Конспект по дискретной математике

На основе лекций Рабиновичаа А.С

Рустамова Дарина

2022

Оглавление

Глава 1

Теория множеств

1.1 Основные понятия

Множество - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.
Мощность множества: $|A|$
Если между двумя множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \tag{1.1}$$

Теорема Кантора. Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.
Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.
Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из n элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \tag{1.2}$$

где $|A_n|$ - мощность множества подможеств множества из n элементов
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \tag{1.3}$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-1}| = ... = 2^n|A_0| = 2^n \tag{1.4}$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из n элементов содержащих k элементов? Отвечаю. C_n^k - число подмножеств из k элементов.
Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \tag{1.5}$$

1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.
Объединение

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \tag{1.6}$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \tag{1.7}$$

Дополнение

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \tag{1.8}$$

Вычитание

$$A \backslash B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \tag{1.9}$$

Сумма

$$A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \tag{1.10}$$

1.3 Законы теории множеств

1. **Коммутативность**

$$A \cup B = B \cup A \tag{1.11}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{1.12}$$

2. **Ассоциативность**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.13}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{1.14}$$

3. **Закон идентичности**

$$A \cup A = A \tag{1.15}$$
$$A \cap A = \emptyset \tag{1.16}$$

4. **Закон дистрибутивности**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.17}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.18}$$

5. **Закон поглощения**

$$A \cup (A \cap B) = A \tag{1.19}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{1.20}$$

6. **Закон де-Моргана**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.21}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.22}$$

7. **Закон нуля и единицы**

$$0 = \emptyset \tag{1.23}$$
$$1 = \mathbb{U} \tag{1.24}$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{1.25}$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \tag{1.26}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \tag{1.27}$$

Пример некоторых доказательств.
Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \tag{1.28}$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \tag{1.29}$$

Закон скеливания

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \tag{1.30}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \tag{1.31}$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup ... \cup (A_1 \cap B_n) \tag{1.32}$$

Формула включения и исключения

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.33}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{1.34}$$

Доказательства оставляю читателю :)

Задача 1. Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

Решение. Возьмем A_3 - числа, делящиеся на 3, A_5 - числа, делящиеся на 5, A_7 - числа, делящиеся на 7.
При этом, $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$, $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$, $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$ $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$, $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$, $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$, $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ: $1000 - 543 = 457$

Глава 2

Элементы математической логики

2.1 Основные понятия и операции

Пусть A - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \to a \vee b \tag{2.2}$$
$$A \cap B \to a \wedge b \tag{2.3}$$
$$\overline{A} \to \overline{a} \tag{2.4}$$
$$A - B \to a - b = a \wedge \overline{b} \tag{2.5}$$
$$A + b \to a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a}) \tag{2.6}$$

Дистрибутивность

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{2.7}$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{2.8}$$

Поглощение

$$a \vee (a \wedge b) = a \tag{2.9}$$
$$a \wedge (a \vee b) = a \tag{2.10}$$

Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \tag{2.11}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \tag{2.12}$$

Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a \tag{2.13}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a \tag{2.14}$$

Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:
$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \tag{2.15}$$

2. Штрих Шеффера:
$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \tag{2.16}$$

3. Импликация:
$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \overline{b}} = \overline{a} \vee b \tag{2.17}$$

4. Эквивалентность:

$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a})} \tag{2.18}$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge ... \wedge \overline{x}_n \wedge f(0, 0, ..., 0)) \\ \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge ... \wedge \overline{x}_n \wedge f(1, 0, ..., 0)) \\ \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \wedge f(1, 1, ..., 1)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Совершенная конъюктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(1, 1, ..., 1)) \\ \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(0, 1, ..., 1)) \\ \wedge (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n \vee f(0, 0, ..., 0)) \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\overline{a} = 1 + a \tag{2.21}$$
$$a \wedge b = ab \tag{2.22}$$
$$a \vee b = a + b + ab \tag{2.23}$$
$$a + a = 0 \tag{2.24}$$
$$a - b = a \wedge \overline{b} = a(1 + b) = a + ab \tag{2.25}$$
$$a(b + c) = ab + ac \tag{2.26}$$
$$a + b = b + a \tag{2.27}$$
$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} = (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \tag{2.28}$$
$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = 1 + ab \tag{2.29}$$
$$a \to b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \overline{b}} = 1 + a(1 + b) = 1 + a + ab \tag{2.30}$$
$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \tag{2.31}$$

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ) Получается из СДНФ заменой $\vee$ на $+$, $\overline{x} = 1 + x$ и $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1 + a)(1 + b)f(0, 0) + a(1 + b)f(1, 0) + (1 + a)bf(0, 1) + abf(1, 1) \tag{2.32}$$

2.3 Задачи

Задача 2. Проверить $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = 1 + ab$$
$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$
$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

Задача 3. Доказать $a \to (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \to (b \wedge c) = \overline{a} \vee (\overline{\overline{b \wedge c}}) = \overline{a} \vee \overline{b \mid c} = a \mid (b \mid c)$$

Задача 4. Доказать $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

Решение.

$$a \downarrow (1 + (b - a) + b) = a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) = \\ (1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \overline{a}ab = 0$$

Глава 3

Отношения

3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
$=$	$\sim$
$\wedge$	,
$\vee$	;
$\Rightarrow$	$\rightarrow$

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; ...; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \tag{3.1}$$

Противоречие

$$P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \tag{3.2}$$

Отношения эквивалентности

- Рефлексивность
$$A \sim A \tag{3.3}$$
- Симметричность
$$A \sim B \rightarrow B \sim A \tag{3.4}$$
- Транзитивность
$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \tag{3.5}$$

Отношения порядка

- Рефлексивность
$$A \to A \tag{3.6}$$

- Антисимметричность
$$A \Rightarrow B, \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \tag{3.7}$$

- Транзитивность
$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{то } A \Rightarrow C \tag{3.8}$$

3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \to B = \overline{A} \vee B = \overline{A}; B \tag{3.9}$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} P_1, P_2, ..., P_n \Rightarrow C \\ P_1, P_2, ..., P_n \to C \\ \overline{P_1, P_2, ..., P_n} \vee C \\ \overline{P}_1 \vee \overline{P}_2 \vee ... \vee \overline{P}_n \vee C \\ \overline{P}_1 \vee \overline{P}_2 \vee ... \vee \overline{P}_{n-1} \vee (\overline{P}_n \vee C) \\ \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_{n-1}} \vee (\overline{P}_n \vee C) \\ P_1, P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow (\overline{P}_n; C) \\ P_1, P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow \overline{P}_n; C \end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1. $$A, A \to B \Rightarrow B \tag{3.11}$$

   Используем формулу 3.9, чтобы доказать

$$A, \overline{A}; B \Rightarrow B$$
$$\emptyset; B \Rightarrow B$$

2.
$$A \Rightarrow B \rightarrow A \tag{3.12}$$

Так же заменяем $B \rightarrow A$ формулой 3.9, а далее используем 3.10, то есть из последнего получаем первое выражение

$$A \Rightarrow \overline{B}; A$$
$$A, B \Rightarrow A$$

3.
$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \tag{3.13}$$

Используя предыдущую формулу 3.12 переносим A налево

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно 3.11 и снова используем эту же формулу.

$$B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$
$$C \Rightarrow C$$

Доказано!

3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

Задача 5.

$$1 \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$$
$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \Rightarrow B \vee D$$
$$(A, A \rightarrow B) \vee (C, C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D$$

Задача 6.

$$A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C \Rightarrow C$$
$$A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$
$$(A, A \rightarrow C); (B, B \rightarrow C) \Rightarrow C$$
$$C \Rightarrow C$$

Задача 7.

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \overline{A} \Rightarrow C$$
$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Rightarrow A; C$$
$$A \vee C \Rightarrow A; C$$

Задача 8.

$$(A \to C) \to (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(\overline{A} \vee C) \to (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(\overline{\overline{A} \vee C}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$(A \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow A \vee B$$
$$A \vee B \Rightarrow A \vee B$$

Глава 4

Комбинаторика

4.1 Размещения

Утверждение 1. ***Размещения без повторений*** - *это упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов, если $k \leq n$.*

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.1}$$

Предположим, у нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

Утверждение 2. ***Размещения с повторениями*** - *это упорядоченный набор из k элементов из некоторого множества различных n элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \tag{4.2}$$

Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество $\{1, 2, 3\}$. Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2\}, ..., \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

Замечение. *Если бы k был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как $\{1, 1, 2\}$. То есть повторяться числа могут сколько угодно.*

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам помогут **сочетания**.

4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

Утверждение 3. ***Сочетания без повторений*** *- это способ выбрать k из n различных предметов без учета порядка.*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.3}$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлечемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.

Утверждение 4. ***Бином Ньютона*** *- это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} C_n^k \tag{4.4}$$

где C_n^k *- биномиальные коэффициенты,* n *- неотрицательное целое число.*

Например,

$$(x+y)^2 = x^0y^2 + x^1y^1C_2^1 + x^2y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{4.5}$$

$$(x+y)^3 = x^0y^3 + x^1y^2C_3^1 + x^2y^1C_3^2 + x^3y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3 \tag{4.6}$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

Утверждение 5. ***Треугольник Паскаля*** *- бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом n в биноме Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.
Таким образом, коэффициенты из формулы 4.5 можно вывести используя треугольник Паскаля.
Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

Следствие 5.1. *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*
$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \tag{4.7}$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниям повторение элементов? Возьмем все то же множество $\{1, 2, 3\}$ и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1,1\}, \{1,2\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}, \{1,3\} \tag{4.8}$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.
У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категорям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

$$2\ 2 \mid 5 \mid 10\ 10$$
$$2 \mid 5 \mid 10\ 10\ 10$$
$$2\ 2\ 2 \mid \mid 10\ 10$$

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем $n-1$ количество перегородок, и $k+(n-1)$ общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{4.9}$$

Формула 4.9 называется **сочетания с повторениями**.

Утверждение 6. ***Сочетания с повторениями*** *- это количество способов расположить n сортов на k местах, причем порядок перестановки неважен.*

4.3 Перестановки

У нас есть n различных элементов, как посчитать количество перестановок по n местам? Эта задача очень похожа на задачу из секции про размещения. У нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 3 элемента из этого множества?

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$$

Или посчитать по формуле размещений без повторений, где $k = n$:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Именно формула выше и есть **формула для нахождения перестановок n различных элементов**!

$$P_n = n! = A_n^n \tag{4.10}$$

Теперь изменим наше множество на $\{1, 1, 2, 3\}$. Посморим на перестановки теперь:

$$\{1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{2, 1, 1, 3\}, \{3, 1, 1, 2\}, ...$$

Можно заметить, что мы не учитываем перестановки между двумя одинаковыми элементами (в нашем случае единицами). Формула $P_n = n!$ не подходит в данном случае. Если у нас есть n_1 одинаковых элементов, то наша формула $P_n = n!$ выдает в $n_1!$ больше комбинаций, чем надо. Тогда пребразуем формулу:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \tag{4.11}$$

Формула выше вычисляет **количество перестановок с повторениями.**

4.4 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 9. Как посчитать число перестановок слова "манна"?

Решение. Посчитаем количество каждой буквы: м - 1, а - 2, н - 2. Обратимся к формуле перестановок с повторениями, так как буквы в нашем множестве повторяются:

$$P(1,2,2) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{5!}{1!2!2!}$$

Задача 10. 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

Решение. В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть, $n = 3$, $k = 50$.

$$\overline{C_3^{50}} = C_{52}^{50} = \frac{(3+50-1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

Задача 11. Имеется шахматная доска $2n \times 2n$. Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

Решение (а).

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

Решение (б).

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n-1)$$

Задача 12. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

Решение.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Задача 13. В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

Решение. Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

Задача 14. Сколькими способами можно разложить n_1 красных, n_2 зеленых и n_3 синих шаров по m урнам?

Решение. Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

4.5 Разбиения

Утверждение 7. *При упорядоченном разбиении n-элементного множества на непересекающиеся подмножества мощности $n_1, n_2, ..., n_S$ количество различных вариантов разбиения равно*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! ... n_S!} \tag{4.12}$$

Например, рассмотрим такой пример:
Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на верхней полке оказалась 1 книга, на средней полке 3 книги, а на нижней полке 4 книги. Сколькими способами это можно сделать?
В данном примере множество из восьми книг разбивается на три непересекающихся подмножества мощности 1, 3 и 4. Согласно формуле, количество различных вариантов выпонить такое разбиение равно $\frac{8!}{1!3!4!} = 280$. Если бы в условии задачи не было конкретно указано, сколько книг должно быть на каждой полке, то общее число различных вариантов расставить книги по трем полкам было бы равно 3^8, поскольку каждая из восьми книг может оказаться на любой из трех полок.
Рассмотрим второй подход к определению числа различных вариантов разибения, когда подмножества с одинаковой мощностью неразличимы. В этом случае получаем так называемое неупорядоченное разбиение.

Утверждение 8. *Пусть в наборе $n_1, n_2, n_3, ..., n_S$ только k различных чисел и они встречаются в этом наборе $m_1, m_2, m_3, ..., m_S$ раз. Тогда при* *неупорядоченном разбиении n-элементного множества на непересекающиеся подможножества мощности $n_1, n_2, n_3, ..., n_S$ количество разных вариантов разбиения равно:*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_S!m_1!m_2!...m_k!} \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь такой пример:
Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось 2 книги, а на двух других - по 3 книги. Сколькими способами это можно сделать?
Поскольку в данной формулировке полки не различимы, то речь идет о неупорядоченном разбиении множества книг на три подможества мощности 2, 3 и 3. Параметры здесь $m_1 = 1, m_2 = 2$, поэтому согласно формуле число разных способов расставить книги так, как это требуется в условии задачи, равно

$$\frac{8!}{2!3!3!1!2!} = 280$$

Глава 5

Производящие функции

5.1 Производящие функции и их основные свойства

Утверждение 9. *Пусть имеется последовательность чисел* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.1}$$

Требуем, чтобы данный ряд сходился хотя бы при малых x.
Рассмотрим свойства производящих функций и некоторые их доказательства.

1. **Линейность.** Пусть $c_n = pa_n + qb_n$, $p, q = const$ Тогда

   $$C(x) = pA(x) + qB(x) \tag{5.2}$$

   Доказательство

   $$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

2. **Сдвиг вправо.** Сдвиг начала последовательности вправо на i позиций. Пусть $b_n = a_{n-i}, n \geq i$, $b_n = 0, 0 \leq n \leq i-1$, тогда

   $$B(x) = x^i A(x) \tag{5.3}$$

Доказательство

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^n = x^i \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^i A(x)$$

3. **Сдвиг влево.** Сдвиг начала последовательности влево на i позиций. Пусть последовательность чисел b_n и a_n связаны: $b_n = a_{n+i}$ Тогда

$$B(x) = x^{-i}(A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) \tag{5.4}$$

Доказательство

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^n = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i} =$$

$$x^{-i}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) = x^{-i}(A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k)$$

4. **Частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \tag{5.5}$$

Доказательство Функция $\frac{1}{1-k}$ при $|x| < 1$ в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Поэтому в некоторой окрестности $x = 0$

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$$

5. **Дополнительная частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \tag{5.6}$$

6. **1 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = na_n$. Тогда
$$B(x) = xA'(x) \tag{5.7}$$

7. **2 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = \frac{a_n}{n+1}$. Тогда
$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx \tag{5.8}$$

8. **Свертка.** Пусть $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ Тогда
$$C(x) = A(x)B(x) \tag{5.9}$$

5.2 Задачи

Задача 15. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$. Для последовательности $a_n = 1$ будет $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Задача 16. $\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}, |x| < 1$ Следовательно, производящей функцией для последовательности $a_n = \frac{1}{n+1}$ будет $A(x) = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{1-x}$

Задача 17. Дана последовательность $a_n = q^n$. Найти ее производящую функцию.

Решение.
$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} = (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

Задача 18. Дана последовательность $a_n = n$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Запишем новую последовательность $b_n = 1$ и выразим a_n через нее: $a_n = nb_n$. Теперь можно воспользоваться свойством 5.7:
$$B(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$A(x) = xB'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Задача 19. Дана последовательность $b_n = n^2$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Как и в прошлом примере введем новую последовательность $a_n = n$ и выразим через нее b_n: $b_n = na_n$. Снова дважды вспомним 5.7 используя результат предыдущей задачи:

$$B(x) = xA'(x)$$
$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$B(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Задача 20. Дана последовательность $a_n = n(2^n + (-1)^n n), n \geq 0$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Сперва раскроем скобки:

$$a_n = 2^n n + (-1)^n n^2$$

Теперь разделим изначальную последовательность на 2 части: Первая часть будет $b_n = 2^n n$, а вторая $c_n = (-1)^n n^2$.
Тогда производящая функция a_n будет равна $A(x) = B(x) + C(x)$. Найдем теперь производящие функции у каждой части:
1. Введем новую последовательность $k_n = 2^n$ и выразим $b_n = k_n n$. Используя свойства 5.5 и 5.7 найдем $B(x)$ используя $K(x)$:

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$$
$$B(x) = xK'(x) = x(\frac{1}{1-2x})'_x = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

2. Для второй части тоже следует ввести новые последовательности: $d_n = (-1)^n$ и $m_n = (-1)^n n = d_n n$. Выразим теперь $c_n = m_n n$. Будем использовать те же свойства, только больше ;)

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$
$$M(x) = xD'(x) = x(\frac{1}{1+x})'_x = \frac{-x}{(1+x)^2}$$
$$C(x) = xM'(x) = x(\frac{-x}{(1+x)^2})'_x = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3}$$

Теперь вычислим $A(x)$:

$$A(x) = B(x) + C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} + \frac{x^2 - x}{(1+x)^3}$$

5.3 Линейные рекуррентные соотношения

Утверждение 10. *Линейным рекуррентным соотношением относительно последовательности a_n называется соотношение вида*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + d_n \qquad (5.10)$$

где k - заданное натуральное число, $n = 1, 2, 3, ...$

При этом должны быть заданы начальные значения $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$, а также коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_k$ и последовательность d_n. Решением этого соотношения называется аналитическая формула для a_n, удовлетворяющая ему, а так же заданным начальным значениям.

Линейное рекуррентное соотношение называется **однородным**, если числа $d_n = 0$. В противном случае оно называется **неоднородным**.

Задача Фибоначчи и рекуррентное соотношение для нее.
Первой известной задачей, приведшей к рекуррентному соотношению, является задача Фибоначчи о кроликах. Ставится она следующим образом. Пусть в начальный момент была одна пара только что родившихся кроликов. Предполагается, что такая пара достигнет зрелости через месяц и еще через месяц она даст потомство в виде новой пары разнополых кроликов. Задача состоит в определении числа пар кроликов по прошествии n месяцев.
Пусть в n-ый месяц имеется M молодых пар и N зрелых пар кроликов. Тогда в $n+1$-ый месяц будет N молодых пар и $M+N$ зрелых пар, а в $n+2$-ой месяц будет $M+N$ молодых пар и $M+2N$ зрелых пар. Таким образом, общее число пар кроликов в n-ый месяц равно $M+N$, в $n+1$-ый месяц равно $M+2N$ а в $n+2$-ой месяц равно $2M+3N$. Обозначим число пар кроликов в n-ый месяц через n_a. Тогда приходим к следующему выводу:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (5.11)$$

Это и есть **рекуррентное соотношение для задачи Фибоначчи**. Начальным условиями для него будут следующие: $a_0 = a_1 = 1$.

5.4 Метод решения линейные рекуррентых соотношений с помощью производящих функций

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + d_n, n \geq 0$$

с заданными начальными условиями $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$.
Введем для неизвестной последовательности a_n производящую функцию $A(x)$, а для заданной последовательности d_n - производящую функцию $D(x)$. Определим теперь производящие функции для левой и правой частей рассматриваемого рекуррентного соотношения, используя свойства 5.2 и 5.4 производящей функции.
Тогда для левой части получим производящую функцию

$$x^{-k}\left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\right)$$

Для правой же части рекуррентного соотношения производящая функция имеет вид:

$$c_1 x^{-k+1}\left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i\right) + c_2 x^{-k+2}\left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i\right) + \\ + c_{k-1}x^{-1}(A(x) - a_0) + c_k A(x) + D(x)$$

Приравнивая эти две производящие функции и умножая их на x_k, получим

$$A(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - ... - c_k x^k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - ... \\ -c_{k-1}x^{k-1}a_0 + x^k D(x)$$

Это равенство можно записать как

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k D(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - ... - c_k x^k} \tag{5.12}$$

где $P_{k-1}(x)$ - многочлен степени $\leq k-1$, имеющий вид

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i - c_2 x^2 \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - ... c_{k-1} x^{k-1} a_0 \qquad (5.13)$$

Этот многочлен полностью определяется заданными начальными значениями $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$.
Для решения рассматриваемого рекуррентного соотношения нужно сначала разложить многочлен $1 - c_1 x - c_2 x^2 - ... - c_k x^k$ на множители, определив его корни. Затем надо представить полученное выше выражение для $A(x)$ в виде суммы простых дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Далее нужно разложить эти простые дроби в ряд Маклорена.
Полученные в результате коэффициенты a_n разложения $A(x)$ в ряд Маклорена и будут являться искомым решением рекуррентного соотношения.

5.5 Задачи

Чтобы было проще решать подобные задачи, можно вывести определенный алгоритм:

1. Определить k, d_n, c_i
2. Если $d_n \neq 0$ вычислить $D(x)$
3. Вычислить P_{k-1} по 5.13
4. Определить и разложить на простые дроби $A(x)$
5. Найти коэффициенты
6. Подставить в $A(x)$
7. Исходя из того, что $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ найти a_n

Задача 21. Рассмотрим рекуррентное соотношение задачи Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$$

Решение. Для него имеем:

$$k = 2, d_n = 0, D(x) = 0, c_1 = c_2 = 1$$

Учитывая, что $k = 2$, используем 5.13, чтобы найти $P_1(x)$. Далее подставляем значения выше:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - c_1 x a_0 = 1$$

Используя 5.12 находим:

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})}$$

где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения трехчлена $1 - x - x^2$:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Представим $A(x)$ в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})} = \frac{C}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{D}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Умножим это равенство на общий знаменатель. Тогда получим:

$$1 = C(1 - \frac{x}{x_2}) + D(1 - \frac{x}{x_1})$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при x^1 и x^0, приходим к двум линейным уравнениям относительно C и D:

$$1 = C + D - x\left(\frac{C}{x_2} + \frac{D}{x_1}\right)$$
$$0 = -\frac{C}{x_2} - \frac{D}{x_1}$$
$$1 = C + D$$

Решая эти уравнения, находим

$$C = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}, D = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Разлагая $A(x)$ в ряд Маклорена, получаем

$$A(x) = C\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + D\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n = \frac{1}{x_1 - x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{x_2^n} - \frac{x_2}{x_1^n}\right)x^n$$

Легко проверить, что

$$x_1 - x_2 = \sqrt{5}$$
$$\frac{1}{x_1} = -x_2$$
$$\frac{1}{x_1} = -x_1 1$$

Поэтому, учитывая определение производящей функции $A(x)$, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}\right)x^n$$

Отсюда окончательно получаем:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Задача 22.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^n n, a_0 = 3, a_1 = 1$$

Решение. Здесь,

$$k = 2, c_1 = 2, c_2 = -1, d_n = 2^n n$$

Сначала найдем производящую функцию $D(x)$ для d_n. Производящая функция для последовательности 2^n равна $\frac{1}{1-2x}$. Применяя свойство 5.7, находим

$$D(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Определим теперь многолчен $P_{k-1}(x) = P_1(x)$, входящий в формулу для производящей функции $A(x)$ последовательности a_n, используя 5.13:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - 2xa_0 = 3 - 5x$$

В результате, формула для $A(x)$ приобретает вид

$$A(x) = \frac{3 - 5x + \frac{2x^3}{(1-2x)^2}}{1 - 2x + x^2} = \frac{(3-5x)(1-2x)^2 + 2x^3}{(1-2x)^2(1-x)^2}$$

Числитель последней дроби имеет корень 1 и, значит, делится на $1 - x$. Сокращая в этой дроби числитель и знаменатель на $1 - x$, находим

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1-2x)^2(1-x)}$$

Разложим $A(x)$ на простые дроби:

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1-2x)^2(1-x)} = \frac{C_1}{(1-2x)^2} + \frac{C_2}{1-2x} + \frac{C_3}{1-x}$$

где C_i - постоянные. Умножая данное равенство на общий знаменатель, получаем

$$3 - 14x + 18x^2 = C_1(1-x) + C_2(1-2x)(1-x) + C_3(1-2x)^2$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, приходим к системе уравнений относительно C_1, C_2, C_3:

$$\begin{aligned} 18 &= 2C_2 + 4C_3 \\ -14 &= -C_1 - 3C_2 - 4C_3 \\ 3 &= C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1 = 1, C_2 = -5, C_3 = 7$$

Разлагая простые дроби в выражении для $A(x)$ в ряд Маклорена, используя 5.6, получаем

$$A(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2x)^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + C_3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Следовательно, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n-4)2^n + 7\right] x^n$$

Задача 23. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Решение. Будем искать решение в виде $u_n = q^n$:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$
$$q^2 - q - 1 = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$u_{\text{общ}} = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{5.14}$$

Задача 24. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 1 - 4^n$$

Решение. Ищем однородное:

$$a_n = q^n$$
$$q^3 - 3q^2 + 3q - 1 = 0$$
$$(q-1)^k = (q-1)^3 = 0$$
$$q = 1$$

Кратность равна k = 3. Тогда,

$$U_{\text{одн}} = P(k-1)q^n = (A + Bn + Cn^2)1^n$$

Теперь найдем правую часть для 1:

$$d_n = 1 \cdot 1^n$$
$$U_{\text{част 1}} = An^3 1^n$$
$$A(n+3)^3 - 3A(n+2)^3 + 3A(n+1)^3 - An^3 = 1$$
$$3^3 A - 3A \cdot 2^3 + 3A = 1$$
$$A(27 - 24 + 3) = 1$$
$$6A = 1$$
$$A = \frac{1}{6}$$
$$U_{\text{част 1}} = \frac{n^3}{6}$$

Далее для 4^n:

$$d_n = -4^n = (-1)4^n$$
$$U_{\text{част 2}} = A \cdot 4^n$$
$$A \cdot 4^{n+3} - 3A \cdot 4^{n+2} + 3A \cdot 4^{n+1} - A \cdot 4^n = -4^n$$
$$A \cdot 4^3 - 3A \cdot 4^2 + 12A - A = -1$$
$$27A = -1$$
$$A = \frac{-1}{27}$$
$$U_{\text{част 2}} = \frac{-4^n}{27}$$

Итог:

$$U_{\text{общ}} = U_{\text{одн}} + U_{\text{част 1}} + U_{\text{част 2}}$$
$$U_{\text{общ}} = A + Bn + Cn^2 + \frac{n^3}{6} - \frac{4^n}{27}$$

Глава 6

Теория графов

6.1 Основные определения

Пусть M и N - два конечных множества. Будем называть пару множеств $\langle M, N \rangle$ **ориентированным графом**. При этом элементы множества M называются **вершинами** графа, элементы множества N - **дугами** графа. Граф, у которого направления соединения не определены, называется **неориентированным графом**. В них соединения называются **ребром**, а вершина - **узлом**.

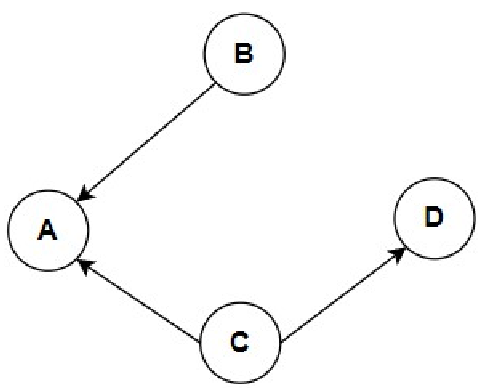

Рис. 6.1: Ориентированный граф

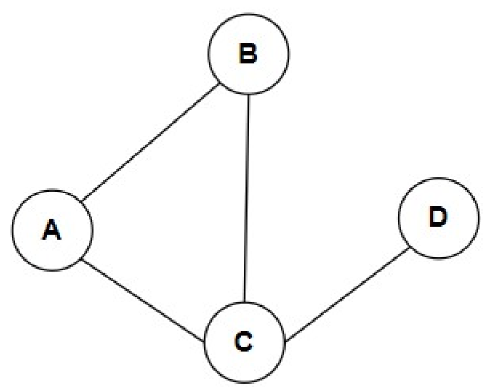

Рис. 6.2: Неориентированный граф

Висячей вершиной называется вершина, которая соединена только с одной соседней вершиной.

Степенью вершины называется количество ребер, соединенных с этой вершиной. Если степень вершины равна 0, то такая вершина называется **изолированной**. Степень вершины может быть **входящей** и **исходящей**. Входящая степень вершины v это количество ребер вида $\langle i, v \rangle$, то есть количество ребер которые входят в v. Исходящая степень вершины v это количество ребер вида $\langle v, i \rangle$, то есть количество ребер которые входят из v.

Теорема 11. *В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.*

Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется **петлей**.
Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **простым путем**, если

1. число его дуг k на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать M' числами от 0 до k и N' числами от 1 до k, что для любой дуги $u \in N'$

Пусть num - это получение номера дуги или вершины, а $beg(u)$ и $end(u)$ начало и конец дуги u соответственно. Тогда для любой дуги u в графе верно выражение:

$$num(u) = num(end(u)) = num(beg(u)) + 1 \tag{6.1}$$

Различие между **путем** и **простым путем** заключается в том, что во втором случае недопустимы повторы вершин и дуг в пути.

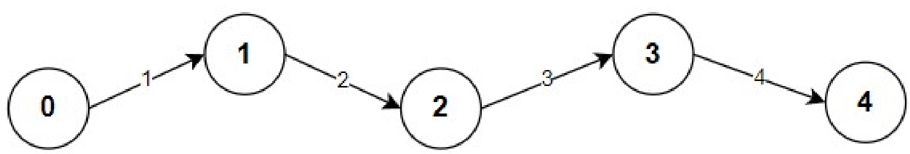

Рис. 6.3: Простой путь

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **цепью**, если:

1. число его дуг k на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать M' числами от 0 до k и N' числами от 1 до k, что для любой дуги $u \in N'$

То есть, он включает либо условие простого пути 6.1, либо

$$num(u) = num(end(u)) + 1 = num(beg(u)) \tag{6.2}$$

Дуги, для которых выполняется 6.1, принято называть **положительно ориентированными**, а те, для которых выполняется 6.2 **отрицательно ориентированными**.

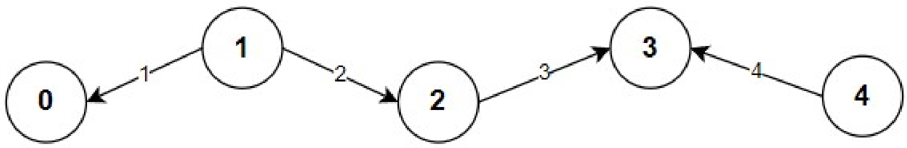

Рис. 6.4: Цепь

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **контуром**, если

1. число дуг k равно числу вершин
2. можно так пронумеровать M' и N' числами от 1 до k, что для любой дуги $u \in N'$

$$num(u) \overset{\text{mod k}}{=} num(end(u)) \overset{\text{mod k}}{=} num(beg(u)) + 1 \tag{6.3}$$

Иными словами, контур - это простой путь, где начало и конец совпадают.

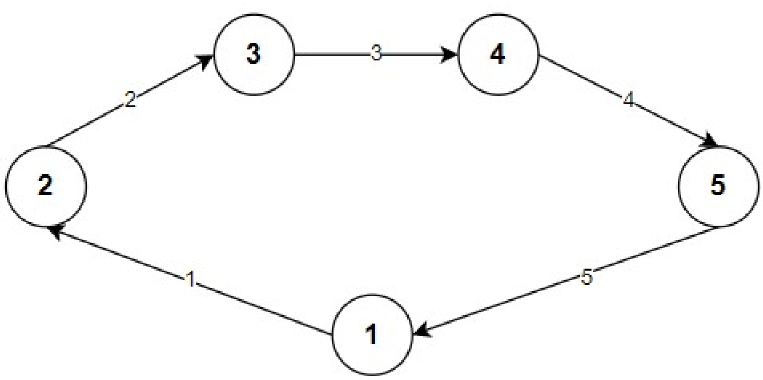

Рис. 6.5: Контур

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **циклом**, если

1. число дуг k равно числу вершин

2. можно так пронумеровать M' и N' числами от 1 до k, что для любой дуги $u \in N'$

$$num(u) \overset{\text{mod k}}{=} num(end(u)) \overset{\text{mod k}}{=} num(beg(u)) + 1 \tag{6.4}$$

либо

$$num(u) \overset{\text{mod k}}{=} num(end(u)) + 1 \overset{\text{mod k}}{=} num(beg(u)) \tag{6.5}$$

Цикл - это цепь, в которой начало и конец совпадают.

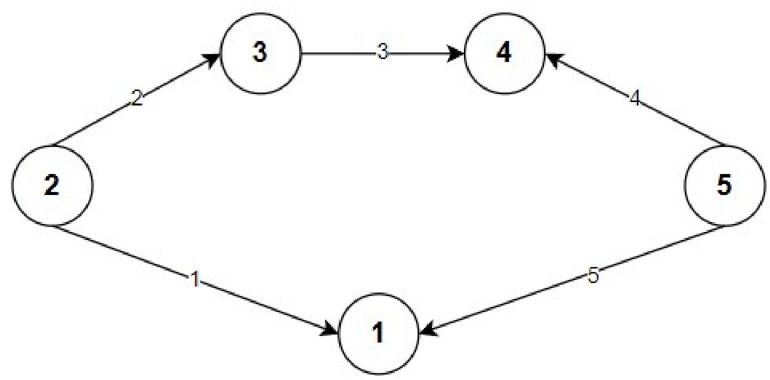

Рис. 6.6: Цикл

6.2 Связность. Компоненты связности и сильной связности

Граф $\langle M, N\rangle$ называется **связным**, если любые две различные его вершины можно соединить цепью. Любой граф может быть однозначно разделен на максимальные связные подграфы, которые называют его **компонентами связаности**. с
Граф $\langle M, N\rangle$ называется **сильно связным**, если любые две различные вершины A и B можно соединить путем с началом в A и концом в B. В любом графе можно однозначно выделить максимальные сильно связные подграфы, которые называются его **компонентами сильной связности**.

Теорема 12. *Граф компонент сильной связности не имеет контуров.*

6.3 Матричные представления графов

Прежде чем приступить к понятию "дерево изучим различные способы представления графов. Наиболее известные формы это **матрица инциденций** и **матрица смежности**. Для начала рассмотрим более простой вариант - матрицу смежности.

Матрицей смежности графа $\langle M, N \rangle$ называется такая квадратная матрица $M \times M$ (то есть индексами строк и столбцов являются вершины графа), в которой значением пересечения i-ой строки и j-го столбца является число дуг с началом в i и концом j.

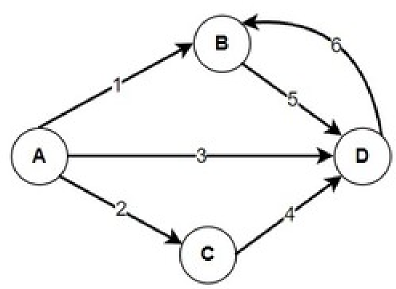

Рис. 6.7: Граф

	1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0
B	-1	0	0	0	1	-1
C	0	-1	0	1	0	0
D	0	0	-1	-1	-1	1

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	1	0	0

Рис. 6.8: Способы матричного представления графа 6.7: матрица инциденций и матрица смежности соответственно

Матрицей инциденции графа $\langle M, N \rangle$ называется такая матрица $M \times N$, где индексами строк являются вершины, а индексами столбцов дуги. Элемент на пересечении i-ой строки и j-ого столбца равен 1, если является началом в вершине под i-ым индексом и принадлежит дуге под j-ым индексом. Если же данная дуга имеет конец в этой вершине, то ставится -1.

6.4 Деревья

Чтобы ввести термин "дерево нам нужно изучить следующую теорму:

Теорема 13. *В связном графе $\langle M, N \rangle$ найдется частичный граф связный граф $\langle M, N' \rangle$, в котором количество вершин больше количества дуг на единицу. Пусть $|N'| = k$, тогда если пронумеровать вершины из M числами от 0 до k, а дуги из N' числами от 1 до k таким образом, что для любой дуги $u \in N'$ выполняется соотношение*

$$num(u) = max\{num(beg(u)), num(end(u))\} \tag{6.6}$$

Следствие 13.1. *Если $|N| < |M| - 1$, граф не может быть связан.*

Следствие 13.2. *Если $|N| > |M| - 1$, граф содержит циклы.*

Связный граф, в котором число дуг на 1 меньше числа вершин, называется **деревом**. Такие деревья могут не иметь корня, в отличие от тех деревьев, которые мы обычно представляем. Если подобное дерево имеет корень, то оно называется **ориентированным деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется его **остовным деревом** (spanning tree).
Теперь можно присутпить к изучению алгоритма нахождения остовного дерева методом вычеркивания.

6.5 Алгоритмы нахождения остовного дерева

Алгоритм ближайшего соседа

1. В весовой матрице выбираем произвольную вершину.
2. Ищем в этой весовой вершине минимальную дугу в другую вершину.
3. Ищем среди этих вершин снова минимальную дугу уже в новую вершину.
4. Продолжаем до тех пор, пока не пометим все вершины.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	∞	4	6	∞
B	5	0	∞	7	5	4
C	∞	∞	0	5	6	4
D	4	7	5	0	8	3
E	6	5	6	8	0	∞
E	∞	4	4	3	∞	0

Таблица 6.1: Весовая матрица

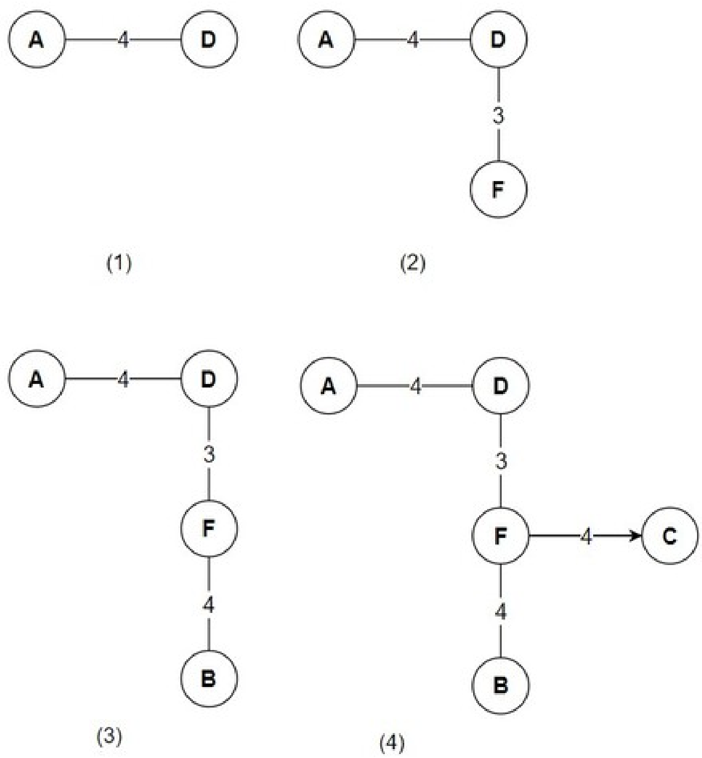

Рис. 6.9: Алгоритм ближайшего соседа

Приведем пример. Пусть есть следующая весовая матрица:
На рисунке 6.9 изображен алгоритм построения остовного дерева для весовой матрицы выше. Пусть произвольная вершина будет A. Минимальное ребро идет в вершину D. Далее выбираем среди этих двух вершин минимальное ребро, и это D -> F. По такому же алгоритму достраиваем

остовное дерево.

Жадный алгоритм

Этот алгоритм основан по большей части на том, что каждый раз мы выбираем минимальное ребро на каждом этапе, а далее объединяем полученные ребра в остовное дерево. Для той же весовой матрицы покажем: На рисунке 6.10 изображено построение остовного дерева с помощью жадного алгоритма.

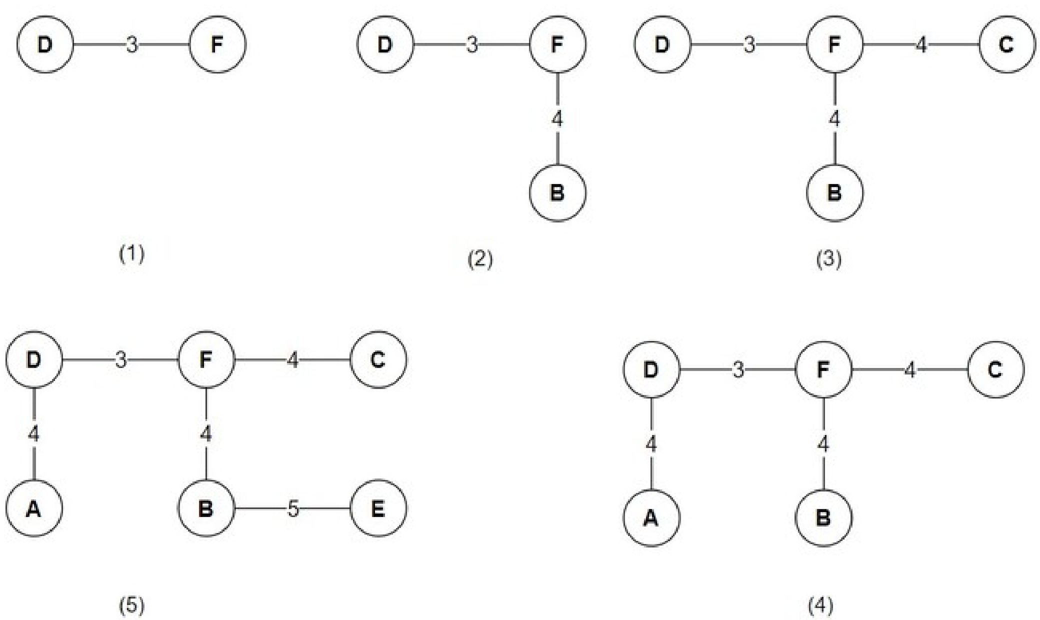

Рис. 6.10: Жадный алгоритм

Самое минимальное ребро равно 3 с вершинами D и F. Далее мы имеем 3 равнозначеных ребра равных 4: F и B, F и C, D и A. Строми последовательно их. Не хватает последнего ребра E. Можно заметить, что самое минимальное ребро с этой вершиной из B. Остовное дерево построено.

Алгоритм вычеркивания

1. В матрице инцидентности $N \times N - 1$ проверяем наличие нулевых строк. Если есть, то имеем неостовное дерево.

2. Если нет, то проверяем наличие строк с одной единицей и вычеркиваем строку и столбец, проходящие через эту единицу

3. Повторяем пункт 1 и 2 до тех пор, пока не придем к выводу, что это неостовное дерево или если все столбцы вычеркнуты, то рассмотренные ребра образуют остовное дерево

Рассмотрим пример. Имеем следующую матрицу инцидентности:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Таблица 6.2: Матрица инциденций

Теперь проверим, являются ли ребра 1, 2, 5, 7 и 8 остовным деревом:

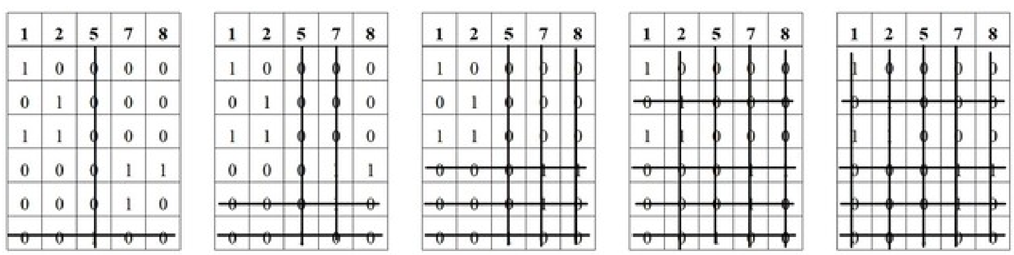

Рис. 6.11: Алгоритм вычеркивания

Так как в процессе у нас не возникло нулевых строк и в итоге все строки и столбцы были зачеркнуты, данные ребра образуют остовное дерево. Например, ребра 1, 2, 4, 5 и 8 не будут образовывать остовное дерево, так как 5 строчка будет состоять только из нулей.

6.6 Задача о кратчайшем пути

Для начала введем новый термин "весовая матрица". Пусть у нас есть ориентированный граф, дуги которого имеют определенный вес (поло-

жительное число).
Весовая матрица это квадратная матрица $M \times M$ (индексами строк и столбцов являются вершины), где элемент под i-ой строкой и j-ым столбцом имеет вес дуги из вершины под индексом i в вершину под индексом j.

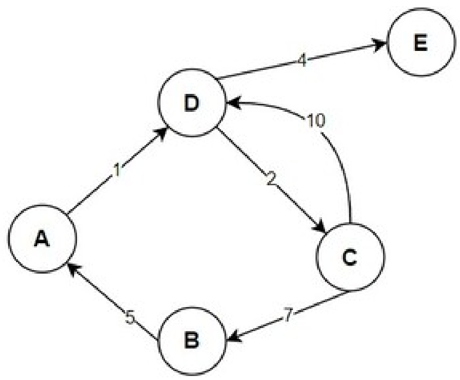

Рис. 6.12: Граф

	A	B	C	D	E
A	0	∞	∞	1	∞
B	5	0	∞	∞	∞
C	∞	7	0	10	∞
D	∞	∞	2	0	4
E	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 6.3: Весовая матрица графа 6.12

Чтобы не путаться и обозначить, что из i-ой вершины в j-ую нет пути, будем писать знак бесконечности.
Теперь, собственно, приступим к самой задаче нахождения кратчайшего расстояния между двумя вершинами. Предположим, нам нужно найти кратчайший путь из A в F для матрицы 6.4:
Создадим новую таблицу, в которой за строки возьмем количество дуг, которые можно провести из одной вершины в другую, а за столбцы сами эти вершины. Будем построчно заполнять таблицу, тем самым найдя кратчайший путь из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A	0	10	3	∞	∞	∞
B	∞	0	5	∞	∞	3
C	∞	4	0	2	6	∞
D	∞	1	∞	0	5	∞
E	∞	∞	∞	∞	0	4
F	∞	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 6.4: Весовая матрица

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
1	0	10(1)	3(1)	∞	∞	∞
2	0	7(3)	3(1)	5(3)	9(3)	13(2)
3	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	10(2)
4	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)
5	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)
6	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)

Таблица 6.5: Поиск кратчайшего пути из A в F

Логика такая: смотрим, как можно попасть в данную вершину с помощью весовой матрицы. Далее если есть смотрим на строчку выше в 6.5 и ищем способы попасть в вершину за k дуг. Прокомментирую первые 2 строчки:

1. Так как мы начинаем с вершины A, то ставим 0. Далее смотрим, как можно попасть в вершину B за 1 дугу по весовой матрице. Смотрим на столбец B: так как мы начинаем путь из вершины A и до других вершин не дошли, самый оптимальный путь это попасть в B из A за 10. В скобочках пишем из какой вершины попали. С остальными вершинами такая же логика. Если попасть в вершину за k дуг пока нельзя, ставим ∞

2. С A ничего не меняется, смотрим на B. В весовой матрице можно заметить, что в B можно попасть из A, C, D. Из A за 10, из C за 4 и из D за 1. Смотрим на предыдущую строчку и ищем эти вершины. За одну дугу в B из A мы попали за 10. В C мы можем попасть из A за 3, а в D пока не можем. И так вариант A -> C -> B выгоднее, чем A -> B, то записываем 4 + 3 = 7(3). Так как в C выгоднее

всего попасть из A, то так и оставляем. В D мы можем попасть из C, то есть A -> C -> D (3 + 2 = 5). В E из C и D, но так как в D, судя по предыдущей строчке, мы попасть никак не можем за 1 дугу, выбираем путь из C, то есть A -> C -> E (3 + 6 = 9). В F мы можем попасть из B и E. По предыдущей строчке смотрим, что в E мы пока попасть не можем, а вот в B из A можем. Значит, путь получается следующим: A -> B -> F (10 + 3 = 13)

3. По такой же логике заполняем остальные строчки.

В результате смотрим на последнюю строчку и столбец F. У нас получилось 9(2). Чтобы восстановить путь, поднимаемся по строчкам и смотрим на вершину в скобках. Как результат: A -> C -> D -> B -> F

Литература

1. Дискретный анализ. Романовский И.В.

2. Дискретная математика и комбинаторика. Джеймс А. Андерсон

3. Дискретная математика. Часть 1: Начальные понятия теории множеств и отношений, математическая логика. Некрасова М.Г.