《工程硕士数学》第三次作业

> 软硕232 丁浩宸 2023213911

第四题

记$f(x)=3x^2-e^x$，则$f'(x)=6x-e^x$，$f''(x)=6-e^x$。

$f''(x)$在$(-\infty,\ln 6)$为正，$(\ln 6,+\infty)$为负；则$f'(x)$在$(-\infty,\ln 6)$单调增，$(\ln 6,+\infty)$单调减。

$f'(x)_{max}=f'(\ln 6)=6(\ln 6-1)>0$，而$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$，故$f'(x)$在$(-\infty,\ln 6)$和$(\ln 6,+\infty)$之间各有一个零点。分别记之为$x_p$与$x_q$，则$f'(x)$在$(x_p,x_q)$之间为正，$f(x)$在$(x_p,x_q)$单调递增；$f'(x)$在其余部分为负，则$f(x)$在$(-\infty,x_p)$和$(x_q,+\infty)$单调递减。另由$f'(0)=-1$，知$x_p>0$。

- 由$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\ f(x_p)<f(0)=-1\end{cases}$知$f(x)$在$(-\infty,x_p)$上有且仅有一个零点
- 由$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\ f(x_q)>f(\ln 6)=6\ln 6-6>0\end{cases}$知$f(x)$在$(x_q,+\infty)$上有且仅有一个零点
- 由$\begin{cases}f(x_p)<f(0)=-1\\ f(x_q)>f(\ln 6)=6\ln 6-6>0\end{cases}$知$f(x)$在$(x_p,x_q)$上有且仅有一个零点

因此$f(x)=0$在$\mathbb{R}$上有三个根。

进一步压缩根的范围：

x	f(x)，取一位小数
-1	2.6
0	-1.0
1	0.3
2	4.6
3	6.9
4	-6.6
5	-73.4

故三个根分别落在$(-1,0)$、$(0,1)$、$(3,4)$。

第一问

原方程写成$3x^2=e^x$，因此得到以下几种递推式：$\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}, & x<0 \\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}, & x>0 \text{。} \\ x=\ln(3x^2), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$

对于最小的根，这个根落在$[-1,0]$，因此考虑使用$\varphi(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}$。

- $\varphi(x)$显然单调递减且非正，在$[-1,0]$的最小值为$\varphi(0)=-\frac{\sqrt{3}}{3}>-1$，因此满足$-1\le\varphi(x)\le 0$，$\forall x\in[-1,0]$，于是知$\varphi$在$[-1,0]$上一定存在不动点。
- $\forall x,y\in[a,b]$，$|\varphi(x)-\varphi(y)|=\frac{\sqrt{3}}{3}(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{y}{2}})$（不妨设$-1\le y<x\le 0$）。此时$|x-y|=x-y$。于是欲证存在$L\in(0,1)$使得$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$，成立，只需证存在$L\in(0,1)$使得$(Lx-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}})-(Ly-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{y}{2}})\ge 0$即可。取$L=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时不等式转化为$x-e^{\frac{x}{2}}-(y-e^{\frac{y}{2}})\ge 0$。由于$g(x)=x-e^{\frac{x}{2}}$，$g'(x)=1-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}>0$在$[-1.0]$恒成立，$g(x)$在$[-1,0]$单调增，因此由$x>y$知$L=\frac{\sqrt{3}}{3}$能使上述不等式成立。故$\varphi(x)$在$[-1,0]$的不动点是唯一的。

由以上存在性与唯一性证明知，$\varphi(x)$在$[-1,0]$能够收敛到唯一的不动点，具有全局收敛性。

第二问

- 对于落在$[0,1]$的根，使用$\varphi(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}$。根据对称性易知$\varphi(x)$在$[0,1]$能够收敛到唯一的不动点，具有全局收敛性。而由于$|\varphi'(x)|=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{\frac{x}{2}}$在$[-1,0]$上显然满足小于1的条件，因此也是局部收敛的。
- 对于落在$[3,4]$的根，考虑$\varphi(x)=\ln(3x^2)$。由于$|\varphi'(x)|=\frac{2}{x}$在$[3,4]$上显然满足小于1的条件，因此也是局部收敛的。

第三问

利用Matlab进行求解

```
format long
x01 = -1;
x02 = 0;
x03 = 3;

xnext1 = 0;
xnext2 = 1;
xnext3 = 4;

while (true)
    xnext1 = -(sqrt(3) / 3) * exp(x01 / 2)
    if (abs(xnext1 - x01) < 0.001)
        break
    else
        x01 = xnext1;
    end
end
x01

while (true)
    xnext2 = (sqrt(3) / 3) * exp(x02 / 2)
    if (abs(xnext2 - x02) < 0.001)
        break
    else
        x02 = xnext2;
    end
```

```
end
x02

while (true)
    xnext3 = log(3 * x03 ^ 2)
    if (abs(xnext3 - x03) < 0.001)
        break
    else
        x03 = xnext3;
    end
end
x03
```

解得$\begin{cases} x_1 = -0.459 \\ x_2 = 0.909 \\ x_3 = 3.731 \end{cases}$。

第八题（2）

$f(x) = 3x^2 - e^x$，$f'(x) = 6x - e^x$，故Newton迭代法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{3x_k^2 - e^{x_k}}{6x_k - e^{x_k}}$。

用Matlab编写Newton迭代法进行求解：

```
format long
x01 = -1;
x02 = 1;
x03 = 3;

xnext1 = 0;
xnext2 = 0;
xnext3 = 4;

% newton
while (true)
    xnext1 = x01 - (3 * x01 ^ 2 - exp(x01)) / (6 * x01 - exp(x01));
    if (abs(xnext1 - x01) < 0.00001)
        break
    else
        x01 = xnext1;
    end
end
x01

while (true)
    xnext2 = x02 - (3 * x02 ^ 2 - exp(x02)) / (6 * x02 - exp(x02));
    if (abs(xnext2 - x02) < 0.00001)
        break
    else
        x02 = xnext2;
    end
end
x02
```

解得$\begin{cases} x_1 = -0.4590 \\ x_2 = 0.9100 \end{cases}$

第11题（1）（2）

$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$，则$x=1$这个根是二重根。

按照题意编写Newton迭代法以及$m=2$的改进Newton迭代法（$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$）：

```
format long
x = 1.2;

% newton
for i = 0:2
    i = i + 1
    xnext = x - (x ^ 3 - 3 * x + 2) / (3 * x * 2- 3);
    x = xnext
end

% m=2 improved newton
x = 1.2;
for i = 0:2
    i = i + 1
    xnext = x - 2 * (x ^ 3 - 3 * x + 2) / (3 * x * 2- 3);
    x = xnext
end
```

解得$\begin{cases} x_1 = 1.1264 \\ x_2 = 1.0877 \end{cases}$，可见改进方法比原方法收敛更快。