《工程硕士数学》第八次书面作业

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第五题

梯形方法：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1} + y_{n+1})] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$，本题$f(x,y) = e^x \sin(xy)$，$\alpha = 1$

- 先证$f(x,y)$对y满足Lipschitz条件。$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^x \cos(xy)$。考虑到题设条件$x \in (0,1]$，显然$|\frac{\partial f}{\partial y}| \le e$。因此可以取$L = e$为Lipschitz常数，$f(x,y)$对$y$满足Lipschitz条件。
- 此时只需令$\frac{Lh}{2} < 1$，$h < \frac{e}{2}$即可使迭代收敛。因此迭代收敛条件为$h < \frac{e}{2}$。

第六题

梯形方法：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1} + y_{n+1})] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$，本题$f(x,y) = -y$，$\alpha = 1$

于是有$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(-y_n - y_{n+1})$，整理得$(1 + \frac{h}{2})y_{n+1} = (1 - \frac{h}{2})y_n$，$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n$

1. 考虑到$\alpha = 1$，知$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^n$
2. 即证明$\lim_{h\to 0}(\frac{2-h}{2+h})^n = e^{-x_n}$，其中$h = \frac{x_n}{n}$，可视$x_n$为参变量。
   - $\lim_{h\to 0}(\frac{2-h}{2+h})^n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1-\frac{x_n}{2n}}{1+\frac{x_n}{2n}})^n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})}$
   - 变换：$\lim_{n\to+\infty} n\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})}{\frac{1}{n}}$
   - 应用L'Hospital法则：
     $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} -n^2(\frac{n+\frac{x_n}{2}}{n-\frac{x_n}{2}})(\frac{x_n}{(n+\frac{x_n}{2})^2}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2x_n}{n^2-\frac{x_n^2}{4}}$
   - 再次应用L'Hospital法则：$\lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2x_n}{n^2-\frac{x_n^2}{4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2x_n n}{2n} = -x_n$。
   - 故有$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})} = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln(\frac{n-\frac{x_n}{2}}{n+\frac{x_n}{2}})} = e^{-x_n}$，证毕。

第十一题

- 记$f(x_n, y_n) = y'(x_n)$，将试验方程$y'(x) = \lambda y(x)$代入隐式中点方法，有$y_{n+1} = y_n + \frac{\lambda h}{2}(y_n + y_{n+1})$
- 化成$y_{n+1} = E(\lambda h)y_n$的形式，有$y_{n-1} = \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}y_n$，则$E(\lambda h) = \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}$
- 令$|E(\lambda h)| < 1$，有$\begin{cases} \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}} < 1 \\ \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}} > -1 \end{cases}$，分别解得$\lambda h \in (-\infty, 0)$，$\lambda h \in (-\infty, +\infty)$

- 故知绝对稳定性区间为$(-\infty,0)$

第十二题

- 对Hamming公式进行整理，有$y_{n+3}=\frac{9}{8}y_{n+2}-\frac{1}{8}y_n+h(\frac{3}{8}f_{n+3}+\frac{3}{4}f_{n+2}-\frac{3}{8}f_{n+1})$
- $y_{n+k}=y(x+kh)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(kh)^i}{i!}y_n^{(i)}$
  - $y_{n+3}=y_n+3hy_n'+\frac{9h^2}{2}y_n''+\frac{27h^3}{6}y_n'''+\frac{81h^4}{24}y_n^{(4)}+\frac{243h^5}{120}y_n^{(5)}+\cdots$
  - $y_{n+2}=y_n+2hy_n'+\frac{4h^2}{2}y_n''+\frac{8h^3}{6}y_n'''+\frac{16h^4}{24}y_n^{(4)}+\frac{32h^5}{120}y_n^{(5)}+\cdots$
- $f_{n+k}=f(x+kh)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(kh)^i}{i!}y_n^{(i+1)}$
  - $f_{n+3}=y_n'+3hy_n''+\frac{9h^2}{2}y_n'''+\frac{27h^3}{6}y_n^{(4)}+\frac{81h^4}{24}y_n^{(5)}+\cdots$
  - $f_{n+2}=y_n'+2hy_n''+\frac{4h^2}{2}y_n'''+\frac{8h^3}{6}y_n^{(4)}+\frac{16h^4}{24}y_n^{(5)}+\cdots$
  - $f_{n+1}=y_n'+hy_n''+\frac{h^2}{2}y_n'''+\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\frac{h^5}{24}y_n^{(5)}+\cdots$
- 求得：
  - $c_0=c_1=c_2=c_3=c_4=0$
  - $c^5=-\frac{243}{120}+\frac{9}{8}\times\frac{32}{120}+\frac{3}{8}\times\frac{81}{24}+\frac{3}{4}\times\frac{16}{24}-\frac{3}{8}\times\frac{1}{24}=\frac{-243+36+210}{120}=\frac{1}{40}$
- 故Hamming公式的局部截断误差为$\frac{1}{40}h^5y^{(5)}x_n+O(h^6)$，$p=4$（即精度为4阶）