

Конспект по дискретной математике  
На основе лекций Рабиновича.А.С

Рустамова Дарина

2022

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.2	Операции над множествами . . . . .	3
1.3	Законы теории множеств . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Элементы математической логики</b>	<b>6</b>
2.1	Основные понятия и операции . . . . .	6
2.2	Многочлен Жегалкина . . . . .	8
2.3	Задачи . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Отношения</b>	<b>10</b>
3.1	Основные понятия . . . . .	10
3.2	Правила вывода клауз . . . . .	11
3.3	Задачи . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>14</b>
4.1	Размещения . . . . .	14
4.2	Сочетания . . . . .	15
4.3	Задачи . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Производящие функции</b>	<b>20</b>
5.1	Производящие функции и их основные свойства . . . . .	20
5.2	Задачи . . . . .	22
5.3	Линейные рекуррентные соотношения . . . . .	24
5.4	Метод решения линейные рекуррентных соотношений с по- мощью производящих функций . . . . .	25
5.5	Задачи . . . . .	26

# Глава 1

## Теория множеств

### 1.1 Основные понятия

**Множество** - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.

Мощность множества:  $|A|$

Если между двумя множествами  $A$  и  $B$  можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \quad (1.1)$$

**Теорема Кантора.** Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.

Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.

Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из  $n$  элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \quad (1.2)$$

где  $|A_n|$  - мощность множества подмножеств множества из  $n$  элементов  
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \quad (1.3)$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-2}| = \dots = 2^n|A_0| = 2^n \quad (1.4)$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из  $n$  элементов содержащих  $k$  элементов? Отвечаю.  $C_n^k$  - число подмножеств из  $k$  элементов.

Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (1.5)$$

## 1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

**Объединение**

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \quad (1.6)$$

**Пересечение**

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \quad (1.7)$$

**Дополнение**

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \quad (1.8)$$

**Вычитание**

$$A \setminus B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \quad (1.9)$$

**Сумма**

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad (1.10)$$

## 1.3 Законы теории множеств

### 1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.11)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.12)$$

### 2. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (1.13)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (1.14)$$

### 3. Закон идентичности

$$A \cup A = A \quad (1.15)$$

$$A \cap A = \emptyset \quad (1.16)$$

### 4. Закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.17)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.18)$$

### 5. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (1.19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (1.20)$$

### 6. Закон де-Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.21)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.22)$$

### 7. Закон нуля и единицы

$$0 = \emptyset \quad (1.23)$$

$$1 = \mathbb{U} \quad (1.24)$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (1.25)$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \quad (1.26)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad (1.27)$$

Пример некоторых доказательств.

**Закон поглощения**

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \quad (1.28)$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \quad (1.29)$$

**Закон скелливания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \quad (1.31)$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap B_n) \quad (1.32)$$

**Формула включения и исключения**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.33)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.34)$$

Доказательства оставляю читателю :)

**Задача 1.** Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

**Решение.** Возьмем  $A_3$  - числа, делящиеся на 3,  $A_5$  - числа, делящиеся на 5,  $A_7$  - числа, делящиеся на 7.

При этом,  $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$ ,  $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$ ,  $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$   $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$ ,  $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$ ,  $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$ ,  $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ:  $1000 - 543 = 457$

## Глава 2

# Элементы математической ЛОГИКИ

### 2.1 Основные понятия и операции

Пусть  $A$  - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \rightarrow a \vee b \quad (2.2)$$

$$A \cap B \rightarrow a \wedge b \quad (2.3)$$

$$\overline{A} \rightarrow \bar{a} \quad (2.4)$$

$$A - B \rightarrow a - b = a \wedge \bar{b} \quad (2.5)$$

$$A + b \rightarrow a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a}) \quad (2.6)$$

**Дистрибутивность**

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (2.7)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (2.8)$$

**Поглощение**

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (2.9)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (2.10)$$

### Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.11)$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.12)$$

### Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a \quad (2.13)$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a \quad (2.14)$$

### Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.15)$$

2. Штрих Шеффера:

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.16)$$

3. Импликация:

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee b \quad (2.17)$$

4. Эквивалентность:

$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})} \quad (2.18)$$

### Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(0, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(1, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge f(1, 1, \dots, 1)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

### Совершенная конъюнктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(1, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(0, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \vee f(0, 0, \dots, 0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$



## 2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\bar{a} = 1 + a \quad (2.21)$$

$$a \wedge b = ab \quad (2.22)$$

$$a \vee b = a + b + ab \quad (2.23)$$

$$a + a = 0 \quad (2.24)$$

$$a - b = a \wedge \bar{b} = a(1 + b) = a + ab \quad (2.25)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.26)$$

$$a + b = b + a \quad (2.27)$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} = (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \quad (2.28)$$

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab \quad (2.29)$$

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + a(1 + b) = 1 + a + ab \quad (2.30)$$

$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \quad (2.31)$$

**Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ)** Получается из СДНФ заменой  $\vee$  на  $+$ ,  $\bar{x} = 1 + x$  и  $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1 + a)(1 + b)f(0, 0) + a(1 + b)f(1, 0) + (1 + a)bf(0, 1) + abf(1, 1) \quad (2.32)$$

## 2.3 Задачи

**Задача 2.** Проверить  $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

**Решение.**

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab$$

$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$

$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

**Задача 3.** Доказать  $a \rightarrow (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

**Решение.**

$$a \rightarrow (b \wedge c) = \bar{a} \vee (\overline{b \wedge c}) = \bar{a} \vee \overline{b} \mid c = a \mid (b \mid c)$$

**Задача 4.** Доказать  $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

**Решение.**

$$\begin{aligned} a \downarrow (1 + (b - a) + b) &= a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) = \\ &= (1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \bar{a}ab = 0 \end{aligned}$$

# Глава 3

## Отношения

### 3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
$=$	$\sim$
$\wedge$	$,$
$\vee$	$;$
$\Rightarrow$	$\rightarrow$

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; \dots; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \quad (3.1)$$

Противоречие

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

**Отношения эквивалентности**

- Рефлексивность

$$A \sim A \quad (3.3)$$

- Симметричность

$$A \sim B \rightarrow B \sim A \quad (3.4)$$

- Транзитивность

$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \quad (3.5)$$

## Отношения порядка

- Рефлексивность

$$A \rightarrow A \quad (3.6)$$

- Антисимметричность

$$A \Rightarrow B, \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (3.7)$$

- Транзитивность

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{ то } A \Rightarrow C \quad (3.8)$$

## 3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \bar{A}; B \quad (3.9)$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} & P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow C \\ & P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C \\ & \overline{P_1, P_2, \dots, P_n} \vee C \\ & \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_n \vee C \\ & \overline{\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow (\bar{P}_n; C) \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow \bar{P}_n; C \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1.

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \quad (3.11)$$

Используем формулу 3.9, чтобы доказать

$$\begin{aligned} & A, \bar{A}; B \Rightarrow B \\ & \emptyset; B \Rightarrow B \end{aligned}$$

2.

$$A \Rightarrow B \rightarrow A \quad (3.12)$$

Так же заменяем  $B \rightarrow A$  формулой 3.9, а далее используем 3.10, то есть из последнего получаем первое выражение

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \overline{B}; A \\ A, B &\Rightarrow A \end{aligned}$$

3.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \quad (3.13)$$

Используя предыдущую формулу 3.12 переносим  $A$  налево

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно 3.11 и снова используем эту же формулу.

$$\begin{aligned} B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Доказано!

### 3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

**Задача 5.**

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)) \\ A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C &\Rightarrow B \vee D \\ (A, A \rightarrow B) \vee (C, C \rightarrow D) &\Rightarrow B \vee D \end{aligned}$$

**Задача 6.**

$$\begin{aligned} A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C &\Rightarrow C \\ A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ (A, A \rightarrow C); (B, B \rightarrow C) &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Задача 7.

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \bar{A} &\Rightarrow C \\ (A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Rightarrow A; C \\ A \vee C &\Rightarrow A; C\end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned}(A \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (\bar{A} \vee C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ \overline{(\bar{A} \vee C)} \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ A \vee B &\Rightarrow A \vee B\end{aligned}$$

## Глава 4

# Комбинаторика

### 4.1 Размещения

**Утверждение 1.** *Размещения без повторений - это упорядоченный набор из  $k$  различных элементов из некоторого множества различных  $n$  элементов, если  $k \leq n$ .*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4.1)$$

Предположим, у нас есть множество чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что  $\{1, 2\}$  и  $\{2, 1\}$  это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

**Утверждение 2.** *Размещения с повторениями - это упорядоченный набор из  $k$  элементов из некоторого множества различных  $n$  элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \quad (4.2)$$

Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество  $\{1, 2, 3\}$ . Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2\}, \dots, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

**Замечание.** Если бы  $k$  был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как  $\{1, 1, 2\}$ . То есть повторяться числа могут сколько угодно.

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам поможет **сочетания**.

## 4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

**Утверждение 3. Сочетания без повторений** - это способ выбрать  $k$  из  $n$  различных предметов без учета порядка.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.3)$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлечемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.



**Утверждение 4. Бином Ньютона** - это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} C_n^k \quad (4.4)$$

где  $C_n^k$  - биномиальные коэффициенты,  $n$  - неотрицательное целое число.

Например,

$$(x + y)^2 = x^0 y^2 + x^1 y^1 C_2^1 + x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (4.5)$$

$$(x + y)^3 = x^0 y^3 + x^1 y^2 C_3^1 + x^2 y^1 C_3^2 + x^3 y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + y^3 \quad (4.6)$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

**Утверждение 5. Треугольник Паскаля** - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & C_0^0 & & & \\ & & & & & C_1^1 & & \\ & & & C_1^0 & & C_2^2 & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_3^3 & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_4^4 \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & \end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом  $n$  в бинOME Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.

Таким образом, коэффициенты из формулы 4.5 можно вывести используя треугольник Паскаля.

Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

**Следствие 5.1.** *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (4.7)$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниях повторение элементов? Возьмем все то же множество  $\{1, 2, 3\}$  и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 3\} \quad (4.8)$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.

У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категориям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

$$\begin{array}{l} 2 \ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \\ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \ 10 \\ 2 \ 2 \ 2 \mid \mid 10 \ 10 \end{array}$$

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем  $n - 1$  количество перегородок, и  $k + (n - 1)$  общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (4.9)$$

Формула 4.9 называется **сочетания с повторениями**.

**Утверждение 6.** *Сочетания с повторениями* - это количество способов расположить  $n$  сортов на  $k$  местах, причем порядок перестановки неважен.

## 4.3 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 9.** 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

**Решение.** В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть,  $n = 3$ ,  $k = 50$ .

$$\overline{C_3^{50}} = C_{52}^{50} = \frac{(3 + 50 - 1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

**Задача 10.** Имеется шахматная доска  $2n \times 2n$ . Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

**Решение (а).**

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

**Решение (б).**

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n - 1)$$

**Задача 11.** Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

**Решение.**

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

**Задача 12.** В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

**Решение.** Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

**Задача 13.** Сколькими способами можно разложить  $n_1$  красных,  $n_2$  зеленых и  $n_3$  синих шаров по  $m$  урнам?

**Решение.** Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

## Глава 5

# Производящие функции

### 5.1 Производящие функции и их основные свойства

**Утверждение 7.** Пусть имеется последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.1)$$

Требуем, чтобы данный ряд сходилсся хотя бы при малых  $x$ . Рассмотрим свойства производящих функций и некоторые их доказательства.

1. **Линейность.** Пусть  $c_n = pa_n + qb_n$ ,  $p, q = \text{const}$ . Тогда

$$C(x) = pA(x) + qB(x) \quad (5.2)$$

**Доказательство**

$$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

2. **Сдвиг вправо.** Сдвиг начала последовательности вправо на  $i$  позиций. Пусть  $b_n = a_{n-i}$ ,  $n \geq i$ ,  $b_n = 0$ ,  $0 \leq n \leq i-1$ , тогда

$$B(x) = x^i A(x) \quad (5.3)$$

**Доказательство**

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^n = x^i \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^i A(x)$$

3. **Сдвиг влево.** Сдвиг начала последовательности влево на  $i$  позиций. Пусть последовательность чисел  $b_n$  и  $a_n$  связаны:  $b_n = a_{n+i}$ . Тогда

$$B(x) = x^{-i} (A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) \quad (5.4)$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^n = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i} = \\ &= x^{-i} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) = x^{-i} \left( A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) \end{aligned}$$

4. **Частичная сумма.** Пусть  $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Тогда

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \quad (5.5)$$

**Доказательство** Функция  $\frac{1}{1-x}$  при  $|x| < 1$  в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Поэтому в некоторой окрестности  $x = 0$

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$$

5. **Дополнительная частичная сумма.** Пусть  $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ . Тогда

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \quad (5.6)$$

6. **1 тип изменения масштаба.** Пусть  $b_n = na_n$ . Тогда

$$B(x) = xA'(x) \quad (5.7)$$

7. **2 тип изменения масштаба.** Пусть  $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ . Тогда

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx \quad (5.8)$$

8. **Свертка.** Пусть  $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  Тогда

$$C(x) = A(x)B(x) \quad (5.9)$$

## 5.2 Задачи

**Задача 14.**  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$ . Для последовательности  $a_n = 1$  будет  $A(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Задача 15.**  $\frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, |x| < 1$  Следовательно, производящей функцией для последовательности  $a_n = \frac{1}{n+1}$  будет  $A(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$

**Задача 16.** Дана последовательность  $a_n = q^n$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.**

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

**Задача 17.** Дана последовательность  $a_n = n$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Запишем новую последовательность  $b_n = 1$  и выразим  $a_n$  через нее:  $a_n = nb_n$ . Теперь можно воспользоваться свойством 5.7:

$$B(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$A(x) = xB'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**Задача 18.** Дана последовательность  $b_n = n^2$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Как и в прошлом примере введем новую последовательность  $a_n = n$  и выразим через нее  $b_n$ :  $b_n = na_n$ . Снова дважды вспомним 5.7 используя результат предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} B(x) &= xA'(x) \\ A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ B(x) &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

**Задача 19.** Дана последовательность  $a_n = n(2^n + (-1)^n n)$ ,  $n \geq 0$ . Найти ее производящую функцию.

**Решение.** Сперва раскроем скобки:

$$a_n = 2^n n + (-1)^n n^2$$

Теперь разделим изначальную последовательность на 2 части: Первая часть будет  $b_n = 2^n n$ , а вторая  $c_n = (-1)^n n^2$ .

Тогда производящая функция  $a_n$  будет равна  $A(x) = B(x) + C(x)$ . Найдем теперь производящие функции у каждой части:

1. Введем новую последовательность  $k_n = 2^n$  и выразим  $b_n = k_n n$ . Используя свойства 5.5 и 5.7 найдем  $B(x)$  используя  $K(x)$ :

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \\ B(x) &= xK'(x) = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)'_x = \frac{2x}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

2. Для второй части тоже следует ввести новые последовательности:  $d_n = (-1)^n$  и  $m_n = (-1)^n n = d_n n$ . Выразим теперь  $c_n = m_n n$ . Будем использовать те же свойства, только больше ;)

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \\ M(x) &= xD'(x) = x\left(\frac{1}{1+x}\right)'_x = \frac{-x}{(1+x)^2} \\ C(x) &= xM'(x) = x\left(\frac{-x}{(1+x)^2}\right)'_x = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$



Теперь вычислим  $A(x)$ :

$$A(x) = B(x) + C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} + \frac{x^2 - x}{(1+x)^3}$$

### 5.3 Линейные рекуррентные соотношения

**Утверждение 8.** *Линейным рекуррентным соотношением относительно последовательности  $a_n$  называется соотношение вида*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n \quad (5.10)$$

где  $k$  - заданное натуральное число,  $n = 1, 2, 3, \dots$

При этом должны быть заданы начальные значения  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , а также коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_k$  и последовательность  $d_n$ . Решением этого соотношения называется аналитическая формула для  $a_n$ , удовлетворяющая ему, а так же заданным начальным значениям.

Линейное рекуррентное соотношения называется **однородным**, если числа  $d_n = 0$ . В противном случае оно называется **неоднородным**.

#### Задача Фибоначчи и рекуррентное соотношение для нее.

Первой известной задачей, приведшей к рекуррентному соотношению, является задача Фибоначчи о кроликах. Ставится она следующим образом. Пусть в начальный момент была одна пара только что родившихся кроликов. Предполагается, что такая пара достигнет зрелости через месяц и еще через месяц она даст потомство в виде новой пары разнополых кроликов. Задача состоит в определении числа пар кроликов по прошествии  $n$  месяцев.

Пусть в  $n$ -ый месяц имеется  $M$  молодых пар и  $N$  зрелых пар кроликов. Тогда в  $n + 1$ -ый месяц будет  $N$  молодых пар и  $M + N$  зрелых пар, а в  $n + 2$ -ой месяц будет  $M + N$  молодых пар и  $M + 2N$  зрелых пар. Таким образом, общее число пар кроликов в  $n$ -ый месяц равно  $M + N$ , в  $n + 1$ -ый месяц равно  $M + 2N$  а в  $n + 2$ -ой месяц равно  $2M + 3N$ . Обозначим число пар кроликов в  $n$ -ый месяц через  $a_n$ . Тогда приходим к следующему выводу:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (5.11)$$

Это и есть **рекуррентное соотношение для задачи Фибоначчи**. Начальными условиями для него будут следующие:  $a_0 = a_1 = 1$ .

## 5.4 Метод решения линейные рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n, n \geq 0$$

с заданными начальными условиями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

Введем для неизвестной последовательности  $a_n$  производящую функцию  $A(x)$ , а для заданной последовательности  $d_n$  - производящую функцию  $D(x)$ . Определим теперь производящие функции для левой и правой частей рассматриваемого рекуррентного соотношения, используя свойства 5.2 и 5.4 производящей функции.

Тогда для левой части получим производящую функцию

$$x^{-k} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \right)$$

Для правой же части рекуррентного соотношения производящая функция имеет вид:

$$c_1 x^{-k+1} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i \right) + c_2 x^{-k+2} \left( A(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i \right) + \\ + c_{k-1} x^{-1} (A(x) - a_0) + c_k A(x) + D(x)$$

Приравнивая эти две производящие функции и умножая их на  $x^k$ , получим

$$A(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots \\ - c_{k-1} x^{k-1} a_0 + x^k D(x)$$

Это равенство можно записать как

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k D(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k} \quad (5.12)$$

где  $P_{k-1}(x)$  - многочлен степени  $\leq k-1$ , имеющий вид

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i - c_2 x^2 \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots c_{k-1} x^{k-1} a_0 \quad (5.13)$$

Этот многочлен полностью определяется заданными начальными значениями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

Для решения рассматриваемого рекуррентного соотношения нужно сначала разложить многочлен  $1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k$  на множители, определив его корни. Затем надо представить полученное выше выражение для  $A(x)$  в виде суммы простых дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Далее нужно разложить эти простые дроби в ряд Маклорена.

Полученные в результате коэффициенты  $a_n$  разложения  $A(x)$  в ряд Маклорена и будут являться искомым решением рекуррентного соотношения.

## 5.5 Задачи

**Задача 20.** Рассмотрим рекуррентное соотношение задачи Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$$

**Решение.** Для него имеем:

$$k = 2, d_n = 0, D(x) = 0, c_1 = c_2 = 1$$

Учитывая, что  $k = 2$ , используем 5.13, чтобы найти  $P_1(x)$ . Далее подставляем значения выше:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - c_1 x a_0 = 1$$

Используя 5.12 находим:

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})}$$

где  $x_1, x_2$  - корни квадратного уравнения трехчлена  $1 - x - x^2$ :

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Представим  $A(x)$  в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} = \frac{C}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{D}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Умножим это равенство на общий знаменатель. Тогда получим:

$$1 = C\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) + D\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при  $x^1$  и  $x^0$ , приходим к двум линейным уравнениям относительно  $C$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} 1 &= C + D - x\left(\frac{C}{x_2} + \frac{D}{x_1}\right) \\ 0 &= -\frac{C}{x_2} - \frac{D}{x_1} \\ 1 &= C + D \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$C = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}, D = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Разлагая  $A(x)$  в ряд Маклорена, получаем

$$A(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_1}{x_2^n} - \frac{x_2}{x_1^n}\right) x^n$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \sqrt{5} \\ \frac{1}{x_1} &= -x_2 \\ \frac{1}{x_2} &= -x_1 \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая определение производящей функции  $A(x)$ , находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) x^n$$

Отсюда окончательно получаем:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$