《工程硕士数学》第七次作业

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第三题（2）

- 令$f(x)=1$，使求积公式准确有$1=C_0+C_1$
- 令$f(x)=x$，使求积公式准确有$\frac{1}{2}=C_1x_1$
- 令$f(x)=x^2$，使求积公式准确有$\frac{1}{3}=C_1x_1^2$

联立解得$x_1=\frac{2}{3}$，$C_1=\frac{1}{4}$、$C_0=\frac{3}{4}$，代数精度为2。

第七题

使用如下的Matlab代码计算Romberg法求积：

```
a = 0.2;
b = 1.5;
f = @(x)exp(-x ^ 2);
k = 0;
n = 1;
h = b - a;
T = h / 2 * (f(a) + f(b));
err = 1;
while err >= 1e-4
    k = k + 1;
    h = h / 2;
    tmp = 0;
    for i = 1:n
        tmp = tmp + f(a + (2 * i - 1) * h);
    end
    T(k+1, 1) = T(k) / 2 + h * tmp;
    for j = 1:k
        T(k+1, j+1)=T(k+1, j) + (T(k+1, j) - T(k, j)) / (4 ^ j - 1);
    end
    n = n * 2;
    err = abs(T(k+1, k+1) - T(k, k));
end
T
R = T(k+1, k+1)
```

求得：

0.6930				
0.6621	0.6518			
0.6595	0.6586	0.6590		
0.6590	0.6588	0.6588	0.6588	
0.6589	0.6588	0.6588	0.6588	0.6588

故$R(4,4)=0.6588$。

第九题

权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，二次正交多项式$\phi_2(x)=x^2+bx+c$

由$\int_0^1 \rho(x)\phi_2(x)dx=\int_0^1 x\rho(x)\phi_2(x)dx=0$知$\begin{cases}\int_0^1 x^{1.5}+bx^{0.5}+cx^{-0.5}dx=0\\ \int_0^1 x^{2.5}+bx^{1.5}+cx^{0.5}dx=0\end{cases}$，化简后得$\frac{1}{2.5}+\frac{b}{1.5}+\frac{c}{0.5}=\frac{1}{3.5}+\frac{b}{2.5}+\frac{c}{1.5}=0$，解得$b=-\frac{6}{7}$，$c=\frac{3}{35}$。

由$\phi_2(x)$零点为$x_0=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$，$x_1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$，代入求积公式，取$f(x)=1$和$f(x)=x$并令求积公式成立，解得$A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$，$A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$。

第十题（2）

取$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$，则$t\in[-1,1]$，$\int_0^1 x^2e^xdx=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^2e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}dt=\int_{-1}^1 p(t)dt$。

由两个节点的Gauss-Legendre公式，查表知：

x_k	A_k
± 0.5774	1

故$\int_{-1}^1 p(t)dt=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times 0.5774+\frac{1}{2})^2e^{\frac{1}{2}\times 0.5774+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\times 0.5774+\frac{1}{2})^2e^{-\frac{1}{2}\times 0.5774+\frac{1}{2}}=0.7119$。