, 2) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{5!}{1!2!2!}$$

**Задача 10.** 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

**Решение.** В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть,  $n = 3$ ,  $k = 50$ .

$$\overline{C}_3^{50} = C_{52}^{50} = \frac{(3 + 50 - 1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

**Задача 11.** Имеется шахматная доска  $2n \times 2n$ . Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

**Решение (а).**

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

**Решение (б).**

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n - 1)$$

**Задача 12.** Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

**Решение.**

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

**Задача 13.** В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

**Решение.** Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

**Задача 14.** Сколькими способами можно разложить  $n_1$  красных,  $n_2$  зеленых и  $n_3$  синих шаров по  $m$  урнам?

**Решение.** Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

## 4.5 Разбиения

**Утверждение 7.** При упорядоченном разбиении  $n$ -элементного множества на непересекающиеся подмножества мощности  $n_1, n_2, \dots, n_S$  количество различных вариантов разбиения равно

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_S!} \quad (4.12)$$

Например, рассмотрим такой пример:

Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на верхней полке оказалась 1 книга, на средней полке 3 книги, а на нижней полке 4 книги. Сколькими способами это можно сделать?

В данном примере множество из восьми книг разбивается на три непересекающихся подмножества мощности 1, 3 и 4. Согласно формуле, количество различных вариантов выпонить такое разбиение равно  $\frac{8!}{1!3!4!} = 280$ .

Если бы в условии задачи не было конкретно указано, сколько книг должно быть на каждой полке, то общее число различных вариантов расставить книги по трем полкам было бы равно  $3^8$ , поскольку каждая из восьми книг может оказаться на любой из трех полок.

Рассмотрим второй подход к определению числа различных вариантов разбиения, когда подмножества с одинаковой мощностью неразличимы. В этом случае получаем так называемое неупорядоченное разбиение.

**Утверждение 8.** Пусть в наборе  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_S$  только  $k$  различных чисел и они встречаются в этом наборе  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_S$  раз. Тогда при

неупорядоченном разбиении  $n$ -элементного множества на непересекающиеся подмножества мощностей  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_S$  количество разных вариантов разбиения равно:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_S!m_1!m_2!\dots m_k!} \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь такой пример:

Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось 2 книги, а на двух других - по 3 книги. Сколькими способами это можно сделать?

Поскольку в данной формулировке полки не различимы, то речь идет о неупорядоченном разбиении множества книг на три подмножества мощностей 2, 3 и 3. Параметры здесь  $m_1 = 1, m_2 = 2$ , поэтому согласно формуле число разных способов расставить книги так, как это требуется в условии задачи, равно

$$\frac{8!}{2!3!3!1!2!} = 280$$

## Глава 5

# Производящие функции

### 5.1 Производящие функции и их основные свойства

**Утверждение 9.** Пусть имеется последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.1)$$

Требуем, чтобы данный ряд сходилсся хотя бы при малых  $x$ . Рассмотрим свойства производящих функций и некоторые их доказательства.

1. **Линейность.** Пусть  $c_n = pa_n + qb_n$ ,  $p, q = \text{const}$ . Тогда

$$C(x) = pA(x) + qB(x) \quad (5.2)$$

**Доказательство**

$$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

2. **Сдвиг вправо.** Сдвиг начала последовательности вправо на  $i$  позиций. Пусть  $b_n = a_{n-i}$ ,  $n \geq i$ ,  $b_n = 0$ ,  $0 \leq n \leq i-1$ , тогда

$$B(x) = x^i A(x) \quad (5.3)$$



### Доказательство

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^n = x^i \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^i A(x)$$

3. **Сдвиг влево.** Сдвиг начала последовательности влево на  $i$  позиций. Пусть последовательность чисел  $b_n$  и  $a_n$  связаны:  $b_n = a_{n+i}$ . Тогда

$$B(x) = x^{-i} (A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) \quad (5.4)$$

### Доказательство

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^n = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i} = \\ &= x^{-i} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) = x^{-i} \left( A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) \end{aligned}$$

4. **Частичная сумма.** Пусть  $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Тогда

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \quad (5.5)$$

**Доказательство** Функция  $\frac{1}{1-x}$  при  $|x| < 1$  в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Поэтому в некоторой окрестности  $x = 0$

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$$

5. **Дополнительная частичная сумма.** Пусть  $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ . Тогда

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \quad (5.6)$$

6. **1 тип изменения масштаба.** Пусть  $b_n = na_n$ . Тогда

$$B(x) = xA'(x) \quad (5.7)$$

7. **2 тип изменения масштаба.** Пусть  $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ . Тогда

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx \quad (5.8)$$

8. **Свертка.** Пусть  $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  Тогда

$$C(x) = A(x)B(x) \quad (5.9)$$

## 5.2 Задачи

**Задача 15.**  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$ . Для последовательности  $a_n = 1$  будет  $A(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Задача 16.**  $\frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, |x| < 1$  Следовательно, производящей функцией для последовательности  $a_n = \frac{1}{n+1}$  будет  $A(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$

**Задача 17.** Дана последовательность  $a_n = q^n$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.**

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

**Задача 18.** Дана последовательность  $a_n = n$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Запишем новую последовательность  $b_n = 1$  и выразим  $a_n$  через нее:  $a_n = nb_n$ . Теперь можно воспользоваться свойством ??:

$$B(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$A(x) = xB'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**Задача 19.** Дана последовательность  $b_n = n^2$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Как и в прошлом примере введем новую последовательность  $a_n = n$  и выразим через нее  $b_n$ :  $b_n = na_n$ . Снова дважды вспомним ?? используя результат предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} B(x) &= xA'(x) \\ A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ B(x) &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

**Задача 20.** Дана последовательность  $a_n = n(2^n + (-1)^n n)$ ,  $n \geq 0$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Сперва раскроем скобки:

$$a_n = 2^n n + (-1)^n n^2$$

Теперь разделим изначальную последовательность на 2 части: Первая часть будет  $b_n = 2^n n$ , а вторая  $c_n = (-1)^n n^2$ .

Тогда производящая функция  $a_n$  будет равна  $A(x) = B(x) + C(x)$ . Найдем теперь производящие функции у каждой части:

1. Введем новую последовательность  $k_n = 2^n$  и выразим  $b_n = k_n n$ . Используя свойства ?? и ?? найдем  $B(x)$  используя  $K(x)$ :

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \\ B(x) &= xK'(x) = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)'_x = \frac{2x}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

2. Для второй части тоже следует ввести новые последовательности:  $d_n = (-1)^n$  и  $m_n = (-1)^n n = d_n n$ . Выразим теперь  $c_n = m_n n$ . Будем использовать те же свойства, только больше ;)

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \\ M(x) &= xD'(x) = x\left(\frac{1}{1+x}\right)'_x = \frac{-x}{(1+x)^2} \\ C(x) &= xM'(x) = x\left(\frac{-x}{(1+x)^2}\right)'_x = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Теперь вычислим  $A(x)$ :

$$A(x) = B(x) + C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} + \frac{x^2-x}{(1+x)^3}$$

### 5.3 Линейные рекуррентные соотношения

**Утверждение 10.** *Линейным рекуррентным соотношением относительно последовательности  $a_n$  называется соотношение вида*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n \quad (5.10)$$

где  $k$  - заданное натуральное число,  $n = 1, 2, 3, \dots$

При этом должны быть заданы начальные значения  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , а также коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_k$  и последовательность  $d_n$ . Решением этого соотношения называется аналитическая формула для  $a_n$ , удовлетворяющая ему, а так же заданным начальным значениям.

Линейное рекуррентное соотношение называется **однородным** (ЛОРУ), если числа  $d_n = 0$ . В противном случае оно называется **неоднородным** (ЛНРУ). Общим решением ЛНРУ является сумма какого-то его частного решения и общего решения соответствующего ему ЛОРУ.

Используется два основных способа решения рекуррентных соотношений: метод производящих функций и метод характеристического уравнения. Второй способ оказывается проще и короче, так как избавляет от больших вычислений.

#### Задача Фибоначчи и рекуррентное соотношение для нее.

Первой известной задачей, приведшей к рекуррентному соотношению, является задача Фибоначчи о кроликах. Ставится она следующим образом. Пусть в начальный момент была одна пара только что родившихся кроликов. Предполагается, что такая пара достигнет зрелости через месяц и еще через месяц она даст потомство в виде новой пары разнополых кроликов. Задача состоит в определении числа пар кроликов по прошествии  $n$  месяцев.

Пусть в  $n$ -ый месяц имеется  $M$  молодых пар и  $N$  зрелых пар кроликов. Тогда в  $n + 1$ -ый месяц будет  $N$  молодых пар и  $M + N$  зрелых пар, а в  $n + 2$ -ой месяц будет  $M + N$  молодых пар и  $M + 2N$  зрелых пар.

Таким образом, общее число пар кроликов в  $n$ -ый месяц равно  $M + N$ , в  $n + 1$ -ый месяц равно  $M + 2N$  а в  $n + 2$ -ой месяц равно  $2M + 3N$ . Обозначим число пар кроликов в  $n$ -ый месяц через  $a_n$ . Тогда приходим к следующему выводу:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (5.11)$$

Это и есть **рекуррентное соотношение для задачи Фибоначчи**. Начальными условиями для него будут следующие:  $a_0 = a_1 = 1$ .

## 5.4 Метод решения линейные рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n, n \geq 0$$

с заданными начальными условиями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

Введем для неизвестной последовательности  $a_n$  производящую функцию  $A(x)$ , а для заданной последовательности  $d_n$  - производящую функцию  $D(x)$ . Определим теперь производящие функции для левой и правой частей рассматриваемого рекуррентного соотношения, используя свойства ?? и ?? производящей функции.

Тогда для левой части получим производящую функцию

$$x^{-k} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \right)$$

Для правой же части рекуррентного соотношения производящая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1 x^{-k+1} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i \right) + c_2 x^{-k+2} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i \right) + \\ + c_{k-1} x^{-1} (A(x) - a_0) + c_k A(x) + D(x) \end{aligned}$$

Приравнивая эти две производящие функции и умножая их на  $x_k$ , получим

$$A(x)(1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_kx^k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i - c_1x \sum_{i=0}^{k-3} a_ix^i - \dots - c_{k-1}x^{k-1}a_0 + x^kD(x)$$

Это равенство можно записать как

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^kD(x)}{1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_kx^k} \quad (5.12)$$

где  $P_{k-1}(x)$  - многочлен степени  $\leq k-1$ , имеющий вид

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i - c_1x \sum_{i=0}^{k-2} a_ix^i - c_2x^2 \sum_{i=0}^{k-3} a_ix^i - \dots - c_{k-1}x^{k-1}a_0 \quad (5.13)$$

Этот многочлен полностью определяется заданными начальными значениями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

Для решения рассматриваемого рекуррентного соотношения нужно сначала разложить многочлен  $1 - c_1x - c_2x^2 - \dots - c_kx^k$  на множители, определив его корни. Затем надо представить полученное выше выражение для  $A(x)$  в виде суммы простых дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Далее нужно разложить эти простые дроби в ряд Маклорена.

Полученные в результате коэффициенты  $a_n$  разложения  $A(x)$  в ряд Маклорена и будут являться искомым решением рекуррентного соотношения.

## 5.5 Задачи

Чтобы было проще решать подобные задачи, можно вывести определенный алгоритм решения методом производящих функций:

1. Определить  $k, d_n, c_i$
2. Если  $d_n \neq 0$  вычислить  $D(x)$
3. Вычислить  $P_{k-1}$  по ??

4. Определить и разложить на простые дроби  $A(x)$
5. Найти коэффициенты
6. Подставить в  $A(x)$
7. Исходя из того, что  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  найти  $a_n$

А также метод характеристического многочлена:

1. Выписать характеристическое многочлен
2. Найти корни характеристического многочлена
3. Вычислить, согласно полученным корням, общее решение однородного РУ
4. Вычислить частное решение неоднородного РУ
5. Вычислить общее решение ЛНРУ как сумму соответствующего однородного РУ и частного решения неоднородного РУ

**Задача 21.** Рассмотрим рекуррентное соотношение задачи Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$$

**Решение.** Для него имеем:

$$k = 2, d_n = 0, D(x) = 0, c_1 = c_2 = 1$$

Учитывая, что  $k = 2$ , используем ??, чтобы найти  $P_1(x)$ . Далее подставляем значения выше:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - c_1 x a_0 = 1$$

Используя ?? находим:

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})}$$

где  $x_1, x_2$  - корни квадратного уравнения трехчлена  $1 - x - x^2$ :

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Представим  $A(x)$  в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})} = \frac{C}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{D}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Умножим это равенство на общий знаменатель. Тогда получим:

$$1 = C(1 - \frac{x}{x_2}) + D(1 - \frac{x}{x_1})$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при  $x^1$  и  $x^0$ , приходим к двум линейным уравнениям относительно  $C$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} 1 &= C + D - x \left( \frac{C}{x_2} + \frac{D}{x_1} \right) \\ 0 &= -\frac{C}{x_2} - \frac{D}{x_1} \\ 1 &= C + D \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$C = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}, D = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Разлагая  $A(x)$  в ряд Маклорена, получаем

$$A(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{x_1} \right)^n + D \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{x_2} \right)^n = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x_1}{x_2^n} - \frac{x_2}{x_1^n} \right) x^n$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \sqrt{5} \\ \frac{1}{x_1} &= -x_2 \\ \frac{1}{x_1} &= -x_1 1 \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая определение производящей функции  $A(x)$ , находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) x^n$$



Отсюда окончательно получаем:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

**Задача 22.** Найти общее решение рекуррентного соотношения задачи Фибоначчи характеристическим многочленом:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

**Решение.** Будем искать решение в виде  $u_n = q^n$ :

$$\begin{aligned} q^{n+2} &= q^{n+1} + q^n \\ q^2 - q - 1 &= 0 \\ q_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$u_{\text{общ}} = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (5.14)$$

**Задача 23.**

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^n n, a_0 = 3, a_1 = 1$$

**Решение.** Здесь,

$$k = 2, c_1 = 2, c_2 = -1, d_n = 2^n n$$

Сначала найдем производящую функцию  $D(x)$  для  $d_n$ . Производящая функция для последовательности  $2^n$  равна  $\frac{1}{1-2x}$ . Применяя свойство ??, находим

$$D(x) = x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-2x} \right) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Определим теперь многочлен  $P_{k-1}(x) = P_1(x)$ , входящий в формулу для производящей функции  $A(x)$  последовательности  $a_n$ , используя ??:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - 2xa_0 = 3 - 5x$$

В результате, формула для  $A(x)$  приобретает вид

$$A(x) = \frac{3 - 5x + \frac{2x^3}{(1-2x)^2}}{1 - 2x + x^2} = \frac{(3 - 5x)(1 - 2x)^2 + 2x^3}{(1 - 2x)^2(1 - x)^2}$$

Числитель последней дроби имеет корень 1 и, значит, делится на  $1 - x$ . Сокращая в этой дроби числитель и знаменатель на  $1 - x$ , находим

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)}$$

Разложим  $A(x)$  на простые дроби:

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)} = \frac{C_1}{(1 - 2x)^2} + \frac{C_2}{1 - 2x} + \frac{C_3}{1 - x}$$

где  $C_i$  - постоянные. Умножая данное равенство на общий знаменатель, получаем

$$3 - 14x + 18x^2 = C_1(1 - x) + C_2(1 - 2x)(1 - x) + C_3(1 - 2x)^2$$

Приравнивая коэффициенты при  $x^2, x^1, x^0$ , приходим к системе уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\begin{aligned} 18 &= 2C_2 + 4C_3 \\ -14 &= -C_1 - 3C_2 - 4C_3 \\ 3 &= C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1 = 1, C_2 = -5, C_3 = 7$$

Разлагая простые дроби в выражении для  $A(x)$  в ряд Маклорена, используя ??, получаем

$$A(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2x)^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + C_3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Следовательно, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n-4)2^n + 7] x^n$$

**Задача 24.** Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 1 - 4^n$$

**Решение.** Ищем однородное:

$$\begin{aligned} a_n &= q^n \\ q^3 - 3q^2 + 3q - 1 &= 0 \\ (q - 1)^3 &= (q - 1)^3 = 0 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

Кратность равна  $k = 3$ . Тогда,

$$U_{\text{одн}} = P(k - 1)q^n = (A + Bn + Cn^2)1^n$$

Теперь найдем правую часть для 1:

$$\begin{aligned} d_n &= 1 \cdot 1^n \\ U_{\text{част } 1} &= An^3 1^n \\ A(n + 3)^3 - 3A(n + 2)^3 + 3A(n + 1)^3 - An^3 &= 1 \\ 3^3 A - 3A \cdot 2^3 + 3A &= 1 \\ A(27 - 24 + 3) &= 1 \\ 6A &= 1 \\ A &= \frac{1}{6} \\ U_{\text{част } 1} &= \frac{n^3}{6} \end{aligned}$$

Далее для  $4^n$ :

$$\begin{aligned} d_n &= -4^n = (-1)4^n \\ U_{\text{част } 2} &= A \cdot 4^n \\ A \cdot 4^{n+3} - 3A \cdot 4^{n+2} + 3A \cdot 4^{n+1} - A \cdot 4^n &= -4^n \\ A \cdot 4^3 - 3A \cdot 4^2 + 12A - A &= -1 \\ 27A &= -1 \\ A &= \frac{-1}{27} \\ U_{\text{част } 2} &= \frac{-4^n}{27} \end{aligned}$$

Итог:

$$U_{\text{общ}} = U_{\text{одн}} + U_{\text{част } 1} + U_{\text{част } 2}$$
$$U_{\text{общ}} = A + Bn + Cn^2 + \frac{n^3}{6} - \frac{4^n}{27}$$

**Задача 25.** Решить рекуррентное соотношение:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = (-2)^n n$$

если  $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2$

**Решение.** Ищем решение для однородного характеристического уравнения.

$$q^2 + q - 2 = 0$$

$$q_1 = -2$$

$$q_2 = 1$$

$$a_n = 1^n C_1 + (-2)^n C_2$$

Нахождение частного решения:

$$a_n = (-2)^n (C_3 + C_4)n$$

$$(-2)^{n+2}(C_3(n+2) + C_4)(n+2) + (-2)^{n+1}(C_3(n+1) + C_4)(n+1) -$$
$$- 2 \cdot (-2)^n (C_3n + C_4)n = (-2)^n n$$

$$4(C_3(n+2) + C_4)(n+2) - 2(C_3(n+1) + C_4)(n+1) - 2(C_3n + C_4)n = n$$

$$12nC_3 + 14C_3 - n + 6C_4 = 0$$

$$n(12C_3 - 1) + 14C_3 - 6C_4 = 0$$

$$\begin{cases} 12C_3 - 1 = 0 \\ 14C_3 - 6C_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_n = (-2)^n \left( \frac{n}{12} - \frac{7}{36} \right) n$$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n^{\text{част}} + a_n^{\text{однор}} \\
a_n &= C_1 + (-2)^n C_2 + (-2)^n \left( \frac{n}{12} - \frac{7}{36} \right) n \\
\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 - 2C_2 - 2 \left( \frac{1}{12} - \frac{7}{36} \right) \end{cases} \\
\begin{cases} C_1 = \frac{34}{27} \\ C_2 = \frac{-7}{27} \end{cases} \\
a_n &= \frac{34}{27} + (-2)^n - \frac{7}{27} + (-2)^n \left( \frac{n}{12} - \frac{7}{36} n \right)
\end{aligned}$$

**Задача 26.** Решить рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n &= (-2)^4 n \\
\text{если } a_0 &= 1, a_1 = 1
\end{aligned}$$

**Решение.** 1) Ищем решение для однородного уравнения:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n &= 0 \\
k^2 + 5k + 6 &= 0 \\
k = -3, k &= -2
\end{aligned}$$

$$a_n = (-3)^n C_1 - (-2)^n C_2$$

2) Ищем частное решение:

$$a_n = (-2)^n (C_3 n + C_4) n$$

$$\begin{aligned}
(-2)^{n+2} (C_3(n+2) + C_4)(n+2) + 5(-2)^{n+1} (C_3(n+1) + C_4)(n+1) + \\
+ 6(-2)^n (C_3 n + C_4) n = 2^n n
\end{aligned}$$

$$4(nC_3 + 2C_3 + C_4)(n+2) - 10(C_3n + C_3 + C_4)(n+1) + 6n(C_3n + C_4) = n$$

$$\begin{cases} 8C_3 + 8C_3 + 4C_4 - 10C_3 - 10C_3 - 10C_4 + 6C_4 = 1 \\ 16C_3 + 8C_4 - 10C_3 - 10C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4C_3 = 1 \\ 6C_3 - 2C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3 = -\frac{1}{4} \\ C_4 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a_n^{\text{факт}} = (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

3)

$$a_n = (-3)^n C_1 + (-2)^n C_2 + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

$$\begin{cases} a_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ a_1 = -3C_1 - 2C_2 + 2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = (-3)^n + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

Ответ:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \inf \left[ (-3)^n + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n \right] x^n$$

# Глава 6

## Теория графов

### 6.1 Основные определения

Пусть  $M$  и  $N$  - два конечных множества. Будем называть пару множеств  $\langle M, N \rangle$  **ориентированным графом**. При этом элементы множества  $M$  называются **вершинами** графа, элементы множества  $N$  - **дугами** графа. Граф, у которого направления соединения не определены, называется **неориентированным графом**. В них соединения называются **ребром**, а вершина - **узлом**.

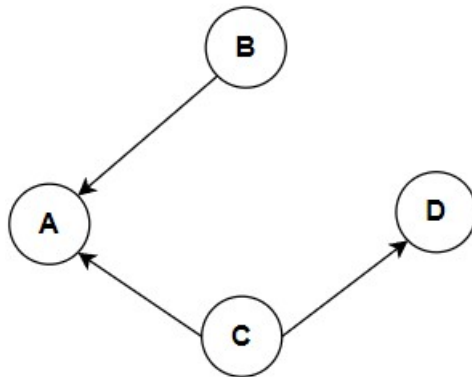


Рис. 6.1: Ориентированный граф

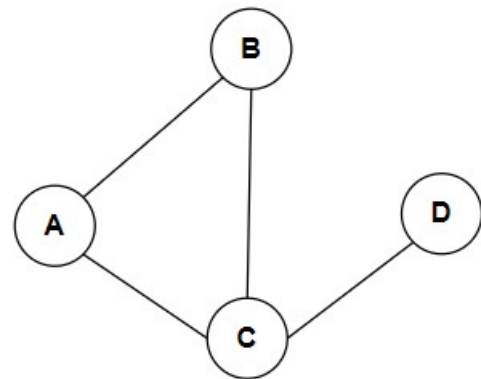


Рис. 6.2: Неориентированный граф

**Висячей вершиной** называется вершина, которая соединена только с одной соседней вершиной.

**Степенью вершины** называется количество ребер, соединенных с этой вершиной. Если степень вершины равна 0, то такая вершина называется **изолированной**. Степень вершины может быть **входящей** и **исходящей**. Входящая степень вершины  $v$  это количество ребер вида  $\langle i, v \rangle$ , то есть количество ребер которые входят в  $v$ . Исходящая степень вершины  $v$  это количество ребер вида  $\langle v, i \rangle$ , то есть количество ребер которые входят из  $v$ .

**Теорема 11.** *В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.*

Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется **петлей**.

Граф  $\langle M', N' \rangle$  называется **простым путем**, если

1. число его дуг  $k$  на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать  $M'$  числами от 0 до  $k$  и  $N'$  числами от 1 до  $k$ , что для любой дуги  $u \in N'$

Пусть  $num$  - это получение номера дуги или вершины, а  $beg(u)$  и  $end(u)$  начало и конец дуги  $u$  соответственно. Тогда для любой дуги  $u$  в графе верно выражение:

$$num(u) = num(end(u)) = num(beg(u)) + 1 \quad (6.1)$$

Различие между **путем** и **простым путем** заключается в том, что во втором случае недопустимы повторы вершин и дуг в пути.

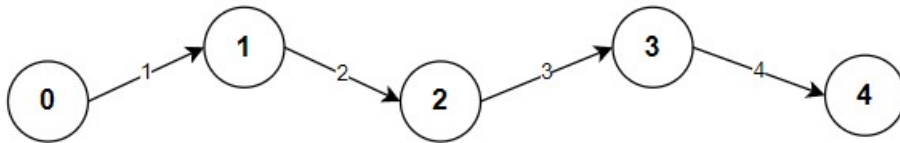


Рис. 6.3: Простой путь

Граф  $\langle M', N' \rangle$  называется **цепью**, если:

1. число его дуг  $k$  на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать  $M'$  числами от 0 до  $k$  и  $N'$  числами от 1 до  $k$ , что для любой дуги  $u \in N'$



То есть, он включает либо условие простого пути ??, либо

$$num(u) = num(end(u)) + 1 = num(beg(u)) \quad (6.2)$$

Дуги, для которых выполняется ??, принято называть **положительно ориентированными**, а те, для которых выполняется ?? **отрицательно ориентированными**.

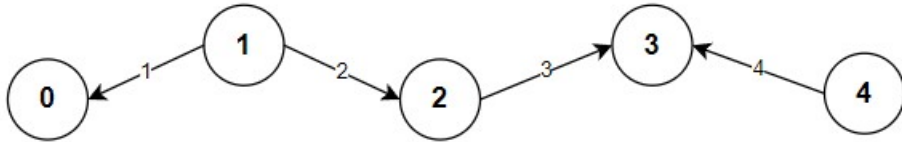


Рис. 6.4: Цепь

Граф  $\langle M', N' \rangle$  называется **контуром**, если

1. число дуг  $k$  равно числу вершин
2. можно так пронумеровать  $M'$  и  $N'$  числами от 1 до  $k$ , что для любой дуги  $u \in N'$

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) \equiv^k num(beg(u)) + 1 \quad (6.3)$$

Иными словами, контур - это простой путь, где начало и конец совпадают.

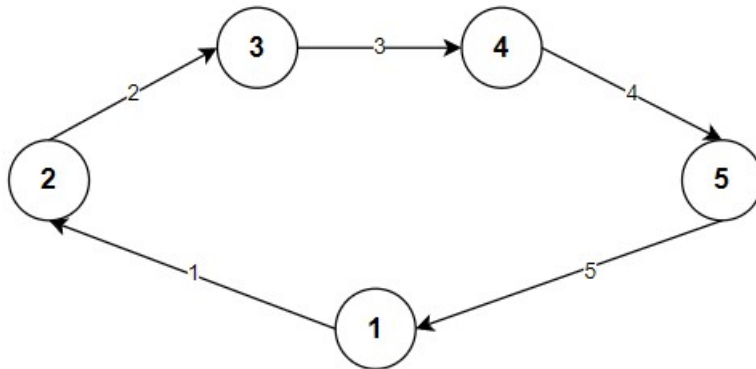


Рис. 6.5: Контур

Граф  $\langle M', N' \rangle$  называется **циклом**, если

1. число дуг  $k$  равно числу вершин
2. можно так пронумеровать  $M'$  и  $N'$  числами от 1 до  $k$ , что для любой дуги  $u \in N'$

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) \equiv^k num(beg(u)) + 1 \quad (6.4)$$

либо

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) + 1 \equiv^k num(beg(u)) \quad (6.5)$$

Цикл - это цепь, в которой начало и конец совпадают.

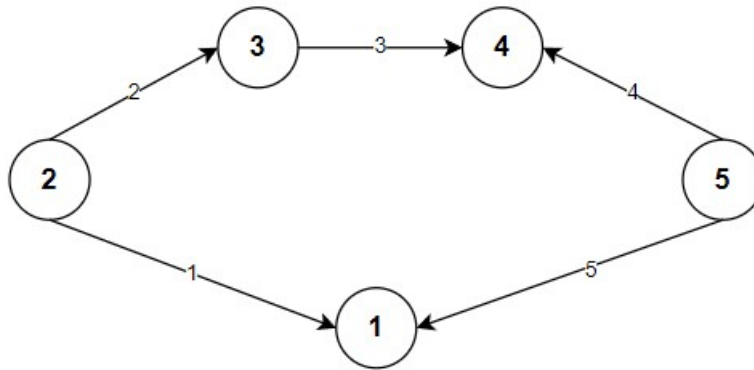


Рис. 6.6: Цикл

## 6.2 Связность. Компоненты связности и сильной связности

Граф  $\langle M, N \rangle$  называется **связным**, если любые две различные его вершины можно соединить цепью. Любой граф может быть однозначно разделен на максимальные связные подграфы, которые называют его **компонентами связности**.

Граф  $\langle M, N \rangle$  называется **сильно связным**, если любые две различные вершины  $A$  и  $B$  можно соединить путем с началом в  $A$  и концом в  $B$ . В любом графе можно однозначно выделить максимальные сильно связные подграфы, которые называются его **компонентами сильной связности**.

**Теорема 12.** *Граф компонент сильной связности не имеет контуров.*

## 6.3 Матричные представления графов

Прежде чем приступить к понятию "дерево изучим различные способы представления графов. Наиболее известные формы это **матрица инцидентий** и **матрица смежности**. Для начала рассмотрим более простой вариант - матрицу смежности.

**Матрицей смежности** графа  $\langle M, N \rangle$  называется такая квадратная матрица  $M \times M$  (то есть индексами строк и столбцов являются вершины графа), в которой значением пересечения  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца является число дуг с началом в  $i$  и концом  $j$ .

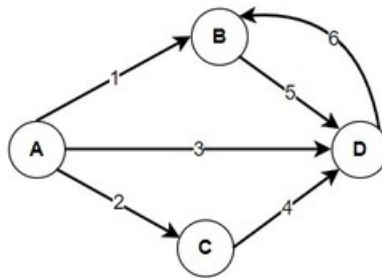


Рис. 6.7: Граф

	1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0
B	-1	0	0	0	1	-1
C	0	-1	0	1	0	0
D	0	0	-1	-1	-1	1

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	1	0	0

Рис. 6.8: Способы матричного представления графа ???: матрица инцидентий и матрица смежности соответственно

**Матрицей инцидентий** графа  $\langle M, N \rangle$  называется такая матрица  $M \times N$ , где индексами строк являются вершины, а индексами столбцов дуги. Элемент на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца равен 1, если является началом в вершине под  $i$ -ым индексом и принадлежит дуге под  $j$ -ым индексом. Если же данная дуга имеет конец в этой вершине, то ставится -1.

## 6.4 Деревья

Чтобы ввести термин "дерево" нам нужно изучить следующую теорему:

**Теорема 13.** В связном графе  $\langle M, N \rangle$  найдется частичный граф связный граф  $\langle M, N' \rangle$ , в котором количество вершин больше количества дуг на единицу. Пусть  $|N'| = k$ , тогда если пронумеровать вершины из  $M$  числами от 0 до  $k$ , а дуги из  $N'$  числами от 1 до  $k$  таким образом, что для любой дуги  $u \in N'$  выполняется соотношение

$$num(u) = \max\{num(beg(u)), num(end(u))\} \quad (6.6)$$

**Следствие 13.1.** Если  $|N| < |M| - 1$ , граф не может быть связным.

**Следствие 13.2.** Если  $|N| > |M| - 1$ , граф содержит циклы.

Связный граф, в котором число дуг на 1 меньше числа вершин, называется **деревом**. Такие деревья могут не иметь корня, в отличие от тех деревьев, которые мы обычно представляем. Если подобное дерево имеет корень, то оно называется **ориентированным деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется его **остовным деревом** (spanning tree).

Теперь можно присутствовать к изучению алгоритма нахождения остовного дерева методом вычеркивания.

## 6.5 Алгоритмы нахождения остовного дерева

**Алгоритм ближайшего соседа**

1. В весовой матрице выбираем произвольную вершину.
2. Ищем в этой весовой вершине минимальную дугу в другую вершину.
3. Ищем среди этих вершин снова минимальную дугу уже в новую вершину.
4. Продолжаем до тех пор, пока не пометим все вершины.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	$\infty$	4	6	$\infty$
B	5	0	$\infty$	7	5	4
C	$\infty$	$\infty$	0	5	6	4
D	4	7	5	0	8	3
E	6	5	6	8	0	$\infty$
F	$\infty$	4	4	3	$\infty$	0

Таблица 6.1: Весовая матрица

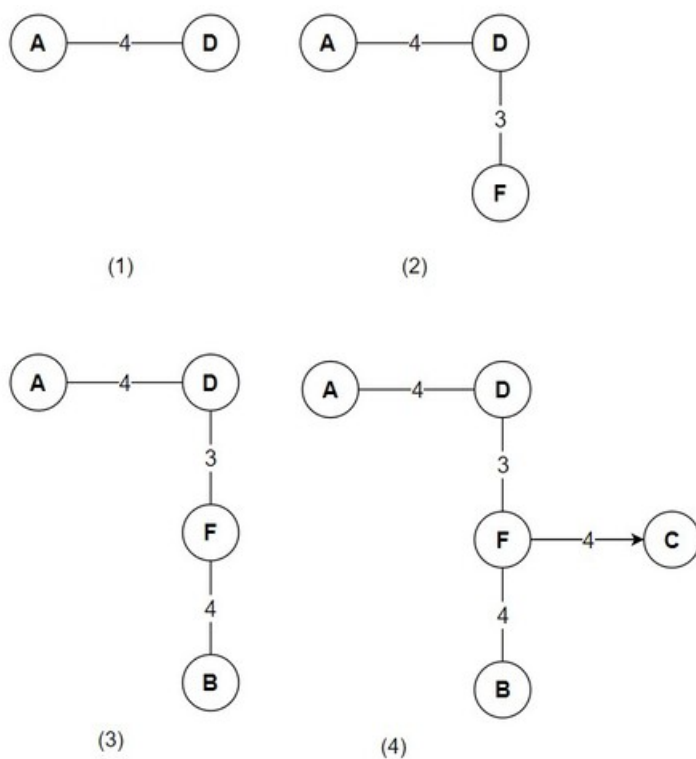


Рис. 6.9: Алгоритм ближайшего соседа

Приведем пример. Пусть есть следующая весовая матрица:  
На рисунке ?? изображен алгоритм построения остовного дерева для весовой матрицы выше. Пусть произвольная вершина будет А. Минимальное ребро идет в вершину D. Далее выбираем среди этих двух вершин минимальное ребро, и это D -> F. По такому же алгоритму достраиваем

остовное дерево.

### Жадный алгоритм

Этот алгоритм основан по большей части на том, что каждый раз мы выбираем минимальное ребро на каждом этапе, а далее объединяем полученные ребра в остовное дерево. Для той же весовой матрицы покажем: На рисунке ?? изображено построение остовного дерева с помощью жадного алгоритма.

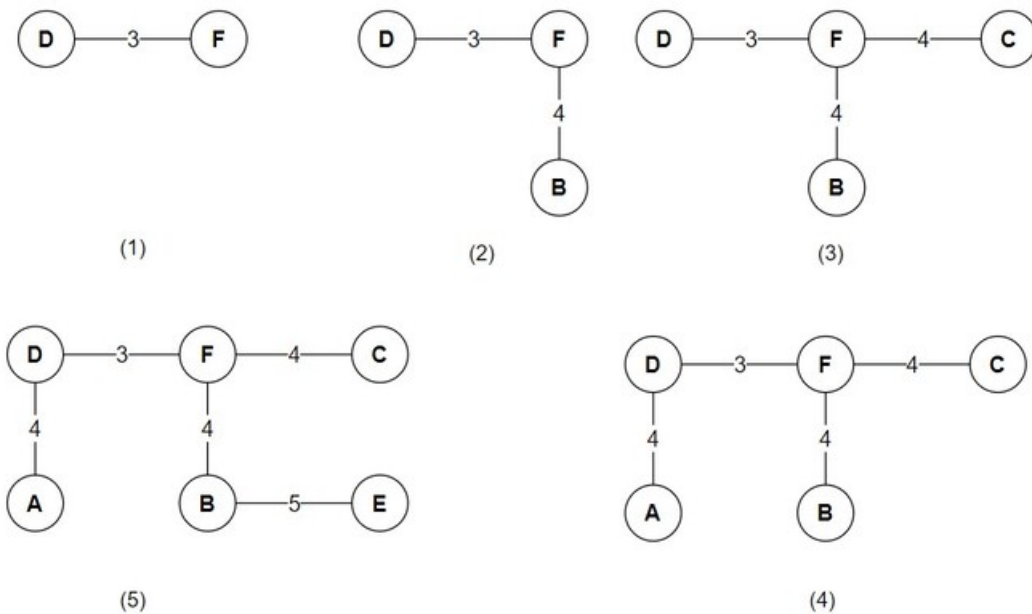


Рис. 6.10: Жадный алгоритм

Самое минимальное ребро равно 3 с вершинами D и F. Далее мы имеем 3 равнозначенных ребра равных 4: F и B, F и C, D и A. Строим последовательно их. Не хватает последнего ребра E. Можно заметить, что самое минимальное ребро с этой вершиной из B. Остовное дерево построено.

### Алгоритм вычеркивания

1. В матрице инцидентности  $N \times N - 1$  проверяем наличие нулевых строк. Если есть, то имеем неостовное дерево.

2. Если нет, то проверяем наличие строк с одной единицей и вычеркиваем строку и столбец, проходящие через эту единицу
3. Повторяем пункт 1 и 2 до тех пор, пока не придем к выводу, что это неостовное дерево или если все столбцы вычеркнуты, то рассмотренные ребра образуют остовное дерево

Рассмотрим пример. Имеем следующую матрицу инцидентности:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Таблица 6.2: Матрица инцидентностей

Теперь проверим, являются ли ребра 1, 2, 5, 7 и 8 остовным деревом:

1	2	5	7	8
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

1	2	5	7	8
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

1	2	5	7	8
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

1	2	5	7	8
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

1	2	5	7	8
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

Рис. 6.11: Алгоритм вычеркивания

Так как в процессе у нас не возникло нулевых строк и в итоге все строки и столбцы были зачеркнуты, данные ребра образуют остовное дерево. Например, ребра 1, 2, 4, 5 и 8 не будут образовывать остовное дерево, так как 5 строчка будет состоять только из нулей.

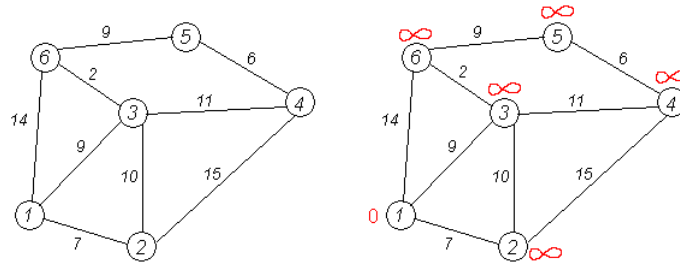
## 6.6 Задача о кратчайшем пути

Для того чтобы найти кратчайший путь от одной вершины до других, используется алгоритм Дейкстры. Алгоритм работает только для графов

без рёбер отрицательного веса.

Алгоритм заключается в том, что каждой вершине соответствует минимальное известное расстояние от этой вершины до **a**. Метка вершины **a**, от которой ищутся кратчайшие расстояния до других, изначально равна 0, метки остальных вершин равны бесконечности. Алгоритм работает пошагово - на каждом шаге он посещает одну вершину и пытается уменьшать метки: из еще непосещенных вершин выбирается та, которая имеет минимальную метку. Для каждого непосещенного соседа вершины, рассмотрим новую длину пути, равную сумме значений текущей метки и длины ребра, соединяющего ее с этим соседом. Если все вершины посещены, то работа алгоритма прекращается. Рассмотрим теперь пример:

Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



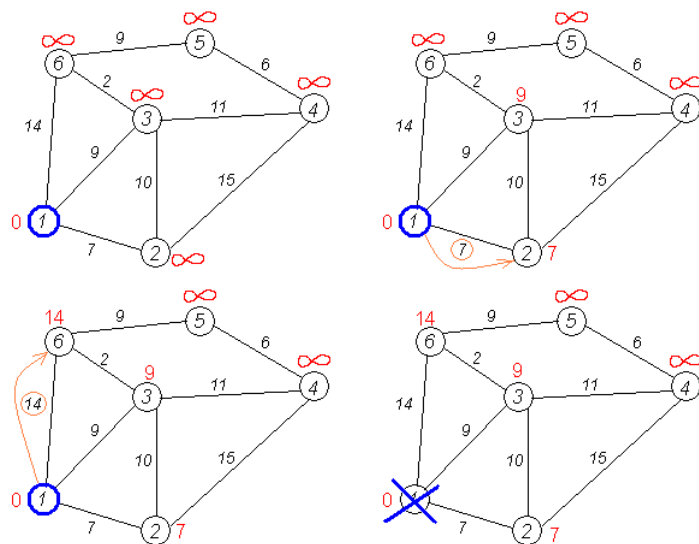
Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (рёбра графа). В кружках обозначены номера вершин, над рёбрами обозначен их вес — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.

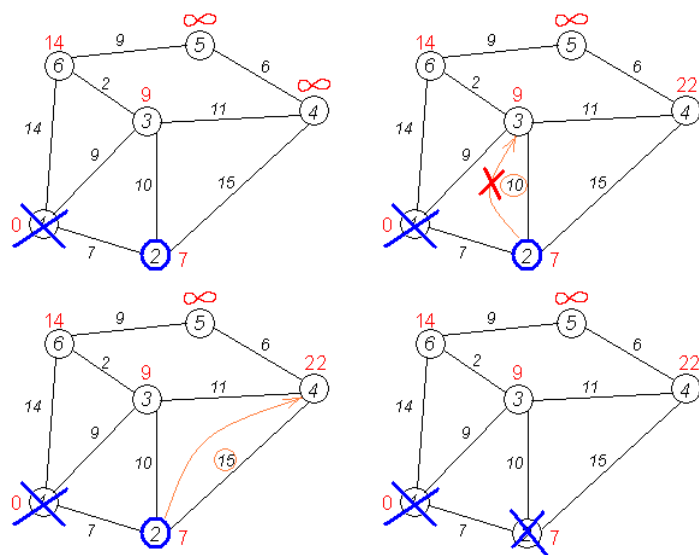
Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме значения метки вершины 1 и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть  $0 + 7 = 7$ . Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7. Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.





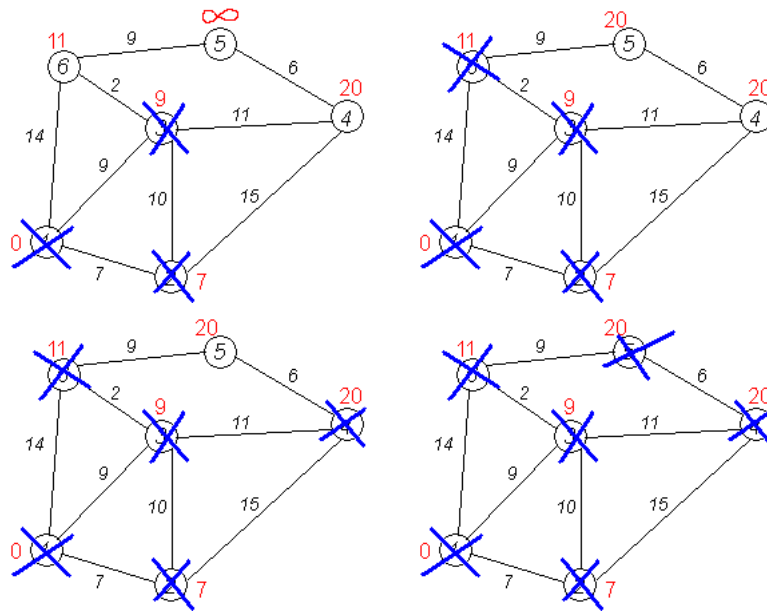
Снова находим «ближайшую» из непосещённых вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаемся пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4. Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем. Следующий

сосед — вершина 3, так как имеет минимальную метку. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 ( $7 + 10 = 17$ ). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а это меньше 17, поэтому метка не меняется. Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 ( $7 + 15 = 22$ ). Поскольку  $22 < \infty$ , устанавливаем метку вершины 4 равной 22. Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещённую.

Проводим аналогичные шаги с другими вершинами и получаем в результате:



Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины посещены. Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11. Если в какой-то момент все непосещённые вершины помечены бесконечностью, то это значит, что до этих вершин нельзя добраться (то есть граф несвязный). Тогда алгоритм может быть завершён досрочно.

# Литература

1. Дискретный анализ. Романовский И.В.
2. Дискретная математика и комбинаторика. Джеймс А. Андерсон
3. Дискретная математика. Часть 1: Начальные понятия теории множеств и отношений, математическая логика. Некрасова М.Г.