Praktikumsskript

Teil 0: Einleitung, Fehlerrechnung

Universität Kassel

Fachbereich Maschinenbau
Fachgebiet Solar- und Anlagentechnik
Datum: 27.07.2020

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziel der Praktika:
Die Praktika des Fachgebiets Solar- und Anlagentechnik sollen vorhandenes Wissen im Bereich der thermischen Energietechnik und speziell der Solarthermie festigen und ausbauen. Der Schwerpunkt liegt einerseits auf der messtechnischen Erfassung verschiedener Größen (PR1 "Thermische Messtechnik") und andererseits auf der Funktionsweise von solarthermischen Komponenten und Systemen (PR2 "Solarthermische Komponenten und Systeme"). Zielgruppe sind Studierende des Maschinenbaus, des Masterstudiengangs Regenerative Energien und Energieeffizienz, des Wirtschaftsingenieurwesens sowie des weiterbildenden Studiums Energie und Umwelt. Für das weiterführende PR "Solarthermische Komponenten und Systeme"sind die Module "Solartechnik"oder "Solarthermie"und "Planung innovativer Wärmeversorgungssysteme"bzw. vergleichbare Vorkenntnisse erforderlich.

Durchführung der Praktika:
Die Praktika werden als Blockveranstaltung während der vorlesungsfreien Zeit angeboten (Umfang jeweils: 2 SWS oder 3 ECTS). Die Durchführung erfolgt in Kleingruppen im Labor des Fachgebietes Solar- und Anlagentechnik (Raum 1125, 1127, 4310 und Dachfläche in der Kurt-Wolters-Str. 3). Die Praktika bestehen derzeit aus jeweils drei Versuchen. Alle Versuche finden innerhalb von ein bis zwei Wochen statt, wobei mehrere Gruppen parallel Versuche durchführen können. Auch bei der Belegung beider Praktika PR1 + PR2 in einem Semester, können die Versuche innerhalb dieser Zeit durchgeführt werden.
Zur Vermeidung von Unfällen, müssen alle Studierenden vor Beginn der Praktika an einer

Laborunterweisung teilnehmen.
Da eine sinnvolle Durchführung der Versuche die gründliche Einarbeitung der Studierenden in die jeweilige Thematik erfordert, findet vor dem ersten Termin ein etwa halbstündiges Eingangsgespräch statt. Dieses Kolloquium umfasst alle zu absolvierenden Versuche, um zu prüfen, ob die Voraussetzungen zur Durchführung des Praktikums gegeben sind. Als Vorbereitung dienen die Skripte zu den Versuchsteilen (sowie nach Bedarf die angegebenen Literaturverweise). Aus dem Eingangsgespräch sollte hervorgehen, dass die Studierenden sowohl mit der Theorie der einzelnen Versuche als auch mit deren praktischer Durchführung vertraut sind.

Leistungsnachweis:
Der Leistungsnachweis für die Praktika setzt sich aus vier Teilen zusammen. Das Fachgespräch zu Beginn und die Versuchsdurchführung gehen mit jeweils 25 % in die Endnote ein. Die für jeden Versuch anzufertigenden Protokolle gehen ebenso wie die abschließenden Präsentationen mit 25 % in die Endnote ein. Daher können auch innerhalb einer Gruppe unterschiedliche Noten zustande kommen.
Die Versuchsprotokolle sind bis zur Abgabefrist (s. Moodle-Kurs) per E-Mail an m.rusack@uni-kassel.de zu schicken. In den Protokollen sind die jeweiligen Aufgaben- und Fragestellungen der Auswertungskapitel zu bearbeiten.
Für die Anfertigung der Versuchsprotokolle benutzen Sie bitte die im Moodle-Kurs zur Verfügung gestellte Word-Vorlage. Der Umfang eines Versuchsprotokolls beträgt max. 5 Seiten (zzgl. Literatur-, Abbildungs- und Tabellenverzeichnis). Die Protokolle sollen bewusst kurz gehalten werden und nur die wesentlichen Aspekte beinhalten.
Weiterhin ist zu jedem Versuch eine Präsentation von ca. 10 Minuten vorzubereiten. Zur Bewertung der Protokolle ist es durchaus sinnvoll, wenn sie auch evtl. verwendete Excel-Auswertungs-Tabellen per E-Mail mit abgeben.
Die Praktika haben jeweils einen Umfang von 2 SWS bzw. 3 Credits, was 90 Arbeitsstunden entspricht. Bei Belegung beider Praktika werden demnach $3+3=6$ Credits und zwei Noten vergeben.

Ansprechpartner

Kolloquium	**Labor**
Christoph Schmelzer schmelzer@uni-kassel.de	Markus Rusack m.rusack@uni-kassel.de

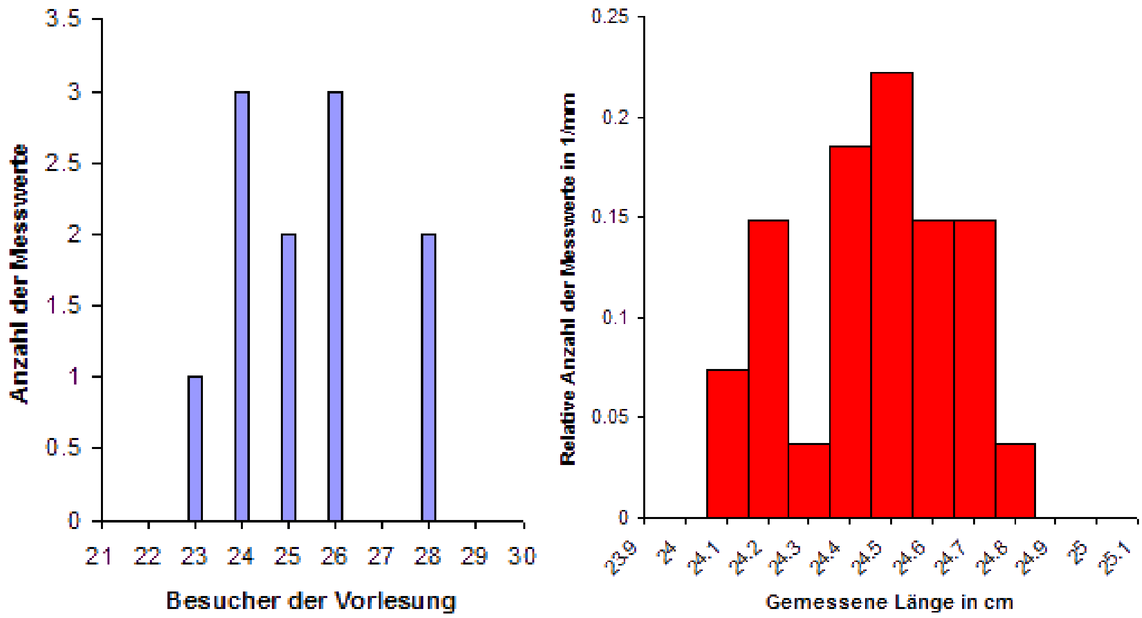
1 Fehlerrechnung - Auswertung von Messungen

Aufgenommene Messdaten sind mit Messunsicherheiten bzw. –abweichungen belastet. Um Plausibilitätsbetrachtungen vornehmen zu können, müssen sowohl die Unsicherheiten der Messdaten als auch die der daraus resultierenden Rechnungen (z.B. eines Wärmestromes) quantifiziert werden.
Die Messung einer physikalischen Größe bedeutet die Quantifizierung dieser Größe bzgl. einer Einheit. Wird diese Quantifizierung unter gleichen Bedingungen wiederholt vorgenommen, so werden die Messwerte voneinander, also auch von dem zu ermittelnden „wahren“ Wert der Messgröße, abweichen. Die Bestimmung eines Messergebnisses erfordert dann, aus den Messwerten den bestmöglichen Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße sowie ein Maß für die Unsicherheit des Schätzwertes zu ermitteln. Bei der Messabweichung wird zwischen systematischen und zufälligen (statistischen) Abweichungen unterschieden.
Systematische Messabweichungen liegen z.B. vor, wenn die bei den Messungen verwendeten Messgeräte falsch kalibriert sind. Kalibrierfehler sind schwer zu erkennen und erfordern eine besondere Kontrolle der Messgeräte. Systematische Abweichungen können aber auch durch das angewendete Messverfahren oder die Nichtberücksichtigung von Nebenumständen hervorgerufen werden. Bspw. bei der Messung des Widerstandes einer Spule aus Kupferdraht durch Strom- und Spannungsmessung kann unter Umständen eine zeitliche Widerstandszunahme infolge der Erwärmung auftreten. Man erhielte dann zeitabhängige, systematische Abweichungen.
Die Beurteilung systematischer Abweichungen, die das Messergebnis meist einseitig verfälschen, erfordert eine kritische Analyse aller relevanten Umstände: Unvollkommenheit des Messobjektes, der Messgeräte, des Mess- und Auswertungsverfahrens, der Umwelteinflüsse und nicht zuletzt der persönlichen Unzulänglichkeiten des Beobachters. Es ist eine wichtige Aufgabe, bei jeder Messung die systematischen Abweichungen zu erkennen, möglichst auszuschalten oder klein zu halten, auf alle Fälle aber ihre Auswirkung auf das Messergebnis abzuschätzen und ggf. am Messergebnis entsprechende Korrekturen anzubringen.
Jedoch wird auch bei völliger Ausschaltung systematischer Abweichungen die mehrmalige Messung einer Größe niemals genau übereinstimmende Ergebnisse liefern. Aufgrund einer zufälligen Streuung von einzelnen Messwerten kommt es zu statistischen Abweichungen. Fehlergrenzen sind Höchstbeträge für positive und negative Abweichungen. Je nach Messverfahren werden absolute oder relative Fehlerangaben gemacht.

1.1 Auswertung direkter Messungen

Wenn man es mit der direkten Messung einer physikalischen Größe zu tun hat, etwa einer Länge mit einem Maßstab oder einer Fallzeit mit einer Stoppuhr, so könnte man die Messung im Prinzip unendlich oft wiederholen. Die Gesamtheit aller dabei theoretisch erzielbarer Messwerte nennt man in der Statistik eine Grundgesamtheit, welche je nach Anwendungsfall einen sowohl diskreten als auch kontinuierlichen Wertebereich umfassen kann. Praktisch hingegen ist es nur möglich, eine endliche Anzahl von n Messwerten zu ermitteln; diese n Werte nennt man eine Stichprobe. Die Stichprobenwerte mit der Anzahl ihres Auftretens in der Stichprobe bilden eine Häufigkeitsverteilung. Zur graphischen Veranschaulichung der Häufigkeitsverteilung trägt man auf der x-Achse die Messwerte und auf der y-Achse deren Häufigkeit in der Stichprobe auf. Entsprechend der Art der Messwerte unterscheidet man zwischen diskreten und kontinuierlichen Verteilungen. Ein Beispiel für eine diskrete Größe wäre die Anzahl der Hörer einer Vorlesung, sie ist immer ganzzahlig (Abb. 1.1(a)). Hier sind auf der x-Achse die Messwerte der Stichprobe aufgetragen, auf der y-Achse die absolute dimensionslose Häufigkeit. Die meisten Verteilungen sind hingegen kontinuierlich, da die Messwerte, wie z.B. bei der Messung der Länge eines Stabes (vgl. Abb. 1.1(b)), in bestimmten Grenzen jeden Wert annehmen können. In Abb. 1(b) sind auf der x-Achse die Messwertintervalle (1 mm) aufgetragen, die Werte der y-Achse sind auf die Gesamtanzahl der Messungen normiert und entsprechend der Klassenbreite dimensionsbehaftet.
Es fällt auf, dass gewisse mittlere Werte besonders häufig vorkommen. Man spricht davon, dass die Messwerte um einen Mittelwert streuen. Gibt man statt der absoluten die relative Häufigkeit an, mit der ein bestimmter Wert erreicht wurde, also die Anzahl der Messwerte in einem Messintervall geteilt durch die Gesamtzahl der Messwerte, so gelangt man von der Häufigkeitsverteilung direkt zur Häufigkeitsfunktion. Beim Übergang zu sehr großen Stichproben geht die Verteilung bei der Betrachtung von sehr kleinen Intervallen in eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über, vgl. Gleichung 1.6 am Beispiel einer Normalverteilung.

Übungsaufgabe: Wie sähe die Verteilung in Abb. 1.1(b) aus, wenn als Messwertintervall auf der x-Achse 2 mm gewählt worden wäre?



(a) Absolute Häufigkeitsverteilung

(b) Relative Häufigkeitsverteilung

Abbildung 1.1: Häufigkeitsverteilungen, Quelle: SAT

1.1.1 Endliche Stichproben

Im Fall einer endlichen Zahl von Stichprobenmesswerten ist der „wahre Wert“ μ unbekannt. Die Aufgabe besteht darin, aus den n Stichprobenwerten einen besten „Schätzwert“ $\overline{x}$ für μ und ein Maß für die Unsicherheit dieser Schätzung (die Streuung, also die Breite der Verteilung) anzugeben.[1] Diese Aufgabe löst die mathematische Statistik (Wahrscheinlichkeitstheorie):

1) Bester Schätzwert für den „wahren Wert“ μ ist das arithmetische Mittel $\overline{x}$ aus den Stichprobenwerten x_i:

$$\mu \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.1}$$

wobei:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0 \tag{1.2}$$

Gleichung 1.2 besagt, dass die Summe aller Abweichungen der Einzelmessungen vom

[1] Anmerkung: Bei Größen, die sich auf Stichproben beziehen, verwendet man lateinische Buchstaben (Mittelwert: $\overline{x}$; Varianz: s^2). Größen, die sich auf eine Grundgesamtheit beziehen, werden hingegen mit griechischen Buchstaben bezeichnet (Mittelwert: μ; Varianz: σ^2).

Mittelwert verschwindet. Die Gleichung ist eine für Kontrollen wichtige Eigenschaft des arithmetischen Mittels.

2) Aufgrund der statistischen Abweichungen streuen die Einzelmesswerte um den Mittelwert $\overline{x}$. Je genauer und zuverlässiger die Messungen sind, desto geringer sind diese Abweichungen. Daher erlauben diese Abweichungen einen Rückschluss auf die Zuverlässigkeit der Messung. Ein *Maß für die Streuung* der Messwerte um den Mittelwert $\overline{x}$, d.h. Abweichung $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ der Einzelwerte x_i vom Mittelwert $\overline{x}$ ist die Schätzung der *Varianz* σ^2 bzw. der *Standardabweichung der Grundgesamtheit* σ (also bei unendlich oft durchgeführten Messungen) aus den Ergebnissen einer endlichen Anzahl durchgeführter Messungen:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{1.3}$$

Falls der wahre Wert als Mittelwert aus den n Messungen bestimmt wird, führt dies zu einer Reduzierung des Freiheitsgrades der Standardabweichung um eins. Daher wird beim Übergang zu einer Stichprobe mit einer endlichen Anzahl von Messungen die *Varianz* s^2, bzw. die *Standardabweichung der Stichprobe* s bevorzugt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{1.4}$$

Beachte: $s > 0$, [s] = [0] = [x]

3) Je mehr Messungen durchgeführt werden, umso genauer stimmt bei statistischen Abweichungen der berechnete Mittelwert $\overline{x}$ mit dem wahren Wert μ überein. Ein Maß für diese Genauigkeit ist die *Varianz des Mittelwertes* m^2, bzw. die *Standardabweichung des Mittelwerts* m:

$$m = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{1.5}$$

Bei sehr vielen Messungen geht diese Standardabweichung gegen Null.

Beispiel:

Bestimmung des Durchmessers einer Münze mit Angabe des zugehörigen Fehlers.
Anzahl: n = 11;

Tabelle 1.1: Messwerte des Durchmessers

Messwert Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ø in mm	14,1	13,8	14,3	14,2	14,5	14,1	14,2	14,4	14,3	13,9	14,4

Mittelwert: $\overline{x} = \frac{1562}{11}$ mm $= 14,2$ mm

Damit folgt:

Tabelle 1.2: Berechnung der Varianz der Stichprobe

Messwert Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ in mm	-0,1	-0,4	0,1	0,0	0,3	-0,1	0,0	0,2	0,1	-0,3	0,2
$(x_i - \overline{x})^2$ in mm^2	0,01	0,16	0,01	0,0	0,09	0,01	0,0	0,04	0,01	0,09	0,04

Stichprobenvarianz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \frac{0{,}46}{10}$ mm$^2 = 0,046$ mm^2
Standardabweichung der Stichprobe: $s = \sqrt{s^2} = 0{,}21\,\text{mm}$
Beste Schätzung des wahren Werts: $\mu \approx \overline{x} = 14,2$ mm
Standardabweichung des Mittelwerts: $m = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}21\,\text{mm}}{\sqrt{11}} = 0,06$ mm
$\rightarrow$ Durchmesser: $d = (14,20 \pm 0,06)$ mm

1.1.2 Normalverteilung

Kann eine Messgröße grundsätzlich jeden kontinuierlichen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen und ist die Abweichung der einzelnen Messwerte vom „wahren Wert" rein zufällig (statistisch), so sind die Messwerte häufig „normalverteilt", die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dann eine *Normalverteilung* oder *Gaußverteilung*. Analytisch lässt sich die Normalverteilung beschreiben als:

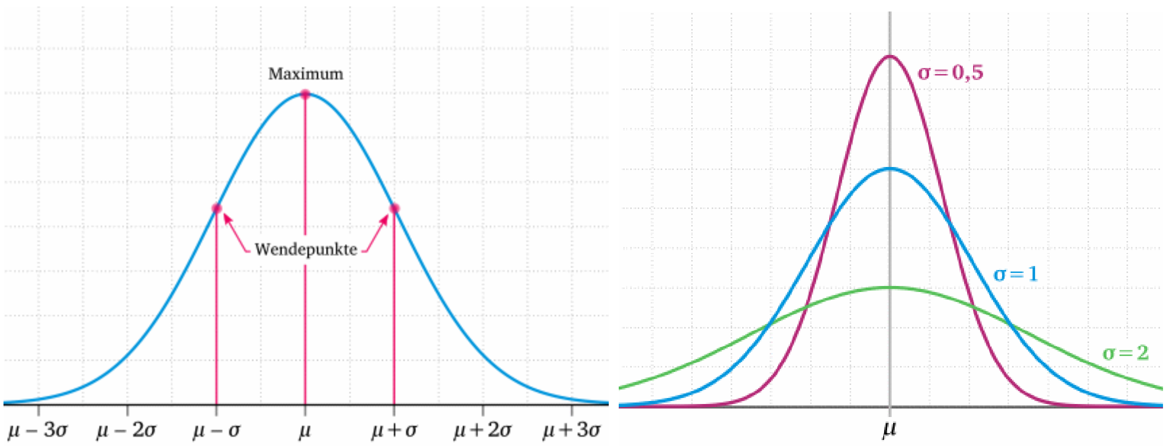
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.6}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \tag{1.7}$$

wobei $f(x) \cdot dx = d\overline{W}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der Wert x im Intervall zwischen x und $x + dx$ liegt. Gleichung 1.7 sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass irgendein Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erreicht wird, gleich 1 ist.

Die graphische Darstellung einer Normalverteilung ist eine Glockenkurve (Abb. 1.2(a)):



(a) Normalverteilung mit Maximum bei μ

(b) Normalverteilung mit verschiedenen σ-Werten

Abbildung 1.2: Gaußsche Glockenkurven, Quelle: http://matheguru.com/stochastik/31-normalverteilung.html, Abruf 25.04.2016

Der x-Wert des Maximums entspricht dem Mittelwert der Verteilung und kann (ohne Berücksichtigung systematischer Fehler) als „wahrer Wert“ μ der Messgröße angesehen werden. Die Wendepunkte der Normalverteilung findet man bei $x = \mu \pm \sigma$. Charakteristisch für die Normalverteilung ist, dass zwischen $(\mu - \sigma)$ und $(\mu + \sigma)$ 68,27 %, zwischen $(\mu - 2\sigma)$ und $(\mu + 2\sigma)$ 95,45 % und zwischen $(\mu - 3\sigma)$ und $(\mu + 3\sigma)$ 99,73 % alle Messwerte liegen. Eine kleine Streuung, also ein kleines σ, entspricht einer schmalen hohen Gaußkurve und mithin einer recht genauen Messung, ein großes σ entspricht dem gegenüber einer breiten niedrigen Kurve (siehe Abb. 1.2(b)).

1.1.3 Messergebnis

Das vollständige Messergebnis muss die folgenden Angaben enthalten:

1. den um die bekannten oder plausibel abgeschätzten systematischen Abweichungen korrigierten Mittelwert $\overline{x}_E = \overline{x} + K$ (mit K = Korrektur)

2. die Anzahl der ausgewerteten Messungen n

3. die Messunsicherheit u. Sie setzt sich zusammen aus der zufälligen statistischen Komponente (Standardabweichung des Mittelwertes m) und der abzuschätzenden unbekannten systematischen Komponente $u_{sys,unbekannt}$, sodass das Ergebnis in der folgenden Form angegeben werden muss:

$$x = \overline{x}_E \pm u = \overline{x}_E \pm (m + u_{sys,unbekannt}) \tag{1.8}$$

Häufig begnügt man sich mit der Angabe von $\overline{x}_E$ und m. Wie man aus Gl. 1.8 sieht lohnt es sich nicht, durch die Vergrößerung von n die Standardabweichung zu verkleinern, wenn die Standardabweichung des Mittelwerts m ohnehin schon kleiner als die unbekannte systematische Komponente ist. Mit anderen Worten: Eine ungeeignete Messmethode liefert auch bei beliebig häufiger Wiederholung kein genaueres Ergebnis. In vielen Fällen gibt man auch die sog. relative Messungenauigkeit u_r an:

$$u_r = \pm u/\overline{x} \tag{1.9}$$

Die Angabe dieser relativen Größe ist allerdings nur sinnvoll, wenn die Messgrößen x_i ausschließlich positive oder ausschließlich negative Werte annehmen können.

Übungsaufgabe:
Wieso macht die Angabe der relativen Größen keinen Sinn, wenn sowohl negative als auch positive Messwerte auftreten können?

1.2 Auswertung bei indirekten Messungen, Fehlerfortpflanzung

Nur die wenigsten physikalischen Größen können, wie etwa eine Länge, direkt gemessen werden. Zum Beispiel erfordert die Bestimmung eines in einem Wärmeübertrager übertragenen Nutzwärmestroms die Messung des Fluidmassenstroms $\dot{m}$ und der Temperaturdifferenz $\Delta T = T_{out} - Tin$. Zusätzlich muss für die Berechnung des Wärmestroms die spezifische Wärmekapazität c_p des Fluids bekannt sein. Die Messung der einzelnen physikalischen Größen $\dot{m}$, T_{in} und T_{out} wird je n-mal durchgeführt, wobei jeweils die Mittelwerte $\overline{\dot{m}}$, $\overline{T}_{in}$ und $\overline{T}_{out}$ gebildet werden und mit Hilfe der Mittelwerte ein Schätzwert $\overline{\dot{Q}} = \overline{\dot{m}} c_p \left(\overline{T}_{out} - \overline{T}_{in}\right)$ berechnet wird. Dann bleibt die Frage nach der Unsicherheit von $\dot{Q}$, herrührend von den Unsicherheiten der Mittelwerte der einzelnen Messgrößen. Darüber gibt das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* Auskunft:
Die zu berechnende Messgröße G sei eine Funktion von den Größen $G_1, G_2, ..., G_f$. Liegen keine systematischen Abweichungen vor, so lässt sich die Standardabweichung von G mit Hilfe der Standardabweichungen $m_{G1}, m_{G2}, ..., m_{Gf}$ der Mittelwerte der Größen $G_1, G_2, ..., G_f$ bestimmen:

$$m_G = \sqrt{\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\delta G}{\delta G_i}\right)^2 \cdot m_{G_i}^2} \tag{1.10}$$

wobei $\delta G/\delta G_i$ die partielle Ableitung von G nach G_i und m_{G_i} Standardabweichung des Mittelwerts von G_i darstellt. Im obigen Beispiel ergibt sich der Fehler von $\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_{out} - T_{in})$ bei exakt bekannter Wärmekapazität c_p also wie folgt:

$$\begin{aligned} m_{\dot{Q}}^2 &= \left(\frac{\delta \dot{Q}}{\delta \dot{m}}\right)^2 \cdot m_{\overline{\dot{m}}}^2 + \left(\frac{\delta \dot{Q}}{\delta T_{in}}\right)^2 \cdot m_{\overline{T_{in}}}^2 + \left(\frac{\delta \dot{Q}}{\delta T_{out}}\right)^2 \cdot m_{\overline{T_{out}}}^2 \\ &= \left[c_p \left(T_{in} - T_{out}\right)\right]^2 \cdot m_{\overline{\dot{m}}}^2 + \left(-\dot{m} c_p\right)^2 \cdot m_{\overline{T_{in}}}^2 + \left(\dot{m} c_p\right)^2 \cdot m_{\overline{T_{out}}}^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3 Gewogener Mittelwert

Liegen für eine Messgröße G verschieden Messergebnisse $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, ...$ mit verschiedenen Messunsicherheiten vor, die z.B. in verschiedenen Laboratorien, von verschiedenen Beobachtern oder mit verschiedenen Messmethoden gewonnen worden sind, und sollen diese zu einem Gesamtergebnis, d.h. einem Gesamtmittelwert $\overline{\overline{G}}$ nebst seinen Unsicherheiten zusammengefasst werden, so ist eine Gewichtung der verschiedenen Ergebnisse gemäß ihrer Unsicherheiten nötig. Die Messung mit dem geringsten Stichprobenfehler erhält das größte Gewicht. Die „Gewichte“ sind demnach definiert als die Reziprokwerte der Varianzen der einzelnen Mittelwerte $\overline{G}_i$:

$$g_i = \frac{1}{m_i^2} \tag{1.12}$$

Anschließend bildet man den gewogenen Mittelwert $\overline{\overline{G}}$:

$$\overline{\overline{G}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \overline{G}_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \tag{1.13}$$

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis