

Конспект по дискретной математике
На основе лекций Рабиновича А.С

Рустамова Дарина

2022

Оглавление

1	Теория множеств	3
1.1	Основные понятия	3
1.2	Операции над множествами	4
1.3	Законы теории множеств	5
2	Элементы математической логики	7
2.1	Основные понятия и операции	7
2.2	Многочлен Жегалкина	9
2.3	Задачи	9
3	Отношения	11
3.1	Основные понятия	11
3.2	Правила вывода клауз	12
3.3	Задачи	13
4	Комбинаторика	15
4.1	Размещения	15
4.2	Сочетания	16
4.3	Перестановки	19
4.4	Задачи	20
4.5	Разбиения	21
5	Производящие функции	23
5.1	Производящие функции и их основные свойства	23
5.2	Задачи	25
5.3	Линейные рекуррентные соотношения	27
5.4	Метод решения линейных рекуррентных соотношений с помощью производящих функций	28

5.5	Задачи	29
6	Теория графов	37
6.1	Основные определения	37
6.2	Связность. Компоненты связности и сильной связности . .	40
6.3	Матричные представления графов	41
6.4	Деревья	42
6.5	Алгоритмы нахождения остовного дерева	42
6.6	Задача о кратчайшем пути	45

Глава 1

Теория множеств

1.1 Основные понятия

Множество - это совокупность каких-либо объектов. Множества бывают конечными, бесконечными пустыми, счестными и бесчетными.

Мощность множества: $|A|$

Если между двумя множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, тогда множества называются **равномощными**.

$$|A| = |B| \quad (1.1)$$

Теорема Кантора. Множество подмножеств любого множества, имеет мощность больше, чем само множество.

Обычно в множество подмножеств входит пустое множество и само множество.

Чтобы проверить теорему Кантора, рассмотрим конечное множество и рассмотрим множество подмножеств конечного множества из n элементов. Например, рассмотрим множество из 2-х элементов

$$A = \{1, 2\}$$

Множество подмножеств равно

$$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Рассмотрим из множество 3-х элементов

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Множество подмножеств равно

$$B_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Напрашивается закономерность, что

$$|A_n| = 2^{|A|} \quad (1.2)$$

где $|A_n|$ - мощность множества подмножеств множества из n элементов
Выведем так же несколько формул для мощность множества подмножеств:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-1}| = 2|A_{n-1}| \quad (1.3)$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| = 2^2|A_{n-2}| = \dots = 2^n|A_0| = 2^n \quad (1.4)$$

Поставим вопрос: сколько будет подмножеств из n элементов содержащих k элементов? Отвечаю. C_n^k - число подмножеств из k элементов.

Стоит заметить, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (1.5)$$

1.2 Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединение

$$A \cup B = \{x : x \in A \cup x \in B\} \quad (1.6)$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x : x \in A \cap x \in B\} \quad (1.7)$$

Дополнение

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\} \quad (1.8)$$

Вычитание

$$A \setminus B = \{x : x \in A \cap x \notin B\} = A \cap \overline{B} \quad (1.9)$$

Сумма

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad (1.10)$$

1.3 Законы теории множеств

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.11)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.12)$$

2. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (1.13)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (1.14)$$

3. Закон идентичности

$$A \cup A = A \quad (1.15)$$

$$A \cap A = \emptyset \quad (1.16)$$

4. Закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.17)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.18)$$

5. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (1.19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (1.20)$$

6. Закон де-Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.21)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.22)$$

7. Закон нуля и единицы

$$0 = \emptyset \quad (1.23)$$

$$1 = \mathbb{U} \quad (1.24)$$

8. **Двойное отрицание**

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (1.25)$$

9. **Законы склеивания**

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \quad (1.26)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad (1.27)$$

Пример некоторых доказательств.

Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap 1) \cup (A \cap B) = A \cap (1 \cup B) = A \cap 1 = A \quad (1.28)$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup 0) \cap (A \cup B) = A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A \quad (1.29)$$

Закон скелливания

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup 0 = A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap 1 = A \quad (1.31)$$

Рассмотрим формулу дистрибутивности в следующем виде:

$$A_1 \cap (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap B_n) \quad (1.32)$$

Формула включения и исключения

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.33)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.34)$$

Доказательства оставляю читателю :)

Задача 1. Сколько имеется целых чисел от 1 до 1000 которые не делятся на 3, 5, 7?

Решение. Возьмем A_3 - числа, делящиеся на 3, A_5 - числа, делящиеся на 5, A_7 - числа, делящиеся на 7.

При этом, $|A_3| = \frac{1000}{3} = 333$, $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$, $|A_7| = \frac{1000}{7} = 142$ $|A_{15}| = \frac{1000}{3*5} = 66$, $|A_{21}| = \frac{1000}{3*7} = 47$, $|A_{35}| = \frac{1000}{7*5} = 28$, $|A_{105}| = \frac{1000}{3*5*7} = 9$

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$$

Ответ: $1000 - 543 = 457$

Глава 2

Элементы математической ЛОГИКИ

2.1 Основные понятия и операции

Пусть A - множество и

$$a = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Проведем аналогию из теории множеств в математическую логику:

$$A \cup B \rightarrow a \vee b \quad (2.2)$$

$$A \cap B \rightarrow a \wedge b \quad (2.3)$$

$$\overline{A} \rightarrow \bar{a} \quad (2.4)$$

$$A - B \rightarrow a - b = a \wedge \bar{b} \quad (2.5)$$

$$A + b \rightarrow a + b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a}) \quad (2.6)$$

Дистрибутивность

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (2.7)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (2.8)$$

Поглощение

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (2.9)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (2.10)$$

Законы де-Моргана

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.11)$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.12)$$

Законы склеивания

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a \quad (2.13)$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a \quad (2.14)$$

Дополнительные логические операции

1. Стрелка Пирса:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} \quad (2.15)$$

2. Штрих Шеффера:

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad (2.16)$$

3. Импликация:

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee b \quad (2.17)$$

4. Эквивалентность:

$$a \sim b = \overline{a + b} = \overline{(a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})} \quad (2.18)$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная функция (СДНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(0, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \wedge f(1, 0, \dots, 0)) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge f(1, 1, \dots, 1)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Совершенная конъюнктивная нормальная функция (СКНФ)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(1, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \vee f(0, 1, \dots, 1)) \\ & \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \vee f(0, 0, \dots, 0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2 Многочлен Жегалкина

Рассмотрим основные свойства

$$\bar{a} = 1 + a \quad (2.21)$$

$$a \wedge b = ab \quad (2.22)$$

$$a \vee b = a + b + ab \quad (2.23)$$

$$a + a = 0 \quad (2.24)$$

$$a - b = a \wedge \bar{b} = a(1 + b) = a + ab \quad (2.25)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.26)$$

$$a + b = b + a \quad (2.27)$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b} = (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \quad (2.28)$$

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab \quad (2.29)$$

$$a \rightarrow b = \overline{a - b} = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + a(1 + b) = 1 + a + ab \quad (2.30)$$

$$a \sim b = \overline{a + b} = 1 + a + b \quad (2.31)$$

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ) Получается из СДНФ заменой \vee на $+$, $\bar{x} = 1 + x$ и $x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

$$(1 + a)(1 + b)f(0, 0) + a(1 + b)f(1, 0) + (1 + a)bf(0, 1) + abf(1, 1) \quad (2.32)$$

2.3 Задачи

Задача 2. Проверить $(a \mid b) \mid c = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \mid b = \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 + ab$$

$$(a \mid b) \mid c = (1 + ab) \mid c = 1 + c(1 + ab) = 1 + c + abc$$

$$a \mid (b \mid c) = a(1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

Ответ: неверное равенство.

Задача 3. Доказать $a \rightarrow (b \wedge c) = a \mid (b \mid c)$

Решение.

$$a \rightarrow (b \wedge c) = \bar{a} \vee (\overline{b \wedge c}) = \bar{a} \vee \overline{b} \mid \overline{c} = a \mid (b \mid c)$$

Задача 4. Доказать $a \downarrow ((b - a) \sim b) = 0$

Решение.

$$\begin{aligned} a \downarrow (1 + (b - a) + b) &= a \downarrow (1 + b + ab + b) = a \downarrow (1 + ab) = \\ &= (1 + a)(1 + 1 + ab) = (1 + a)ab = \bar{a}ab = 0 \end{aligned}$$

Глава 3

Отношения

3.1 Основные понятия

Введем новые обозначения, аналогичные обозначениям в математической логике.

Отношения	Мат. логика
$=$	\sim
\wedge	$,$
\vee	$;$
\Rightarrow	\rightarrow

Тавтология

$$1 \rightarrow \overline{P}_1; \overline{P}_2; \dots; \overline{P}_{n-1}; \overline{P}_n; C \quad (3.1)$$

Противоречие

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \overline{C} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Отношения эквивалентности

- Рефлексивность

$$A \sim A \quad (3.3)$$

- Симметричность

$$A \sim B \rightarrow B \sim A \quad (3.4)$$

- Транзитивность

$$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C \quad (3.5)$$

Отношения порядка

- Рефлексивность

$$A \rightarrow A \quad (3.6)$$

- Антисимметричность

$$A \Rightarrow B, \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (3.7)$$

- Транзитивность

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \text{ то } A \Rightarrow C \quad (3.8)$$

3.2 Правила вывода клауз

Выведем несколько формул, далее из них сформируем правила.

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \bar{A}; B \quad (3.9)$$

Теперь воспользуемся этой формулой, чтобы вывести другие:

$$\begin{aligned} & P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow C \\ & P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C \\ & \overline{P_1, P_2, \dots, P_n} \vee C \\ & \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_n \vee C \\ & \overline{\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & \overline{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \vee (\bar{P}_n \vee C)} \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow (\bar{P}_n; C) \\ & P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \Rightarrow \bar{P}_n; C \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как далее пойдет немного сложноватая часть, я постараюсь пояснить.

1.

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B \quad (3.11)$$

Используем формулу 3.9, чтобы доказать

$$\begin{aligned} & A, \bar{A}; B \Rightarrow B \\ & \emptyset; B \Rightarrow B \end{aligned}$$

2.

$$A \Rightarrow B \rightarrow A \quad (3.12)$$

Так же заменяем $B \rightarrow A$ формулой 3.9, а далее используем 3.10, то есть из последнего получаем первое выражение

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \overline{B}; A \\ A, B &\Rightarrow A \end{aligned}$$

3.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \quad (3.13)$$

Используя предыдущую формулу 3.12 переносим A налево

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Первую часть заменяем согласно 3.11 и снова используем эту же формулу.

$$\begin{aligned} B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Доказано!

3.3 Задачи

Теперь будем доказывать несколько примеров.

Задача 5.

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)) \\ A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C &\Rightarrow B \vee D \\ (A, A \rightarrow B) \vee (C, C \rightarrow D) &\Rightarrow B \vee D \end{aligned}$$

Задача 6.

$$\begin{aligned} A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow D, D \rightarrow C &\Rightarrow C \\ A \rightarrow C, A \vee B, B \rightarrow C &\Rightarrow C \\ (A, A \rightarrow C); (B, B \rightarrow C) &\Rightarrow C \\ C &\Rightarrow C \end{aligned}$$

Задача 7.

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (C \wedge D); \bar{A} &\Rightarrow C \\ (A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Rightarrow A; C \\ A \vee C &\Rightarrow A; C\end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned}(A \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (\bar{A} \vee C) \rightarrow (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ \overline{(\bar{A} \vee C)} \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ (A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B) &\Rightarrow A \vee B \\ A \vee B &\Rightarrow A \vee B\end{aligned}$$

Глава 4

Комбинаторика

4.1 Размещения

Утверждение 1. *Размещения без повторений - это упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов, если $k \leq n$.*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4.1)$$

Предположим, у нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 2 различных элемента из этого множества?

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Докажем количество с помощью формулы,

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Можно заметить, что $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ это два разных способа размещения. Так же в этом случае элементы не могут повторяться. Если мы хотим, чтобы они повторялись, следует рассмотреть **размещения с повторениями**.

Утверждение 2. *Размещения с повторениями - это упорядоченный набор из k элементов из некоторого множества различных n элементов при условии, что элементы из этой выборки могут повторяться.*

$$A_n^k = n^k \quad (4.2)$$

Рассмотрим тот же пример. У нас есть множество $\{1, 2, 3\}$. Сколько существует способов разместить 2 элемента с повторениями?

$$\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2\}, \dots, \{2, 3\}, \{3, 2\}$$

Посмотрим количество, используя формулу.

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

То есть, в данном случае, мы можем к предыдущему ответу (6) прибавить 3, то есть 3 пары одинаковых элементов.

Замечание. Если бы k был равен 3, то пришлось бы учитывать такие размещения как $\{1, 1, 2\}$. То есть повторяться числа могут сколько угодно.

А что если мы не хотим учитывать порядок элементов? С этим нам поможет **сочетания**.

4.2 Сочетания

У нас все так же есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Сколькими способами мы можем выбрать 2 элемента из этого множества (множества из 3-х элементов)?

Утверждение 3. Сочетания без повторений - это способ выбрать k из n различных предметов без учета порядка.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.3)$$

То есть ответом на наш вопрос будут наборы:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

И их количество покажем используя формулу:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Можно заметить, что порядок не учитывался, в отличие от размещений. Теперь отвлечемся и вспомним, что такое **бином Ньютона**.

Утверждение 4. Бином Ньютона - это формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} C_n^k \quad (4.4)$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты, n - неотрицательное целое число.

Например,

$$(x + y)^2 = x^0 y^2 + x^1 y^1 C_2^1 + x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (4.5)$$

$$(x + y)^3 = x^0 y^3 + x^1 y^2 C_3^1 + x^2 y^1 C_3^2 + x^3 y^0 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + y^3 \quad (4.6)$$

Считать таким образом бином Ньютона можно долго, но чтобы упростить задачу мы можем вычислять только биномиальные коэффициенты, используя треугольник Паскаля.

Утверждение 5. Треугольник Паскаля - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Или в виде сочетаний:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & C_0^0 & & & & & \\ & & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

С его помощью можно быстро находить биномиальные коэффициенты, где номер строки является числом n в бинOME Ньютона. Следует учесть, что строки нумеруются от 0.

Таким образом, коэффициенты из формулы 4.5 можно вывести используя треугольник Паскаля.

Дополнительно, можно прийти к такому следствию:

Следствие 5.1. *С помощью треугольника Паскаля можно вывести закономерность:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (4.7)$$

Теперь зададимся вопросом по аналогии с размещениями. А что если мы хотим считать в сочетаниях повторение элементов? Возьмем все то же множество $\{1, 2, 3\}$ и попробуем составить комбинации из 2 элементов с повторениями.

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 3\} \quad (4.8)$$

Для того чтобы посчитать такое количество комбинаций, придумали **сочетания с повторениями**. Чтобы вывести формулу, можно рассмотреть следующую ситуацию.

У нас в кармане лежит 3 вида монет с бесконечным количеством: 2, 5, 10 копеечные. Сколькими способами мы можем достать из кармана 5 монет, причем порядок не имеет значения. Попробуем нарисовать такую схему: расположим по категориям наши монеты, разделяя их перегородками. Например, пусть в первой категории лежат только 2, в следующей только 5 и далее 10. Рассмотрим несколько таких комбинаций:

$$\begin{array}{c} 2 \ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \\ 2 \mid 5 \mid 10 \ 10 \ 10 \\ 2 \ 2 \ 2 \mid \mid 10 \ 10 \end{array}$$

Можно заметить, что меняя комбинации, мы всего лишь меняем позицию этих перегородок. Таким образом, если мы имеем $n - 1$ количество перегородок, и $k + (n - 1)$ общее количество мест с перегородками, то количество комбинаций, где мы меняем позиции перегородок будет равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (4.9)$$

Формула 4.9 называется **сочетания с повторениями**.

Утверждение 6. *Сочетания с повторениями - это количество способов расположить n сортов на k местах, причем порядок перестановки неважен.*

4.3 Перестановки

У нас есть n различных элементов, как посчитать количество перестановок по n местам? Эта задача очень похожа на задачу из секции про размещения. У нас есть множество чисел $\{1, 2, 3\}$. Как можно разместить 3 элемента из этого множества?

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$$

Или посчитать по формуле размещений без повторений, где $k = n$:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Именно формула выше и есть **формула для нахождения перестановок n различных элементов!**

$$P_n = n! = A_n^n \quad (4.10)$$

Теперь изменим наше множество на $\{1, 1, 2, 3\}$. Посмотрим на перестановки теперь:

$$\{1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{2, 1, 1, 3\}, \{3, 1, 1, 2\}, \dots$$

Можно заметить, что мы не учитываем перестановки между двумя одинаковыми элементами (в нашем случае единицами). Формула $P_n = n!$ не подходит в данном случае. Если у нас есть n_1 одинаковых элементов, то наша формула $P_n = n!$ выдает в $n_1!$ больше комбинаций, чем надо. Тогда преобразуем формулу:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (4.11)$$

Формула выше вычисляет **количество перестановок с повторениями.**

4.4 Задачи

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 9. Как посчитать число перестановок слова "манна"?

Решение. Посчитаем количество каждой буквы: м - 1, а - 2, н - 2. Обратимся к формуле перестановок с повторениями, так как буквы в нашем множестве повторяются:

$$P(1, 2, 2) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{5!}{1!2!2!}$$

Задача 10. 3 мальчика собрали 50 яблок. Считая яблоки одинаковыми, сколькими способами их можно распределить между мальчиками?

Решение. В данной задаче сорт это мальчики, а количество яблок это места. То есть, $n = 3$, $k = 50$.

$$\overline{C}_3^{50} = C_{52}^{50} = \frac{(3 + 50 - 1)!}{50!2!} = \frac{52!}{50!2!} = 1326$$

Задача 11. Имеется шахматная доска $2n \times 2n$. Сколькими способами можно выбрать а) одну белую и одну черную клетки б) и чтобы они не находились на одной вертикали и горизонтали?

Решение (а).

$$2n^2 \cdot 2n^2 = 4n^4$$

Решение (б).

$$2n^2(2n^2 - 2n) = 4n^3(n - 1)$$

Задача 12. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из 5 цветов?

Решение.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Задача 13. В группе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно из них составить 4 танцевальные пары?

Решение. Так как в танцевальной паре должен быть 1 мальчик и 1 девочка, то мы должны найти сначала количество способов взять 4 мальчика и количество способов взять 4 девочки, а далее сделать перестановку между ними.

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot 4!$$

Задача 14. Сколькими способами можно разложить n_1 красных, n_2 зеленых и n_3 синих шаров по m урнам?

Решение. Используем формулы сочетаний с повторениями для каждой категории шара.

$$\overline{C_m^{n_1}} \cdot \overline{C_m^{n_2}} \cdot \overline{C_m^{n_3}}$$

4.5 Разбиения

Утверждение 7. При упорядоченном разбиении n -элементного множества на непересекающиеся подмножества мощности n_1, n_2, \dots, n_S количество различных вариантов разбиения равно

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_S!} \quad (4.12)$$

Например, рассмотрим такой пример:

Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на верхней полке оказалась 1 книга, на средней полке 3 книги, а на нижней полке 4 книги. Сколькими способами это можно сделать?

В данном примере множество из восьми книг разбивается на три непересекающихся подмножества мощности 1, 3 и 4. Согласно формуле, количество различных вариантов выпонить такое разбиение равно $\frac{8!}{1!3!4!} = 280$.

Если бы в условии задачи не было конкретно указано, сколько книг должно быть на каждой полке, то общее число различных вариантов расставить книги по трем полкам было бы равно 3^8 , поскольку каждая из восьми книг может оказаться на любой из трех полок.

Рассмотрим второй подход к определению числа различных вариантов разбиения, когда подмножества с одинаковой мощностью неразличимы. В этом случае получаем так называемое неупорядоченное разбиение.

Утверждение 8. Пусть в наборе $n_1, n_2, n_3, \dots, n_S$ только k различных чисел и они встречаются в этом наборе $m_1, m_2, m_3, \dots, m_S$ раз. Тогда при

неупорядоченном разбиении n -элементного множества на непересекающиеся подмножества мощностей $n_1, n_2, n_3, \dots, n_S$ количество разных вариантов разбиения равно:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_S!m_1!m_2!\dots m_k!} \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь такой пример:

Восемь разных книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось 2 книги, а на двух других - по 3 книги. Сколькими способами это можно сделать?

Поскольку в данной формулировке полки не различимы, то речь идет о неупорядоченном разбиении множества книг на три подмножества мощностей 2, 3 и 3. Параметры здесь $m_1 = 1, m_2 = 2$, поэтому согласно формуле число разных способов расставить книги так, как это требуется в условии задачи, равно

$$\frac{8!}{2!3!3!1!2!} = 280$$

Глава 5

Производящие функции

5.1 Производящие функции и их основные свойства

Утверждение 9. Пусть имеется последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда ее производящей функцией называется степенной ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.1)$$

Требуем, чтобы данный ряд сходилсся хотя бы при малых x . Рассмотрим свойства производящих функций и некоторые их доказательства.

1. **Линейность.** Пусть $c_n = pa_n + qb_n$, $p, q = \text{const}$. Тогда

$$C(x) = pA(x) + qB(x) \quad (5.2)$$

Доказательство

$$pA(x) + qB(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x)$$

2. **Сдвиг вправо.** Сдвиг начала последовательности вправо на i позиций. Пусть $b_n = a_{n-i}$, $n \geq i$, $b_n = 0$, $0 \leq n \leq i-1$, тогда

$$B(x) = x^i A(x) \quad (5.3)$$

Доказательство

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^n = x^i \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = x^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^i A(x)$$

3. **Сдвиг влево.** Сдвиг начала последовательности влево на i позиций. Пусть последовательность чисел b_n и a_n связаны: $b_n = a_{n+i}$. Тогда

$$B(x) = x^{-i} (A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k) \quad (5.4)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^n = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i} = \\ &= x^{-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) = x^{-i} \left(A(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k \right) \end{aligned}$$

4. **Частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} \quad (5.5)$$

Доказательство Функция $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Поэтому в некоторой окрестности $x = 0$

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$$

5. **Дополнительная частичная сумма.** Пусть $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \quad (5.6)$$

6. **1 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = na_n$. Тогда

$$B(x) = xA'(x) \quad (5.7)$$

7. **2 тип изменения масштаба.** Пусть $b_n = \frac{a_n}{n+1}$. Тогда

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx \quad (5.8)$$

8. **Свертка.** Пусть $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ Тогда

$$C(x) = A(x)B(x) \quad (5.9)$$

5.2 Задачи

Задача 15. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$. Для последовательности $a_n = 1$ будет $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Задача 16. $\frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, |x| < 1$ Следовательно, производящей функцией для последовательности $a_n = \frac{1}{n+1}$ будет $A(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$

Задача 17. Дана последовательность $a_n = q^n$. Найти ее производящую функцию.

Решение.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

Задача 18. Дана последовательность $a_n = n$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Запишем новую последовательность $b_n = 1$ и выразим a_n через нее: $a_n = nb_n$. Теперь можно воспользоваться свойством 5.7:

$$B(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$A(x) = xB'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Задача 19. Дана последовательность $b_n = n^2$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Как и в прошлом примере введем новую последовательность $a_n = n$ и выразим через нее b_n : $b_n = na_n$. Снова дважды вспомним 5.7 используя результат предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} B(x) &= xA'(x) \\ A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ B(x) &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Задача 20. Дана последовательность $a_n = n(2^n + (-1)^n n)$, $n \geq 0$. Найти ее производящую функцию.

Решение. Сперва раскроем скобки:

$$a_n = 2^n n + (-1)^n n^2$$

Теперь разделим изначальную последовательность на 2 части: Первая часть будет $b_n = 2^n n$, а вторая $c_n = (-1)^n n^2$.

Тогда производящая функция a_n будет равна $A(x) = B(x) + C(x)$. Найдем теперь производящие функции у каждой части:

1. Введем новую последовательность $k_n = 2^n$ и выразим $b_n = k_n n$. Используя свойства 5.5 и 5.7 найдем $B(x)$ используя $K(x)$:

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \\ B(x) &= xK'(x) = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)'_x = \frac{2x}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

2. Для второй части тоже следует ввести новые последовательности: $d_n = (-1)^n$ и $m_n = (-1)^n n = d_n n$. Выразим теперь $c_n = m_n n$. Будем использовать те же свойства, только больше ;)

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \\ M(x) &= xD'(x) = x\left(\frac{1}{1+x}\right)'_x = \frac{-x}{(1+x)^2} \\ C(x) &= xM'(x) = x\left(\frac{-x}{(1+x)^2}\right)'_x = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Теперь вычислим $A(x)$:

$$A(x) = B(x) + C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} + \frac{x^2 - x}{(1+x)^3}$$

5.3 Линейные рекуррентные соотношения

Утверждение 10. *Линейным рекуррентным соотношением относительно последовательности a_n называется соотношение вида*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n \quad (5.10)$$

где k - заданное натуральное число, $n = 1, 2, 3, \dots$

При этом должны быть заданы начальные значения a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , а также коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k и последовательность d_n . Решением этого соотношения называется аналитическая формула для a_n , удовлетворяющая ему, а так же заданным начальным значениям.

Линейное рекуррентное соотношение называется **однородным**, если числа $d_n = 0$. В противном случае оно называется **неоднородным**.

Задача Фибоначчи и рекуррентное соотношение для нее.

Первой известной задачей, приведшей к рекуррентному соотношению, является задача Фибоначчи о кроликах. Ставится она следующим образом. Пусть в начальный момент была одна пара только что родившихся кроликов. Предполагается, что такая пара достигнет зрелости через месяц и еще через месяц она даст потомство в виде новой пары разнополых кроликов. Задача состоит в определении числа пар кроликов по прошествии n месяцев.

Пусть в n -ый месяц имеется M молодых пар и N зрелых пар кроликов. Тогда в $n + 1$ -ый месяц будет N молодых пар и $M + N$ зрелых пар, а в $n + 2$ -ой месяц будет $M + N$ молодых пар и $M + 2N$ зрелых пар. Таким образом, общее число пар кроликов в n -ый месяц равно $M + N$, в $n + 1$ -ый месяц равно $M + 2N$ а в $n + 2$ -ой месяц равно $2M + 3N$. Обозначим число пар кроликов в n -ый месяц через a_n . Тогда приходим к следующему выводу:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (5.11)$$

Это и есть **рекуррентное соотношение для задачи Фибоначчи**. Начальными условиями для него будут следующие: $a_0 = a_1 = 1$.

5.4 Метод решения линейные рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + d_n, n \geq 0$$

с заданными начальными условиями a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .

Введем для неизвестной последовательности a_n производящую функцию $A(x)$, а для заданной последовательности d_n - производящую функцию $D(x)$. Определим теперь производящие функции для левой и правой частей рассматриваемого рекуррентного соотношения, используя свойства 5.2 и 5.4 производящей функции.

Тогда для левой части получим производящую функцию

$$x^{-k} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \right)$$

Для правой же части рекуррентного соотношения производящая функция имеет вид:

$$c_1 x^{-k+1} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i \right) + c_2 x^{-k+2} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i \right) + \\ + c_{k-1} x^{-1} (A(x) - a_0) + c_k A(x) + D(x)$$

Приравнивая эти две производящие функции и умножая их на x^k , получим

$$A(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots \\ - c_{k-1} x^{k-1} a_0 + x^k D(x)$$

Это равенство можно записать как

$$A(x) = \frac{P_{k-1}(x) + x^k D(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k} \quad (5.12)$$

где $P_{k-1}(x)$ - многочлен степени $\leq k-1$, имеющий вид

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - c_1 x \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i - c_2 x^2 \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i - \dots - c_{k-1} x^{k-1} a_0 \quad (5.13)$$

Этот многочлен полностью определяется заданными начальными значениями a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .

Для решения рассматриваемого рекуррентного соотношения нужно сначала разложить многочлен $1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_k x^k$ на множители, определив его корни. Затем надо представить полученное выше выражение для $A(x)$ в виде суммы простых дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Далее нужно разложить эти простые дроби в ряд Маклорена.

Полученные в результате коэффициенты a_n разложения $A(x)$ в ряд Маклорена и будут являться искомым решением рекуррентного соотношения.

5.5 Задачи

Чтобы было проще решать подобные задачи, можно вывести определенный алгоритм:

1. Определить k, d_n, c_i
2. Если $d_n \neq 0$ вычислить $D(x)$
3. Вычислить P_{k-1} по 5.13
4. Определить и разложить на простые дроби $A(x)$
5. Найти коэффициенты
6. Подставить в $A(x)$
7. Исходя из того, что $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ найти a_n

Задача 21. Рассмотрим рекуррентное соотношение задачи Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$$

Решение. Для него имеем:

$$k = 2, d_n = 0, D(x) = 0, c_1 = c_2 = 1$$

Учитывая, что $k = 2$, используем 5.13, чтобы найти $P_1(x)$. Далее подставляем значения выше:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1x) - c_1xa_0 = 1$$

Используя 5.12 находим:

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})}$$

где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения трехчлена $1 - x - x^2$:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Представим $A(x)$ в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})} = \frac{C}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{D}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Умножим это равенство на общий знаменатель. Тогда получим:

$$1 = C(1 - \frac{x}{x_2}) + D(1 - \frac{x}{x_1})$$

Приравнявая коэффициенты слева и справа при x^1 и x^0 , приходим к двум линейным уравнениям относительно C и D :

$$1 = C + D - x \left(\frac{C}{x_2} + \frac{D}{x_1} \right)$$

$$0 = -\frac{C}{x_2} - \frac{D}{x_1}$$

$$1 = C + D$$

Решая эти уравнения, находим

$$C = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}, D = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

Разлагая $A(x)$ в ряд Маклорена, получаем

$$A(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_1}{x_2^n} - \frac{x_2}{x_1^n}\right) x^n$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \sqrt{5} \\ \frac{1}{x_1} &= -x_2 \\ \frac{1}{x_2} &= -x_1 \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая определение производящей функции $A(x)$, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) x^n$$

Отсюда окончательно получаем:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((-x_2)^{n+1} - (-x_1)^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

Задача 22.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^n n, a_0 = 3, a_1 = 1$$

Решение. Здесь,

$$k = 2, c_1 = 2, c_2 = -1, d_n = 2^n n$$

Сначала найдем производящую функцию $D(x)$ для d_n . Производящая функция для последовательности 2^n равна $\frac{1}{1-2x}$. Применяя свойство 5.7, находим

$$D(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-2x} \right) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Определим теперь многочлен $P_{k-1}(x) = P_1(x)$, входящий в формулу для производящей функции $A(x)$ последовательности a_n , используя 5.13:

$$P_1(x) = (a_0 + a_1 x) - 2xa_0 = 3 - 5x$$

В результате, формула для $A(x)$ приобретает вид

$$A(x) = \frac{3 - 5x + \frac{2x^3}{(1-2x)^2}}{1 - 2x + x^2} = \frac{(3 - 5x)(1 - 2x)^2 + 2x^3}{(1 - 2x)^2(1 - x)^2}$$

Числитель последней дроби имеет корень 1 и, значит, делится на $1 - x$. Сокращая в этой дроби числитель и знаменатель на $1 - x$, находим

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)}$$

Разложим $A(x)$ на простые дроби:

$$A(x) = \frac{3 - 14x + 18x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)} = \frac{C_1}{(1 - 2x)^2} + \frac{C_2}{1 - 2x} + \frac{C_3}{1 - x}$$

где C_i - постоянные. Умножая данное равенство на общий знаменатель, получаем

$$3 - 14x + 18x^2 = C_1(1 - x) + C_2(1 - 2x)(1 - x) + C_3(1 - 2x)^2$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0 , приходим к системе уравнений относительно C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} 18 &= 2C_2 + 4C_3 \\ -14 &= -C_1 - 3C_2 - 4C_3 \\ 3 &= C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1 = 1, C_2 = -5, C_3 = 7$$

Разлагая простые дроби в выражении для $A(x)$ в ряд Маклорена, используя 5.6, получаем

$$A(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2x)^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + C_3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Следовательно, находим

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n-4)2^n + 7] x^n$$

Задача 23. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Решение. Будем искать решение в виде $u_n = q^n$:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$u_{\text{общ}} = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (5.14)$$

Задача 24. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 1 - 4^n$$

Решение. Ищем однородное:

$$a_n = q^n$$

$$q^3 - 3q^2 + 3q - 1 = 0$$

$$(q - 1)^3 = (q - 1)^3 = 0$$

$$q = 1$$

Кратность равна $k = 3$. Тогда,

$$U_{\text{одн}} = P(k - 1)q^n = (A + Bn + Cn^2)1^n$$

Теперь найдем правую часть для 1:

$$d_n = 1 \cdot 1^n$$

$$U_{\text{част } 1} = An^3 1^n$$

$$A(n + 3)^3 - 3A(n + 2)^3 + 3A(n + 1)^3 - An^3 = 1$$

$$3^3 A - 3A \cdot 2^3 + 3A = 1$$

$$A(27 - 24 + 3) = 1$$

$$6A = 1$$

$$A = \frac{1}{6}$$

$$U_{\text{част } 1} = \frac{n^3}{6}$$

Далее для 4^n :

$$\begin{aligned}
 d_n &= -4^n = (-1)4^n \\
 U_{\text{част } 2} &= A \cdot 4^n \\
 A \cdot 4^{n+3} - 3A \cdot 4^{n+2} + 3A \cdot 4^{n+1} - A \cdot 4^n &= -4^n \\
 A \cdot 4^3 - 3A \cdot 4^2 + 12A - A &= -1 \\
 27A &= -1 \\
 A &= \frac{-1}{27} \\
 U_{\text{част } 2} &= \frac{-4^n}{27}
 \end{aligned}$$

Итог:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{общ}} &= U_{\text{одн}} + U_{\text{част } 1} + U_{\text{част } 2} \\
 U_{\text{общ}} &= A + Bn + Cn^2 + \frac{n^3}{6} - \frac{4^n}{27}
 \end{aligned}$$

Задача 25. Решить рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n &= (-2)^n n \\
 \text{если } n \geq 0, a_0 &= 1, a_1 = 2
 \end{aligned}$$

Решение. Ищем решение для однородного характеристического уравнения.

$$\begin{aligned}
 q^2 + q - 2 &= 0 \\
 q_1 &= -2 \\
 q_2 &= 1
 \end{aligned}$$

$$a_n = 1^n C_1 + (-2)^n C_2$$

Нахождение частичного решения:

$$a_n = (-2)^n (C_3 + C_4)n$$

$$\begin{aligned}
 (-2)^{n+2}(C_3(n+2) + C_4)(n+2) + (-2)^{n+1}(C(n+1) + C_4)(n+1) - \\
 - 2 \cdot (-2)^n(C_3n + C_4)n = (-2)^n n
 \end{aligned}$$

$$4(C_3(n+2) + C_4)(n+2) - 2(C_3(n+1) + C_4)(n+1) - 2(C_3n + C_4)n = n$$

$$12nC_3 + 14C_3 - n + 6C_4 = 0$$

$$n(12C_3 - 1) + 14C_3 - 6C_4 = 0$$

$$\begin{cases} 12C_3 - 1 = 0 \\ 14C_3 - 6C_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_n = (-2)^n \left(\frac{n}{12} - \frac{7}{36} \right) n$$

$$a_n = a_{n\text{част}} + a_{n\text{однор}}$$

$$a_n = C_1 + (-2)^n C_2 + (-2)^n \left(\frac{n}{12} - \frac{7}{36} \right) n$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 - 2C_2 - 2 \left(\frac{1}{12} - \frac{7}{36} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{34}{27} \\ C_2 = \frac{-7}{27} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{34}{27} + (-2)^n - \frac{7}{27} + (-2)^n \left(\frac{n}{12} - \frac{7}{36} n \right)$$

Задача 26. Решить рекуррентное соотношение:

$$a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = (-2)^4 n$$

$$\text{если } a_0 = 1, a_1 = 1$$

Решение. 1) Ищем решение для однородного уравнения:

$$a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$k = -3, k = -2$$

$$a_n = (-3)^n C_1 - (-2)^n C_2$$

2) Ищем частное решение:

$$a_n = (-2)^n (C_3 n + C_4) n$$

$$(-2)^{n+2}(C_3(n+2) + C_4)(n+2) + 5(-2)^{n+1}(C_3(n+1) + C_4)(n+1) + \\ + 6(-2)^n(C_3n + C_4)n = 2^n n$$

$$4(nC_3 + 2C_3 + C_4)(n+2) - 10(C_3n + C_3 + C_4)(n+1) + 6n(C_3n + C_4) = n$$

$$\begin{cases} 8C_3 + 8C_3 + 4C_4 - 10C_3 - 10C_3 - 10C_4 + 6C_4 = 1 \\ 16C_3 + 8C_4 - 10C_3 - 10C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4C_3 = 1 \\ 6C_3 - 2C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3 = -\frac{1}{4} \\ C_4 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a_n \text{ част} = (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

3)

$$a_n = (-3)^n C_1 + (-2)^n C_2 + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

$$\begin{cases} a_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ a_1 = -3C_1 - 2C_2 + 2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = (-3)^n + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n$$

Ответ:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \inf \left[(-3)^n + (-2)^n \left(-\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right)n \right] x^n$$

Глава 6

Теория графов

6.1 Основные определения

Пусть M и N - два конечных множества. Будем называть пару множеств $\langle M, N \rangle$ **ориентированным графом**. При этом элементы множества M называются **вершинами** графа, элементы множества N - **дугами** графа. Граф, у которого направления соединения не определены, называется **неориентированным графом**. В них соединения называются **ребром**, а вершина - **узлом**.

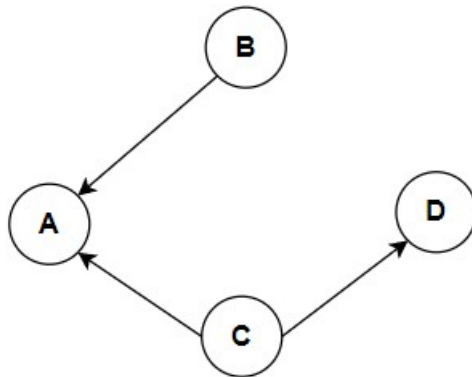


Рис. 6.1: Ориентированный граф

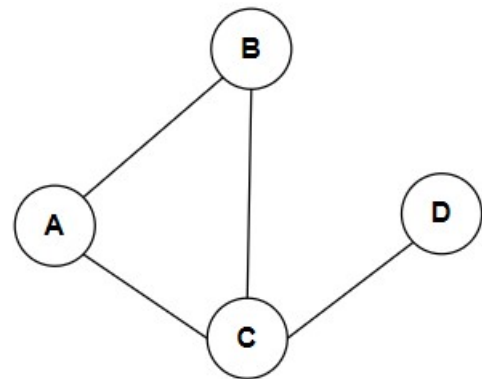


Рис. 6.2: Неориентированный граф

Висячей вершиной называется вершина, которая соединена только с одной соседней вершиной.

Степенью вершины называется количество ребер, соединенных с этой вершиной. Если степень вершины равна 0, то такая вершина называется **изолированной**. Степень вершины может быть **входящей** и **исходящей**. Входящая степень вершины v это количество ребер вида $\langle i, v \rangle$, то есть количество ребер которые входят в v . Исходящая степень вершины v это количество ребер вида $\langle v, i \rangle$, то есть количество ребер которые входят из v .

Теорема 11. *В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.*

Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется **петлей**.

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **простым путем**, если

1. число его дуг k на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать M' числами от 0 до k и N' числами от 1 до k , что для любой дуги $u \in N'$

Пусть num - это получение номера дуги или вершины, а $beg(u)$ и $end(u)$ начало и конец дуги u соответственно. Тогда для любой дуги u в графе верно выражение:

$$num(u) = num(end(u)) = num(beg(u)) + 1 \quad (6.1)$$

Различие между **путем** и **простым путем** заключается в том, что во втором случае недопустимы повторы вершин и дуг в пути.

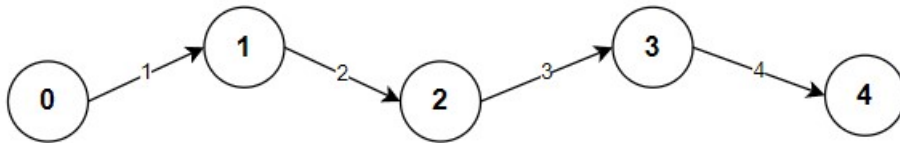


Рис. 6.3: Простой путь

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **цепью**, если:

1. число его дуг k на единицу меньше числа вершин
2. можно так пронумеровать M' числами от 0 до k и N' числами от 1 до k , что для любой дуги $u \in N'$

То есть, он включает либо условие простого пути 6.1, либо

$$num(u) = num(end(u)) + 1 = num(beg(u)) \quad (6.2)$$

Дуги, для которых выполняется 6.1, принято называть **положительно ориентированными**, а те, для которых выполняется 6.2 **отрицательно ориентированными**.

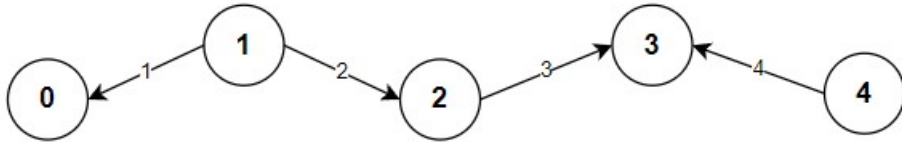


Рис. 6.4: Цепь

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **контуром**, если

1. число дуг k равно числу вершин
2. можно так пронумеровать M' и N' числами от 1 до k , что для любой дуги $u \in N'$

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) \equiv^k num(beg(u)) + 1 \quad (6.3)$$

Иными словами, контур - это простой путь, где начало и конец совпадают.

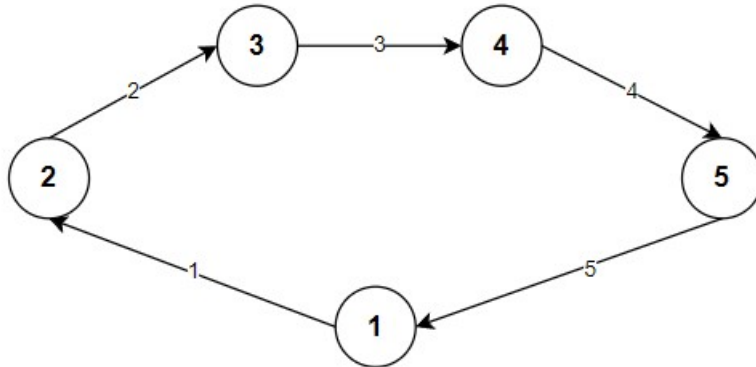


Рис. 6.5: Контур

Граф $\langle M', N' \rangle$ называется **циклом**, если

1. число дуг k равно числу вершин
2. можно так пронумеровать M' и N' числами от 1 до k , что для любой дуги $u \in N'$

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) \equiv^k num(beg(u)) + 1 \quad (6.4)$$

либо

$$num(u) \equiv^k num(end(u)) + 1 \equiv^k num(beg(u)) \quad (6.5)$$

Цикл - это цепь, в которой начало и конец совпадают.

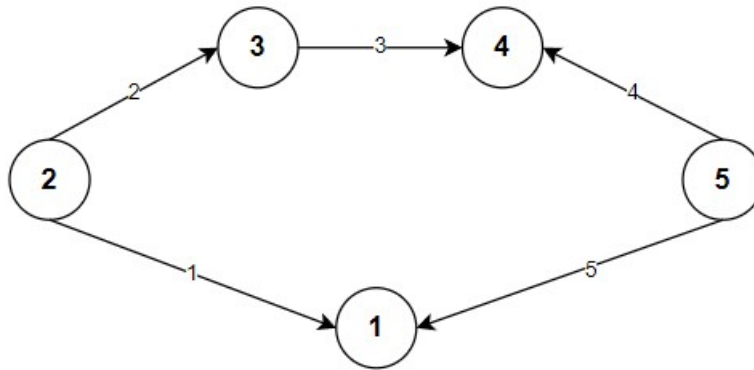


Рис. 6.6: Цикл

6.2 Связность. Компоненты связности и сильной связности

Граф $\langle M, N \rangle$ называется **связным**, если любые две различные его вершины можно соединить цепью. Любой граф может быть однозначно разделен на максимальные связные подграфы, которые называют его **компонентами связности**.

Граф $\langle M, N \rangle$ называется **сильно связным**, если любые две различные вершины A и B можно соединить путем с началом в A и концом в B . В любом графе можно однозначно выделить максимальные сильно связные подграфы, которые называются его **компонентами сильной связности**.

Теорема 12. *Граф компонент сильной связности не имеет контуров.*

6.3 Матричные представления графов

Прежде чем приступить к понятию "дерево изучим различные способы представления графов. Наиболее известные формы это **матрица инцидентий** и **матрица смежности**. Для начала рассмотрим более простой вариант - матрицу смежности.

Матрицей смежности графа $\langle M, N \rangle$ называется такая квадратная матрица $M \times M$ (то есть индексами строк и столбцов являются вершины графа), в которой значением пересечения i -ой строки и j -го столбца является число дуг с началом в i и концом j .

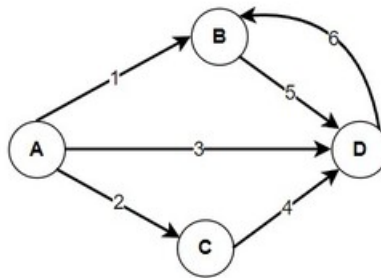


Рис. 6.7: Граф

	1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0
B	-1	0	0	0	1	-1
C	0	-1	0	1	0	0
D	0	0	-1	-1	-1	1

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	1	0	0

Рис. 6.8: Способы матричного представления графа 6.7: матрица инцидентий и матрица смежности соответственно

Матрицей инцидентий графа $\langle M, N \rangle$ называется такая матрица $M \times N$, где индексами строк являются вершины, а индексами столбцов дуги. Элемент на пересечении i -ой строки и j -ого столбца равен 1, если является началом в вершине под i -ым индексом и принадлежит дуге под j -ым индексом. Если же данная дуга имеет конец в этой вершине, то ставится -1.

6.4 Деревья

Чтобы ввести термин "дерево" нам нужно изучить следующую теорему:

Теорема 13. В связном графе $\langle M, N \rangle$ найдется частичный граф связный граф $\langle M, N' \rangle$, в котором количество вершин больше количества дуг на единицу. Пусть $|N'| = k$, тогда если пронумеровать вершины из M числами от 0 до k , а дуги из N' числами от 1 до k таким образом, что для любой дуги $u \in N'$ выполняется соотношение

$$num(u) = \max\{num(beg(u)), num(end(u))\} \quad (6.6)$$

Следствие 13.1. Если $|N| < |M| - 1$, граф не может быть связным.

Следствие 13.2. Если $|N| > |M| - 1$, граф содержит циклы.

Связный граф, в котором число дуг на 1 меньше числа вершин, называется **деревом**. Такие деревья могут не иметь корня, в отличие от тех деревьев, которые мы обычно представляем. Если подобное дерево имеет корень, то оно называется **ориентированным деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется его **остовным деревом** (spanning tree).

Теперь можно приступить к изучению алгоритма нахождения остовного дерева методом вычеркивания.

6.5 Алгоритмы нахождения остовного дерева

Алгоритм ближайшего соседа

1. В весовой матрице выбираем произвольную вершину.
2. Ищем в этой весовой вершине минимальную дугу в другую вершину.
3. Ищем среди этих вершин снова минимальную дугу уже в новую вершину.
4. Продолжаем до тех пор, пока не пометим все вершины.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	∞	4	6	∞
B	5	0	∞	7	5	4
C	∞	∞	0	5	6	4
D	4	7	5	0	8	3
E	6	5	6	8	0	∞
F	∞	4	4	3	∞	0

Таблица 6.1: Весовая матрица

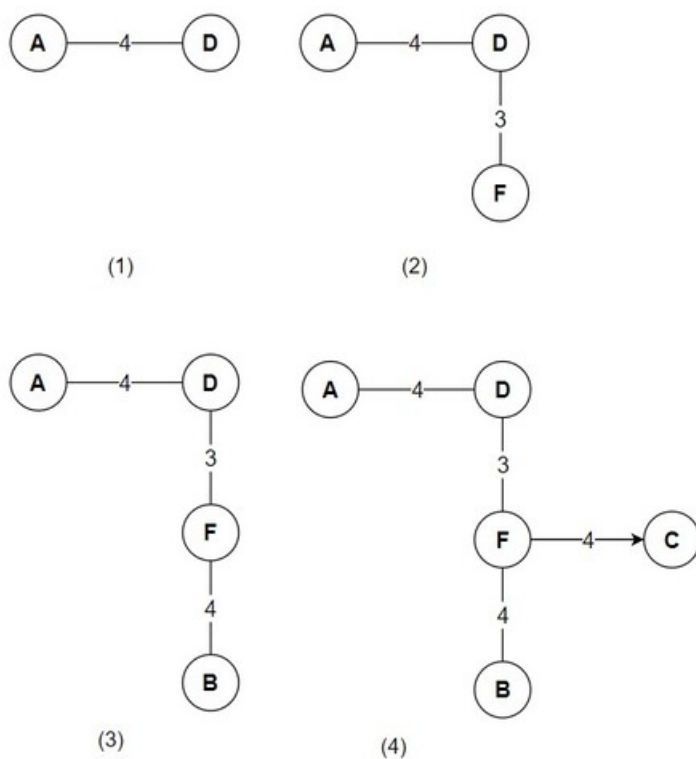


Рис. 6.9: Алгоритм ближайшего соседа

Приведем пример. Пусть есть следующая весовая матрица:
На рисунке 6.9 изображен алгоритм построения остовного дерева для весовой матрицы выше. Пусть произвольная вершина будет A. Минимальное ребро идет в вершину D. Далее выбираем среди этих двух вершин минимальное ребро, и это D \rightarrow F. По такому же алгоритму достраиваем

остовное дерево.

Жадный алгоритм

Этот алгоритм основан по большей части на том, что каждый раз мы выбираем минимальное ребро на каждом этапе, а далее объединяем полученные ребра в остовное дерево. Для той же весовой матрицы покажем: На рисунке 6.10 изображено построение остовного дерева с помощью жадного алгоритма.

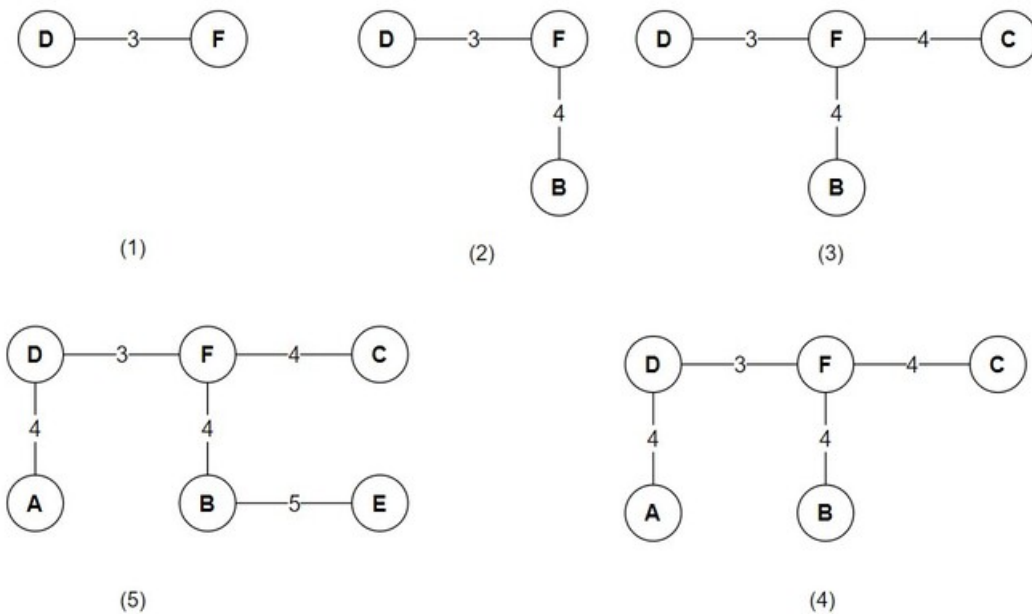


Рис. 6.10: Жадный алгоритм

Самое минимальное ребро равно 3 с вершинами D и F. Далее мы имеем 3 равнозначенных ребра равных 4: F и B, F и C, D и A. Строим последовательно их. Не хватает последнего ребра E. Можно заметить, что самое минимальное ребро с этой вершиной из B. Остовное дерево построено.

Алгоритм вычеркивания

1. В матрице инцидентности $N \times N - 1$ проверяем наличие нулевых строк. Если есть, то имеем неостовное дерево.

2. Если нет, то проверяем наличие строк с одной единицей и вычеркиваем строку и столбец, проходящие через эту единицу
3. Повторяем пункт 1 и 2 до тех пор, пока не придем к выводу, что это неостовное дерево или если все столбцы вычеркнуты, то рассмотренные ребра образуют остовное дерево

Рассмотрим пример. Имеем следующую матрицу инцидентности:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Таблица 6.2: Матрица инцидентностей

Теперь проверим, являются ли ребра 1, 2, 5, 7 и 8 остовным деревом:

Рис. 6.11: Алгоритм вычеркивания

Так как в процессе у нас не возникло нулевых строк и в итоге все строки и столбцы были зачеркнуты, данные ребра образуют остовное дерево. Например, ребра 1, 2, 4, 5 и 8 не будут образовывать остовное дерево, так как 5 строчка будет состоять только из нулей.

6.6 Задача о кратчайшем пути

Для начала введем новый термин "весовая матрица". Пусть у нас есть ориентированный граф, дуги которого имеют определенный вес (поло-

жительное число).

Весовая матрица это квадратная матрица $M \times M$ (индексами строк и столбцов являются вершины), где элемент под i -ой строкой и j -ым столбцом имеет вес дуги из вершины под индексом i в вершину под индексом j .

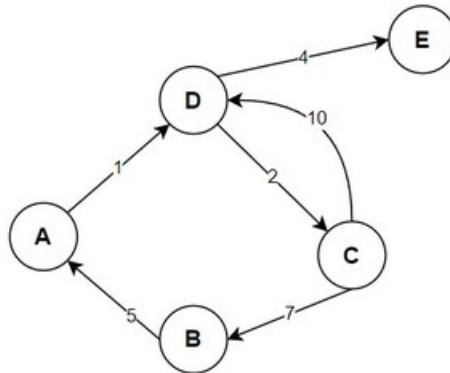


Рис. 6.12: Граф

	A	B	C	D	E
A	0	∞	∞	1	∞
B	5	0	∞	∞	∞
C	∞	7	0	10	∞
D	∞	∞	2	0	4
E	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 6.3: Весовая матрица графа 6.12

Чтобы не путаться и обозначить, что из i -ой вершины в j -ую нет пути, будем писать знак бесконечности.

Теперь, собственно, приступим к самой задаче нахождения кратчайшего расстояния между двумя вершинами. Предположим, нам нужно найти кратчайший путь из A в F для матрицы 6.4:

Создадим новую таблицу, в которой за строки возьмем количество дуг, которые можно провести из одной вершины в другую, а за столбцы сами эти вершины. Будем построчно заполнять таблицу, тем самым найдя кратчайший путь из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A	0	10	3	∞	∞	∞
B	∞	0	5	∞	∞	3
C	∞	4	0	2	6	∞
D	∞	1	∞	0	5	∞
E	∞	∞	∞	∞	0	4
F	∞	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 6.4: Весовая матрица

	A(1)	B(2)	C(3)	D(4)	E(5)	F(6)
1	0	10(1)	3(1)	∞	∞	∞
2	0	7(3)	3(1)	5(3)	9(3)	13(2)
3	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	10(2)
4	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)
5	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)
6	0	6(4)	3(1)	5(3)	9(3)	9(2)

Таблица 6.5: Поиск кратчайшего пути из A в F

Логика такая: смотрим, как можно попасть в данную вершину с помощью весовой матрицы. Далее если есть смотрим на строчку выше в 6.5 и ищем способы попасть в вершину за k дуг. Прокомментирую первые 2 строчки:

1. Так как мы начинаем с вершины A, то ставим 0. Далее смотрим, как можно попасть в вершину B за 1 дугу по весовой матрице. Смотрим на столбец B: так как мы начинаем путь из вершины A и до других вершин не дошли, самый оптимальный путь это попасть в B из A за 10. В скобочках пишем из какой вершины попали. С остальными вершинами такая же логика. Если попасть в вершину за k дуг пока нельзя, ставим ∞
2. С A ничего не меняется, смотрим на B. В весовой матрице можно заметить, что в B можно попасть из A, C, D. Из A за 10, из C за 4 и из D за 1. Смотрим на предыдущую строчку и ищем эти вершины. За одну дугу в B из A мы попали за 10. В C мы можем попасть из A за 3, а в D пока не можем. И так вариант A \rightarrow C \rightarrow B выгоднее, чем A \rightarrow B, то записываем $4 + 3 = 7(3)$. Так как в C выгоднее

всего попасть из A, то так и оставляем. В D мы можем попасть из C, то есть $A \rightarrow C \rightarrow D$ ($3 + 2 = 5$). В E из C и D, но так как в D, судя по предыдущей строчке, мы попасть никак не можем за 1 дугу, выбираем путь из C, то есть $A \rightarrow C \rightarrow E$ ($3 + 6 = 9$). В F мы можем попасть из B и E. По предыдущей строчке смотрим, что в E мы пока попасть не можем, а вот в B из A можем. Значит, путь получается следующим: $A \rightarrow B \rightarrow F$ ($10 + 3 = 13$)

3. По такой же логике заполняем остальные строчки.

В результате смотрим на последнюю строчку и столбец F. У нас получилось 9(2). Чтобы восстановить путь, поднимаемся по строчкам и смотрим на вершину в скобках. Как результат: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow F$

Литература

1. Дискретный анализ. Романовский И.В.
2. Дискретная математика и комбинаторика. Джеймс А. Андерсон
3. Дискретная математика. Часть 1: Начальные понятия теории множеств и отношений, математическая логика. Некрасова М.Г.