

# 《工程硕士数学》期末复习

## 第二章 解线性方程组的直接解法

### Gauss (顺序) 消去法

消去 ( $O(n^3)$ ) : 将  $Ax = b$  通过初等行变换化简为  $Ux = b$ 。

- 从第二行开始, 给每行乘以一个不同的系数  $l$ , 使得每行第一位都等于第一行第一位的相反数;
- 从第二行开始, 给每行加上第一行, 使得每行第一位都等于0;
- 从第三行开始, 给每行乘以一个不同的系数  $l$ , 使得每行第二位都等于第二行第二位的相反数;
- 从第三行开始, 给每行加上第二行, 使得每行第二位都等于0;
- .....
- 最后得到上三角阵  $U$ 。

回代 ( $O(n^2)$ ) : 从最后一行开始逐行解  $Ux = b$ 。

### Gauss列主元消去法

若消去到第  $k-1$  步 ( $k \geq 1$ ) , 此时第  $k$  行及以下部分的第  $k$  位待消去, 则挑选所有这些数中绝对值最大的, 把它所在行换到第  $k$  行, 再消去。

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{a_{kk}^{(k)}} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right].$$

示例:

**例 2.2.4** 用列主元法解方程组  $Ax=b$ , 计算过程取五位数字, 其中

$$[A \mid b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{array} \right].$$

这一题就需要先把3.996所在行换到第一行, 再进行第一次消去。

## 顺序主子式

- **顺序主子式**：对 $n \times n$ 的方阵，求其左上角 $1 \times 1$ 、 $2 \times 2$ 、.....、 $n \times n$ 这 $n$ 个部分的行列式，这个过程称为求顺序主子式 $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ 、...、 $\Delta_n$ 。
- **Gauss消去法的可行性**：当顺序主子式任何一项都不为零时，方阵 $A$ 可以使用上述的Gauss消去。

## LU分解

- **Doolittle分解（LU分解）**：通过Gauss消去法得到 $U$ 以后，一定能找到下三角阵 $L$ ，使 $A = LU$ 。
  - $L$ 的对角元素显然全为1。
- **Crout分解**：对换Doolittle分解中 $L$ 的对角元素和 $U$ 的对角元素，使得 $U$ 的对角元素全为1。
- **LDU分解**：提取Doolittle分解中 $U$ 的对角元素，形成对角矩阵 $D$ ，使得 $U$ 变成对角元素全为1的上三角阵 $\tilde{U}$ ，而此时 $A$ 可以分解为 $A = LD\tilde{U}$ 。
- **单位上（下）三角阵**：对角元素全为1的上（下）三角阵。
- **Doolittle分解的存在唯一性**：存在唯一Doolittle分解的条件为方阵 $A_{n \times n}$ 的顺序主子式 $\Delta_1$ 到 $\Delta_{n-1}$ 都不为零。
  - 显然，如果Doolittle分解存在且唯一，则Crout、LDU分解也都存在且唯一。

## 三对角矩阵

- **三对角矩阵**：三对角矩阵是形如下图的方阵。

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

- **三对角矩阵LU分解的形状**：三对角矩阵的LU分解一定形如下图。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

## 三对角矩阵的追赶法求解

- 先进行LU分解，使得 $LUx = b$ 。
- 计算 $Ly = b$ ，此时有 $y = Ux$ 。
- 计算 $Ux = y$ ，求出 $x$ 。

## 正定矩阵的Cholesky分解

- **正定矩阵**：顺序主子式全部大于0的实对称方阵。
- **Cholesky分解**：对正定对称阵作LU分解，必有 $U = L^T$ 、 $A = LL^T$ 。这种分解称为Cholesky分解。

## 正定矩阵的Cholesky法（平方根法）求解

- 先进行Cholesky分解，使得 $LL^Tx = b$ 。
- 计算 $Ly = b$ ，此时有 $y = L^Tx$ 。
- 计算 $L^Tx = y$ ，求出 $x$ 。

## 范数

- 向量范数：
  - **1-范数**：向量所有元素的和。
  - **2-范数**：向量模长。
  - **无穷范数**（ $\infty$ -范数）：向量所有元素的绝对值的最大值。
- **谱半径**：方阵 $A$ 的谱半径为其所有特征值的绝对值的最大值，记为 $\rho(A)$ 。
  - 回忆：特征多项式为 $\lambda I - A$ 的行列式计算结果，特征值为特征多项式的根。
- 矩阵范数：
  - **1-范数**（列范数）：对所有元素取绝对值，再对每列进行求和。取最大的和为1-范数。
  - **2-范数**： $\sqrt{\rho(A^TA)}$ 。
    - 当 $A$ 为对称矩阵时，有 $\sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A)$ 。
  - **无穷范数**（ $\infty$ -范数、行范数）：对所有元素取绝对值，再对每行进行求和。取最大的和为无穷范数。

## 条件数与病态

- **条件数**： $Cond(A)_n = \|A\|_n \|A^{-1}\|_n$ ，其中 $\|A\|$ 表示矩阵范数， $\|A\|_1$ 为1-范数， $\|A\|_2$ 为2-范数，.....。
  - 回忆：
    - 矩阵元素的代数余子式为 $B_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ 。
    - 矩阵所有元素取代数余子式会得到伴随矩阵 $A^*$ ，而 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 。
- **病态**：对病态矩阵 $A$ 的任意元素进行扰动（加减一个微小量），都会导致 $Ax = b$ 求解结果的巨大变化。
- **病态矩阵的判别**：当 $A$ 的任意一种条件数的数量级远大于 $A$ 的数量级时， $A$ 就是病态的。
- 比较可能出现病态的矩阵：
  - 各元素数量级差别很大的矩阵；
  - 进行列主元消去或LU分解时，发现主元也很小的矩阵；

- 行列式很小的矩阵。

## 第三章 解线性方程组的迭代法

### Jacobi、Gauss-Seidel法与SOR法

当矩阵 $A$ 满足下图所示形式时：

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$$

$$A = D - L - U; D = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & & -a_{2n} \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1,n} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- Jacobi法： $\begin{cases} B = D^{-1}(L + U) \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$ ;
- Gauss-Seidel法： $\begin{cases} B = (D - L)^{-1}U \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + (D - L)^{-1}b \end{cases}$ ;
- SOR法： $\begin{cases} B = L_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U] \\ x^{(k+1)} = L_\omega x^{(k)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b \end{cases}$ ，式中 $\omega$ 为自主选择的松弛因子。
- 迭代矩阵：以上三式中的 $B$ 称为迭代矩阵。

### 迭代法的收敛

- 迭代法的收敛性判定：
  - 对任何迭代法，若迭代矩阵 $B$ 满足 $\rho(B) < 1$ ，则迭代法收敛。
  - 若 $A$ 严格对角占优，则无论用Jacobi法还是Gauss-Seidel法求解 $Ax = b$ ，均收敛。
    - 回忆：若每行的对角元素绝对值均大于其他元素绝对值之和，则这样的矩阵为严格对角占优矩阵。
    - 因此，若 $Ax = b$ 无法直接用迭代法求解，可以先进行行交换，使 $A$ 为严格对角占优矩阵，再求解。
  - 对任何对称正定矩阵 $A$ ，Gauss-Seidel法收敛。
  - 对任何对称正定矩阵 $A$ ，若将非对角元素全部取相反数，新矩阵仍然对称正定，则Jacobi法收敛。
  - 对任何 $\omega \in (0, 2)$ ，有SOR法收敛。
    - 特别的， $\omega < 1$ 称为低松弛， $\omega > 1$ 为高松弛， $\omega = 1$ 时SOR法退化回Gauss-Seidel法。
- 迭代法的渐进收敛速度： $R(B) = -\ln \rho(B) > 0$ 。 $\rho(B)$ 越小，迭代法收敛越快。
  - 最佳松弛因子：对三对角对称正定矩阵，SOR法有最佳松弛因子 $\begin{cases} B_J = D^{-1}(L + U) \\ \omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}} \end{cases}$ 。
    - 此时有 $\rho(L_{\omega_b}) = \omega_b - 1$ 。

- 当 $\omega \approx \omega_b$ 时，SOR法远快于Jacobi法。

## 共轭梯度法

- 最速下降法：
 
$$\begin{cases} r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \\ \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)} \end{cases}。$$
- 共轭梯度法（CG法）：
 
$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)}, \text{ 初值可取 } \begin{cases} r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \\ p^{(0)} = r^{(0)} \end{cases} \\ \beta_k = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})} \\ p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)} \end{cases}。$$
  - CG法显著快于最速下降法和J法，一般也显著快于SOR法。
  - CG法能保证对 $A_{n \times n}$ 最多只需 $n$ 步就求出精确解。