Optimisation Statique

2A Ingénierie des Systèmes Numériques - année 2017/18

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Soit P le plan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $Ax = b$ où A est une matrice rectangulaire de dimension $m \times n$, $m < n$ et $b \in \mathbb{R}^m$ (P est de dimension $n - m$ puisque la relation $Ax = b$ définit m contraintes égalités). On considère un point y de l'espace $\mathbb{R}^n$ donné et fixé et on souhaite calculer le point x^* du plan P le plus proche en distance de y. Autrement dit, on cherche à déterminer la projection orthogonale de y sur le plan P.

Il s'agit donc de trouver le minimum du problème suivant :

$$\min_x \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

sous la contrainte $Ax = b$. pour un y donné et fixé.

1. Ecrire la fonction Lagrangienne associée à ce problème :

   Solution 1

   $$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 - \lambda^T(Ax - b)$$

2. Enoncer les conditions de Kuhn Tucker pour ce problème

   Solution 2 *Les KT conditions sont :*

   $$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = x - y - A^T\lambda = 0$$

   $$Ax = b$$

3. En déduire que la solution est donnée par : $x^* = y + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ay)$.

   Solution 3 *La première condition donne :*

   $$x = y + A^T\lambda$$

   en multipliant par A à gauche et en utilisant la condition 2 :

   $$Ax = Ay + AA^T\lambda = b$$

   d'où

   $$\lambda = (AA^T)^{-1}(b - Ay)$$

   puis par substitution de λ dans $x = y + A^T\lambda$, on obtient le résultat.

On admettra que la matrice (AA^T) de dimension $m \times m$ est inversible.

Rappel : $\|x\|^2 = x^T x$

Exercice 2 On considère le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{array}{l} \min\limits_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\ c^T x = 0 \end{array}$$

avec $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. Comment classifiez vous ce problème (type) ?

   Solution 4 *Il s'agit d'un problème quadratique car le critère est quadratique et les contraintes linéaires*

2. Comment peut on écrire ce problème sous la forme simplifiée :

   $$\min_z \frac{1}{2} z^T H_2 z + f_2^T z$$

   avec H_2 de dimension 2×2 et f_2 de dimension 2×1. Donner les valeurs de H_2 et f_2 et le lien entre z et x.

   Solution 5 *On peut éliminer une variable en utilisant la contrainte égalité $c(x) = 0$ soit $x_1 = 2x_2$. On parvient au problème de dimension 2 sans contrainte :*

   $$\min_{x_2, x_3} \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \quad \textit{avec } x = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Pz$$

   avec $z = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *et* $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Soit au final,

   $$H_2 = P^T H P = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$f_2 = P^T f = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la valeur de z solution de ce problème simplifié et en déduire la valeur de x (en justifiant vos calculs).

   Solution 6 *Il s'agit d'un problème sans contrainte : La CN est donc :*

   $$\frac{\partial \frac{1}{2} z^T H_2 z + f_2^T z}{\partial z} = 0$$

   Soit : $H_2 z + f_2 = 0$ *d'où l''on tire :*

   $$z = -H_2^{-1} f_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

   et $x = Pz$.

On modifie le problème initial en ajoutant une contrainte inégalité :

$$\begin{aligned}&\min_x \frac{1}{2}x^THx + f^Tx\\ &c_1^Tx = 0\\ &c_2^Tx \geq 0\end{aligned}$$

avec $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Justifier que le problème simplifié s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}&\min_z \frac{1}{2}z^TH_2z + f_2^Tz\\ &c_3^Tz \geq 0\end{aligned}$$

et donner la valeur de c_3.

Solution 7 *En procédant de manière identique à la question précédente avec $x = Pz$, on trouve $c_2^Tx = c_2^TPz$ d'où $c_3 = P^Tc_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$*

Résoudre ce problème simplifié (en justifiant vos calculs) et en déduire la valeur de x

Solution 8 *Il s'agit d'un problème quadratique avec une contrainte inégalité. Le fonction Lagangienne associée s'écrit :*

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = \frac{1}{2}z^TH_2z + f_2^Tz - \lambda c_3^Tz$$

Les conditions nécessaires de minimum sont alors (KT theorem) :

$$\frac{\mathcal{L}(z,\lambda)}{\partial z} = H_2z + f_2 - \lambda c_3 = 0 \tag{1}$$

$$c_3^Tz \geq 0 \tag{2}$$

$$c_3^Tz\lambda = 0 \tag{3}$$

Discusion :

— *Si $c_3^Tz > 0$ alors la relation (3) implique $\lambda = 0$. Par suite, de la relation* (1) *on en déduit que*

$$z = -H_2^{-1}f_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $c_3^Tz > 0$ car $c_3^T \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -4/3$.

— *Si $\lambda > 0$ alors $c_3^Tz = 0$ soit $2z_1 = z_2$ et on trouve par la relation* (1)*, $z_1 = -3/25$ $z_2 = -6/25$ et $\lambda = -4z_1 > 0$.*

Exercice 3 On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned}&\max_x\ 3x_1 + 2x_2\\ &2x_1 + x_2 \leq 18\\ &2x_1 + 3x_2 \leq 42\\ &x_1 \geq 0\\ &x_2 \geq 0\end{aligned}$$

1. Comment classifiez vous ce problème ?
2. Reformuler le problème sous sa forme standard.
3. Déterminer la solution