# 《工程硕士数学》期末复习

## 第二章 解线性方程组的直接解法

### 1. Gauss消去法

- Gauss顺序消去法
  - 消去（$O(n^3)$）：将$Ax=b$通过初等行变换化简为$Ux=b$。
    - 从第二行开始，给每行乘以一个不同的系数$l$，使得每行第一位都等于第一行第一位的相反数；
    - 从第二行开始，给每行加上第一行，使得每行第一位都等于0；
    - 从第三行开始，给每行乘以一个不同的系数$l$，使得每行第二位都等于第二行第二位的相反数；
    - 从第三行开始，给每行加上第二行，使得每行第二位都等于0；
    - ......
    - 最后得到上三角阵$U$。
  - 回代（$O(n^2)$）：从最后一行开始逐行解$Ux=b$。
- Gauss列主元消去法：若消去到第$k-1$步（$k\geq 1$），此时第$k$行及以下部分的第$k$位待消去，则挑选所有这些数中绝对值最大的，把它所在行换到第$k$行，再消去。

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right].$$

示例：

**例 2.2.4** 用列主元法解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，计算过程取五位数字，其中

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc:c} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{array}\right].$$

这一题就需要先把3.996所在行换到第一行，再进行第一次消去。

## 2. 顺序主子式

- 顺序主子式：对$n \times n$的方阵，求其左上角$1 \times 1$、$2 \times 2$、……、$n \times n$这$n$个部分的行列式，这个过程称为求顺序主子式$\Delta_1$、$\Delta_2$、…、$\Delta_n$。
- Gauss消去法的可行性：当顺序主子式任何一项都不为零时，方阵$A$可以使用上述的Gauss消去。

## 3. LU分解

- Doolittle分解（LU分解）：通过Gauss消去法得到$U$以后，一定能找到下三角阵$L$，使$A = LU$。
  - $L$的对角元素显然全为1。
- Crout分解：对换Doolittle分解中$L$的对角元素和$U$的对角元素，使得$U$的对角元素全为1。
- LDU分解：提取Doolittle分解中$U$的对角元素，形成对角矩阵$D$，使得$U$变成对角元素全为1的上三角阵$\widetilde{U}$，而此时$A$可以分解为$A = LD\widetilde{U}$。
- 单位上（下）三角阵：对角元素全为1的上（下）三角阵。
- Doolittle分解的存在唯一性：存在唯一Doolittle分解的条件为方阵$A_{n \times n}$的顺序主子式$\Delta_1$到$\Delta_{n-1}$都不为零。
  - 显然，如果Doolittle分解存在且唯一，则Crout、LDU分解也都存在且唯一。

## 4. 三对角矩阵

- 三对角矩阵：三对角矩阵是形如下图的方阵。

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

- 三对角矩阵LU分解的形状：三对角矩阵的LU分解一定形如下图。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

- 追赶法：
  - 先进行LU分解，使得$LUx = b$。
  - 计算$Ly = b$，此时有$y = Ux$。
  - 计算$Ux = y$，求出$x$。

### 5. 正定矩阵的Cholesky分解

- 正定矩阵：顺序主子式全部大于0的实对称方阵。
- Cholesky分解：对正定对称阵作LU分解，必有$U=L^T$、$A=LL^T$。这种分解称为Cholesky分解。
- 平方根法（Cholesky法）：
  - 先进行Cholesky分解，使得$LL^Tx=b$。
  - 计算$Ly=b$，此时有$y=L^Tx$。
  - 计算$L^Tx=y$，求出$x$。

### 6. 范数

- 向量范数：
  - 1-范数：向量所有元素的和。
  - 2-范数：向量模长。
  - 无穷范数（$\infty-$范数）：向量所有元素的绝对值的最大值。
- 谱半径： 方阵$A$的谱半径为其所有特征值的绝对值的最大值，记为$\rho(A)$。
  - 回忆：特征多项式为$\lambda I-A$的行列式计算结果，特征值为特征多项式的根。
- 矩阵范数：
  - 1-范数（列范数）：对所有元素取绝对值，再对每列进行求和。取最大的和为1-范数。
  - 2-范数：$\sqrt{\rho(A^TA)}$。
    - 当$A$为对称矩阵时，有$\sqrt{\rho(A^TA)}==\sqrt{\rho(A^2)}=\rho(A)$。
  - 无穷范数（$\infty-$范数、行范数）：对所有元素取绝对值，再对每行进行求和。取最大的和为无穷范数。

### 7. 条件数与病态

- 条件数：$Cond(A)_n=||A||_n||A^{-1}||_n$，其中$||A||$表示矩阵范数，$||A||_1$为1-范数，$||A||_2$为2-范数，......。
  - 回忆：
    - 矩阵元素的代数余子式为$B_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$。
    - 矩阵所有元素取代数余子式会得到伴随矩阵$A^*$，而$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。
- 病态：对病态矩阵$A$的任意元素进行扰动（加减一个微小量），都会导致$Ax=b$求解结果的巨大变化。
- 病态矩阵的判别：当$A$的任意一种条件数的数量级远大于$A$的数量级时，$A$就是病态的。
- 比较可能出现病态的矩阵：
  - 各元素数量级差别很大的矩阵；
  - 进行列主元消去或LU分解时，发现主元也很小的矩阵；
  - 行列式很小的矩阵。

# 第三章 解线性方程组的迭代法

## 1. Jacobi、Gauss-Seidel法与SOR法

当矩阵$A$满足下图所示形式时：

$$A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$$
$$A=D-L-U;D=diag[a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}]$$

$$L=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & -a_{n,n-1} & 0\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}0 & -a_{12} & -a_{13} & & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & & -a_{2n} \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

- Jacobi法：$\begin{cases}B=D^{-1}(L+U)\\x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+D^{-1}b\end{cases}$；
- Gauss-Seidel法：$\begin{cases}B=(D-L)^{-1}U\\x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+(D-L)^{-1}b\end{cases}$；
- SOR法：$\begin{cases}B=L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\\x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b\end{cases}$，式中$\omega$为自主选择的松弛因子。
- 迭代矩阵：以上三式中的$B$称为迭代矩阵。

## 2. 迭代法的收敛

- 迭代法的收敛性判定：
  - 对任何迭代法，若迭代矩阵$B$满足$\rho(B)<1$，则迭代法收敛。
  - 若$A$严格对角占优，则无论用Jacobi法还是Gauss-Seidel法求解$Ax=b$，均收敛。
    - 回忆：若每行的对角元素绝对值均大于其他元素绝对值之和，则这样的矩阵为严格对角占优矩阵。
    - 因此，若$Ax=b$无法直接用迭代法求解，可以先进行行交换，使$A$为严格对角占优矩阵，再求解。
  - 对任何对称正定矩阵$A$，Gauss-Seidel法收敛。
  - 对任何对称正定矩阵$A$，若将非对角元素全部取相反数，新矩阵仍然对称正定，则Jacobi法收敛。
  - 对任何$\omega\in(0,2)$，有SOR法收敛。
    - 特别的，$\omega<1$称为低松弛，$\omega>1$为高松弛，$\omega=1$时SOR法退化回Gauss-Seidel法。
- 迭代法的渐进收敛速度：$R(B)=-\ln\rho(B)>0$。$\rho(B)$越小，迭代法收敛越快。
  - 最佳松弛因子：对三对角对称正定矩阵，SOR法有最佳松弛因子$\begin{cases}B_J=D^{-1}(L+U)\\\omega_b=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}\end{cases}$。
    - 此时有$\rho(L_{\omega_b})=\omega_b-1$。
    - 当$\omega\approx\omega_b$时，SOR法远快于Jacobi法。

### 3. 共轭梯度法

- 最速下降法：$\begin{cases} r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \\ \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)} \end{cases}$。
- 共轭梯度法（CG法）：$\begin{cases} \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)} \\ \beta_k = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})} \\ p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)} \end{cases}$，初值可取$\begin{cases} r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \\ p^{(0)} = r^{(0)} \end{cases}$。
    - CG法显著快于最速下降法和J法，一般也显著快于SOR法。
    - CG法能保证对$A_{n\times n}$最多只需$n$步就求出精确解。

---

## 第四章 非线性方程的数值解法

### 1. 不动点迭代法

- 收敛：把方程化为$x = f(x)$的形式，若当$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^*$，则$x^* = f(x^*)$，则此时不动点迭代法收敛。
- 不动点迭代法的整体收敛性：
    - 映内性：若$\forall x \in [a, b]$有$f(x) \in [a, b]$，则$[a, b]$中一定存在$f(x)$的不动点。
    - 压缩性：在映内性满足的情况下，若$\exists L \in (0, 1)$使得$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$对任意$x, y$成立，则映内性所说的不动点是唯一的，因此$f(x)$确认能收敛到这个不动点。
    - 推论：在映内性满足的情况下，若$\exists L \in (0, 1)$使得$|f'(x)| \le L$对任意$x \in [a, b]$成立，则$f(x)$也必然存在唯一的不动点，从而收敛到这一不动点。
        - 显然，一般使用推论证明整体收敛性，不用压缩性证明。（参考第九章第1节“Lipschitz条件”）
- 不动点迭代法的局部收敛性：
    - 局部收敛：若已有有$x^*$，且确认$f'(x)$在$x^*$附近的邻域内连续，满足$|f'(x^*)| < 1$，则不动点迭代法是局部收敛的。
    - 阶：给定式子$\lim_{k\to+\infty} \frac{f^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0$，满足该式的最小正整数$p$称为局部收敛阶数。
        - 显然，计算阶数时可以忽略$p!$，直接求$f$在$x^*$处的导数、二阶导数......直到不等于0为止。

### 2. 不动点迭代法的加速方法

- Aitken加速法：从迭代的第三项$x_{k+2}$起进行修正：$x_i = \frac{x_i x_{i-2} - x_{i-1}^2}{x_i + x_{i-2} - 2x_{i-1}}$。

- Steffensen加速法：对于不动点迭代法$x=\varphi(x)$，Steffensen加速法为：$\begin{cases} m=\varphi(x_k) \\ n=\varphi(m) \\ x_{k+1}=x_k-\frac{(m-n)^2}{n-2m+x_k} \end{cases}$。
  - Steffensen加速法至少能加速到二阶。
  - Steffensen加速法有时能将不收敛的不动点迭代法加速为收敛。

### 3. Newton迭代法

- （带导数的）Newton迭代法：$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$。
  - 若要求的根为重根，则Newton迭代法是线性的。否则，Newton迭代法是至少二阶的。
- 不带导数的Newton迭代法（割线法）：$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$。这个方法需要两个初值。
- 改进的Newton迭代法：$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，式中$m$需要按照原方程情况进行指定。

---

## 第五章 矩阵特征值问题

> 本章讨论的矩阵特征值均用λ表示，其中$\lambda_1$是主特征值（最大的特征值），其余特征值按$\lambda_2$、$\lambda_3$、...、$\lambda_n$从大到小排列。

### 1. 幂法

- 幂法：对任给$v_0$，有$\begin{cases} z^{(k)}=Av^{(k-1)} \\ m^{(k)}=\max(z^{(k)}) \\ v^{(k)}=\frac{z^{(k)}}{m^{(k)}} \end{cases}$，其中$m^{(k)}$收敛到主特征值$\lambda_1$，$v^{(k)}$收敛到$\lambda_1$对应的特征向量。
- 幂法的收敛速度：用$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$表示。$\lambda_2$越接近$\lambda_1$，收敛越慢。
- 幂法的Aitken加速：$\overline{\lambda_1}^{(k)}=\frac{m_k m_{k+2}-m_{k+1}^2}{m_{k+2}-2m_{k+1}+m_k}$，这个算法比$m^{(k)}$收敛得更快。
- 逆幂法：$\begin{cases} A'z^{(k)}=v^{(k-1)} \\ m^{(k)}=\max(z^{(k)}) \\ v^{(k)}=\frac{z^{(k)}}{m^{(k)}} \end{cases}$，其中第一步需要解方程，$m^{(k)}$收敛到最小特征值$\lambda_n$的倒数，$v^{(k)}$收敛到$\lambda_n$对应的特征向量。
  - 逆幂法的收敛速度：用$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$表示。$\lambda_n$越接近$\lambda_{n-1}$，收敛越慢。
- 原点位移的逆幂法：$\begin{cases} (A'-qI)z^{(k)}=v^{(k-1)} \\ m^{(k)}=\max(z^{(k)}) \\ v^{(k)}=\frac{z^{(k)}}{m^{(k)}} \end{cases}$，其中第一步需要解方程。当$q$最接近某一特征值$\lambda_i$时，$m^{(k)}$收敛到$\frac{1}{\lambda_i-q}$，$v^{(k)}$收敛到$\lambda_i$对应的特征向量。
  - 若已知$\lambda_i$对应的特征向量近似为$x$，可直接取$q=\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$。

## 2. Householder矩阵的求法

- Householder矩阵：对任意$n$维向量$x$，$n$维向量$v=[-sgn(x_1)||x||_2,0,\cdots,0]^T$，总存在对称正交矩阵$P$，使$Px=v$，这样的矩阵$P$称为Householder矩阵。
- Householder矩阵的求法：$\begin{cases} u=[x_1+sgn(x_1)||x||_2,x_2,\cdots,x_n]^T \\ \beta=\frac{1}{||x||_2^2+|x_1|\cdot||x||_2^2} \\ P=I-\beta uu^T \end{cases}$。
- 一般情况下的Householder矩阵：对任意$n$维向量$x$，$n$维向量$v=(v_1,\cdots,v_j=-sgn(x_j)\alpha,v_{j+1}=0,\cdots,v_k=0,v_{k+1},\cdots,v_n)$（相当于只有从第$j+1$到$k$项为0，$1\le j<k$，$j<k\le n$），总存在对称正交矩阵$P$，使$Px=v$。这样的矩阵$P$也称为Householder矩阵。
- 一般情况下的Householder矩阵求法：
$\begin{cases} u=[0,\cdots,0,x_j+sgn(x_j)\alpha,x_{j+1},\cdots,x_k,0,\cdots,0]^T \\ P=I-\frac{2uu^T}{||u||_2^2} \end{cases}$
    - $||u||_2^2$的简便算法：$\begin{cases} \alpha=\sqrt{x_j^2+x_{j+1}^2+\cdots+x_n^2} \\ ||u||_2^2=2\alpha(\alpha+x_j) \end{cases}$
    - 如此计算出的Householder矩阵$P$，从$j$行$j$列到$k$行$k$列仍为Householder矩阵（记为$\widetilde{P}$），其余部分则为单位矩阵，如下图所示。

$$P=I-\frac{2uu^T}{||u||_2^2}=\begin{pmatrix} I_{j-1} & & \\ & \widetilde{P} & \\ & & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

    - 等式右边为矩阵的Householder矩阵求法：当等式变为$Px=V$时，若矩阵第一列$v$仍满足上述的条件，则仍可按上述方法求取Householder矩阵$P$。

## 3. 上Hessenberg矩阵的求法

- 上Hessenberg矩阵：次对角线以下元素均为0的矩阵，如下图所示。

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ & * & \cdots & * & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & * & * \end{bmatrix}.$$

- 上Hessenberg矩阵的求法：
    - 将待变换成上Hessenberg矩阵的矩阵$A$，取第一列$v_1$，寻找Householder矩阵$P_1v_1=v_1'$使得$v_1'$形如$(*,*,0,\cdots,0)^T$。
    - 计算$H_1=P_1AP_1$。如$H_1$还不是上Hessenberg矩阵，则除去$A$最左上角的一行一列，对右下角的分块$A_2$，取新的第一列$v_2$，寻找$n-1$维Householder矩阵$P_2'v_2=v_2'$使得$v_2'$形如$(*,*,0,\cdots,0)^T$，构造$n$维Householder矩阵$P_2=\begin{bmatrix} I & \\ & P_2' \end{bmatrix}$。
    - 计算$H_2=P_2H_1P_2$。如$H_2$还不是上Hessenberg矩阵，则再除去$A_2$最左上角的一行一列，对右下角的分块$A_3$，取新的第一列$v_3$，寻找$n-2$维Householder矩阵$P_3'v_3=v_3'$使得$v_3'$形如$(*,*,0,\cdots,0)^T$，构造$n$维矩阵$P_3=\begin{bmatrix} I & \\ & P_3' \end{bmatrix}$。

- ......
- 直到$H_k$为上Hessenberg矩阵时，结束。

## 4. QR分解

- QR分解：将非奇异矩阵$A$分解为$A=QR$，其中$Q$为正交矩阵，$R$为对角线均为正数的上三角阵。
- QR分解方法（类似于上Hessenberg矩阵的求法）：
  - 将待分解的矩阵$A$，取第一列$v_1$，寻找$P_1 v_1 = v_1'$使得$v_1'$形如$(*,0,\cdots,0)^T$。
  - 计算$R_1 = P_1 A$。如$R_1$还不是上三角矩阵，则除去$A$最左上角的一行一列，对右下角的分块$A_2$，取新的第一列$v_2$，寻找$n-1$维矩阵$P_2' v_2 = v_2'$使得$v_2'$形如$(*,0,\cdots,0)^T$，构造$n$维矩阵$P_2 = \begin{bmatrix} I & \\ & P_2' \end{bmatrix}$。
  - 计算$R_2 = P_2 P_1 A$。如$R_2$还不是上三角矩阵，则除去$A$最左上角的一行一列，对右下角的分块$A_3$，取新的第一列$v_3$，寻找$n-2$维矩阵$P_3' v_3 = v_3'$使得$v_3'$形如$(*,0,\cdots,0)^T$，构造$n$维矩阵$P_3 = \begin{bmatrix} I & \\ & P_3' \end{bmatrix}$。
  - ......
  - 直到$R_k = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$为上三角矩阵时，结束。此时有：
    - $Q = (P_1 P_2 \cdots P_n)^{-1} = (P_1 P_2 \cdots P_n)^T = P_k^T P_{k-1}^T \cdots P_1^T$。
    - $R = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$。
  - 有时希望对角线为正，因此需要取合适的对角矩阵$D$，使$\bar{Q} = QD$、$\bar{R} = D^{-1}R$对角线为正。
  - 示例：求$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$的QR分解，使$Q$和$R$对角线均为正。
  - 解答：
    - 先找到$P$使$R = PA$为上三角阵：
      - $k=-3$，$u=[4,2,2]^T$，$\beta = \frac{1}{12}$
      - $P = I - \beta u u^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，此时$PA = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$。
    - 注意到第二列对角线以下仍然不是0，因此再对$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$找$P_0$，使$R_0 = P_0 A_0$为上三角阵。
      - $k_0 = -3$，$u_0 = [3,-3]^T$，$\beta_0 = \frac{1}{9}$。
      - $P_0 = I - \beta_0 u_0 u_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，此时$P_0 A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$。
    - 于是取$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，此时：

- $R = P_1 * P * A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$。
- $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$。

但这是对角线非正的。因此取$\bar{D} = diag(-1, -1, -1)$:

- $\bar{Q} = Q\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$。
- $\bar{R} = \bar{D}^{-1}R = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。

检验得$\bar{Q}\bar{R} = A$，符合题意。

- 基本QR迭代方法：$\begin{cases} A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases}$，该法中$A_k$会收敛与上三角阵，对角元素为$A$特征值。

---

## 第六章 插值法

### 1. Lagrange插值

- $n$次Lagrange插值多项式：$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)[\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(\frac{x-x_j}{x_k-x_j})]$。
  - 显然，$n$次Lagrange插值多项式是$n$次多项式，对应$n-1$个插值点，在这些插值点上$L_n(x) = f(x)$。

---

## 第七章 函数逼近

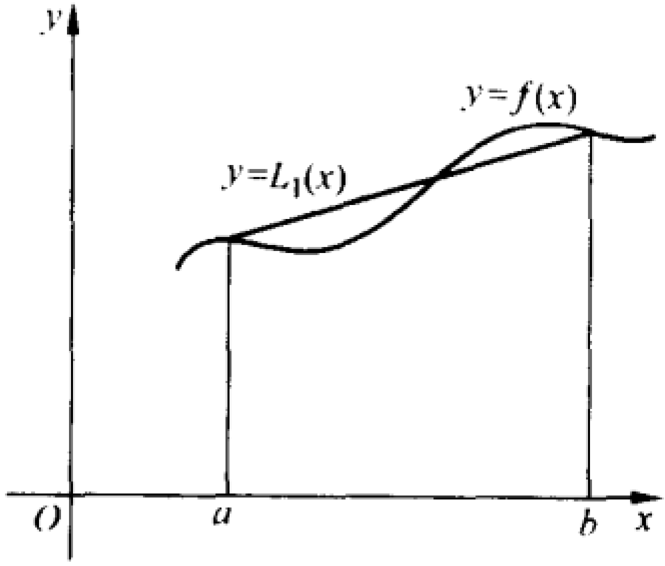
---

## 第八章 数值积分

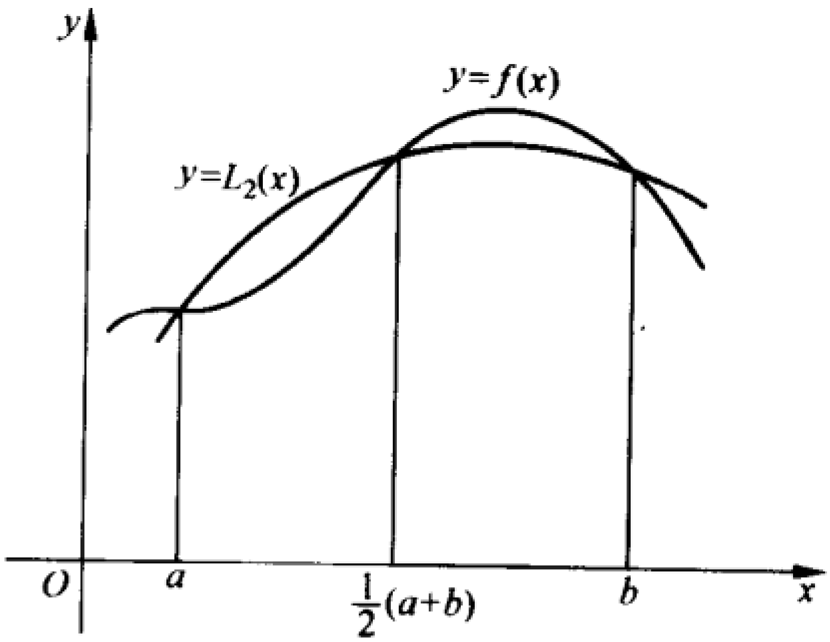
> 本章讨论的数值积分均形如$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx$。

### 1. Newton-Cotes型数值积分

- 插值型公式：设对$f(x)$进行$n$次Lagrange插值，得到插值多项式$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)[\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(\frac{x-x_j}{x_k-x_j})]$，则插值型公式定义为$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)[\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(\frac{x-x_j}{x_k-x_j})]$。
  - 下述的梯形、Simpson、Newton-Cotes求积公式，事实上全部为插值型公式。
- 代数精度：若某个插值型求积公式$I(f) \approx \int_a^b L_1(x)dx$能在$f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^p$严格取等，而在$f(x) = x^{p+1}$只能取约等，则该求积公式的代数精度为$p$次。
- 梯形公式：$I(f) \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$，如下图所示。




  - 梯形公式的代数精度：1。
- Simpson公式：$I(f)=\frac{b-a}{6}[f(a)+f(b)+4f(\frac{b+a}{2})]$，如下图所示。




  - Simpson公式的代数精度：3。
- Newton-Cotes求积公式：$I(f)\approx(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$，其中$C_k^{(n)}$的值见下表。

| $n$ | $C_k^{(n)}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | | | | |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | | | |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | | | |
| 4 | $\frac{7}{90}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{2}{15}$ | | |
| 5 | $\frac{19}{288}$ | $\frac{25}{96}$ | $\frac{25}{144}$ | | |
| 6 | $\frac{41}{840}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{9}{280}$ | $\frac{34}{105}$ | |
| 7 | $\frac{751}{17\,280}$ | $\frac{3577}{17\,280}$ | $\frac{1323}{17\,280}$ | $\frac{2989}{17\,280}$ | |
| 8 | $\frac{989}{28\,350}$ | $\frac{5888}{28\,350}$ | $\frac{-928}{28\,350}$ | $\frac{10\,496}{28\,350}$ | $\frac{-4540}{28\,350}$ |

- $C_k^{(n)}$满足$C_k^{(n)} = C_n^{(n-k)}$。
- $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$等分了区间$[a, b]$。
- $n = 1$时，Newton-Cotes求积公式退化为梯形公式；$n = 2$时退化为Simpson公式，$n = 3$时称为Simpson 3/8公式；$n = 4$时称为Boole公式（或Cotes公式）。
- Newton-Cotes求积公式的稳定性：$n \le 7$的Newton-Cotes都是稳定的，因为此时所有的$C$均为正数。

- 开型Newton-Cotes求积公式：即令$\{a, x_0, x_1, \cdots, x_n, b\}$等分$[a, b]$的Newton-Cotes公式。
  - 中点公式：取$n = 0$，有$I(f) \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$。
  - 两点公式：取$n = 1$，有$I(f) \approx \frac{b-a}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$。
  - 三点公式：取$n = 2$，有$I(f) \approx \frac{b-a}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)]$。

## 2. 复合求积公式

- 复合梯形公式：将$[a, b]$等分为$\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$，并对每个部分使用梯形公式求积分，得到$I_n(f) \approx \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$，即为复合梯形公式。
- 复合Simpson公式：将$[a, b]$等分为$\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$，并对每个部分使用Simpson公式求积分，得到$I_n(f) \approx \frac{b-a}{6n}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_k + x_{k-1}}{2})]$，即为复合Simpson公式。
- Romberg算法：
  1. $h = b - a$，$T(0,0) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$，转2。
  2. 将区间$[a, b]$分半，$T(1,0) = I_2(f)$，$T(1,1) = \frac{4T(1,0) - T(0,0)}{4^1 - 1}$，$1 \to j$，转4。
  3. 对区间作$2^j$等分，$T(j,0) = I_{2^j}(f)$，$T(j,k) = \frac{4^k T(j,k-1) - T(j-1,k-1)}{4^k - 1}$，$k = 1, 2, \cdots, j$，求出$T(j,j)$，转4。
  4. $|T(j,j) - T(j-1,j-1)| < \varepsilon$，则$T(j,j)$即为所求；否则$j + 1 \to j$，转3。
  - 式中$I_n(f)$使用复合梯形公式求解。
  - Romberg算法的计算结果可以打印为$T-$表，如下表所示。

| $T(0.0)$ | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $T(1,0)$ | $T(1,1)$ | | | |
| $T(2,0)$ | $T(2,1)$ | $T(2,2)$ | | |
| $T(3,0)$ | $T(3,1)$ | $T(3,2)$ | $T(3,3)$ | |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

## 3. Gauss型求积公式

- 最高精度：对于有$n + 1$个节点的求积公式，其最高代数精度为$2n + 1$。
- Gauss型求积公式：达到了最高代数精度的求积公式。
- Gauss型求积公式的求法：若有Gauss型求积公式$I(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$，希望使用$n + 1$个节点得到$2n + 1$精度，则求法如下：

- 设$\phi(x)=x^{n+1}+ax^n+bx^{n-1}+\cdots+z$，则联立$\begin{cases}\int_a^b \rho(x)\phi(x)dx-0\\ \int_a^b x\rho(x)\phi(x)dx-0\\ \cdots\\ \int_a^b x^n\rho(x)\phi(x)dx-0\end{cases}$，由此解出$a,b,\cdots,z$。
- 解$\phi(x)=0$，得到$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$共$n+1$个解，于是知$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n+1}A_kf(x_k)$。
- 由于精度为$2n+1$，则显然可以根据代数精度的求法，令$I(f)$在$f(x)=1,x,\cdots,x_n$严格取等，解出$A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$。此时即有Gauss型求积公式$I(f)\approx\sum_{k=1}^{n+1}A_kf(x_k)$。
- 从以上过程中可以看出，只要给定求积区间$[a,b]$和权函数$\rho(x)$，则不论对于什么样的$f(x)$，都能解出唯一一组$\{A_k\}$，使得$I(f)\approx\sum_{k=1}^{n+1}A_kf(x_k)$。
- 示例：

**例 8.5.2** 确定求积公式

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

中的系数 $A_0,A_1$ 及节点 $x_0,x_1$，使该求积公式具有最高代数精度.

**解** 具有最高代数精度的求积公式为 Gauss 求积公式. 节点 $x_0,x_1$ 为$[a,b]=[0,1]$上以权函数 $\rho(x)=\sqrt{x}$ 的两次正交多项式的零点. 不妨假定 $\phi_2(x)$的首项系数为 1(不改变零点).

设 $\phi_2(x)=x^2+ax+b$，如果有

$$\int_0^1\sqrt{x}\phi_2(x)\mathrm{d}x=0,\quad\int_0^1\sqrt{x}\cdot x\phi_2(x)\mathrm{d}x=0,\tag{8.5.8}$$

那么 $\phi_2(x)$在$[0,1]$上以权函数 $\rho(x)=\sqrt{x}$与零次和一次多项式正交. 所以 $\phi_2(x)$是$[a,b]$上，以权函数 $\rho(x)=\sqrt{x}$ 的二次正交多项式(首项系数为 1).

由(8.5.8)式得出 $a=-\frac{10}{9}$，$b=\frac{5}{21}$，从而得出

$$\phi_2(x)=x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}.$$

解 $\phi_2(x)=0$，有

$$x_0=\frac{35-2\sqrt{70}}{63},\quad x_1=\frac{35+2\sqrt{70}}{63},$$

即 $x_0=0.289\,949$，$x_1=0.821\,162$.

由于两个节点的 Gauss 求积公式具有 3 次代数精度，因此对于 $f(x)=1,x$，求积公式准确成立. 即

$$f(x)=1,\quad 有\quad\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=A_0+A_1,$$

$$f(x)=x,\quad 有\quad\int_0^1\sqrt{x}\cdot x\mathrm{d}x=A_0x_0+A_1x_1.$$

定积分计算后得

$$A_0+A_1=\frac{2}{3},\quad x_0A_0+x_1A_1=\frac{2}{5}.$$

由此解得 $A_0=0.277\,556$，$A_1=0.389\,111$. 求积公式为

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x\approx 0.277\,556f(0.289\,949)+0.389\,111f(0.821\,162).$$

- Gauss-Legendre求积公式：$\int_{-1}^1 f(x)dx=\sum_{k=0}^n A_kf(x_k)$，式中对不同的$n$有不同的$A_k$，如下图所示。

表 8.4

| $n$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | ±0.577 350 269 2 | 1 |
| 2 | ±0.774 596 669 2 | 0.555 555 555 6 |
| | 0 | 0.888 888 888 9 |
| 3 | ±0.861 136 311 6 | 0.347 854 845 1 |
| | ±0.339 981 043 6 | 0.652 145 154 9 |
| 4 | ±0.906 179 845 9 | 0.236 926 885 1 |
| | ±0.538 469 310 1 | 0.478 628 670 5 |
| | 0 | 0.568 888 888 9 |
| 5 | ±0.932 469 514 2 | 0.171 324 492 4 |
| | ±0.661 209 386 5 | 0.360 761 573 0 |
| | ±0.238 619 186 1 | 0.467 913 934 6 |
| 6 | ±0.949 107 912 3 | 0.129 484 966 2 |
| | ±0.741 531 185 6 | 0.279 705 391 5 |
| | ±0.405 845 151 4 | 0.381 830 050 5 |
| | 0 | 0.417 959 183 7 |
| 7 | ±0.960 289 856 5 | 0.101 228 536 3 |
| | ±0.796 666 477 4 | 0.222 381 034 5 |
| | ±0.525 532 409 9 | 0.313 706 645 9 |
| | ±0.183 434 642 5 | 0.362 683 783 4 |

  - 当求积区间不为$[-1,1]$而为$[a,b]$时，应将$x$变换为$t=\frac{2x-b-a}{b-a}$，将$\int_a^b f(x)dx$变为$\frac{2}{b-a}\int_{-1}^{1} f(t)dt$。
- Gauss-Chebyshev求积公式：$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+1}f(\cos(\frac{2k+1}{2n+2}\pi))$。
  - 类似地，当求积区间不为$[-1,1]$而为$[a,b]$时，应将$x$变换为$t=\frac{2x-b-a}{b-a}$。

---

# 第九章 常微分方程数值解法

> 本章讨论的常微分方程均形如$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y_0=\alpha\end{cases}$，迭代步长一律为$h$，即$x_k=x_0+kh$。

## 1. Lipschitz条件

- Lipschitz条件：若存在常数$L$使任意$y_1$、$y_2$满足$|f(y_1)-f(y_2)|\le L(y_1-y_2)$，则$f$满足Lipschitz条件。
- 加强的判别条件：$\forall(x,y)$满足$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\le L$的函数$f(x,y)$一定对$y$满足Lipschitz条件。
  - 这个条件是充分不必要条件，反推不一定成立。

## 2. 一阶单步方法

- Euler法
  - 显式Euler法：$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\y_0=\alpha\end{cases}$；
  - 隐式Euler法：$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})\\y_0=\alpha\end{cases}$；这个方法在给定$y_n$时并不能直接求解$y_{n+1}$，而是还要解方程，因此一般在近似解$y_n$已知时使用。
  - Euler法的收敛性：若能找到使$f$对$y$满足Lipschitz条件的$L$，则$h<\frac{1}{L}$可使Euler法收敛。
- 梯形方法
  - $\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]\\y_0=\alpha\end{cases}$，即对显式、隐式Euler方法做了折中。
  - 梯形方法的收敛性：若能找到使$f$对$y$满足Lipschitz条件的$L$，则$h<\frac{2}{L}$可使梯形方法收敛。

    - 梯形方法比显式Euler法一般更快。
- 预估-校正方法
    - 改进Euler法：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$。
    - 改进Euler法比显式Euler法一般更精确。
- 中点公式：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$

### 3. 截断误差

- 局部截断误差：对方法$\sum_{k=0}^{p} y_{n+k} = \sum_{k=0}^{q} y'_{n+k}$中的每项进行Taylor展开，得到的式子$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta h^i y_n^{(i)}$即为局部截断误差。
    - 此处所用的Taylor展开公式：$\begin{cases} y_{n+k} = y(x+kh) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(kh)^i}{i!} y_n^{(i)} \\ y'_{n+k} = f(x+kh) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(kh)^i}{i!} y_n^{(i+1)} \end{cases}$。
- 主局部截断误差：$T_{n+1}$的前面几项往往是0。对第一个非零项，称之为主局部截断误差。
- 阶：取主局部截断误差中$h$的次数$p$，有$p-1$为该方法的阶。

### 4. 相容性、收敛性与绝对稳定性

- 相容性、收敛性：若显式单步法的阶数$\geq 1$，则它具有相容性。若它相容，则还具有收敛性。
- 绝对稳定性：取$y'(x) = f(x, y) = \lambda y$，则单步法可以写成$y_{n+1} = E(\lambda h) y_n$。
    - 绝对稳定性的判别方法：令$\lambda h$满足$|E(\lambda h)| < 1$即可。
    - 当显式单步法中的$f$不是$f(x, y)$而是$f(g(x), h(y))$时，则$\lambda y$变成$\lambda h(y)$。