《工程硕士数学》第一次作业

软硕232 丁浩宸 2023213911

第一章 13(2)

$$||A|_1 = \max(2+1, 2+1+1, 2+1) = 4$$

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\max(4, 6+4\sqrt{2}, 6-4\sqrt{2})} = 2+\sqrt{2}$$

$$||A||_\infty = \max(2+1, 2+1+1, 2+1) = 4$$

$$\rho(A) = \max(2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}$$

第一章 19

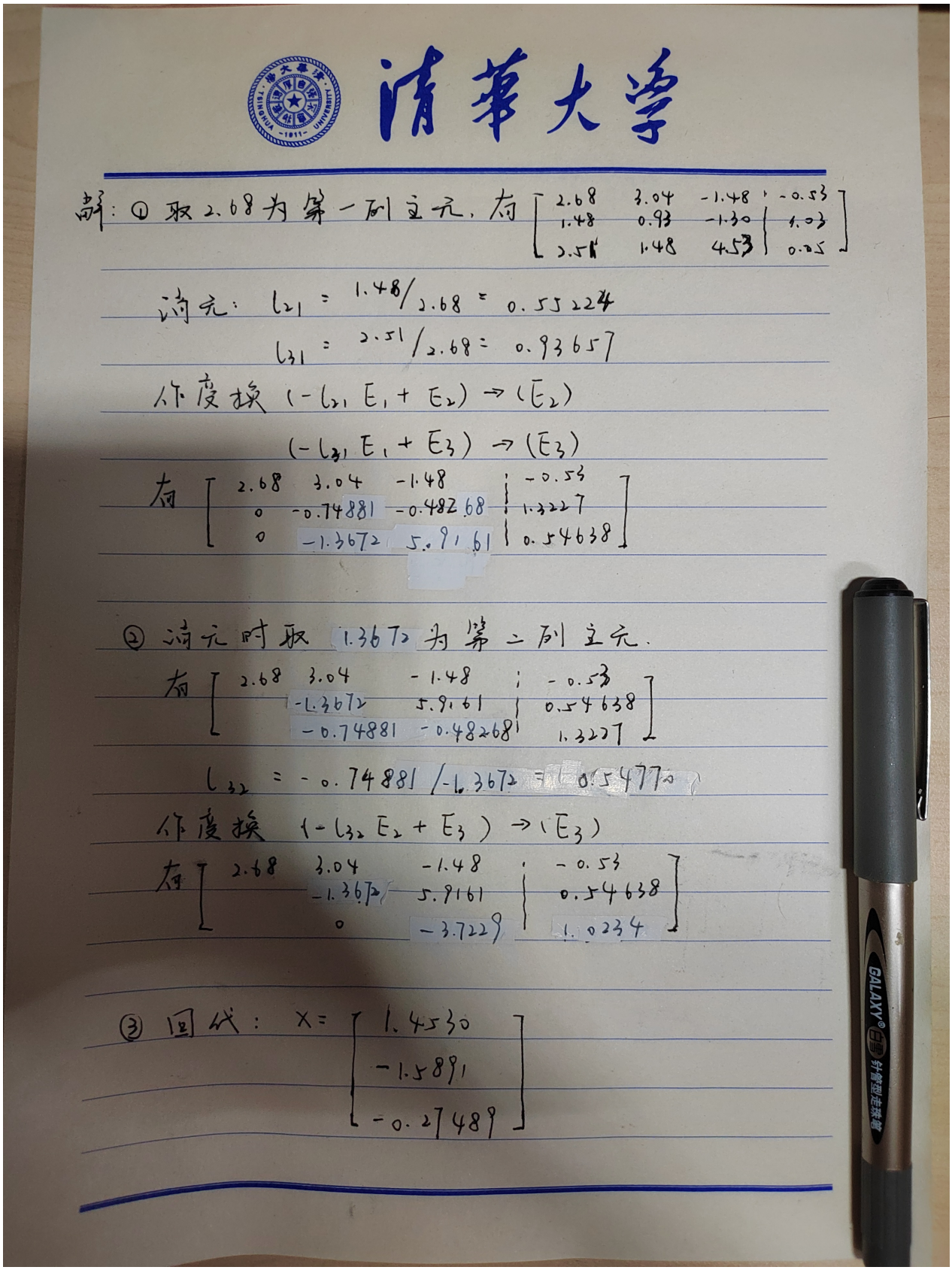
使用顺序主子式法。

- $i=1$，顺序主子矩阵为$A_{11}=[2]$，顺序主子式显然为正
- $i=2$，顺序主子矩阵为$A_{22}=\begin{bmatrix}2 & a\\ a & 2\end{bmatrix}$，行列式$|A_{22}|=4-a^2$，其为正的条件为$-2<a<2$
- $i=3$，顺序主子矩阵为$A_{33}=A$，行列式$|A_{33}|=-4a^2-2a+12$，其为正的条件为$-2<a<\frac{3}{2}$

综上，a的取值范围为$-2<a<\frac{3}{2}$。

第二章 2

见下图



第二章 3

LU分解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$，得$y = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ \frac{21}{5} \\ -\frac{213}{74} \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ \frac{21}{5} \\ -\frac{213}{74} \end{pmatrix}$，得$x = \begin{pmatrix} \frac{151}{191} \\ -\frac{69}{191} \\ \frac{165}{191} \\ -\frac{213}{191} \end{pmatrix}$

第二章 6

Cholesky分解：$A = \begin{pmatrix} 4 & & \\ 1 & 2 & \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 2 & -3 \\ & & 3 \end{pmatrix}$。

解 $\begin{pmatrix} 4 & & \\ 1 & 2 & \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$，得$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 2 & -3 \\ & & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$，得$x = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

第二章 10

LU分解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & & & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 & & \\ & & & & -\frac{5}{6} & 1 & \\ & & & & & -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & & & \\ & & & \frac{5}{4} & -1 & & \\ & & & & \frac{6}{5} & -1 & \\ & & & & & \frac{7}{6} & -1 \\ & & & & & & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

解 $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & & & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 & & \\ & & & & -\frac{5}{6} & 1 & \\ & & & & & -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$，得$y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

解$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ \frac{3}{2} & -1 & & & & & \\ & \frac{4}{3} & -1 & & & & \\ & & \frac{5}{4} & -1 & & & \\ & & & \frac{6}{5} & -1 & & \\ & & & & \frac{7}{6} & -1 & \\ & & & & & \frac{8}{7} & \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，得$x = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

第二章 11

$cond(A)_\infty = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 6$

$cond(B)_2 = \rho(B)\rho(B^{-1}) = (2+\sqrt{2})(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3+2\sqrt{2}$（矩阵B对称）