# 工程硕士数学(期末考试)

## A 卷

考试时间:　2022 年 12 月 27 日 下午 2:30-4:30

班级____________　姓名_______________　学号_________________

1， 填空（40 分）。

1） 已知$2022=45^2-3$，用公式$45\times(1-\frac{3}{2\times45^2})$近似计算$\sqrt{2022}$，保留 3 位有效数字的结果为________。

2） 对矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$做 LU 分解$A=LU$，则$U$=__________。

3） 由平面上三个点（1,2），（-1,1）和（1,3）最小二乘拟合出来的直线是_____________________。

4） 以$x_0=1.0$为初值，用$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k^2+1}$迭代求方程$\mathrm{x}^3-x^2-1=0$一个根的方法是__________阶的。

5） 用两个积分点的 Gauss 积分计算$\int_1^3 \mathrm{e}^x\cos(x)\,dx$，则积分节点$x_0$=___________，$x_1$=_____________。

6） 已 知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$， 则 $||A||_\infty$ =________________，$\mathrm{cond(A)}_\infty$=________。

7） $$\mathrm{s(x)}=\begin{cases}6-2x+\frac{1}{2}x^3, & 0\le \mathrm{x}\le 2\\ 6+4(x-2)+a(x-2)^2+b(x-2)^3, & 2\le x\le 3\end{cases}$$

为三次样条函数，则$a$=______________。

8） 已知$f(1)=1, f'(1)=3, f(3)=7$,则$f[1,1,3]$=__________。

2，（10 分）确定$a$的取值范围使

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

可以分解为$A=LL^T$，其中$L$是对角元为正的下三角矩阵。

3，（10 分）已知积分公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx C_0 f(0)+C_1 f(1)+C_2 f'(0)$$

的余项为$\alpha f'''(\xi),\xi\in(0,1)$，试确定积分公式中的系数$C_0,C_1,C_2$。

4，（10 分）已知方程$x^3+4x^2-10=0$在[1,2]上有一个根，试给出求该根的 Newton 法,并用$x_0=1.0$为初值迭代 1 步。

5，（10 分）方程组$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，给出求解该方程的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵，讨论两种方法的收敛性，若收敛，给出渐近收敛速度。

6，（10 分）设$f(x)\in C^1(R)$，满足$0<m\le f'(x)\le M$，且$f(x)=0$有根$x^*$，试证明迭代法 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 产生的序列$\{x_k\}$对任意的$x_0\in R$及$\lambda\in(0,\frac{2}{M})$均收敛到$x^*$。

7，（10 分）考虑常微分方程初值问题$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y),x\in(x_0,b], \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 其中$f(x,y)$对$y$满足 Lipschitz 条件$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le \mathrm{L}|y_1-y_2|$，$\forall x\in[x_0,b]$，

1） 分析公式$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$的局部截断误差，并给出方法的阶。

2） 讨论公式$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$的收敛性。