Optimisation Statique
3A ISA- 2A ISN
année 2014/15

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Une raffinerie de pétrole traite deux sortes de brut pour donner des produits finis avec les rendements suivants :

	Brut 1	Brut 2
Essence	25%	35%
Gasoil	30%	30%
Fuel	45%	35%

Par exemple, si on traite 1 m3 de Brut 1, on obtiendra 0.25 m3 d'essence, 0.30 m3 de gasoil et 0.45 m3 de fuel.

Les quotas de production imposent de fabriquer au plus 825 milliers de m3 d'essence, 750 milliers de m3 de gasoil et 1065 milliers de m3 de fuel. La marge bénéficiaire laissée par le traitement du brut 1 est de 3 milliers d'euros par millier de m3 et celle du brut 2 est de 4 milliers d'euros par millier de m3. Calculer, par la méthode du simplexe, quelles quantités de chaque pétrole il faut traiter pour obtenir un bénéfice maximal. On travaillera en millier de

correction

On désigne par x_1 et x_2 les quantités de brut 1 et 2 qu'il faut traiter. La fonction objectif est la marge totale, qu'il faut maximiser :

$$\text{Max } (3x_1 + 4x_2)$$

Les contraintes de production s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 0,25x_1 + 0,35x_2 & \leq 825 \\ 0,30x_1 + 0,30x_2 & \leq 750 \\ 0,45x_1 + 0,35x_2 & \leq 1065 \end{cases}$$

qui se simplifient sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 & \leq 16500 \\ x_1 + x_2 & \leq 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 & \leq 21300 \end{cases}$$

Si on note x_3, x_4, x_5 les variables d'écart, les contraintes deviennent :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 &= 16500 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 + x_5 &= 21300 \end{cases}$$

Les tableaux du simplexe sont successivement :

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5	7	1	0	0	16500	x_3
1	1	0	1	0	2500	x_4
9	7	0	0	1	21300	x_5
-3	-4	0	0	0	0	

x_2 entre et x_3 sort.

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5/7	1	1/7	0	0	16500/7	x_2
2/7	0	-1/7	1	0	1000/7	x_4
4	0	-1	0	1	4800	x_5
-1/7	0	4/7	0	0	66000/7	

x_1 entre et x_4 sort.

Tableau 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	1/2	-5/2	0	2000	x_2
1	0	-1/2	7/2	0	500	x_1
0	0	1	-14	1	2800	x_5
0	0	1/2	1/2	0	9500	

Il n'y a plus de terme négatif dans la dernière ligne et on est donc à l'optimum. La solution est :

$$\begin{cases} x_1^* &= 500 \\ x_2^* &= 2000 \\ x_3^* &= 0 \\ x_4^* &= 0 \\ x_5^* &= 2800 \end{cases}$$

La valeur à l'optimum est $f^* = 9500$. La première et le deuxième contrainte sont saturées : les quotas imposés pour l'essence et le gasoil sont atteints. La troisième présente un écart de 140 (le tableau indique 2800 mais cette contrainte avait été divisée par 20 avant d'être insérée dans le tableau) : cela signifie que le quota de 1065 imposé sur le fuel n'est pas atteint et qu'on fabrique seulement $1065 - 140 = 925$ milliers de m^3 de fuel.

Exercice 2 On considère le programme quadratique suivant :

$$\min(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2) \quad (1)$$
$$x1 + 2x2 \leq 4 \quad (2)$$
$$3x_1 + x_2 \leq 7 \quad (3)$$

où x_1 et x_2 sont des variables réelles positives. Faire une résolution par la méthode des contraintes actives en partant de $(0, 0)$. Quelle est la valeur de la fonction objectif à l'optimum ?

correction

On note $c_1(x) = 4 - x_1 - 2x_2 \geq 0$ et $c_2(x) = 7 - 3x_1 - x_2 \geq 0$ les 2 contraintes inégalités.

- **Etape 0 :**
  Si on part de $p_0 = (0, 0)$, aucune contrainte n'est active. Donc $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ et on cherche le minimum $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2)$ sans contrainte.
  La CN donne $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3 = 0 \\ 2x_2 - 5 = 0 \end{pmatrix}$ soit $x = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ et on a $c_1(x) = -\frac{5}{2} < 0$ et $c_2(x) = 0$.
  La contrainte c_1 n'étant pas satisfaite, le déplacement de la position $p_0 = (0, 0)$ vers la position $p_1 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ est stoppé au point $p_2 = p_0 + \alpha(p_1 - p_0)$ situé sur la contrainte c_1, c'est à dire $c_1(p_2) = 0$.
  On résout : $c(p_2) = 4 - 3/2\alpha - 2\alpha 5/2 = 0$ et on trouve : $\alpha = 8/13$ d'où on tire $p_2 = (12/13, 20/13)$.
- **Etape 1 :** L'ensemble des contraintes actives au point p_2 est maintenant $\mathcal{A} = \{c_1\}$
  On résout à présent le problème :

$$\min f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2) \quad (4)$$
$$x_1 + 2x_2 = 4 \quad (5)$$

  Par substitution de x_1 par $4 - 2x_2$ dans f, on cherche le minimum de $\min 5x_2^2 - 15x_2 + 4$.
  La CN donne $\nabla f(x_2) = 10x_2 - 15 = 0$ soit $x_2 = 3/2$. On en déduit $x_1 = 4 - 2x_2 = 1$ et on pose $p_3 = (1, 3/2)$.
  Au point p_3, la contrainte $c_2(p_3) = 5/2 > 0$ est bien respectée et n'est pas active. Le point atteint est un minimum car le multiplicateur de Lagrange λ associé à la contrainte c_1 et définie par $\nabla f(p_3) = \lambda \nabla c_1$ est bien positif :

$$\nabla f(p_3) = \lambda a_1 \quad (6)$$
$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 3 = -\lambda \\ 2x_2 - 5 = -2\lambda \end{pmatrix} \quad (7)$$

  soit $\lambda = 1$
  Le minimum de f est donc atteint au point p_3 sur la contrainte $c_1 = 0$ et il vaut $f^* = -29/4$

Exercice 3 Une ressource disponible en quantité d doit être affectée à trois activités en quantités x_1, x_2 et x_3 respectivement. L'allocation de x_k unités de ressource à l'activité k procure une recette évaluée par $f_k(x_k) = 8x_k - kx_k^2$.

On souhaite déterminer quelle est l'allocation (répartition) qui procurera une recette totale maximale, dans les deux éventualités suivantes :

1. la quantité disponible d est complètement utilisée.

2. on peut utiliser une quantité inférieure à d et l'excédent est revendu au prix p.

Formuler le problème d'optimisation et utiliser les conditions de Kuhn-Tucker pour résoudre ces 2 problèmes. Pour le second problème, on discutera de la stratégie à adopter en fonction de la valeur de p.

correction

1) Dans le cas où la ressource doit être complètement épuisée, le problème peut être formulé sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max}\,\big(f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)\big) \\ x_1 + x_2 + x_3 = d \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

C'est un problème d'optimisation sous contrainte *égalité*. On utilise donc la méthode de Lagrange pour le résoudre. Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - d) \\ &= 8x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2\,x_2^2 + 8x_3 - 3\,x_3^2 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - d) \end{aligned}$$

La condition de Lagrange est $\nabla L = 0$. On dérive donc successivement par rapport à x_1, x_2, x_3 et λ et on annule les dérivées. Cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 - 4x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 8 - 6x_3 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x_1 + x_2 + x_3 - d) = 0 \end{cases}$$

On le résout en calculant x_1, x_2, x_3 en fonction de λ dans les trois premières équations et en reportant dans la quatrième. On obtient $\lambda = 8 - \dfrac{12}{11}d$ et donc finalement

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6d}{11} \\ x_2 = \dfrac{3d}{11} \\ x_3 = \dfrac{2d}{11} \end{cases}$$

En conlusion, quelle que soit la quantité d à répartir, la façon optimale de le faire est d'affecter six onzièmes sur la première activité, trois onzièmes sur la deuxième et deux onzièmes sur la troisième.

2) Dans le cas où la ressource n'est pas complètement épuisée, la contrainte du problème doit être remplacée par une inégalité :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq d$$

On doit donc utiliser les conditions de Kuhn-Tucker et non plus celle de Lagrange.

On introduit une variable d'écart x_4 comme ceci :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = d.$$

Cette variable représente justement l'excédent de ressource qui n'est pas alloué aux trois activités. Cet excédent est revendu au prix unitaire p. On doit donc ajouter cette recette supplémentaire à la fonction objectif. Le problème est maintenant :

$$\begin{cases} \text{Max}\left(f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + px_4\right) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = d \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien devient :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + px_4 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - d) \\ &= 8x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2\,x_2^2 + 8x_3 - 3\,x_3^2 + px_4 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - d) \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 - \lambda = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 - 4x_2 - \lambda = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 8 - 6x_3 - \lambda = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = p - \lambda = 0 \tag{11}$$

et

$$c(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - d = 0$$

d'où l'on déduit :

$$x_1 = \frac{1}{2}(8-p) \tag{12}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(8-p) \tag{13}$$
$$x_3 = \frac{1}{6}(8-p) \tag{14}$$
$$x_4 = d - \frac{11}{12}(8-p) \tag{15}$$

Discussion
Les conditions de signe sur x_1, x_2, x_3, x_4 imposent que $p \leq 8$ et $p \geq 8 - \frac{12}{11}d$.

Si jamais $p < 8 - \frac{12}{11}d$, alors on a $x_4 = 0$ et on est dans la situation de la question précédente. Cela signifie que le prix de revente des excédents n'est pas suffisamment intéressant et qu'il n'y a aucun intérêt à ne pas tout répartir.

Si jamais $p > 8$, au contraire, on aura $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et donc $x_4 = d$. Cela signifie que le prix de revente de l'excédent est tellement élevé qu'on préfère ne rien allouer et tout revendre à ce prix !

3) Pour comparer les deux stratégies, il faut connaître la valeur à l'optimum de la fonction objectif dans les deux cas étudiés.

Dans le premier cas, on calcule $f^* = 8d - \frac{6}{11}d^2$. Dans le deuxième cas, on calcule $f^* = \frac{11}{24}(8-p)^2 + dp$. Cette dernière quantité est une fonction de degré 2 en p. Elle admet un minimum qu'on trouve en annulant sa dérivée par rapport à p :

$$-\frac{11}{12}(8-p) + d = 0$$

Cela donne un minimum en $p = 8 - \frac{12}{11}d$ et on calcule que la valeur de la fonction en ce point est $8d - \frac{6}{11}d^2$ qui est justement la valeur f^* trouvée dans le premier cas.

On en conclut que la deuxième stratégie est meilleure que la première.