

《工程硕士数学》第七次作业

软硕232 丁浩宸 2023213911

第三题 (2)

- 令 $f(x) = 1$ ，使求积公式准确有 $1 = C_0 + C_1$
- 令 $f(x) = x$ ，使求积公式准确有 $\frac{1}{2} = C_1 x_1$
- 令 $f(x) = x^2$ ，使求积公式准确有 $\frac{1}{3} = C_1 x_1^2$

联立解得 $x_1 = \frac{2}{3}$ ， $C_1 = \frac{1}{4}$ 、 $C_0 = \frac{3}{4}$ ，代数精度为2。

第七题

使用如下的Matlab代码计算Romberg法求积：

```
a = 0.2;
b = 1.5;
f = @(x)exp(-x ^ 2);
k = 0;
n = 1;
h = b - a;
T = h / 2 * (f(a) + f(b));
err = 1;
while err >= 1e-4
    k = k + 1;
    h = h / 2;
    tmp = 0;
    for i = 1:n
        tmp = tmp + f(a + (2 * i - 1) * h);
    end
    T(k+1, 1) = T(k) / 2 + h * tmp;
    for j = 1:k
        T(k+1, j+1) = T(k+1, j) + (T(k+1, j) - T(k, j)) / (4 ^ j - 1);
    end
    n = n * 2;
    err = abs(T(k+1, k+1) - T(k, k));
end
T
R = T(k+1, k+1)
```

求得：

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.6930 | | | | |
| 0.6621 | 0.6518 | | | |
| 0.6595 | 0.6586 | 0.6590 | | |
| 0.6590 | 0.6588 | 0.6588 | 0.6588 | |
| 0.6589 | 0.6588 | 0.6588 | 0.6588 | 0.6588 |

故 $R(4, 4) = 0.6588$ 。

第九题

权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，二次正交多项式 $\phi_2(x) = x^2 + bx + c$

由 $\int_0^1 \rho(x)\phi_2(x)dx = \int_0^1 x\rho(x)\phi_2(x)dx = 0$ 知 $\begin{cases} \int_0^1 x^{1.5} + bx^{0.5} + cx^{-0.5}dx = 0 \\ \int_0^1 x^{2.5} + bx^{1.5} + cx^{0.5}dx = 0 \end{cases}$ ，化简后得 $\frac{1}{2.5} + \frac{b}{1.5} + \frac{c}{0.5} = \frac{1}{3.5} + \frac{b}{2.5} + \frac{c}{1.5} = 0$ ，解得 $b = -\frac{6}{7}$ ， $c = \frac{3}{35}$ 。

由 $\phi_2(x)$ 零点为 $x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$ ， $x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$ ，代入求积公式，取 $f(x) = 1$ ，解得 $A_0 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$ ， $A_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$ 。

第十题 (2)

取 $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ ，则 $t \in [-1, 1]$ ， $\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2})^2 e^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}} dt = \int_{-1}^1 p(t)dt$ 。

由两个节点的Gauss-Legendre公式，查表知：

| x_k | A_k |
|--------------|-------|
| 0 | 2 |
| ± 0.5774 | 1 |

故

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 0.5774 + \frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{2} \times 0.5774 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \times 0.5774 + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\frac{1}{2} \times 0.5774 + \frac{1}{2}} = 0.7119$$

。