《工程硕士数学》期末复习

第二章 解线性方程组的直接解法

Gauss（顺序）消去法

消去（$O(n^3)$）：将$Ax=b$通过初等行变换化简为$Ux=b$

- 从第二行开始，给每行乘以一个不同的系数l，使得每行第一位都等于第一行第一位的相反数
- 从第二行开始，给每行加上第一行，使得每行第一位都等于0
- 从第三行开始，给每行乘以一个不同的系数l，使得每行第二位都等于第二行第二位的相反数
- 从第三行开始，给每行加上第二行，使得每行第二位都等于0
- ......
- 最后得到上三角阵U

回代（$O(n^2)$）：从最后一行开始逐行解$Ux=b$。

Gauss列主元消去法

若消去到第$k-1$步（$k\geq 1$），此时第k行及以下部分的第k位待消去，则挑选所有这些数中绝对值最大的，把它所在行换到第k行，再消去。

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right].$$

示例：

例 2.2.4 用列主元法解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，计算过程取五位数字，其中

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc:c} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{array}\right].$$

这一题就需要先把3.996所在行换到第一行，再进行第一次消去。

顺序主子式

- 顺序主子式：对$n \times n$的方阵，求其左上角1×1、2×2、……、$n \times n$这n个部分的行列式，这个过程称为求顺序主子式Δ_1、Δ_2、…、Δ_n。
- Gauss消去法的可行性：当顺序主子式任何一项都不为零时，方阵A可以使用上述的Gauss消去。

LU分解

- Doolittle分解（LU分解）：通过Gauss消去法得到U以后，一定能找到下三角阵L，使$A = LU$。
  - L的对角元素显然全为1。
- Crout分解：对换Doolittle分解中L的对角元素和U的对角元素，使得U的对角元素全为1。
- LDU分解：提取Doolittle分解中U的对角元素，形成对角矩阵D，使得U变成对角元素全为1的上三角阵$\widetilde{U}$，而此时A可以分解为$A = LD\widetilde{U}$。
- 单位上（下）三角阵：对角元素全为1的上（下）三角阵。
- Doolittle分解的存在唯一性：存在唯一Doolittle分解的条件为方阵$A_{n \times n}$的顺序主子式Δ_1到Δ_{n-1}都不为零。
  - 显然，如果Doolittle分解存在且唯一，则Crout、LDU分解也都存在且唯一。

三对角矩阵

- 三对角矩阵：三对角矩阵是形如下图的方阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

- 三对角矩阵LU分解的形状：三对角矩阵的LU分解一定形如下图：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的追赶法求解

- 先进行LU分解，使得$LUx = b$
- 计算$Ly = b$，此时有$y = Ux$
- 计算$Ux = y$，求出x

正定矩阵的Cholesky分解

- 正定矩阵：顺序主子式全部大于0的实对称方阵
- Cholesky分解：对正定对称阵作LU分解，必有$U=L^T$、$A=LL^T$。这种分解称为Cholesky分解。

正定矩阵的Cholesky法（平方根法）求解

- 先进行Cholesky分解，使得$LL^Tx=b$
- 计算$Ly=b$，此时有$y=L^Tx$
- 计算$L^Tx=y$，求出x

范数

- 向量范数：
  - 1-范数：向量所有元素的和
  - 2-范数：向量模长
  - 无穷范数（$\infty-$范数）：向量所有元素的绝对值的最大值
- 谱半径：方阵A的谱半径为其所有特征值的绝对值的最大值，记为$\rho(A)$
  - 回忆：特征多项式为$\lambda I-A$的行列式计算结果，特征值为特征多项式的根。
- 矩阵范数：
  - 1-范数（列范数）：对所有元素取绝对值，再对每列进行求和。取最大的和为1-范数。
  - 2-范数：$\sqrt{\rho(A^TA)}$
    - 当A为对称矩阵时，有$\sqrt{\rho(A^TA)}==\sqrt{\rho(A^2)}=\rho(A)$。
  - 无穷范数（$\infty-$范数、行范数）：对所有元素取绝对值，再对每行进行求和。取最大的和为无穷范数。

条件数与病态

- 条件数：$Cond(A)_n=||A||_n||A^{-1}||_n$，其中$||A||$表示矩阵范数，$||A||_1$为1-范数，$||A||_2$为2-范数，……。
  - 回忆：
    - 矩阵元素的代数余子式为$B_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$
    - 矩阵所有元素取代数余子式会得到伴随矩阵A^*，而$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。
- 病态：对病态矩阵A的任意元素进行扰动（加减一个微小量），都会导致$Ax=b$求解结果的巨大变化。
- 病态矩阵的判别：当A的任意一种条件数的数量级远大于A的数量级时，A就是病态的。
- 比较可能出现病态的矩阵：
  - 各元素数量级差别很大的矩阵
  - 列主元消去或LU分解时，发现主元也很小的矩阵

- 行列式很小的矩阵

第三章 解线性方程组的迭代法

Jacobi、Gauss-Seidel法与SOR法

当矩阵A满足下图所示形式时：

$$A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$$
$$A=D-L-U;D=diag[a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}]$$

$$L=\begin{bmatrix}0&&&&\\-a_{21}&0&&&\\-a_{31}&-a_{32}&0&&\\\vdots&&&\ddots&\\-a_{n1}&-a_{n2}&&-a_{n,n-1}&0\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&&-a_{1n}\\&0&-a_{23}&&-a_{2n}\\&&0&&\\&&&\ddots&-a_{n-1,n}\\&&&&0\end{bmatrix}$$

- Jacobi法：$\begin{cases}B=D^{-1}(L+U)\\x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+D^{-1}b\end{cases}$
- Gauss-Seidel法：$\begin{cases}B=(D-L)^{-1}U\\x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+(D-L)^{-1}b\end{cases}$
- SOR法：$\begin{cases}B=L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\\x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b\end{cases}$，式中$\omega$为自主选择的松弛因子。
- 迭代矩阵：以上三式中的B称为迭代矩阵。

迭代法的收敛

- 迭代法的收敛性判定：
  - 对任何迭代法，若迭代矩阵B满足$\rho(B)<1$，则迭代法收敛。
  - 若A严格对角占优，则无论用Jacobi法还是Gauss-Seidel法求解$Ax=b$，均收敛
    - 回忆：若每行的对角元素绝对值均大于其他元素绝对值之和，则这样的矩阵为严格对角占优矩阵。
    - 因此，若$Ax=b$无法直接用迭代法求解，可以先进行行交换，使A为严格对角占优矩阵，再求解。
  - 对任何对称正定矩阵A，Gauss-Seidel法收敛
  - 对任何对称正定矩阵A，若将非对角元素全部取相反数，新矩阵仍然对称正定，则Jacobi法收敛。
  - 对任何$\omega\in(0,2)$，有SOR法收敛。
    - 特别的，$\omega<1$称为低松弛，$\omega>1$为高松弛，$\omega=1$时SOR法退化回Gauss-Seidel法。
- 迭代法的渐进收敛速度：$R(B)=-\ln\rho(B)>0$。$\rho(B)$越小，迭代法收敛越快。
  - 最佳松弛因子：对三对角对称正定矩阵，SOR法有最佳松弛因子$\begin{cases}B_J=D^{-1}(L+U)\\\omega_b=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}\end{cases}$
    - 此时有$\rho(L_{\omega_b})=\omega_b-1$。

共轭梯度法

- 最速下降法：$\begin{cases} r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \\ \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)} \end{cases}$
- 共轭梯度法（CG法）：

共轭梯度法（CG）算法

1. 任取$x^{(0)} \in R^n$
2. 计算$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, p^{(0)} = r^{(0)}$
3. 对 $k = 0,1, \ldots$

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$$

$$\beta_k = -\frac{(Ap^{(k)}, r^{(k+1)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$$

若$p^{(k)} = 0$则算法终止。

- CG法快于最速下降法法，且能保证对$A_{n\times n}$最多只需n步就求出精确解。