Optimisation Dynamique
par le principe du minimum

P. Riedinger

Exercice 1 Atterrissage en temps minimum
En phase finale , on cherche à poser en temps minimum un engin spatial de masse $500kg$ sur le sol d'une planète à faible gravité (g=1ms^{-2}). L'actionneur est une rétrofusée qui peut exercer une force verticale vers le haut comprise entre 0 et 1000N. On supposera que le mouvement s'effectue suivant une verticale. On notera z l'altitude de l'engin.

On désire que l'engin se pose en douceur (arrivée à vitesse nulle) sur le sol à partir de l'état initial $z(0) = 100m; \dot{z}(0) = 0$ en temps minimum $T_{\min}$.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

On posera $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ avec $x_1 = z; x_2 = \dot{z}$, λ_1 et λ_2 les composantes du vecteur adjoint.

1. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.
2. En utilisant l'évolution de la vitesse, on déterminera l'instant de commutation.
3. Donner la solution explicite.
4. Tracer en fonction du temps les graphes de $\hat{H}$, $\hat{\lambda}$ $\hat{u}$ et $\hat{x}$.

Solution 1 *Exercice traité dans le cours.*

Exercice 2 On cherche à poser un engin spatial de masse 500kg sur le sol d'une planète à faible gravité ($g = 1ms^{-2}$) et privée d'atmosphère. L'actionneur est une rétrofusée qui peut exercer une force verticale vers le haut comprise entre 0 et $1000N$. On supposera que le mouvement s'effectue suivant une verticale. On notera z l'altitude de l'engin (en mètre) et $\dot{z}$ sa vitesse et $x = (x_1, x_2) = (z, \dot{z})$.

1. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer qu'une représentation d'état peut être :
$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$
avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u \in [-1\ 1]$.
2. On désire que l'engin se pose en douceur sur le sol à partir de l'état initial $x(0) = (z_0, \dot{z}_0)$ en minimisant le critère quadratique :
$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^T x + u^2 \ dt$$
Déterminer l'expression de la commande optimale $u(x) = -Kx$ solution du problème LQ associé (on supposera que u n'est pas limité à $u(t) \in [-1\ 1]$).

3. Si on prend en compte maintenant la saturation sur u, indiquer les zones dans la plan (x_1, x_2) où la commande calculée précédemment sera effectivement saturée à la valeur -1 ou à la valeur 1.

Exercice 3 On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = 2x + u$$

A partir d'une position initiale x_0, on souhaite minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt$$

où le temps final T est fixé.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système
2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.
3. Que sait on de la variable adjointe aux extrémités ?
4. Déterminer l'expression de la variable adjointe pour tout $t \geq 0$ en fonction de $x(T)$. En déduire, l'expression de la commande pour $t \geq 0$ en fonction de $x(T)$.
5. En intégrant l'équation d'état depuis l'instant T, en déduire l'expression de $x(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de $x(T)$ (Rappel : la solution du système $\dot{x} = Ax + Bu$ $x(t_0) = x_0$ est déterminée par $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)
6. La commande peut elle s'exprimer sous la forme d'un retour d'état de la forme $u(t) = -h(t)x(t)$? Justifier votre réponse.
7. Comment s'appelle l'équation différentielle suivie par h ? Donner son expression.
8. En déduire, la valeur du feedback lorsque $T \to +\infty$.

Exercice 4 On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = -ux + \frac{1}{2}u^2$$

A partir d'une position initiale x_0, on souhaite minimiser la position finale $x(T)$ à l'instant T, soit le critère :

$$J = x(T)$$

où le temps final T est fixé.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système
2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.

Exercice 5 Chauffage à énergie minimum [Principe du minimum](10pts).

L'évolution de la température T d'une pièce est modélisée en première approximation par une équation du premier ordre :

$$T = \frac{K}{1+\tau p}u \qquad (2)$$

où u est la puissance de chauffe.

On veut amener cette température de T_0 à T_f en un temps t_f (fixé) en minimisant le critère J :

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt \tag{3}$$

1. Ecrire la fonction Hamiltonienne H associée à ce problème.
2. En déduire l'expression de la commande optimale $\hat{u}$ en fonction de la variable adjointe λ, en supposant qu'il n'y a pas de contrainte sur u.
3. Montrer que $\lambda(t) = e^{\frac{t}{\tau}}\lambda_0$ où λ_0 désigne $\lambda(0) = \lambda_0$
4. Montrer que la trajectoire optimale est :

$$T(t) = T(0)e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\lambda_0 K^2}{2\tau}\sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{4}$$

5. En déduire λ_0 et $\hat{u}(t)$ à partir des condition aux limites T_0 et T_f
6. Quelle commande doit-on appliquer pour $t > t_f$ de manière à rester en T_f ?

Exercice 6 [Principe du minimum]

On considère le système dont l'évolution de l'état x est décrite par l'équation :

$$\dot{x} = -x + 10u$$

1. Calculer la commande optimale pour transférer le système de l' état $x(0) = 0$ à $x(t_f) = 1$ en temps minimum, avec $-1 \leq u \leq 1$. On donnera la valeur de t_f.
   (Pour justifier votre réponse, on prendra soin de bien définir la fonction Hamiltonienne H, l'équation adjointe, la condition de minimum sur H et les conditions aux limites sur x et la variable adjointe. Rappel : La solution de $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(t_0) = x_0$ est déterminée par $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)
2. Calculer la commande optimale pour transférer le système de l'état $x(0) = 0$ à $x(1) = 1$ en minimisant $\int_0^1 u^2 dt$ en l'absence de contrainte sur u. (Comme précédemment, on prendra soin de définir la fonction Hamiltonienne H, l'équation adjointe, la condition de minimum sur H et les conditions aux limites sur x et la variable adjointe.)
3. Calculer en appliquant directement le résultat du cours le gain K tel que la commande $u = -Kx$ minimise $J = \int_0^{\infty}(x^2 + u^2)dt$.

Exercice 7 On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = x + u$$

A partir d'une position initiale x_0, on souhaite minimiser la position finale $x(T)$ à l'instant T tout en minimisant l'énergie dépensée. Ce compromis est représenté par le critère :

$$J = x(T) + \int_0^T \frac{1}{2}u^2 dt.$$

où le temps final T est fixé.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système
2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.
3. Que sait on de la variable adjointe aux extrémités ?
4. Que sait on de la valeur de l'Hamiltonien ? En déduire la valeur de $\lambda(0)$ à l'instant $t = 0$.
5. En déduire, l'expression de la commande pour $t \geq 0$.
6. En déduire l'expression de $x(t)$ pour $t \geq 0$ (Rappel : la solution du système $\dot{x} = Ax + Bu$ est déterminée par $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)

On modifie le critère en considérant à présent :

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{2}u^2 dt.$$

1. Qu'est ce qui change dans les conditions nécessaires ?
2. La commande peut elle s'exprimer sous la forme d'un retour d'état de la forme $u(t) = -h(t)x(t)$? Justifier votre réponse.
3. Comment s'appelle l'équation suivie par h ? Donner son expression.
4. En déduire, la valeur du feedback lorsque $T \to +\infty$.

Exercice 8 On considère un système dont l'évolution de l'état x est décrite par l'équation :

$$\dot{x} = -x + u$$

1. Calculer la commande optimale pour transférer le système de l' état $x(0) = 0$ à $x(t_f) = 1$ en temps minimum, avec $-1 \leq u \leq 1$. On donnera la valeur de t_f.
   (Pour justifier votre réponse, on prendra soin de bien définir la fonction Hamiltonienne H, l'équation adjointe, la condition de minimum sur H et les conditions aux limites sur x et la variable adjointe. Rappel : La solution de $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(t_0) = x_0$ est déterminée par $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)
2. Calculer la commande optimale pour transférer le système de l'état $x(0) = 0$ à $x(1) = 1$ en minimisant $\int_0^1 u^2 dt$ en l'absence de contrainte sur u. (Comme précédemment, on prendra soin de définir la fonction Hamiltonienne H, l'équation adjointe, la condition de minimum sur H et les conditions aux limites sur x et la variable adjointe.)
3. Déterminer la commande u qui minimise le critère $J = \int_0^\infty (x^2 + u^2)dt$.
4. La mesure y de x est imparfaite en raison de bruits de mesure et d'entrée sur le système, suivant les équations :

$$\dot{x} = -x + u + \omega \tag{5}$$
$$y = x + v \tag{6}$$

   On suppose que ω et v sont des bruits blancs gaussiens centrés, stationnaires et indépendants de matrice de covariance $W = 1$ et $V = 1$. Donner l'équation du filtre asymptotique de Kalman associé à ce problème et calculer le gain du filtre.
5. On souhaite ajouter une action intégrale pour rejeter d'éventuelles incertitudes ou erreurs paramétriques. On considère alors le système augmenté défini par :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{7}$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u \tag{8}$$

Déterminer le gain K du retour d'état permettant de minimiser le critère $J = \int_0^\infty (x^T x + u^2)dt$ avec $x = (x_1, x_2)$.

6. En utilisant l'estimation $\hat{x}_2$ de l'état x_2 fourni par le filtre de Kalman, donner le schéma fonctionnel de l'ensemble : système + intégrateur + retour d'état +filtre de Kalman.

Exercice 9 On cherche à faire la synthèse d'un retour d'état en résolvant le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_u J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^T Q x + u^T R u \; dt \\ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ x_0 & \text{ donné.} \end{aligned}$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = [0\ 1]$, $R = 1$, $Q = C^T C$.

1. Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
2. Résoudre l'équation de Riccati algébrique associée
3. En déduire, la loi de retour d'état optimale $u^*(x)$.
4. Calculer les pôles du système en boucle fermée. Si on souhaite une réponse plus rapide, comment faut il modifier le critère ?
5. En l'absence d'une mesure complète de l'état, on souhaite mettre en place un filtre de Kalman asymptotique. Donner l'équation d'état du filtre de Kalman asymptotique.
6. Pour la synthèse de ce filtre, on souhaite que la dynamique de l'erreur $e = x - \hat{x}$, définie par $\dot{e} = (A - LC)e$, soit au moins 5 fois plus rapide que le système en boucle fermée. Voici les différents matrices de gain L obtenues en faisant varier la matrice de poids R_N= 0.01, 1, 100 et pour $Q_N = 1$ fixé (R_N et Q_N représentent les matrices de covariance des bruits agissant respectivement sur la mesure et sur l'équation d'état du système) :

$$L_{(R_N=0.01, Q_N=1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$L_{(R_N=1, Q_N=1)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$L_{(R_N=100, Q_N=1)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Quel choix faites vous ? Justifier la réponse.