《工程硕士数学》2023年期末考试答案

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第一题（填空题）

第一问：

> 答案：45.0。

- $45(1-\frac{3}{2\times 45^2})=45-\frac{1}{30}=44.9666666\cdots$，取三位有效数字得$45.0$

第二问：

> 答案：$U=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & -7\end{bmatrix}$。

- Gauss消去：$U=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & -7\end{bmatrix}$。

> 进一步可求$L=\begin{bmatrix}1 & \\ ? & 1\end{bmatrix}$，计算$LU=\begin{bmatrix}1 & 1\\ ? & ?-7\end{bmatrix}$得?处应该等于$3$。
>
> 因此LU分解得到$L=\begin{bmatrix}1 & \\ 3 & 1\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & -7\end{bmatrix}$。

第三问：

> 答案：$y=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}x$。

- 最小二乘法：$\begin{bmatrix}(1,1) & (1,x)\\ (x,1) & (x,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,y)\\ (x,y)\end{bmatrix}$
- 代入$x=[-1,1,1]^T$，$y=[1,2,3]^T$，有$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$，解得$a_1=\frac{7}{4}$、$a_2=\frac{3}{4}$。
- 故直线方程为$y=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}x$

> 事实上，直接取$(1,2)$和$(1,3)$中点，与$(-1,1)$连线，解得的直线方程完全一样。

第四问：

> 答案：一阶。

- 记$y=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$。
- 求一阶导，得到$y'=\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$，由于该函数零点只能为$0$，而待求解方程的不动点不可能为$0$，因此$y'(x^*)$已经不可能等于$0$了。
- 故方法一阶。

第五问：

> 答案：$x_0=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$。

- 取$\rho(x)=1$，$\phi(x)=x^2+ax+b$。
- 进行二次正交多项式计算：
  - $\int_1^3\phi(x)\rho(x)dx=(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx)|_1^3=\frac{26}{3}+4a+2b$
  - $\int_1^3 x\phi(x)\rho(x)dx=(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2)|_1^3=20+\frac{26}{3}a+4b$
- 令上述积分式等于0，解得$a=-4$，$b=\frac{11}{3}$，$\phi(x)=x^2-4x+\frac{11}{3}$。
- 求$\phi(x)$零点，得$x_0=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$。此为积分节点。

> - 进一步可令$\int_1^3\rho(x)f(x)dx=A_1f(x_0)+A_2f(x_1)$在 $f(x)=1$和$f(x)=x$时恒成立，以求取A_1和A_2。
> - 计算得$\begin{cases}2=A_1+A_2\\2=(2-\frac{\sqrt{3}}{3})A_1+(2+\frac{\sqrt{3}}{3})A_2\end{cases}$，有$A_1=1+\sqrt{3}$、$A_2=1-\sqrt{3}$。
> - 故求积公式为$\int_1^3\rho(x)f(x)dx\approx(1+\sqrt{3})f(2-\frac{\sqrt{3}}{3})+(1-\sqrt{3})f(2+\frac{\sqrt{3}}{3})$。

第六问：

> 答案：$Cond_\infty(A)=4.2$。

- 求取无穷范数，需要先把所有元素取绝对值，然后按行求和，最大的和即为无穷范数。故$||A||_\infty=7$。
- 无穷条件数$Cond_\infty(A)=||A||_\infty\times||A^{-1}||_\infty$，故还需求$A$的逆的无穷范数。
- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix}4&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4&-0.2\\0.3&0.1\end{bmatrix}$。$||A^{-1}||_\infty=0.6$。
- 故$Cond_\infty(A)=4.2$。

第七问：

> 答案：$a=3$。

- 三次样条函数的相邻两个分段函数在相交点处的函数值、一阶导数值、二阶导数值相等。
- 故有：$\begin{cases}s_1(x)=s_2(x)=6\\s_1'(x)=s_2'(x)\Rightarrow(-2+\frac{3}{2}x^2)|_{x=2}=(4+2a(x-2)+3b(x-2)^2)|_{x=2}\\s_1''(x)=s_2''(x)\Rightarrow(3x)|_{x=2}=(2a+6b(x-2))|_{x=2}\end{cases}$
- 解得$a=3$、b仍然无法求出。

第八问：

> 答案：$f[1,1,3]=1$。

- 均差表：

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[,,]$
1	1		
1	1	$f'(1)=3$	
3	7	$\frac{f(1)-f(3)}{3-1}=3$	$\frac{f[1,1]-f[1,3]}{f(3)-f(1)}=1$

第二题：

> 答案：$a\in(-2,\frac{3}{2})$。

- 由于可以进行Cholesky分解，因此A应为对称正定矩阵，其顺序主子式恒正。
- 故有$\begin{cases}2>0\\4-a^2>0\Rightarrow a\in(-2,2)\\6-a-2a^2>0\Rightarrow a\in(-2,\frac{3}{2})\end{cases}$，则$a$的范围为$(-2,\frac{3}{2})$。

> 第一次书面作业原题

第三题：

> **答案：**$C_0=\frac{2}{3}$、$C_1=\frac{1}{3}$、$C_2=\frac{1}{6}$。
>
> - 余项为三次项，因此当$f(x)=0,x,x^2$时均需要严格取等。
> - 故有$\begin{cases}\int_0^1 dx=C_0+C_1\Rightarrow C_0+C_1=1\\\int_0^1 xdx=C_1+C_2\Rightarrow C_1+C_2=\frac{1}{2}\\\int_0^1 x^2dx=C_1\Rightarrow C_1=\frac{1}{3}\end{cases}$，解得$C_0=\frac{2}{3}$、$C_1=\frac{1}{3}$、$C_2=\frac{1}{6}$。

第四题：

> 答案：$x_{k+1}=x_k-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$，$x_1=\frac{16}{11}$。

- Newton法：若有$f(x)=0$，则有迭代法$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x)}{f'(x)}$。
- $f'(x)=3x^2+8x$，因此Newton法为$x_{k+1}=x_k-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$。
- 以$x_0=1$推进一步，得$x_1=\frac{16}{11}$。

第五题：

> 答案：$B_J=\begin{bmatrix} & -\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2} & \end{bmatrix}$，$B_G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$，$-\ln\rho(B_J)=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\ln\rho(B_J)=-\ln\frac{3}{4}$。

- $D=\begin{bmatrix}6 & \\ & 2\end{bmatrix}$，$L=\begin{bmatrix}0 & 0\\-3 & 0\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}0 & -3\\0 & 0\end{bmatrix}$。
- Jacobi：$B=D^{-1}(L+U)$，解得$B_J=\begin{bmatrix} & -\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2} & \end{bmatrix}$。

- Gauss-Seidel：$B=(D-L)^{-1}U$，解得$B_G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$。
- 收敛性：
  - $|B_J-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda^2=\frac{3}{4}$，则$\rho(B_J)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，收敛，渐进收敛速度$-\ln\rho(B_J)=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$。
  - $|B_G-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-\frac{3}{4})=0$，则$\rho(B_G)=\frac{3}{4}$，收敛，渐进收敛速度$-\ln\rho(B_J)=-\ln\frac{3}{4}$。

第六题：

> 证明题。过程如下。

- 先证迭代全局收敛，即$\forall x_k$有$|(x_k-\lambda f(x_k))'|<1$。记$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$，有$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$。
  - 由$\lambda\in(0,\frac{2}{M})$，$f'(x)\in[m，M]$，且$0<m\le M$知，$0<\lambda f'(x)\le\lambda M<2$。
  - 于是有$-1<1-\lambda M\le\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)\le 1-\lambda m<1$，则证出$|\varphi'(x)|<1$。
  - 迭代全局收敛。证毕。
- 再证迭代确实全局收敛到x^*，即证$\lim_{n\to+\infty}(x_n-x^*)=0$，其中$x^*$满足$x^*=\varphi(x^*)$。
  - 由题意知：$x_n-x^*=\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)$。
  - 由于$\varphi'(x)\le L=\max\{|1-\lambda M|,|1-\lambda m|\}$，故有$|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\le L|x_{n-1}-x^*|$。
  - 同理发现$|(x_{n-1}-x^*)|=|\varphi(x_{n-2})-\varphi(x^*)|\le L|x_{n-2}-x^*|$，意识到这是可以递推下去的。
  - 递推，得到$|x_n-x^*|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\le L^n|x_0-x^*|$。
  - 运用夹逼定理，$\lim_{n\to+\infty}0=0\le\lim_{n\to+\infty}|x_n-x^*|\le\lim_{n\to+\infty}L^n|x_0-x^*|=0$。
  - 于是证出$\lim_{n\to+\infty}|x_n-x^*|=0$，这是能推出$\lim_{n\to+\infty}(x_n-x^*)=0$的。证毕。

> 证到这里发现并不需要先证全局收敛，直接证收敛到x^*就行了……

第七题：

第一问：

> 答案：局部截断误差为$T_{n+1}=-\frac{h^3}{12}y_n'''+O(h^4)$，方法二阶。

- 变形得$y_{n+1}-y_n-\frac{h}{2}f_n-\frac{h}{2}f_{n+1}=0$。
  - $y_{n+1}=y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{6}2y_n'''+\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}+\frac{h^5}{120}y_n^{(5)}+\cdots$；
  - $-y_n=-y_n$；
  - $-\frac{h}{2}f_n=-\frac{h}{2}f_n$；
  - $-\frac{h}{2}f_{n+1}=-\frac{h}{2}(y_n'+hy_n''+\frac{h^2}{2}y_n'''+\cdots)$；
  - 把以上四项相加，发现最低次项为$-\frac{h^3}{12}y_n'''$，因此局部截断误差为$T_{n+1}=-\frac{h^3}{12}y_n'''+O(h^4)$，方法二阶。

第二问：

> 证明题。过程如下。

- 先按定义证相容性：
  - 取$\phi(x,y;h)=\frac{1}{2}[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]$中$h=0$，立得$\phi(x,y;0)=f(x,y)$。相容性证毕。
- 再证收敛性，即需证明在满足相容性条件下$\phi(x,y;h)$关于y满足Lipschitz条件。推导如下。
  - $$\begin{aligned}&|\phi(x,y;h)-\phi(x,\bar{y};h)|\\ &=|\frac{1}{2}[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]-\frac{1}{2}[f(x,\bar{y})+f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))]|\\ &\le\frac{1}{2}|f(x,y)-f(x,\bar{y})|+\frac{1}{2}|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))|\\ &\le\frac{1}{2}L|y-\bar{y}|+\frac{1}{2}L|y-\bar{y}+hf(x,y)-hf(x,\bar{y}))|\\ &\le\frac{1}{2}L|y-\bar{y}|+\frac{1}{2}L|y-\bar{y}|+\frac{h}{2}|f(x,y)-f(x,\bar{y}))|\\ &\le L|y-\bar{y}|+\frac{hL}{2}|y-\bar{y}|=\frac{L(h+2)}{2}|y-\bar{y}|\end{aligned}$$ 。

    （其中第4、6行的推导使用了$f(x,y)$满足Lipschitz条件这一信息）
  - 由于L和h在本题中必为常数，因此取$L'=\frac{L(h+2)}{2}$，证出$|\phi(x,y;h)-\phi(x,\bar{y};h)|\le L'|y-\bar{y}|$。
  - 因此$\phi(x,y;h)$关于y满足Lipschitz条件。而由于前面也证出了相容性，因此迭代也具有收敛性。证毕。