《工程硕士数学》第四次作业

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第三题（1）

- $c = -sgn(b_1)||b||_2 = -2$
- $u = b - [c, 0, 0, 0]^T = [3, 1, 1, 1]^T$
- $\beta = [||b||_2(||b||_2 + |b_1|)]^{-1} = \frac{1}{6}$
- $P = I - \beta uu^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$
- 验证得$Pb = [-2, 0, 0, 0]^T = [c, 0, 0, 0]^T$，符合题意

第五题（1）

矩阵维度为3，因此只需变换第一列$[2, 2, -2]^T$为$[2, *, 0]^T$即可。

- $\alpha = 2\sqrt{2}$，$u = [0, 2 + 2\sqrt{2}, -2]^T$，$||u||_2^2 = 16 + 8\sqrt{2}$
- $P = I - \frac{uu^T}{||u||_2^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
- $H = PAP = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

第六题

- 先找到P使$H = PAP$为第一列对角线以下全是0的上Hessenberg矩阵：
  - $\bar{Q}\bar{R} = A$，$u = [4, 2, 2]^T$，$\beta = \frac{1}{12}$
  - $P = I - \beta uu^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，此时$PAP = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$，$PA = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$。

- 注意到第二列对角线以下仍然不是0，因此再对$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$找$P_0$，使$H_0 = P_0A_0P_0$为上Hessenberg矩阵。
    - $k_0 = -3$，$u_0 = [3, -3]^T$，$\beta_0 = \frac{1}{9}$
    - $P_0 = I - \beta_0 u_0 u_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，此时$P_0A_0P_0 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & \end{bmatrix}$，$P_0A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
- 于是取$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，此时：
    - $R = P_1 * P * A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
    - $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

但这是对角线非正的。因此取$\bar{D} = diag(-1, -1, -1)$：

- $\bar{Q} = Q\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- $\bar{R} = \bar{D}^{-1}R = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

检验得$\bar{Q}\bar{R} = A$，符合题意。