

Конспект по дискретной математике
На основе лекций Рабиновича.А.С

Рустамова Дарина

2022

Оглавление

1	Теория множеств	3
1.1	Основные понятия	3
1.2	Операции над множествами	4
1.3	Законы теории множеств	5
2	Элементы математической логики	7
2.1	Основные понятия и операции	7
2.2	Многочлен Жегалкина	9
2.3	Задачи	9
3	Отношения	11
3.1	Основные понятия	11
3.2	Правила вывода клауз	12
3.3	Задачи	13
4	Комбинаторика	15
4.1	Размещения	15
4.2	Сочетания	16
4.3	Задачи	19
5	Производящие функции	21
5.1	Производящие функции и их основные свойства	21
5.2	Задачи	23
5.3	Линейные рекуррентные соотношения	25
5.4	Метод решения линейные рекуррентных соотношений с по- мощью производящих функций	26
5.5	Задачи	27

6	Теория графов	31
6.1	Основные определения	31

Глава 1

Теория множеств

1.1 Основные понятия

Множество - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.

Мощность множества: $|A|$

Если между двумя множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \quad (1.1)$$

Теорема Кантора. Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.

Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.

Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из n элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \quad (1.2)$$

где $|A_n|$ - мощность множества подмножеств множества из n элементов
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \quad (1.3)$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-2}| = \dots = 2^n|A_0| = 2^n \quad (1.4)$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из n элементов содержащих k элементов? Отвечаю. C_n^k - число подмножеств из k элементов.

Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (1.5)$$

1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединение

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \quad (1.6)$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \quad (1.7)$$

Дополнение

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \quad (1.8)$$

Вычитание

$$A \setminus B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \quad (1.9)$$

Сумма

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad (1.10)$$

1.3 Законы теории множеств

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.11)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.12)$$

2. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (1.13)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (1.14)$$

3. Закон идентичности

$$A \cup A = A \quad (1.15)$$

$$A \cap A = \emptyset \quad (1.16)$$

4. Закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.17)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.18)$$

5. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (1.19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (1.20)$$

6. Закон де-Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.21)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.22)$$

7. Закон нуля и единицы

$$0 = \emptyset \quad (1.23)$$

$$1 = \mathbb{U} \quad (1.24)$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (1.25)$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \quad (1.26)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad (1.27)$$

Пример некоторых доказательств.

Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \quad (1.28)$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \quad (1.29)$$

Закон скелливания

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \quad (1.31)$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap B_n) \quad (1.32)$$

Формула включения и исключения

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.33)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.34)$$

Доказательства оставляю читателю :)

Задача 1. Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

Решение. Возьмем A_3 - числа, делящиеся на 3, A_5 - числа, делящиеся на 5, A_7 - числа, делящиеся на 7.

При этом, $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$, $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$, $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$ $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$, $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$, $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$, $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ: $1000 - 543 = 457$

Глава 2

Элементы математической ЛОГИКИ

2.1 Основные понятия и операции

Пусть A - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \rightarrow a \vee b \quad (2.2)$$

$$A \cap B \rightarrow a \wedge b \quad (2.3)$$

$$\overline{A} \rightarrow \bar{a} \quad (2.4)$$

$$A - B \rightarrow a - b = a \wedge \bar{b} \quad (2.5)$$

$$A + b \rightarrow a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a}) \quad (2.6)$$

Дистрибутивность

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (2.7)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (2.8)$$

Поглощение

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (2.9)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (2.10)$$

Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.11)$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.12)$$

Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a \quad (2.13)$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a \quad (2.14)$$

Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.15)$$

2. Штрих Шеффера:

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.16)$$

3. Импликация:

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee b \quad (2.17)$$

4. Эквивалентность:

$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})} \quad (2.18)$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(0, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(1, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge f(1, 1, \dots, 1)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Совершенная конъюнктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(1, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(0, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \vee f(0, 0, \dots, 0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\bar{a} = 1 + a \quad (2.21)$$

$$a \wedge b = ab \quad (2.22)$$

$$a \vee b = a + b + ab \quad (2.23)$$

$$a + a = 0 \quad (2.24)$$

$$a - b = a \wedge \bar{b} = a(1 + b) = a + ab \quad (2.25)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.26)$$

$$a + b = b + a \quad (2.27)$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} = (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \quad (2.28)$$

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab \quad (2.29)$$

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + a(1 + b) = 1 + a + ab \quad (2.30)$$

$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \quad (2.31)$$

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ) Получается из СДНФ заменой \vee на $+$, $\bar{x} = 1 + x$ и $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1 + a)(1 + b)f(0, 0) + a(1 + b)f(1, 0) + (1 + a)bf(0, 1) + abf(1, 1) \quad (2.32)$$

2.3 Задачи

Задача 2. Проверить $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab$$

$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$

$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

Задача 3. Доказать $a \rightarrow (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \rightarrow (b \wedge c) = \bar{a} \vee (\overline{\overline{b \wedge c}}) = \bar{a} \vee \overline{\bar{b} \mid c} = a \mid (b \mid c)$$

Задача 4. Доказать $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

Решение.

$$\begin{aligned} a \downarrow (1 + (b - a) + b) &= a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) = \\ &= (1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \bar{a}ab = 0 \end{aligned}$$

Глава 3

Отношения

3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
$=$	\sim
\wedge	$,$
\vee	$;$
\Rightarrow	\rightarrow

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; \dots; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \quad (3.1)$$

Противоречие

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Отношения эквивалентности

- Рефлексивность

$$A \sim A \quad (3.3)$$

- Симметричность

$$A \sim B \rightarrow B \sim A \quad (3.4)$$

- Транзитивность

$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \quad (3.5)$$

Отношения порядка

- Рефлексивность

$$A \rightarrow A \quad (3.6)$$

- Антисимметричность

$$A \Rightarrow B, \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (3.7)$$

- Транзитивность

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{ то } A \Rightarrow C \quad (3.8)$$

3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \bar{A}; B \quad (3.9)$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} & P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow C \\ & P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C \\ & \overline{P_1, P_2, \dots, P_n} \vee C \\ & \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_n \vee C \\ & \overline{\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow (\bar{P}_n; C) \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow \bar{P}_n; C \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1.

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \quad (3.11)$$

Используем формулу 3.9, чтобы доказать

$$\begin{aligned} & A, \bar{A}; B \Rightarrow B \\ & \emptyset; B \Rightarrow B \end{aligned}$$

2.

$$A \Rightarrow B \rightarrow A \quad (3.12)$$

Так же заменяем $B \rightarrow A$ формулой 3.9, а далее используем 3.10, то есть из последнего получаем первое выражение

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \overline{B}; A \\ A, B &\Rightarrow A \end{aligned}$$

3.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \quad (3.13)$$

Используя предыдущую формулу 3.12 переносим A налево

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно 3.11 и снова используем эту же формулу.

$$\begin{aligned} B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Доказано!

3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

Задача 5.

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)) \\ A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C &\Rightarrow B \vee D \\ (A, A \rightarrow B) \vee (C, C \rightarrow D) &\Rightarrow B \vee D \end{aligned}$$

Задача 6.

$$\begin{aligned} A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C &\Rightarrow C \\ A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ (A, A \rightarrow C); (B, B \rightarrow C) &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Задача 7.

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \bar{A} &\Rightarrow C \\ (A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Rightarrow A; C \\ A \vee C &\Rightarrow A; C\end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned}(A \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (\bar{A} \vee C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ \overline{(\bar{A} \vee C)} \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ A \vee B &\Rightarrow A \vee B\end{aligned}$$

Глава 4

Комбинаторика

4.1 Размещения

Утверждение 1. *Размещения без повторений - это упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов, если $k \leq n$.*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4.1)$$

Предположим, у нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

Утверждение 2. *Размещения с повторениями - это упорядоченный набор из k элементов из некоторого множества различных n элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \quad (4.2)$$

Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество $\{1, 2, 3\}$. Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2\}, \dots, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

Замечание. Если бы k был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как $\{1, 1, 2\}$. То есть повторяться числа могут сколько угодно.

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам поможет **сочетания**.

4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

Утверждение 3. Сочетания без повторений - это способ выбрать k из n различных предметов без учета порядка.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.3)$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлекуемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.

Утверждение 4. Бином Ньютона - это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} C_n^k \quad (4.4)$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты, n - неотрицательное целое число.

Например,

$$(x + y)^2 = x^0 y^2 + x^1 y^1 C_2^1 + x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (4.5)$$

$$(x + y)^3 = x^0 y^3 + x^1 y^2 C_3^1 + x^2 y^1 C_3^2 + x^3 y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + y^3 \quad (4.6)$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

Утверждение 5. Треугольник Паскаля - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & C_0^0 & & & \\ & & & & & C_1^1 & & \\ & & & C_1^0 & & C_2^2 & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_3^3 & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_4^4 \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & \end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом n в бинOME Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.

Таким образом, коэффициенты из формулы 4.5 можно вывести используя треугольник Паскаля.

Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

Следствие 5.1. *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (4.7)$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниях повторение элементов? Возьмем все то же множество $\{1, 2, 3\}$ и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 3\} \quad (4.8)$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.

У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категориям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

$$\begin{array}{l} 2 \ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \\ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \ 10 \\ 2 \ 2 \ 2 \mid \mid 10 \ 10 \end{array}$$

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем $n - 1$ количество перегородок, и $k + (n - 1)$ общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (4.9)$$

Формула 4.9 называется **сочетания с повторениями**.

Утверждение 6. *Сочетания с повторениями* - это количество способов расположить n сортов на k местах, причем порядок перестановки неважен.

4.3 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 9. 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

Решение. В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть, $n = 3$, $k = 50$.

$$\overline{C}_3^{50} = C_{52}^{50} = \frac{(3 + 50 - 1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

Задача 10. Имеется шахматная доска $2n \times 2n$. Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

Решение (а).

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

Решение (б).

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n - 1)$$

Задача 11. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

Решение.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Задача 12. В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

Решение. Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

Задача 13. Сколькими способами можно разложить n_1 красных, n_2 зеленых и n_3 синих шаров по m урнам?

Решение. Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

Глава 5

Производящие функции

5.1 Производящие функции и их основные свойства

Утверждение 7. Пусть имеется последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.1)$$

Требуем, чтобы данный ряд сходилсся хотя бы при малых x . Рассмотрим свойства производящих функций и некоторые их доказательства.

1. **Линейность.** Пусть $c_n = pa_n + qb_n$, $p, q = \text{const}$. Тогда

$$C(x) = pA(x) + qB(x) \quad (5.2)$$

Доказательство

$$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

2. **Сдвиг вправо.** Сдвиг начала последовательности вправо на i позиций. Пусть $b_n = a_{n-i}$, $n \geq i$, $b_n = 0$, $0 \leq n \leq i-1$, тогда

$$B(x) = x^i A(x) \quad (5.3)$$

Доказательство

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^n = x^i \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^i A(x)$$

3. **Сдвиг влево.** Сдвиг начала последовательности влево на i позиций. Пусть последовательность чисел b_n и a_n связаны: $b_n = a_{n+i}$. Тогда

$$B(x) = x^{-i} (A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) \quad (5.4)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^n = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i} = \\ &= x^{-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) = x^{-i} \left(A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) \end{aligned}$$

4. **Частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \quad (5.5)$$

Доказательство Функция $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Поэтому в некоторой окрестности $x = 0$

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$$

5. **Дополнительная частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \quad (5.6)$$

6. **1 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = na_n$. Тогда

$$B(x) = xA'(x) \quad (5.7)$$

7. **2 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = \frac{a_n}{n+1}$. Тогда

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx \quad (5.8)$$

8. **Свертка.** Пусть $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ Тогда

$$C(x) = A(x)B(x) \quad (5.9)$$

5.2 Задачи

Задача 14. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$. Для последовательности $a_n = 1$ будет $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Задача 15. $\frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, |x| < 1$ Следовательно, производящей функцией для последовательности $a_n = \frac{1}{n+1}$ будет $A(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$

Задача 16. Дана последовательность $a_n = q^n$. Найти ее производящую функцию.

Решение.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

Задача 17. Дана последовательность $a_n = n$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Запишем новую последовательность $b_n = 1$ и выразим a_n через нее: $a_n = nb_n$. Теперь можно воспользоваться свойством 5.7:

$$B(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$A(x) = xB'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Задача 18. Дана последовательность $b_n = n^2$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Как и в прошлом примере введем новую последовательность $a_n = n$ и выразим через нее b_n : $b_n = na_n$. Снова дважды вспомним 5.7 используя результат предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} B(x) &= xA'(x) \\ A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ B(x) &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Задача 19. Дана последовательность $a_n = n(2^n + (-1)^n n)$, $n \geq 0$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Сперва раскроем скобки:

$$a_n = 2^n n + (-1)^n n^2$$

Теперь разделим изначальную последовательность на 2 части: Первая часть будет $b_n = 2^n n$, а вторая $c_n = (-1)^n n^2$.

Тогда производящая функция a_n будет равна $A(x) = B(x) + C(x)$. Найдем теперь производящие функции у каждой части:

1. Введем новую последовательность $k_n = 2^n$ и выразим $b_n = k_n n$. Используя свойства 5.5 и 5.7 найдем $B(x)$ используя $K(x)$:

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \\ B(x) &= xK'(x) = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)'_x = \frac{2x}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

2. Для второй части тоже следует ввести новые последовательности: $d_n = (-1)^n$ и $m_n = (-1)^n n = d_n n$. Выразим теперь $c_n = m_n n$. Будем использовать те же свойства, только больше ;)

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \\ M(x) &= xD'(x) = x\left(\frac{1}{1+x}\right)'_x = \frac{-x}{(1+x)^2} \\ C(x) &= xM'(x) = x\left(\frac{-x}{(1+x)^2}\right)'_x = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Теперь вычислим $A(x)$:

$$A(x) = B(x) + C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} + \frac{x^2 - x}{(1+x)^3}$$

5.3 Линейные рекуррентные соотношения

Утверждение 8. *Линейным рекуррентным соотношением относительно последовательности a_n называется соотношение вида*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n \quad (5.10)$$

где k - заданное натуральное число, $n = 1, 2, 3, \dots$

При этом должны быть заданы начальные значения a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , а также коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k и последовательность d_n . Решением этого соотношения называется аналитическая формула для a_n , удовлетворяющая ему, а так же заданным начальным значениям.

Линейное рекуррентное соотношения называется **однородным**, если числа $d_n = 0$. В противном случае оно называется **неоднородным**.

Задача Фибоначчи и рекуррентное соотношение для нее.

Первой известной задачей, приведшей к рекуррентному соотношению, является задача Фибоначчи о кроликах. Ставится она следующим образом. Пусть в начальный момент была одна пара только что родившихся кроликов. Предполагается, что такая пара достигнет зрелости через месяц и еще через месяц она даст потомство в виде новой пары разнополых кроликов. Задача состоит в определении числа пар кроликов по прошествии n месяцев.

Пусть в n -ый месяц имеется M молодых пар и N зрелых пар кроликов. Тогда в $n + 1$ -ый месяц будет N молодых пар и $M + N$ зрелых пар, а в $n + 2$ -ой месяц будет $M + N$ молодых пар и $M + 2N$ зрелых пар. Таким образом, общее число пар кроликов в n -ый месяц равно $M + N$, в $n + 1$ -ый месяц равно $M + 2N$ а в $n + 2$ -ой месяц равно $2M + 3N$. Обозначим число пар кроликов в n -ый месяц через a_n . Тогда приходим к следующему выводу:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (5.11)$$

Это и есть **рекуррентное соотношение для задачи Фибоначчи**. Начальными условиями для него будут следующие: $a_0 = a_1 = 1$.

5.4 Метод решения линейные рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n, n \geq 0$$

с заданными начальными условиями a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .

Введем для неизвестной последовательности a_n производящую функцию $A(x)$, а для заданной последовательности d_n - производящую функцию $D(x)$. Определим теперь производящие функции для левой и правой частей рассматриваемого рекуррентного соотношения, используя свойства 5.2 и 5.4 производящей функции.

Тогда для левой части получим производящую функцию

$$x^{-k} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \right)$$

Для правой же части рекуррентного соотношения производящая функция имеет вид:

$$c_1 x^{-k+1} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i \right) + c_2 x^{-k+2} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i \right) + \\ + c_{k-1} x^{-1} (A(x) - a_0) + c_k A(x) + D(x)$$

Приравнивая эти две производящие функции и умножая их на x^k , получим

$$A(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots \\ - c_{k-1} x^{k-1} a_0 + x^k D(x)$$

Это равенство можно записать как

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k D(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k} \quad (5.12)$$

где $P_{k-1}(x)$ - многочлен степени $\leq k-1$, имеющий вид

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i - c_2 x^2 \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots c_{k-1} x^{k-1} a_0 \quad (5.13)$$

Этот многочлен полностью определяется заданными начальными значениями a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .

Для решения рассматриваемого рекуррентного соотношения нужно сначала разложить многочлен $1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k$ на множители, определив его корни. Затем надо представить полученное выше выражение для $A(x)$ в виде суммы простых дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Далее нужно разложить эти простые дроби в ряд Маклорена.

Полученные в результате коэффициенты a_n разложения $A(x)$ в ряд Маклорена и будут являться искомым решением рекуррентного соотношения.

5.5 Задачи

Чтобы было проще решать подобные задачи, можно вывести определенный алгоритм:

1. Определить k, d_n, c_i
2. Если $d_n \neq 0$ вычислить $D(x)$
3. Вычислить P_{k-1} по 5.13
4. Определить и разложить на простые дроби $A(x)$
5. Найти коэффициенты
6. Подставить в $A(x)$
7. Исходя из того, что $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ найти a_n

Задача 20. Рассмотрим рекуррентное соотношение задачи Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$$

Решение. Для него имеем:

$$k = 2, d_n = 0, D(x) = 0, c_1 = c_2 = 1$$

Учитывая, что $k = 2$, используем 5.13, чтобы найти $P_1(x)$. Далее подставляем значения выше:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1x) - c_1xa_0 = 1$$

Используя 5.12 находим:

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})}$$

где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения трехчлена $1 - x - x^2$:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Представим $A(x)$ в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})} = \frac{C}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{D}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Умножим это равенство на общий знаменатель. Тогда получим:

$$1 = C(1 - \frac{x}{x_2}) + D(1 - \frac{x}{x_1})$$

Приравнявая коэффициенты слева и справа при x^1 и x^0 , приходим к двум линейным уравнениям относительно C и D :

$$1 = C + D - x \left(\frac{C}{x_2} + \frac{D}{x_1} \right)$$

$$0 = -\frac{C}{x_2} - \frac{D}{x_1}$$

$$1 = C + D$$

Решая эти уравнения, находим

$$C = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}, D = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Разлагая $A(x)$ в ряд Маклорена, получаем

$$A(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_1}{x_2^n} - \frac{x_2}{x_1^n}\right) x^n$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \sqrt{5} \\ \frac{1}{x_1} &= -x_2 \\ \frac{1}{x_2} &= -x_1 \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая определение производящей функции $A(x)$, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) x^n$$

Отсюда окончательно получаем:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

Задача 21.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^n n, a_0 = 3, a_1 = 1$$

Решение. Здесь,

$$k = 2, c_1 = 2, c_2 = -1, d_n = 2^n n$$

Сначала найдем производящую функцию $D(x)$ для d_n . Производящая функция для последовательности 2^n равна $\frac{1}{1-2x}$. Применяя свойство 5.7, находим

$$D(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-2x} \right) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Определим теперь многочлен $P_{k-1}(x) = P_1(x)$, входящий в формулу для производящей функции $A(x)$ последовательности a_n , используя 5.13:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - 2xa_0 = 3 - 5x$$

В результате, формула для $A(x)$ приобретает вид

$$A(x) = \frac{3 - 5x + \frac{2x^3}{(1-2x)^2}}{1 - 2x + x^2} = \frac{(3 - 5x)(1 - 2x)^2 + 2x^3}{(1 - 2x)^2(1 - x)^2}$$

Числитель последней дроби имеет корень 1 и, значит, делится на $1 - x$. Сокращая в этой дроби числитель и знаменатель на $1 - x$, находим

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)}$$

Разложим $A(x)$ на простые дроби:

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)} = \frac{C_1}{(1 - 2x)^2} + \frac{C_2}{1 - 2x} + \frac{C_3}{1 - x}$$

где C_i - постоянные. Умножая данное равенство на общий знаменатель, получаем

$$3 - 14x + 18x^2 = C_1(1 - x) + C_2(1 - 2x)(1 - x) + C_3(1 - 2x)^2$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0 , приходим к системе уравнений относительно C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} 18 &= 2C_2 + 4C_3 \\ -14 &= -C_1 - 3C_2 - 4C_3 \\ 3 &= C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1 = 1, C_2 = -5, C_3 = 7$$

Разлагая простые дроби в выражении для $A(x)$ в ряд Маклорена, используя 5.6, получаем

$$A(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2x)^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + C_3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Следовательно, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n-4)2^n + 7] x^n$$

Глава 6

Теория графов

6.1 Основные определения

Пусть M и N - два конечных множества. Будем называть пару множеств $\langle M, N \rangle$ **графом**. При этом элементы множества M называются **вершинами** графа, элементы множества N - **дугами** графа. Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется **петлей**. Например, граф с множеством вершин $M = \{A, B, C, D\}$, множеством дуг $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и отображением в виде таблицы, может быть изображен чертежом.

Дуга	1	2	3	4	5	6
Начало	A	A	A	C	B	D
Конец	B	C	D	D	D	B

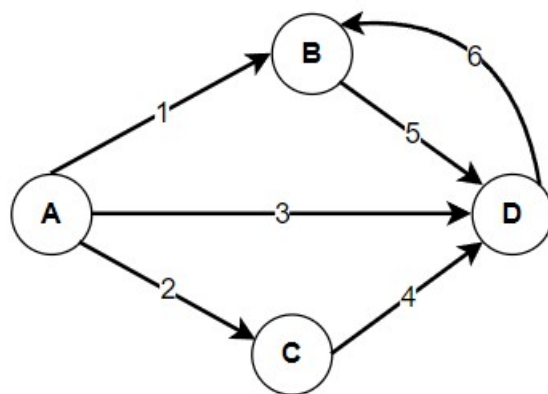


Рис. 6.1: Пример графа