Конспект по дискретной математике

На основе лекций Рабиновича.А.С

Рустамова Дарина

2022

Оглавление

Глава 1

Теория множеств

1.1 Основные понятия

Множество - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.
Мощность множества: $|A|$
Если между двумя множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \tag{1.1}$$

Теорема Кантора. Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.
Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.
Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из n элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \tag{1.2}$$

где $|A_n|$ - мощность множества подможеств множества из n элементов
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \tag{1.3}$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-1}| = ... = 2^n|A_0| = 2^n \tag{1.4}$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из n элементов содержащих k элементов? Отвечаю. C_n^k - число подмножеств из k элементов.
Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \tag{1.5}$$

1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.
Объединение

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \tag{1.6}$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \tag{1.7}$$

Дополнение

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \tag{1.8}$$

Вычитание

$$A \backslash B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \tag{1.9}$$

Сумма

$$A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \tag{1.10}$$

1.3 Законы теории множеств

1. **Коммутативность**

$$A \cup B = B \cup A \tag{1.11}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{1.12}$$

2. **Ассоциативность**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.13}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{1.14}$$

3. **Закон идентичности**

$$A \cup A = A \tag{1.15}$$
$$A \cap A = \emptyset \tag{1.16}$$

4. **Закон дистрибутивности**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.17}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.18}$$

5. **Закон поглощения**

$$A \cup (A \cap B) = A \tag{1.19}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{1.20}$$

6. **Закон де-Моргана**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.21}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.22}$$

7. **Закон нуля и единицы**

$$0 = \emptyset \tag{1.23}$$
$$1 = \mathbb{U} \tag{1.24}$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{1.25}$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \tag{1.26}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \tag{1.27}$$

Пример некоторых доказательств.
Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \tag{1.28}$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \tag{1.29}$$

Закон скеливания

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \tag{1.30}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \tag{1.31}$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup ... \cup (A_1 \cap B_n) \tag{1.32}$$

Формула включения и исключения

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.33}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{1.34}$$

Доказательства оставляю читателю :)

Задача 1. Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

Решение. Возьмем A_3 - числа, делящиеся на 3, A_5 - числа, делящиеся на 5, A_7 - числа, делящиеся на 7.
При этом, $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$, $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$, $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$ $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$, $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$, $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$, $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ: $1000 - 543 = 457$

Глава 2

Элементы математической логики

2.1 Основные понятия и операции

Пусть A - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \to a \vee b \tag{2.2}$$

$$A \cap B \to a \wedge b \tag{2.3}$$

$$\overline{A} \to \overline{a} \tag{2.4}$$

$$A - B \to a - b = a \wedge \overline{b} \tag{2.5}$$

$$A + b \to a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a}) \tag{2.6}$$

Дистрибутивность

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{2.7}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{2.8}$$

Поглощение

$$a \vee (a \wedge b) = a \tag{2.9}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \tag{2.10}$$

Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \tag{2.11}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \tag{2.12}$$

Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a \tag{2.13}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a \tag{2.14}$$

Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:
$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \tag{2.15}$$

2. Штрих Шеффера:
$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \tag{2.16}$$

3. Импликация:
$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \overline{b}} = \overline{a} \vee b \tag{2.17}$$

4. Эквивалентность:
$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a})} \tag{2.18}$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge ... \wedge \overline{x}_n \wedge f(0, 0, ..., 0)) \\ \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge ... \wedge \overline{x}_n \wedge f(1, 0, ..., 0)) \\ \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \wedge f(1, 1, ..., 1)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Совершенная конъюктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(1, 1, ..., 1)) \\ \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(0, 1, ..., 1)) \\ \wedge (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n \vee f(0, 0, ..., 0)) \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\overline{a} = 1 + a \tag{2.21}$$
$$a \wedge b = ab \tag{2.22}$$
$$a \vee b = a + b + ab \tag{2.23}$$
$$a + a = 0 \tag{2.24}$$
$$a - b = a \wedge \overline{b} = a(1+b) = a + ab \tag{2.25}$$
$$a(b+c) = ab + ac \tag{2.26}$$
$$a + b = b + a \tag{2.27}$$
$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} = (1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab \tag{2.28}$$
$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = 1 + ab \tag{2.29}$$
$$a \to b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \overline{b}} = 1 + a(1+b) = 1 + a + ab \tag{2.30}$$
$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \tag{2.31}$$

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ) Получается из СДНФ заменой $\vee$ на $+$, $\overline{x} = 1 + x$ и $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1+a)(1+b)f(0,0) + a(1+b)f(1,0) + (1+a)bf(0,1) + abf(1,1) \tag{2.32}$$

2.3 Задачи

Задача 2. Проверить $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = 1 + ab$$
$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$
$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

Задача 3. Доказать $a \to (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \to (b \wedge c) = \overline{a} \vee (\overline{\overline{b \wedge c}}) = \overline{a} \vee \overline{b \mid c} = a \mid (b \mid c)$$

Задача 4. Доказать $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

Решение.

$$a \downarrow (1 + (b - a) + b) = a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) =$$
$$(1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \overline{a}ab = 0$$

Глава 3

Отношения

3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
$=$	$\sim$
$\wedge$	,
$\vee$	;
$\Rightarrow$	$\rightarrow$

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; ...; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \tag{3.1}$$

Противоречие

$$P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \tag{3.2}$$

Отношения эквивалентности

- Рефлексивность
$$A \sim A \tag{3.3}$$
- Симметричность
$$A \sim B \rightarrow B \sim A \tag{3.4}$$
- Транзитивность
$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \tag{3.5}$$

Отношения порядка

- Рефлексивность

$$A \to A \tag{3.6}$$

- Антисимметричность

$$A \Rightarrow B, \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \tag{3.7}$$

- Транзитивность

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{то } A \Rightarrow C \tag{3.8}$$

3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \to B = \overline{A} \vee B = \overline{A}; B \tag{3.9}$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} P_1, P_2, ..., P_n \Rightarrow C \\ P_1, P_2, ..., P_n \to C \\ \overline{P_1, P_2, ..., P_n} \vee C \\ \overline{P}_1 \vee \overline{P}_2 \vee ... \vee \overline{P}_n \vee C \\ \overline{P}_1 \vee \overline{P}_2 \vee ... \vee \overline{P}_{n-1} \vee (\overline{P}_n \vee C) \\ \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_{n-1}} \vee (\overline{P}_n \vee C) \\ P_1, P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow (\overline{P}_n; C) \\ P_1, P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow \overline{P}_n; C \end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1.
$$A, A \to B \Rightarrow B \tag{3.11}$$

   Используем формулу 3.9, чтобы доказать

$$\begin{gathered} A, \overline{A}; B \Rightarrow B \\ \emptyset; B \Rightarrow B \end{gathered}$$

2.
$$A \Rightarrow B \to A \tag{3.12}$$

Так же заменяем $B \to A$ формулой 3.9, а далее используем 3.10, то есть из последнего получаем первое выражение

$$A \Rightarrow \overline{B}; A$$
$$A, B \Rightarrow A$$

3.
$$A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C \tag{3.13}$$

Используя предыдущую формулу 3.12 переносим A налево

$$A, A \to B, B \to C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно 3.11 и снова используем эту же формулу.

$$B, B \to C \Rightarrow C$$
$$C \Rightarrow C$$

Доказано!

3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

Задача 5.

$$1 \Rightarrow (A \to B) \to ((C \to D) \to (A \lor C) \to (B \lor D))$$
$$A \to B, C \to D, A \lor C \Rightarrow B \lor D$$
$$(A, A \to B) \lor (C, C \to D) \Rightarrow B \lor D$$

Задача 6.

$$A \to C, A \lor B, B \to D, D \to C \Rightarrow C$$
$$A \to C, A \lor B, B \to C \Rightarrow C$$
$$(A, A \to C); (B, B \to C) \Rightarrow C$$
$$C \Rightarrow C$$

Задача 7.

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \overline{A} \Rightarrow C$$
$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Rightarrow A; C$$
$$A \vee C \Rightarrow A; C$$

Задача 8.

$$(A \to C) \to (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(\overline{A} \vee C) \to (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(\overline{\overline{A} \vee C}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(A \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$A \vee B \Rightarrow A \vee B$$

Глава 4

Комбинаторика

4.1 Размещения

Утверждение 1. ***Размещения без повторений*** *- это упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов, если $k \leq n$.*

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.1}$$

Предположим, у нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

Утверждение 2. ***Размещения с повторениями*** *- это упорядоченный набор из k элементов из некоторого множества различных n элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \tag{4.2}$$

Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество $\{1, 2, 3\}$. Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{1,2\}, ..., \{2,3\}, \{3,2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

Замечание. *Если бы k был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как $\{1, 1, 2\}$. То есть повторяться числа могут сколько угодно.*

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам помогут **сочетания**.

4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

Утверждение 3. ***Сочетания без повторений*** *- это способ выбрать k из n различных предметов без учета порядка.*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.3}$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлечемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.

Утверждение 4. ***Бином Ньютона*** *- это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} C_n^k \tag{4.4}$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты, n - неотрицательное целое число.

Например,

$$(x+y)^2 = x^0y^2 + x^1y^1C_2^1 + x^2y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{4.5}$$

$$(x+y)^3 = x^0y^3 + x^1y^2C_3^1 + x^2y^1C_3^2 + x^3y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3 \tag{4.6}$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

Утверждение 5. ***Треугольник Паскаля*** *- бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом n в биноме Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.
Таким образом, коэффициенты из формулы 4.5 можно вывести используя треугольник Паскаля.
Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

Следствие 5.1. *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \tag{4.7}$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниям повторение элементов? Возьмем все то же множество $\{1, 2, 3\}$ и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 3\} \tag{4.8}$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.
У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категорям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

2 2 | 5 | 10 10
2 | 5 | 10 10 10
2 2 2 | | 10 10

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем $n-1$ количество перегородок, и $k+(n-1)$ общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{4.9}$$

Формула 4.9 называется **сочетания с повторениями**.

Утверждение 6. ***Сочетания с повторениями*** *- это количество способов расположить n сортов на k местах, причем порядок перестановки неважен.*

4.3 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 9. 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

Решение. В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть, $n = 3$, $k = 50$.

$$\overline{C_3^{50}} = C_{52}^{50} = \frac{(3+50-1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

Задача 10. Имеется шахматная доска $2n \times 2n$. Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

Решение (а)**.**

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

Решение (б)**.**

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n-1)$$

Задача 11. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

Решение.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Задача 12. В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

Решение. Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

Задача 13. Сколькими способами можно разложить n_1 красных, n_2 зеленых и n_3 синих шаров по m урнам?

Решение. Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

Глава 5

Производящие функции

5.1 Производящие функции и их основные свойства

Утверждение 7. *Пусть имеется последовательность чисел* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.1}$$

Требуем, чтобы данный ряд сходился хотя бы при малых x.
Рассмотрим свойства производящих функций.
Свойства

- Линейность Пусть $c_n = pa_n + qb_n$, $p, q = const$ Тогда

  $$C(x) = pA(x) + qB(x) \tag{5.2}$$

  Доказательство

  $$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

- Сдвиг Сдвиг начала последовательности вправо на i позиций. Пусть $b_n = a_{n-i}, n \geq i$