《工程硕士数学》第四次上机作业

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第一题

理论依据

基本QR法求特征值

算法描述

基本QR法迭代公式：$\begin{cases} A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases}$。经过迭代后$A_i$趋近于上三角阵，其对角元为$A$的各个特征值。

计算代码

```
A = [6, 3, 1; 3, 2, 1; 1, 1, 1];
B = [10, 7, 8, 7; 7, 5, 6, 5; 8, 6, 10, 9; 7, 5, 9, 10];
H4 = hilb(4);
H5 = hilb(5);
H6 = hilb(6);

eig(A)
eig(B)
eig(H4)
eig(H5)
eig(H6)

T = A;
for i = 1:10000
    [Q, R] = qr(T);
    T = R * Q;
end
disp(T);

T = B;
for i = 1:10000
    [Q, R] = qr(T);
    T = R * Q;
end
disp(T);

T = H4;
for i = 1:10000
    [Q, R] = qr(T);
    T = R * Q;
end
disp(T);

T = H5;
for i = 1:10000
    [Q, R] = qr(T);
```

```
    T = R * Q;
end
disp(T);

T = H6;
for i = 1:10000
    [Q, R] = qr(T);
    T = R * Q;
end
disp(T);
```

结果分析：

待求特征值矩阵	`eig` 法求特征值	QR法求特征值	QR法收敛次数（误差10^{-4}）
A	7.8730 1.0000 0.1270	7.8730 1.0000 0.1270	6
B	0.0102 0.8431 3.8581 30.2887	0.0102 0.8431 3.8581 30.2887	9
H_4	0.0001 0.0067 0.1691 1.5002	0.0001 0.0067 0.1691 1.5002	5
H_5	0.0000 0.0003 0.0114 0.2085 1.5671	0.0000 0.0003 0.0114 0.2085 1.5671	5
H_6	0.0000 0.0000 0.0006 0.0163 0.2424 1.6189	0.0000 0.0000 0.0006 0.0163 0.2424 1.6189	6

这说明对上述矩阵，基本QR法能用很少的次数达到收敛，且能保障计算精度。甚至我们注意到，在基本QR法收敛到上三角阵之前，其对角元就已经收敛到特征值了，这进一步说明了基本QR法的计算速度是较快的。

第二题

理论依据

- 幂迭代法求主特征值及其对应特征向量。
- 幂迭代法的Aitken加速法求主特征值及其对应特征向量。
- 利用原点位移的逆幂迭代法求非各个特征值及其分别对应的特征向量。

算法描述

- 幂迭代法：$\begin{cases} z^{(k)} = Av^{(k-1)} \\ m^{(k)} = \max(z^{(k)}) \\ v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{m^{(k)}} \end{cases}$，迭代后$m^{(k)}$收敛到主特征值、$v^{(k)}$收敛到对应的特征向量。
- 幂迭代法的Aitken加速：$\overline{\lambda_1}^{(k)} = \frac{m_k m_{k+2} - m_{k+1}^2}{m_{k+2} - 2m_{k+1} + m_k}$，迭代后$\overline{\lambda_1}^{(k)}$收敛到主特征值。
- 原点位移的逆幂迭代法：$\begin{cases} 解方程组(A - qI)z^{(k)} = v^{(k-1)} \\ m^{(k)} = \max(z^{(k)}) \\ v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{m^{(k)}} \end{cases}$，迭代后$m^{(k)}$收敛到$\frac{1}{\lambda_i - q}$（其中$\lambda_i$为主特征值）、$v^{(k)}$收敛到对应的特征向量。

计算代码

```
A = [5, 4, 1, 1; 4, 5, 1, 1; 1, 1, 4, 2; 1, 1, 2, 4];

% 幂迭代法
v = [1, 1, 1, 1]';
m = 0;
for i = 1:10000
    z = A * v;
    m = max(z);
    v2 = z / m;
    if (norm(v2 - v) < 1e-8)
        break
    end
    v = v2;
    i = i + 1;
end
disp(v)
disp(m)
disp(i)

% 幂迭代法的Aitken加速
v = [1, 1, 1, 1]';
m1 = 0;
m2 = 0;
m3 = 0;
lambdaMetric = m;
for i = 1:10000
    z = A * v;
    m3 = max(z);
    v2 = z / m3;
    if (i >= 3)
        newLambda = (m1 * m3 - m2 * m2) / (m3 + m1 - 2 * m2);
        %由于已经求出特征值，故以此为目标试验Aitken加速的效果
        if (newLambda - lambdaMetric < 1e-8)
            disp(newLambda)
```

```
            break
        end
    end
    v = v2;
    m1 = m2;
    m2 = m3;
    m3 = 0;
    i = i + 1;
end
disp(v)
disp(i)

% 逆幂迭代法
m = 0;
v = [1, 1, 1, 1]';
temp = dot(A * v, v) / dot(v, v);
q = [0.25, 1.75, 4.75, temp, 9.75];
for i = 1:5
    v = [1, 1, 1, 1]';
    for j = 1:1000
        z = (A - q(i) * eye(4)) \ v;
        m = max(z);
        v2 = z / m;
        if (norm(v2 - v) < 1e-8)
            break
        end
        v = v2;
        j = j + 1;
    end
    disp(q(i))
    disp(v)
    disp(q(i) + 1 / m)
    disp(j)
end
```

结果分析

方法	主特征值	对应特征向量	收敛次数
幂迭代法	10	$\begin{bmatrix}1\\1\\0.5\\0.5\end{bmatrix}$	26
幂迭代法的Aitken加速	10	$\begin{bmatrix}1\\1\\0.5001\\0.5001\end{bmatrix}$	13
逆幂迭代法（$q=\frac{(Av^{(0)},v^{(0)})}{(v^{(0)},v^{(0)})}=9.75$）	10	$\begin{bmatrix}1\\1\\0.5\\0.5\end{bmatrix}$	8
逆幂迭代法（$q=\frac{(Av^{(0)},v^{(0)})}{(v^{(0)},v^{(0)})}=9.5$）	10	$\begin{bmatrix}1\\1\\0.5\\0.5\end{bmatrix}$	10
逆幂迭代法（$q=4.5$）	5	$\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}$	8
逆幂迭代法（$q=1.75$）	2	$\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$	24
逆幂迭代法（$q=0.25$）	1	$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	32

分析：

- Aitken加速对幂迭代法确实起到了优化结果，$\overline{\lambda_1}^{(k)}$更快地收敛了。
- 对不同的q，由于能求出不同的特征值，因此对比下来发现符合$|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}|$越大、收敛速度越快的理论。