《工程硕士数学》第六次计算实习

软硕232 丁浩宸 2023213911

第二题

理论依据

最小二乘法进行曲线拟合。

算法推导

- 法方程：
$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

- 解出向量 $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，有最小二乘拟合结果 $s^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^* \varphi_i(x)$，而 $||s^*(x) - f(x)||_2$ 为误差。

在Matlab中，`polyfit` 函数和 `Curve Fitting Toolbox` 均可完成曲线拟合。以下同时使用两者进行拟合。

计算代码

```
x = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 1];
y = [1.0, 0.41, 0.50, 0.61, 0.91, 2.02, 2.46];
[p3, S3] = polyfit(x, y, 3);
[p4, S4] = polyfit(x, y, 4);
[p5, S5] = polyfit(x, y, 5);
[res,bint,r,rint,stats] = regress(y', x')
n = 0:0.01:1;
y3 = polyval(p3, n);
y4 = polyval(p4, n);
y5 = polyval(p5, n);
plot(x, y, '*', n, y3, 'k')
plot(x, y, '*', n, y4, 'k')
plot(x, y, '*', n, y5, 'k')
curveFitter
```
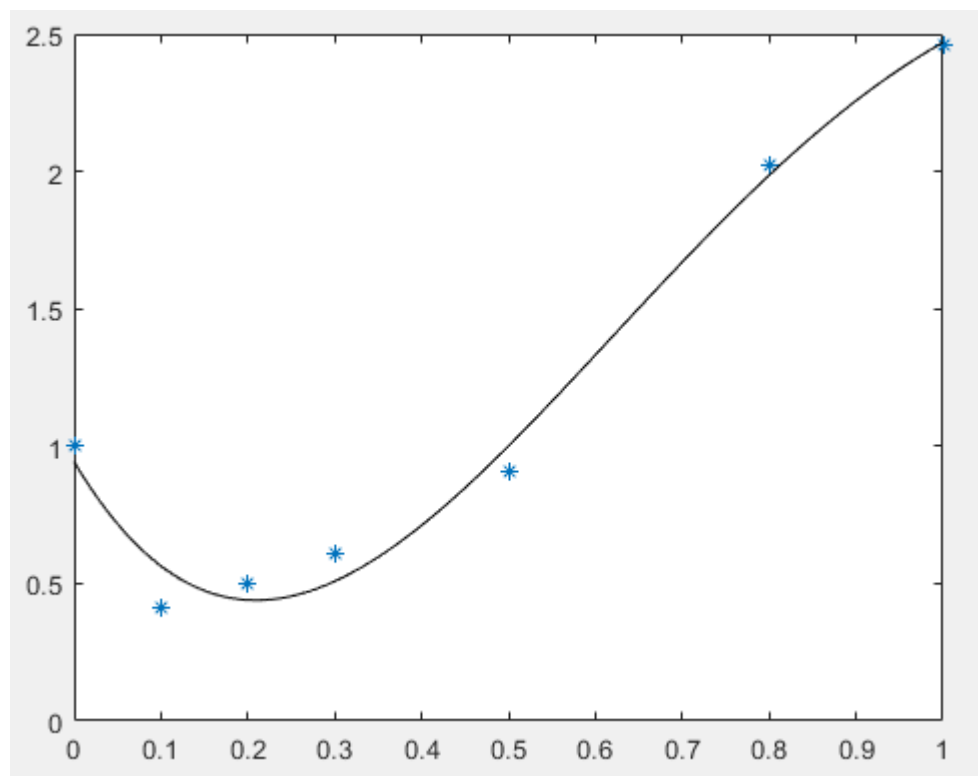
结果分析

`polyfit` 的三次拟合结果：

- $y = -6.6221x^3 + 12.8147x^2 - 4.6591x + 0.9266$
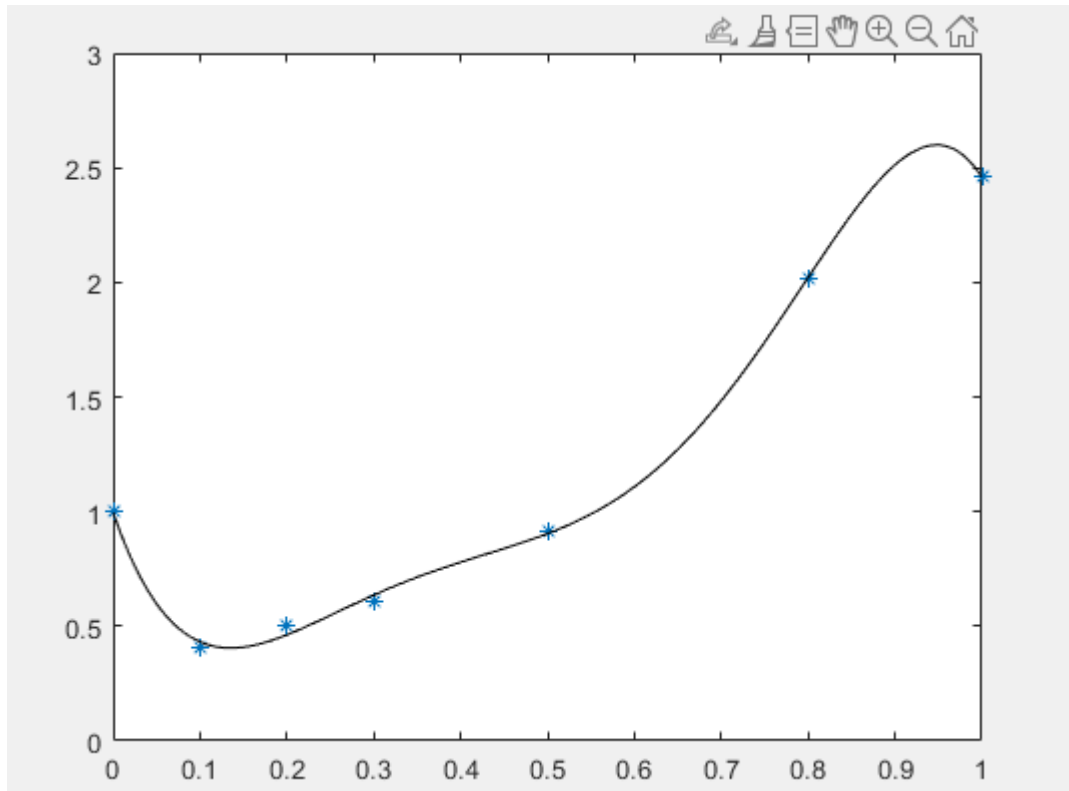
- `S.normr=0.2292`
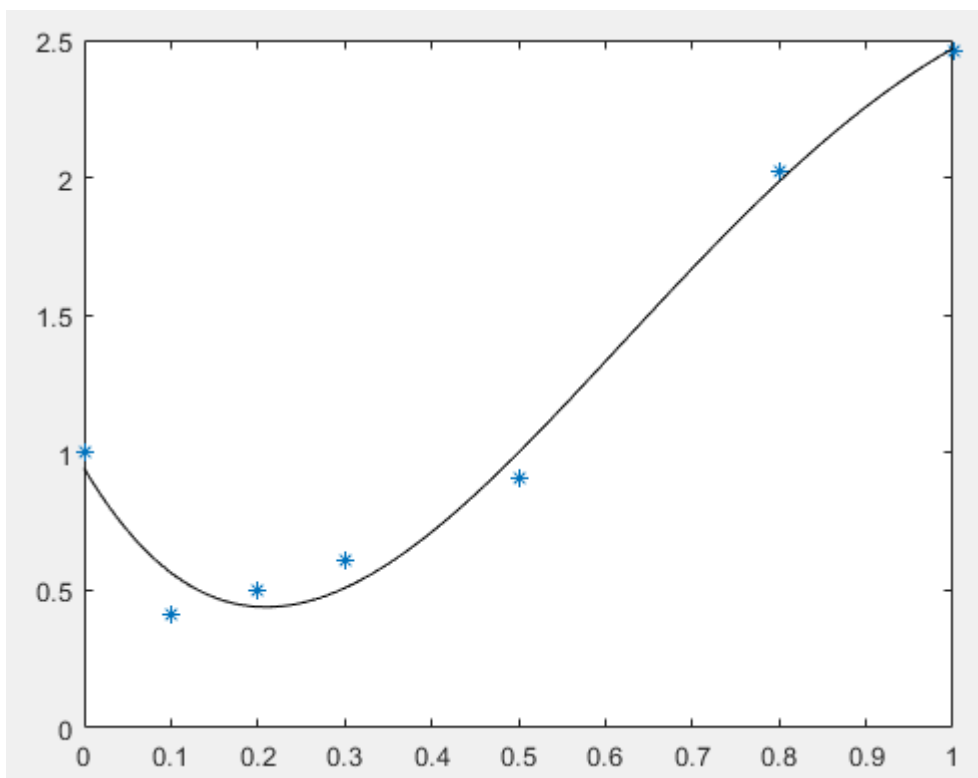
`polyfit` 的四次拟合结果：

- $y = 2.8853x^4 - 12.3348x^3 + 16.2747x^2 - 5.2987x + 0.9427$
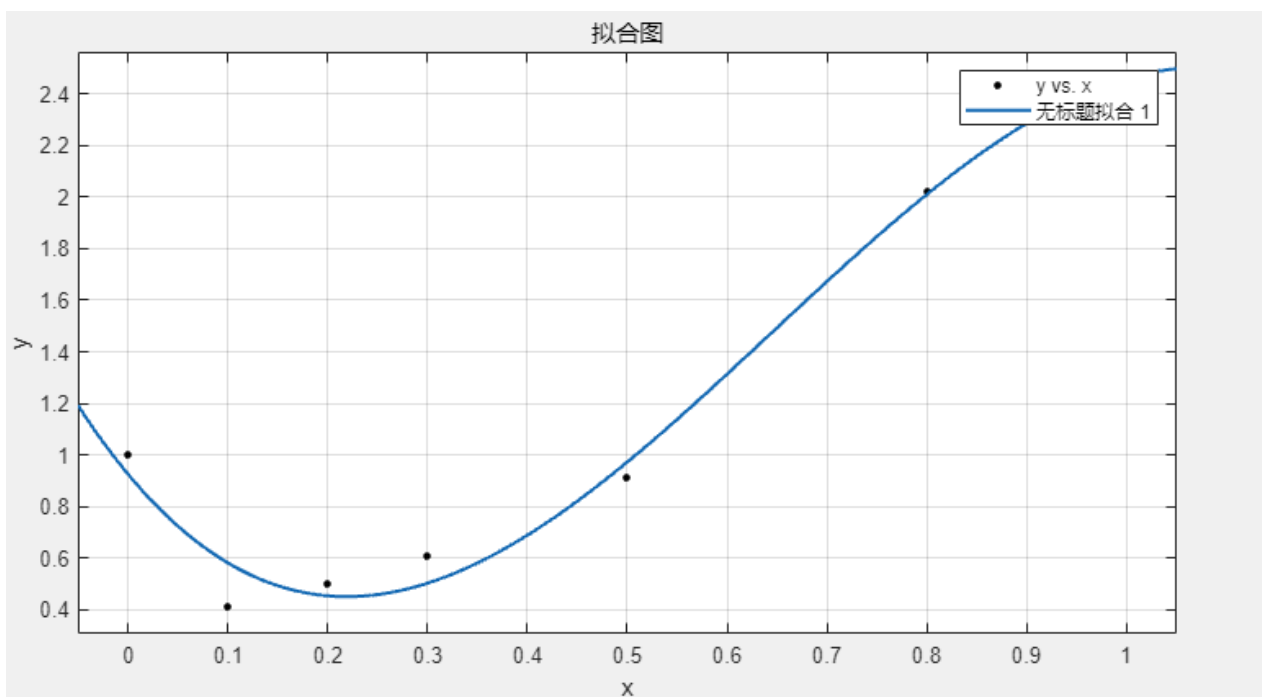
- `S.normr=0.2242`

`polyfit` 的五次拟合结果：

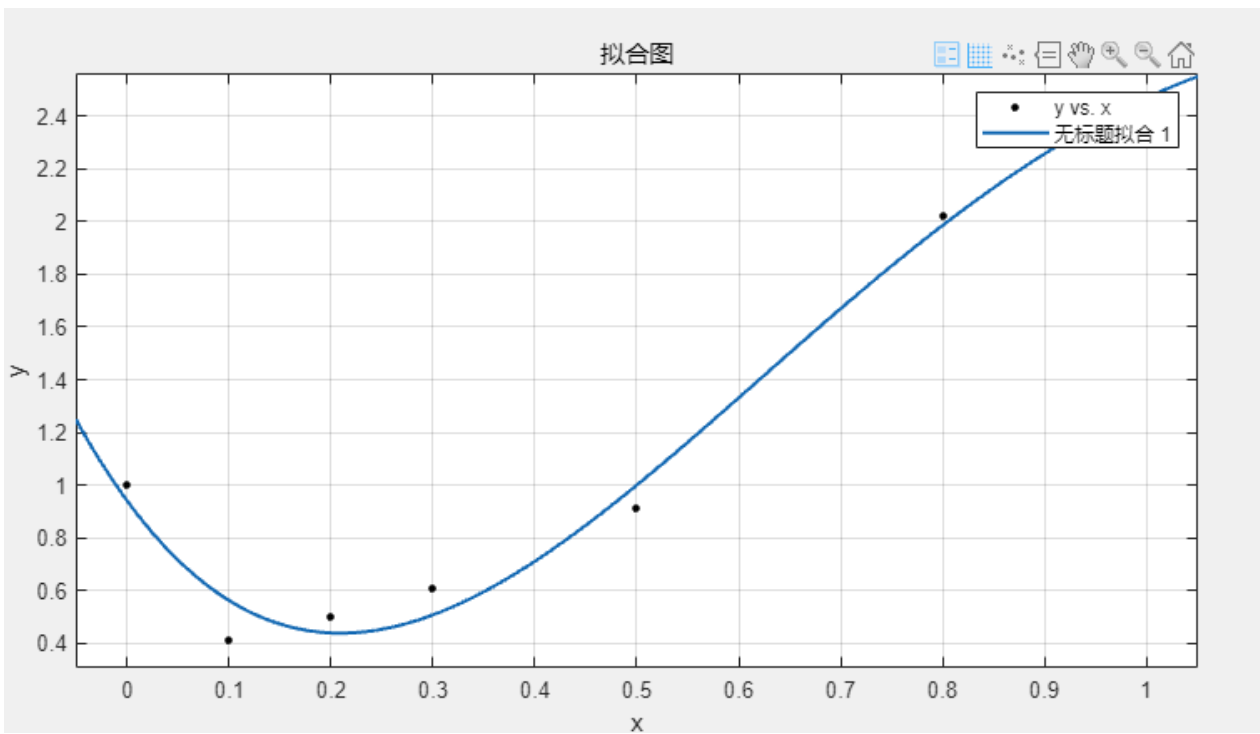- $y = -79.3261x^5 + 195.4554x^4 - 172.7106x^3 + 69.0498x^2 - 11.0044x + 0.9955$

- `S.normr=0.0512`

`curveFitter` 的三次拟合结果：

- $y = -6.6221x^3 + 12.8147x^2 - 4.6591x + 0.9266$
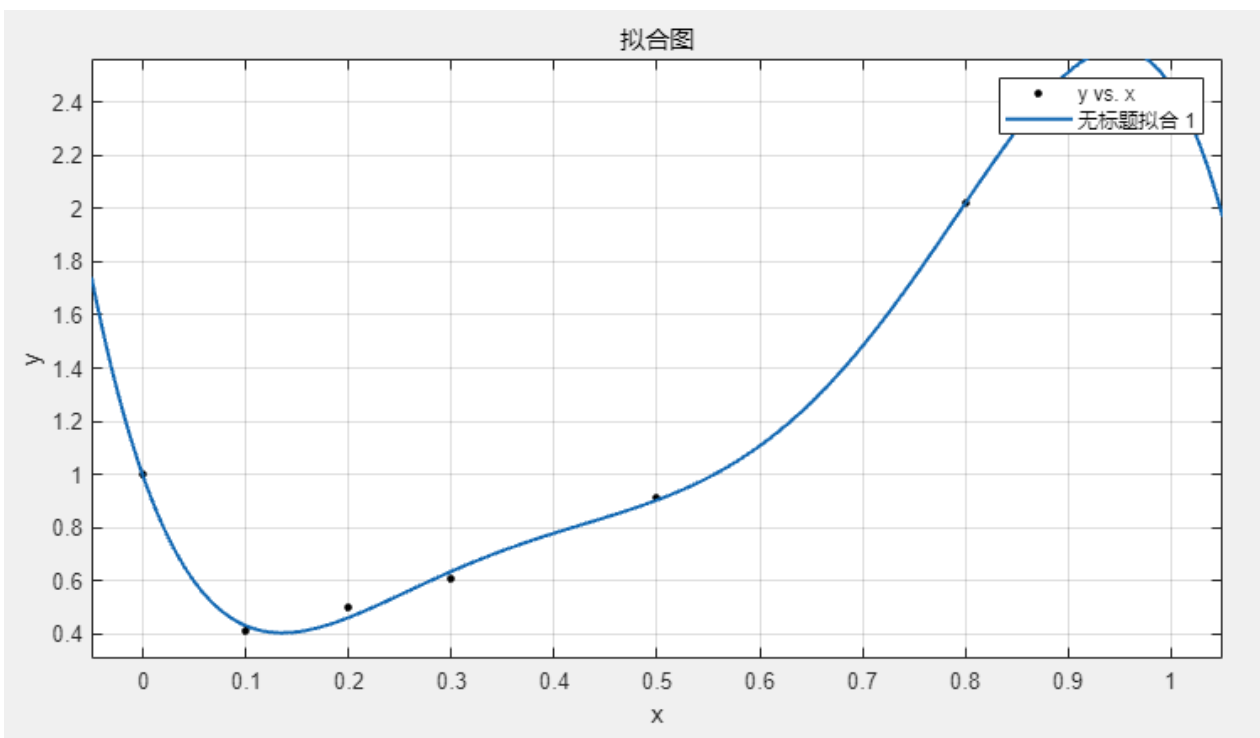
- $r^2 = 0.9862$

拟合图

`curveFitter` 的四次拟合结果：

- $y = 2.8853x^4 - 12.3348x^3 + 16.2747x^2 - 5.2987x + 0.9427$
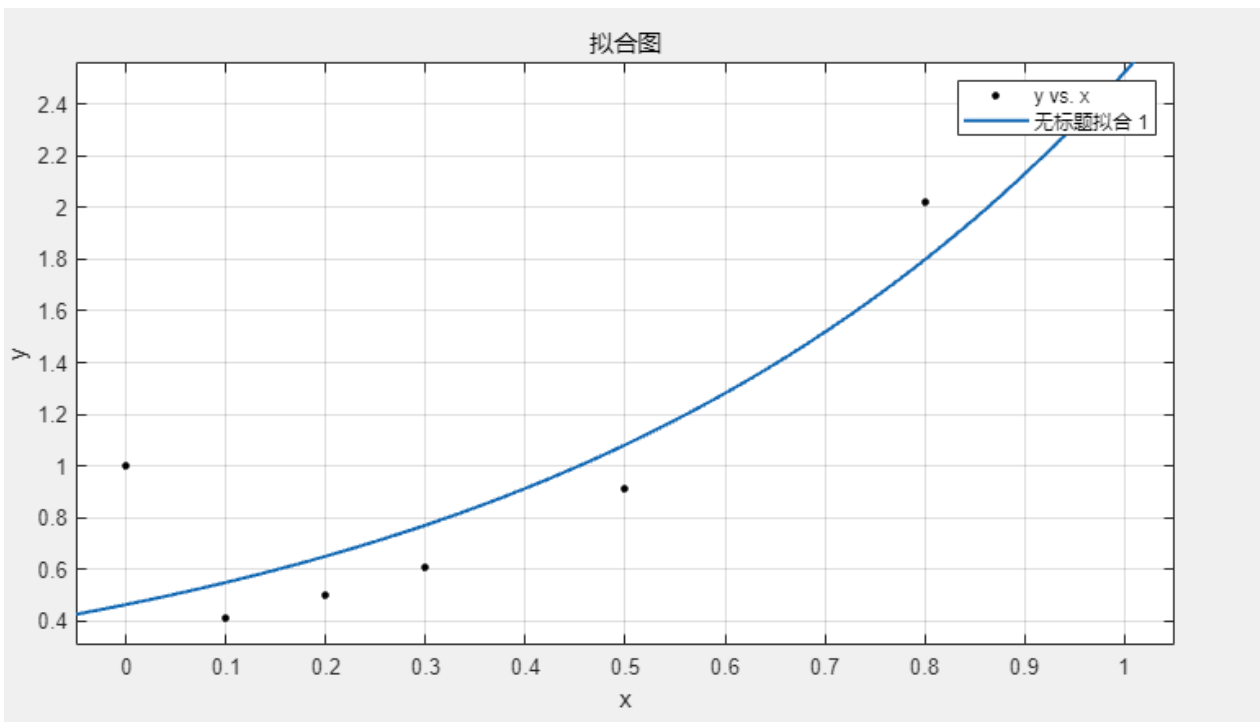
- $r^2 = 0.9868$

curveFitter 的五次拟合结果:

- $y = -79.3261x^5 + 195.4554x^4 - 172.7104x^3 + 69.0498x^2 - 11.0044x + 0.9955$
- $r^2 = 0.9998$

curveFitter 的指数拟合结果:

- $y = 0.4642e^{1.6932x}$
- $r^2 = 0.8850$

拟合图

regress 的多元回归结果：$b = 2.3916$，但由于其 F 检验值和 p 检验值均为 NaN，因此作废。