Commande des Systèmes Dynamiques
2A ISA année 2014/15

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Une entreprise pétrolière dispose d'un stockage de produits finis dans une zone industrielle en rapide expansion. Les prévisions de construction et de développement d'industries consommatrices de produits pétroliers dans la région permettent de connaître pour les dix années à venir les quantités qui devront chaque année passer par le dépôt. On peut en déduire la capacité minimum que doit avoir chaque année le dépot pour assurer la distribution des produits. Pour simplifier les calculs nous diviserons la période d'étude de dix ans en cinq périodes de deux ans. Les capacités minimales du dépôt pour chaque période sont les suivantes :

Période	0	1	2	3	4	5
Capacité minimale	3	4	5	8	10	11

La capacité en service au début de la période 0 est de 3 unités. La capacité à l'année 10 devra être exactement égale à 11. Les augmentations de capacités sont obtenues par la construction de réservoirs supplémentaires. Le cout de construction (reflétant une économie d'échelle) est donné ci-dessous en fonction de la taille des réservoirs :

Capacité du réservoir	1	2	3	4	5
Cout de construction	20	36	50	63	75

On n'envisage pas la construction de réservoirs d'une capacité supérieure à 5 unités. Les frais d'exploitation et d'entretien du dépot sont proportionnels à sa capacité globale et égaux à 2 par unité de capacité. Nous nous proposons de déterminer la politique d'investissement optimale, c'est-à-dire permettant d'obtenir le minimum de la somme des couts de construction et des frais d'exploitation, ceci sur la période d'étude de 10 ans.

Correction On utilise comme variable d'état x_i la capacité de stockage installée au début de la période i. L'état initial et l'état final sont imposés comme ceci :

$$x_0 = 3$$
$$x_5 = 11$$

Les contraintes de capacité contenues dans le premier tableau s'écrivent

$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 5$$
$$x_3 \geq 8$$
$$x_4 \geq 10$$

La commande u_i est le nombre d'unité de stockage construites sur la période i. Les capacités de stockage évolue suivant la loi :

$$x_{i+1} = x_i + u_i$$

La commande est limitée par :

$$0 \leq u_i \leq 5$$

puisque l'on ne construit pas de réservoir de taille supérieure à 5. Les états admissibles sont alors

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &\in \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ x_2 &\in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\ x_3 &\in \{8, 9, 10, 11\} \\ x_4 &\in \{10, 11\} \\ x_5 &= 11 \end{aligned}$$

La capacité installée génère des coûts de stockage tandis que toute extension de capacité correspond à des coûts de construction. Il faut trouver le meilleur compromis entre coûts de stockage et coûts de construction.

La fonction coût élémentaire $c_i(x_i; u_i)$ représente le coût de passage de l'état x_i à l'état x_{i+1}. Il comporte

- **les coûts de stockage égaux à 2 par unité de stockage installée, donc ici $2x_i$;**
- **les coûts de construction représentés par la fonction g_i donnée dans le deuxième tableau de l'exercice.**

Si on fait passer la capacité de x_i à x_{i+1} en appliquant la commande u_i, cela correspond à un coût de construction $g(u_i)$

On obtient finalement : $c_i(x_i; u_i) = 2x_i + g(u_i)$

Résolution par l'algorithme de programmation dynamique

Notons par $C_i(x_i)$ le coût optimal depuis l'état x_i à l'étape i pour aller à l'étape 5. L'équation d'optimalité est alors déterminée par

$$C_i(x_i) = \min_{u_i}(c(x_i, u_i) + C(x_{i+1})$$

sous l'ensemble des contraintes définies sur l'état, la commande et par l'équation d'état.

1. **Initialisation :**

   - $C_4(x_4 = 11) = \min_{u_4=0} c_4(11; u_4) = 22$ **et** $u_4^*(11) = 0$
   - $C_4(x_4 = 10) = \min_{u_4=1} c_4(10; u_4) = 20 + 2 * 10 = 40$ **et** $u_4^*(10) = 1$

2. **A l'étape 3,**

— **si** $x_3 = 11$

$$\begin{aligned}C_3(x_3 = 11) = \min_{u_3=0}(c_3(11,0) + C_4(11))\\ &= \min\{22 + 22)\}\\ &= 44\end{aligned}$$

et $u_3^*(11) = 0$

— **si** $x_3 = 10$

$$\begin{aligned}C_3(x_3 = 10) = \min_{u_3\in 0,1}(c_3(10,u_3) + C_4(x_4))\\ &= \min\{c_3(10,0) + C_4(10); c_3(10,1) + C_4(11)\}\\ &= \min\{20 + 40; 20 + 20 + 22)\}\\ &= 60\end{aligned}$$

et $u_3^*(10) = 0$

— **si** $x_3 = 9$

$$\begin{aligned}C_3(x_3 = 9) &= \min_{u_3\in\{1,2\}}(c_3(9,u_3) + C_4(x_4))\\ &= \min\{c_3(9,1) + C_4(10); c_3(9,2) + C_4(11)\}\\ &= \min\{18 + 20 + 40; 18 + 36 + 22\}\\ &= 76\end{aligned}$$

et $u_3^*(x_3 = 9) = 2$

— **si** $x_3 = 8$

$$\begin{aligned}C_3(x_3 = 8) &= \min_{u_3\in\{2,3\}}(c_3(8,u_3) + C_4(x_4))\\ &= \min\{c_3(8,2) + C_4(10); c_3(8,3) + C_4(11)\}\\ &= \min\{16 + 36 + 40; 16 + 50 + 22\}\\ &= 88\end{aligned}$$

et $u_3^*(x_3 = 8) = 3$

3. A l'étape 2,

— **si** $x_2 = 11$

$$\begin{aligned}C_2(x_2 = 11) &= \min_{u_2\in\{0\}}(c_2(11,0) + C_3(11))\\ &= \min\{22 + 44\}\\ &= 66\end{aligned}$$

et $u_2^*(11) = 0$

— **si** $x_2 = 10$

$$\begin{aligned}C_2(x_2 = 10) &= \min_{u_2\in\{0,1\}}(c_2(10,u_2) + C_3(x_3))\\ &= \min\{c_2(10,0) + C_3(10); c_2(10,1) + C_3(11)\}\\ &= \min\{20 + 60; 20 + 20 + 44\}\\ &= 80\end{aligned}$$

et $u_2^*(10) = 0$

— **si** $x_2 = 9$

$$\begin{aligned} C_2(x_2 = 9) &= \min_{u_2 \in \{0,1,2\}} (c_2(9, u_2) + C_3(x_3)) \\ &= \min\{c_2(9,0) + C_3(9); c_2(9,1) + C_3(10); c_2(9,2) + C_3(11)\} \\ &= \min\{18 + 76; 18 + 20 + 60; 18 + 36 + 44\} \\ &= 94 \end{aligned}$$

et $u_2^*(9) = 0$

— **si** $x_2 = 8$

$$\begin{aligned} C_2(x_2 = 8) &= \min_{u_2 \in \{0,1,2,3\}} (c_2(8, u_2) + C_3(x_3)) \\ &= \min\{c_2(8,0) + C_3(8); c_2(8,1) + C_3(9); c_2(8,2) + C_3(10); c_2(8,3) + C_3(11)\} \\ &= \min\{16 + 88; 16 + 20 + 76; 16 + 36 + 60; 16 + 50 + 44\} \\ &= 104 \end{aligned}$$

et $u_2^*(8) = 0$

— **si** $x_2 = 7$

$$\begin{aligned} C_2(x_2 = 7) &= \min_{u_2 \in \{1,2,3,4\}} (c_2(8, u_2) + C_3(x_3)) \\ &= \min\{c_2(7,1) + C_3(8); c_2(7,2) + C_3(9); c_2(7,3) + C_3(10); c_2(7,4) + C_3(11)\} \\ &= \min\{14 + 20 + 88; 14 + 36 + 76; 14 + 50 + 60; 14 + 63 + 44\} \\ &= 121 \end{aligned}$$

et $u_2^*(7) = 4$

— **si** $x_2 = 6$

$$\begin{aligned} C_2(x_2 = 6) &= \min_{u_2 \in \{2,3,4,5\}} (c_2(6, u_2) + C_3(x_3)) \\ &= \min\{c_2(6,2) + C_3(8); c_2(6,3) + C_3(9); c_2(6,4) + C_3(10); c_2(6,5) + C_3(11)\} \\ &= \min\{12 + 36 + 88; 12 + 50 + 76; 12 + 63 + 60; 12 + 75 + 44\} \\ &= 131 \end{aligned}$$

et $u_2^*(6) = 5$

— **si** $x_2 = 5$

$$\begin{aligned} C_2(x_2 = 5) &= \min_{u_2 \in \{3,4,5\}} (c_2(5, u_2) + C_3(x_3)) \\ &= \min\{c_2(5,3) + C_3(8); c_2(5,4) + C_3(9); c_2(5,5) + C_3(10)\} \\ &= \min\{10 + 50 + 88; 10 + 63 + 76; 10 + 75 + 60\} \\ &= 145 \end{aligned}$$

et $u_2^*(5) = 5$

4. A l'étape 1,

— **si** $x_1 = 8$

$$\begin{aligned} C_1(x_1 = 8) &= \min_{u_1 \in \{0,1,2,3\}} (c_1(8, u_1) + C_2(x_2)) \\ &= \min\{16 + 104; 16 + 20 + 94; 16 + 36 + 80; 16 + 50 + 66\} \\ &= 120 \end{aligned}$$

et $u_1^*(8) = 0$

— **si** $x_1 = 7$

$$\begin{aligned} C_1(x_1 = 7) &= \min_{u_1 \in \{0,1,2,3,4\}} (c_1(7, u_1) + C_2(x_2)) \\ &= \min\{14 + 121; 14 + 20 + 104; 14 + 36 + 94; 14 + 50 + 80; 14 + 63 + 66\} \\ &= 135 \end{aligned}$$

et $u_1^*(7) = 0$

— **si** $x_1 = 6$

$$\begin{aligned} C_1(x_1 = 6) &= \min_{u_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}} (c_1(6, u_1) + C_2(x_2)) \\ &= \min\{12 + 131; 12 + 20 + 121; 12 + 36 + 104; 12 + 50 + 94; 12 + 63 + 80; 12 + 75 + 66\} \\ &= 143 \end{aligned}$$

et $u_1^*(6) = 0$

— **si** $x_1 = 5$

$$\begin{aligned} C_1(x_1 = 5) &= \min_{u_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}} (c_1(5, u_1) + C_2(x_2)) \\ &= \min\{10 + 145; 10 + 20 + 131; 10 + 36 + 121; 10 + 50 + 104; 10 + 63 + 94; 10 + 75 + 80\} \\ &= 155 \end{aligned}$$

et $u_1^*(5) = 0$

— **si** $x_1 = 4$

$$\begin{aligned} C_1(x_1 = 4) &= \min_{u_1 \in \{1,2,3,4,5\}} (c_1(4, u_1) + C_2(x_2)) \\ &= \min\{8 + 20 + 145; 8 + 36 + 131; 8 + 50 + 121; 8 + 63 + 104; 8 + 75 + 94\} \\ &= 173 \end{aligned}$$

et $u_1^*(4) = 1$

5. A l'étape 0,

— $x_0 = 3$

$$\begin{aligned} C_0(x_0 = 3) &= \min_{u_1 \in \{1,2,3,4,5\}} (c_0(3, u_0) + C_1(x_1)) \\ &= \min\{6 + 20 + 173; 6 + 36 + 155; 6 + 50 + 143; 6 + 63 + 135; 6 + 75 + 120\} \\ &= 197 \end{aligned}$$

et $u_0^*(3) = 2$

On en déduit la sequence optimale

$$\begin{aligned} u_0^* &= 2 \\ u_1^* &= 0 \\ u_2^* &= 5 \\ u_3^* &= 0 \\ u_4^* &= 1 \end{aligned}$$

pour un coût optimal de 197. Soit la séquence de capacité de stockage

$$\begin{aligned} x_0^* &= 3 \\ x_1^* &= 5 \\ x_2^* &= 5 \\ x_3^* &= 10 \\ x_4^* &= 10 \\ x_5^* &= 11 \end{aligned}$$

Exercice 2 On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = x + u$$

A partir d'une position initiale x_0, on souhaite minimiser la position finale $x(T)$ à l'instant T tout en minimisant l'énergie dépensée. Ce compromis est représenté par le critère :

$$J = x(T) + \int_0^T \frac{1}{2} u^2 dt.$$

où le temps final T est fixé.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système La fonction Hamiltonienne est définie par

$$H = p^T(x+u) + \frac{1}{2}u^2$$

   et l'equation adjointe par

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p$$

2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.
   La CN de minimum conduit à : $H_u = 0$, soit $u^* = -p$
3. Que sait on de la variable adjointe aux extrémités ? p_0 libre car x_0 est fixé et $p(T) = 1$ car $x(T)$ est libre et la fonction à minimiser possède un critère terminal.
4. En déduire, l'expression de la commande pour $t \geq 0$. Par intégration, il vient immédiatement :

$$u(t) = -p(t) = -e^{-(t-T)}$$

5. En déduire l'expression de $x(t)$ pour $t \geq 0$ (Rappel : la solution du système $\dot{x} = Ax + Bu$ est déterminée par $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)
   Par intégration, on obtient :
$$\begin{aligned} x(t) &= e^t x_0 - \int_0^t e^{(t-s)}e^{-(s-T)}ds \\ &= e^t x_0 + \frac{1}{2}[e^{T-t} - e^{t+T}] \\ &= e^t x_0 - e^T sinh(t) \end{aligned}$$

On modifie le critère en considérant à présent comme critère terminal le carré de la position finale, soit :
$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{2}u^2 dt.$$

1. Qu'est ce qui change dans les conditions nécessaires ?
   Uniquement la condition de transversalité : $p(T) = x(T)$.
2. La commande peut elle s'exprimer sous la forme d'un retour d'état de la forme $u(t) = -h(t)x(t)$? Justifier votre réponse.
   Oui, car on a affaire à un problème LQ avec critère terminal sur horizon de temps fini.
3. Comment s'appelle l'équation suivie par h ? Donner son expression.
   D'après le cours, h suit une équation de Riccati différentielle :
$$-\dot{h} = 2h - h^2, \quad h(T) = 1$$
4. En déduire, la valeur du feedback lorsque $T \to +\infty$. Lorsque $T \to +\infty$, l'équation différentielle devient algébrique en posant $\dot{h} = 0$ et on trouve $h = 2$ d'où l'on tire :
$$u = -2x$$
   et
$$\dot{x} = -x$$