Optimisation sous contrainte

Exercice 1 Résoudre le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^2$

$$\max f(x) = 100x_1 + 200x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 4000 \quad (1)$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 2000 \quad (2)$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5000 \quad (3)$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2 \quad (4)$$

Solution 1 *Il s'agit d'un problème linéaire que l'on peut résoudre par la méthode du simplexe. Sous forme standard, le problème s'écrit*

$$\min -f(x) = -100x_1 - 200x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4000 \quad (5)$$
$$-3x_1 + x_2 + x_4 = 2000 \quad (6)$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5000 \quad (7)$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (8)$$

Le tableau de départ est donc :

-100	-200	0	0	0	0
1	1	1	0	0	4000
-3	1	0	1	0	2000
2	1	0	0	1	5000

On a affaire à un problème en dimension 5 avec 3 contraintes, il y a donc 2 variables nulles à l'optimum. Si on choisit $x_N = \{x_1, x_2\}$ comme variables nulles et $x_B = \{x_3, x_4, x_5\}$ comme variables basic. On a $x_3 = 4000$ et $x_4 = 2000$ et $x_5 = 5000$. Ce point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de départ est admissible (satisfaction des contraintes). En revanche, il n'est pas optimal car les coefficients de la première ligne sont négatifs.

On pivote donc sur la deuxième colonne (-200<-100) et sur la ligne 3, (car 2000/1 < 4000/1<5000/1).

-700	0	0	200	0	400000
4	0	1	-1	0	2000
-3	1	0	1	0	2000
5	0	0	-1	1	3000

On pivote à présent sur la 1ière colonne (-700<0) et sur la 2ième ligne (car 2000/4 < 3000/5).

0	0	175	25	0	750000
1	0	1/4	-1/4	0	500
0	1	3/4	1/4	0	3500
0	0	-5/4	9/4	1	500

L'algorithme s'arrête car il y a plus de coefficient négatif sur la première ligne.

Les variables nulles sont à présent $x_N = \{x_3, x_4\}$ *et les variables basic* $x_B = \{x_1, x_2, x_5\}$ *compte tenu des permutations opérées. La solution est donc* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (500, 3500, 0, 0, 500)$ *et* $f(x) = 750000$ *pour laquelle les contraintes 1 et 2 sont saturées* $(x_3 = x_4 = 0)$.

Exercice 2 Résoudre le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^2$

$$\max f(x) = 16000x_1 + 10000x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 400 \tag{9}$$
$$7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \tag{10}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 600 \tag{11}$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2 \tag{12}$$

Solution 2 *Sous forme standard, le problème s'écrit*

$$\min -f(x) = -16000x_1 - 10000x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 400 \tag{13}$$
$$7x_1 + 12x_2 + x_4 = 8400 \tag{14}$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 600 \tag{15}$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{16}$$

Le tableau de départ est donc :

-16000	-10000	0	0	0	0
1	1	1	0	0	400
7	12	0	1	0	8400
2	1	0	0	1	600

On a affaire à un problème en dimension 5 avec 3 contraintes, il y a donc 2 variables nulles à l'optimum. Si on choisit $x_N = \{x_1, x_2\}$ *comme variables nulles et* $x_B = \{x_3, x_4, x_5\}$ *comme variables basic. On a* $x_3 = 400$ *et* $x_4 = 8400$ *et* $x_5 = 600$*. Ce point* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *de départ est admissible (satisfaction des contraintes). En revanche, il n'est pas optimal car les coefficients de la première ligne sont négatifs.*

On pivote donc sur la première colonne (-16<-10) et sur la ligne 3, (car 600/2 < 400/1< 8400/7).

0	-2000	0	0	8000	4800000
0	1/2	1	0	-1/2	100
0	17/2	0	1	-7/2	6300
1	1/2	0	0	1/2	300

*On pivote à présent sur la 2ième colonne (-2000<0) et sur la 2ième ligne (car 100*2 < 300*2<6300*2/17).*

0	0	4000	0	6000	5200000
0	1	2	0	-1	200
0	0	-17	1	5	4600
1	0	-1	0	1	200

La solution est donc $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (200, 200, 0, 4600, 0)$ *et* $f(x) = 5200000$ *pour laquelle les contraintes 1 et 3 sont saturées.*

Exercice 3 Résoudre le problème d'optimisation en la variable $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\max_x f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Solution 3 *Il s'agit d'un problème linéaire que l'on peut résoudre par la méthode du simplexe. Sous forme standard, le problème s'écrit*

$$\min -f(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

sous les contraintes

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \tag{17}$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \tag{18}$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \tag{19}$$
$$\tag{20}$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5,6 \tag{21}$$

Le tableau de départ est donc :

-5	-4	-3	0	0	0	0
2	3	1	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	2	0	0	1	8

On a affaire à un problème en dimension 6 avec 3 contraintes, il y a donc 3 variables nulles à l'optimum. Si on choisit $x_N = \{x_1, x_2, x_3\}$ comme variables nulles et $x_B = \{x_4, x_5, x_6\}$ comme variables basic. On a $x_4 = 5$ et $x_5 = 11$ et $x_6 = 8$. Ce point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de départ est admissible (satisfaction des contraintes). En revanche, il n'est pas optimal car les coefficients de la première ligne sont négatifs.

On pivote donc sur la première colonne (-5<-4<-3) et sur la ligne 1, (car 5/2 < 8/3<11/4).

0	7/2	-1/2	5/2	0	0	25/2
1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2

On pivote à présent sur la 3ième colonne (-1/2<0) et sur la 3ième ligne (car 1/2 / 1/2 < 5/2 / 1/2).

0	3	0	1	0	1	13
1	2	0	2	0	-1	2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1	1	-3	0	2	1

L'algorithme s'arrête car il y a plus de coefficient négatif sur la première ligne.

Les variables nulles sont à présent $x_N = \{x_2, x_4, x_6\}$ et les variables basic $x_B = \{x_1, x_3, x_5\}$ compte tenu des permutations opérées. La solution est donc $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2,0,1,0,1,0)$ et $f(x) = 13$ pour laquelle les contraintes 1 et 3 sont saturées ($x_4 = x_6 = 0$).

Exercice 4 Un atelier de montage peut assembler deux produits finis différents, notés P_1 et P_2. Chaque produit est fabriqué à partir de 2 matières premières, M_1 et M_2 mais avec des proportions différentes. On connaît pour chacune de ces matières premières :

1. les quantités b_i disponibles, $i = 1, 2$
2. les quantités a_{ij} nécessaires à l'assemblage d'une unité du produit P_j, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$
3. le profit r_i obtenu par la vente d'une unité du produit P_i , $i = 1, 2$.

Le but du directeur est de maximiser ce profit. Il doit donc décider des quantités x_i de chaque produit P_i, $i = 1, 2$ à fabriquer, en tenant compte des quantités de matières premières disponibles.

1. Que représentent les quantités : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ et $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$? Sont elles bornées ?
2. Quelle fonction faut il maximiser pour parvenir à l' objectif du directeur, et, sous quelles contraintes ?
3. Mettre le problème sous forme standard et le résoudre par la méthode du simplexe.

Données numériques : $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 2$

Solution 4 *Les quantités $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ et $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ représentent respectivement les quantités de matière M_1 et M_2 nécessaires à la production de x_1 produits P_1 et x_2 produit P_2. Ces quantités sont bornées par les quantités de matière disponibles b_1 et b_2. On cherche donc à maximiser sous contrainte :*

$$\max_x r_1x_1 + r_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

Exercice 5 Une raffinerie de pétrole traite deux sortes de pétrole brut pour donner des produits finis (Essence, Gasoil, Fuel) dans les proportions suivantes :

	Brut 1	Brut 2
Essence	25%	35%
Gasoil	30%	30%
Fuel	45%	35%

Par exemple, si on traite 1 m3 de Brut 1, on obtiendra 0.25 m3 d'essence, 0.30 m3 de gasoil et 0.45 m3 de fuel.

Les quotas de production imposent de fabriquer au plus 825 milliers de m3 d'essence, 750 milliers de m3 de gasoil et 1065 milliers de m3 de fuel. Le bénéfice laissé par le traitement du brut 1 est de 3 milliers d'euros par millier de m3 et celle du brut 2 est de 4 milliers d'euros par millier de m3.

Calculer, par la méthode du simplexe, quelles quantités (en volume) de chaque pétrole brut, il faut traiter pour obtenir un bénéfice maximal. On travaillera directement en millier de m3.

Solution 5 *On désigne par x_1 et x_2 les quantités de brut 1 et 2 qu'il faut traiter. La fonction objectif est la marge totale qu'il faut maximiser :*

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$

Les contraintes s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0.25x_1 + 0.35x_2 &\leq 825 \\ 0.30x_1 + 0.30x_2 &\leq 750 \\ 0.45x_1 + 0.35x_2 &\leq 1065 \end{aligned}$$

qui se simplifient sous la forme

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &\leq 16500 \\ x_1 + x_2 &\leq 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 &\leq 21300 \end{aligned}$$

La mise sous forme standard du problème conduit à la formulation :

$$\begin{aligned} \min_x &- (3x_1 + 4x_2) \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 &= 16500 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 2500 \\ 9x_1 + 7x_2 + x5 &= 21300 \\ x_i &\geq 0 \ i = 1, \cdots, 5 \end{aligned}$$

La méthode du simplexe conduit aux résultats : $x_1^* = 500, x_2^* = 2000, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 2800$ et la valeur à l'optimum est $f^* = 9500$. La première et le deuxième contrainte sont saturées : les quotas imposés pour l'essence et le gasoil sont atteints. La troisième présente un écart de 140 : cela signifie que le quota de 1065 imposé sur le fuel n'est pas atteint et qu'on fabrique seulement 1065-140 = 925 milliers de m3 de fuel.

Exercice 6 On considère le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} &\min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\ &c^T x = 0 \end{aligned}$$

avec $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. Comment classifiez vous ce problème (type) ?

Solution 6 *Il s'agit d'un problème quadratique car le critère est quadratique et les contraintes linéaires*

2. Comment peut on écrire ce problème sous la forme simplifiée :

$$\min_z \frac{1}{2} z^T H_2 z + f_2^T z$$

avec H_2 de dimension 2×2 et f_2 de dimension 2×1. Donner les valeurs de H_2 et f_2 et le lien entre z et x.

Solution 7 *On peut éliminer une variable en utilisant la contrainte égalité* $x_1 = 2x_2$. *En posant* $z = (x_2, x_3)$, *on a* $x = Pz$ *et* $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *on parvient alors au problème sans contrainte de dimension 2 :*

$$\min_z \frac{1}{2} z^T P^T H P z + f^T P z$$

Par identification, on trouve : $H_2 = P^T H P$ *et* $f_2 = P^T f$ *soit*

$$H_2 = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la solution de ce problème simplifié et en déduire la valeur de x (en justifiant vos calculs).

Solution 8 *Comme il s'agit d'un problème sans contrainte la condition nécessaire de minimum est :*

$$\frac{\partial \frac{1}{2} z^T H_2 z + f_2^T z}{\partial z} = 0$$

Soit

$$H_2 z + f_2 = 0$$

On en déduit :

$$z = -H_2^{-1} f_2$$

soit $z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *d'où l'on tire* $x = Pz = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

4. On modifie le problème initial en ajoutant une contrainte inégalité :

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x$$
$$c_1^T x = 0$$
$$c_2^T x \geq 0$$

avec $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Justifier que le problème simplifié s'écrit maintenant :

$$\min_z \frac{1}{2} z^T H_2 z + f - 2^T z$$
$$c_3^T z \geq 0$$

et donner la valeur de c_3.

Solution 9 *On utilise la première contrainte et on pose à nouveau $z = (x_2, x_3)$, on a $x = Pz$ et* $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On obtient

$$\min_z \frac{1}{2} z^T H_2 z + f - 2^T z$$
$$c_3^T z \geq 0$$

avec $c_3 = P^T c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Résoudre ce problème simplifié (en justifiant vos calculs) et en déduire la valeur de x.

Solution 10 *Il s'agit d'un problème quadratique avec une contrainte inégalité. Le fonction Lagangienne associée s'écrit :*

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = \frac{1}{2} z^T H_2 z + f_2^T z - \lambda c_3^T z$$

Les conditions nécessaires de minimum sont alors (KT theorem) :

$$\frac{\mathcal{L}(z, \lambda)}{\partial z} = H_2 z + f_2 - \lambda c_3 = 0 \tag{22}$$
$$c_3^T z \geq 0 \tag{23}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{24}$$
$$\lambda c_3^T z = 0 \tag{25}$$

Discusion :

— *Si $c_3^T z > 0$ alors la relation (25) implique $\lambda = 0$. Par suite, de la relation (22) on en déduit que*

$$z = -H_2^{-1} f_2$$

soit $z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $c_3^T z > 0$ car $c_3^T z = -\frac{4}{3}$.

— *Si $\lambda > 0$ alors $c_3^T z = 0$ soit $z_2 = 2z_1$. Par substitution dans la relation (22), en posant $z = P_2 z_1$ avec $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on trouve :*

$$H_2 P_2 z_1 + f_2 - \lambda c_3 = 0$$

Soit encore :

$$[H_2 P_2 \quad -c_3] \begin{bmatrix} z_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = -f_2$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = -\begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix}$$

et on trouve bien $\lambda \geq 0$.

Conclusion : Le minimum de la fonction est donc obtenu lorsque les deux contraintes sont actives au point

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (-\frac{6}{25}, -\frac{3}{25}, -\frac{6}{25})$$

où la valeur de f est égale à : $f^* = -\frac{9}{50}$

Exercice 7 Une station thermale propose deux types de séjour, le séjour X et Y. Le séjour X, le plus abordable, se vend à 1000 euros la semaine. Quant au séjour Y, qui comporte des prestations supplémentaires, il se vend à 1500 euros la semaine. Le coût associé à la vente des 2 séjours, exprimé en euro, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 20x^2 + 10y^2 + 900x + 1350y - 10xy$$

où x est le nombre de séjour de type X et y est le nombre de séjour de type Y.

1. Déterminer le bénéfice $B(x, y)$ réalisé par la station thermale lorsqu'elle a vendu x séjour de type X et y séjour de type Y avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

   Solution 11 *Le profit est donné par la différence entre le gain et le coûts induits soit :*

   $$P(x, y) = 1000x + 1500y - C(x, y)$$

   avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

2. La capacité d'accueil de la station thermale est limitée à 25 lits. En supposant que l'établissement est complet, trouver la proportion optimale entre les séjours de type X et Y permettant de maximiser le bénéfice (Ne pas oublier dans ce calcul de prendre en compte les contraintes inégalités $x \geq 0$ et $y \geq 0$). Calculer dans ce cas le profit réalisé et préciser les valeurs obtenues pour les multiplicateurs de Lagrange.

Solution 12 *On cherche à résoudre le problème avec contrainte égalité (Etablissement complet) :*

$\max P(x,y)$ *sous les contraintes* $x+y=25$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ *ou de manière équivalente* $\min -P(x,y)$ *sous la contrainte* $x+y=25$ *le Lagangien s'écrit* $\mathcal{L} = -P(x,y) - \lambda(25-x-y) - \mu_x x - \mu_y y$

$$\mathcal{L} = 20x^2 + 10y^2 - 10xy - 100x - 150y - \lambda(25-x-y) - \mu_x x - \mu_y y$$

et les CN donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x, y} &= 0 \\ x + y &= 25 \\ \mu_x &\geq 0 \\ \mu_y &\geq 0 \\ \mu_x x &= 0 \\ \mu_y y &= 0 \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} 40x - 10y - 100 + \lambda - \mu_x &= 0 \\ 20y - 10x - 150 + \lambda - \mu_y &= 0 \\ x + y &= 25 \\ \mu_x &\geq 0 \\ \mu_y &\geq 0 \\ \mu_x x &= 0 \\ \mu_y y &= 0 \end{aligned}$$

Si $\mu_x > 0$ *alors* $x = 0 \rightarrow y = 25 \rightarrow \mu_y = 0 \rightarrow \lambda = -350 \rightarrow \mu_x = -700$ *absurde.*

Si $\mu_y > 0$ *alors* $y = 0 \rightarrow x = 25 \rightarrow \mu_x = 0 \rightarrow \lambda = -900 \rightarrow \mu_y = -1300$ *absurde.*

Donc $\mu_x = \mu_y = 0$
On trouve alors : $x = 35/4 = 8.75$ *et* $y = 65/4 = 16.25$ *et* $\lambda = -350/4 = -87.5$
Le bénéfice est alors de $P(35/4, 65/4) = 562.5$.
Notons la valeur négative de λ *:*
$\lambda = -87.5$

3. Le directeur de la station s'interroge sur la pertinence de sa politique de prix compte tenu des couts associés. Il se demande s'il ne peut pas augmenter son bénéfice sans pour autant remplir son établissement. Pouvez-vous aider le directeur ? (Justifier votre réponse)

   Solution 13 *Comme le multiplicateur* λ *associé à la contrainte* $c(x) = 25 - x - y$ *est négatif, si on relâche la contrainte (i.e si on remplace* $c(x) = 0$ *par* $c(x) \geq 0$*), alors la solution sera améliorée.*

4. Quelles sont alors l'occupation (x, y) optimale de l'établissement et le bénéfice réalisé ?

   Solution 14 *Comme le multiplicateur* λ *associé à la contrainte* $c(x) = 25 - x - y \geq 0$ *est négatif, si on relâche la contrainte (i.e si on remplace* $x + y = 25$ *par* $x + y \leq 25$*), alors la solution sera améliorée.*

   Le Lagrangien s'écrit : $\mathcal{L} = -P(x, y) - \lambda(25 - x - y) - \mu_x x - \mu_y y$

   Si la contrainte $x + y \leq 25$ *n'est pas active, alors* $\lambda = 0$ *et les CN donnent :*

$$
\begin{aligned}
40x - 10y - 100 - \mu_x &= 0 \\
20y - 10x - 150 - \mu_y &= 0 \\
x + y &< 25 \\
\mu_x &\geq 0 \\
\mu_y &\geq 0 \\
\mu_x x &= 0 \\
\mu_y y &= 0
\end{aligned}
$$

   (a) Si $\mu_x > 0$ *alors* $x = 0$.
   - *Si de plus* $\mu_y = 0$*, alors* $y = 15/2$ *et* $\mu_x = -175$ *(absurde)*
   - *sinon* $\mu_y > 0$*, alors* $y = 0$ *et* $\mu_x = -100$ *(absurde)*

   (b) sinon si $\mu_x = 0$
   - *Si de plus* $\mu_y = 0$*, alors* $y = 10$ *et* $x = 5$ *(solution admissible)*
   - *sinon* $\mu_y > 0$*, alors* $y = 0$ *et* $x = 10/4$ *et* $\mu_y = -175$ *(absurde)*

   Conclusion : la seule solution admissible est $(x, y) = (5, 10)$ *pour laquelle le bénéfice est* $P(5, 10) = 1000$.

   La station thermale a donc intérêt à ne pas saturer sa capacité d'accueil car l'exploitation de l'établissement est actuellement plus rentable autour de la solution optimale $(x, y) = (5, 10)$.

Exercice 8 Soit P le plan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $Ax = b$ où A est une matrice rectangulaire de dimension $m \times n$, $m < n$ et $b \in \mathbb{R}^m$ (P est de dimension $n - m$ puisque la relation $Ax = b$ définie m contraintes égalités). On considère un point y de l'espace $\mathbb{R}^n$ et on souhaite calculer le point x^* du plan P le plus proche en distance de y. Autrement dit, on cherche à déterminer la projection orthogonale de y sur le plan P.

Il s'agit donc de trouver le minimum du problème suivant :

$$\min_x \frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

sous la contrainte $Ax = b$.

1. Ecrire la fonction Lagrangienne associée à ce problème
2. Enoncer les conditions de Kuhn Tucker pour ce problème
3. En déduire que la solution est donnée par : $x^* = y + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ay)$.

On admettra que la matrice (AA^T) de dimension $m \times m$ est inversible.

Rappel : $\|x\|^2 = x^T x$

Solution 15 *La fonction Lagrangienne s'écrit :*

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \lambda^T(Ax-b)$$

Soit encore :

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}(x-y)^T(x-y) - \lambda^T(Ax-b)$$

Les conditions nécessaires de minimum conduisent à (cas de contraintes égalités) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Par suite on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial x} = (x-y) - A^T\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial \lambda} = Ax - b = 0$$

En multipliant à gauche la première équation par A :

$$Ax - Ay - AA^T\lambda = 0$$

Puis en substituant, Ax par b, on trouve pour λ :

$$\lambda = (AA^T)^{-1}(b - Ay)$$

puisque la matrice (AA^T) de dimension $m \times m$ est inversible (Noter que AA^T est inversible ssi $rang(A) = m$. Autrement dit, si les contraintes (ligne de A) sont linéairement indépendantes.) On reporte alors cette valeur de λ dans la première équation et on obtient :

$$x^* = y + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ay)$$

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^2$, on cherche la solution du problème :

$$\min_x f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + r^T x$$
$$a_i^T x \geq b_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4$$

avec $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = -1.$$

1. Dessiner le domaine des points admissibles
2. En partant du point $x_0 = (1/2, 1/2)$, résoudre le problème par la méthode des contraintes actives (voir rappel ci-dessous). On déroulera l'algorithme en précisant bien chaque étape. On pourra s'aider d'un dessin pour illustrer la progression.

`Problème quadratique standard:`

$$\min q(x) = \frac{1}{2}x^T H x + g^T x$$

`sous la contrainte`

$$a_i^T x = b_i, i \in E$$
$$a_i^T x \geq b_i, i \in I$$

`avec` H `matrice symétrique et` g `un vecteur (constant).`

`Notation:` $\mathcal{A}(x_k) = \{i \in E \cup I : a_i^T(x_k) = b_i\}$ `désigne l'ensemble des contraintes actives au point` x_k`.`

Rappel de l'algorithme des contraintes actives:

`Soit` x_0 `donné admissible`

`Pour k=0,1,...`

`1. Résoudre le sous problème :`

$$\min_\delta \frac{1}{2}\delta^T H \delta + g_k^T \delta$$
$$a_i^T \delta = 0, i \in \mathcal{A}(x_k)$$

`avec` $g_k = g + Hx_k$`. Soit` δ_k `la solution.`

`Poser:` $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \delta_k$ `avec` $\alpha_k = \min\left(1, \min_{\substack{i \notin \mathcal{A}(x_k) \\ a_i^T \delta_k < 0}} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T \delta_k}\right)$

---

2. Si $\alpha_k < 1$, poser $\mathcal{A}(x_{k+1}) = \mathcal{A}(x_k) \cup \{p\}$ avec $p = \arg \min_{\substack{i \notin \mathcal{A}(x_k) \\ a_i^T \delta_k < 0}} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T \delta_k}$.

3. Sinon calculer λ_i, au point x_{k+1} pour $i \in \mathcal{A}(x_k) \cap I$.
   - Si $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in \mathcal{A}(x_k) \cap I$, sortir de la boucle avec $x^* = x_{k+1}$
   - Sinon poser $\mathcal{A}(x_{k+1}) = \mathcal{A}(x_k) \setminus \{q\}$ avec $q = \arg \min_{i \in \mathcal{A}(x_k) \cap I} \lambda_i$

fin pour

Solution 16 *Soit* $x_0 = (0.5, 0.5)$ *le point de départ.*

$k = 0$:

x_0 *est admissible (car* $a_i^T x_0 \geq b_i$, $i = 1..., 4$) *et l'ensemble des contrainte active est :* $\mathcal{A}(x_0) = \{3\}$.

Etape 1 :

On résout le sous problème :

$$\min_{\delta} \frac{1}{2} \delta^T Q \delta + r_0^T \delta$$
$$a_3^T \delta = 0,$$

avec $r_0 = r + Q x_0$.

Si $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, *alors par substitution de* δ_2 *par* $-\delta_1$, $(a_3^T \delta = 0)$ *on peut résoudre le problème sans contrainte :*

$$\min_{\delta} \frac{1}{2} \delta_1^T P^T Q P \delta_1 + r_0^T P \delta_1$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La CN de minimun donne :

$$P^T Q P \delta_1 + r_0^T P = 0$$

Soit

$$\delta_1 = -(P^T Q P)^{-1} r_0^T P$$

A. N. :

$P^T Q P = 1$, $r_0^T P = -1/2$, $\delta_1 = 1/2$ *et* $\delta_2 = -1/2$.

Soit $\delta^* = (1/2, -1/2)$ *la solution.*

On pose alors : $x_1 = x_0 + \alpha_0 \delta^*$ *avec* $\alpha_0 = \min \left(1, \min_{\substack{i \notin \mathcal{A}(x_0) \\ a_i^T \delta^* < 0}} \frac{b_i - a_i^T x_0}{a_i^T \delta^*} \right)$

A. N. :

L'ensemble des indices $i \notin \mathcal{A}(x_0)$ *et* $a_i^T \delta^* < 0$ *est réduit à* $i = 4$.

Le calcul conduit alors à : $\alpha_0 = 1$

On passe à l'étape 3 de l'algorithme puisque $\alpha_0 = 1$.

Etape 3 :

On calcule λ_3, *au point* x_1 *pour* $i \in \mathcal{A}(x_0)$.

La CN sur le Lagrangien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ *conduit à :*

$$Qx_1 + r - a_3\lambda_3 = 0$$

d'où

$$\lambda_3 = -3$$

Comme $\lambda_3 = -3 < 0$, *on enlève la contrainte et* $\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}(x_0) \setminus \{3\} = \emptyset$

On retourne à l'étape [1.] de l'algorithme avec $k = 1$.

Etape 1 (k=1) :

Comme $\mathcal{A}(x_1) = \emptyset$ *est vide, il faut à présent résoudre le problème sans contrainte :*

$$\min_{\delta} \frac{1}{2}\delta^T Q\delta + r_1^T\delta$$

avec $r_1 = r + Qx_1$.

Si on note δ^* *la solution de ce problème alors la CN de minimum conduit à :*

$$\delta^* = -Q^{-1}r_1$$

A.N. : $\delta^* = (0, -3)$

On pose alors : $x_2 = x_1 + \alpha_1\delta^*$ *avec* $\alpha_1 = \min\left(1, \min\limits_{\substack{i \notin \mathcal{A}(x_1) \\ a_i^T\delta^* < 0}} \frac{b_i - a_i^T x_1}{a_i^T\delta^*}\right)$

A. N. :

L'ensemble des indices $i \notin \mathcal{A}(x_1)$ *et* $a_i^T\delta^* < 0$ *est réduit à* $i = \{2, 4\}$.

Le calcul conduit alors à :

$$\alpha_1 = 0$$

et

$$4 = \arg\min\left(1, \min_{\substack{i \notin \mathcal{A}(x_1) \\ a_i^T\delta^* < 0}} \frac{b_i - a_i^T x_1}{a_i^T\delta^*}\right)$$

On passe à l'étape 2 et on pose :

Etape 2 :

$\mathcal{A}(x_2) = \{4\}$ *et on retourne à l'étape 1 avec* $k = 2$

Etape 1 (k=2) : On résout le sous problème :

$$\min_{\delta} \frac{1}{2}\delta^T Q\delta + r_2^T\delta$$
$$a_4^T\delta = 0,$$

avec $r_2 = r + Qx_2$.

Si $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, *alors par substitution de* δ_2 *par* δ_1, ($a_4^T\delta = 0$) *on peut résoudre le problème sans contrainte :*

$$\min_{\delta} \frac{1}{2}\delta_1^T P^T QP\delta_1 + r_2^T P\delta_1$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La CN de minimun donne :

$$P^T QP\delta_1 + r_2^T P = 0$$

Soit

$$\delta_1 = -(P^T QP)^{-1} r_2^T P$$

A. N. :
$P^T QP = 5$, $r_2^T P = 6$, *et* $\delta_1 = -6/5$ *et* $\delta_2 = -6/5$

Soit $\delta^* = (-6/5, -6/5)$ *la solution.*

On pose alors : $x_3 = x_2 + \alpha_2\delta^*$ *avec* $\alpha_2 = \min\left(1, \min_{\substack{i\notin\mathcal{A}(x_2)\\ a_i^T\delta^*<0}} \frac{b_i - a_i^T x_2}{a_i^T\delta^*}\right)$

A. N. :
L'ensemble des indices $i \notin \mathcal{A}(x_2)$ *et* $a_i^T\delta^* < 0$ *est réduit à* $i = 2$.

Le calcul conduit alors à : $\alpha_2 = 5/6$ *et*

$$x_3 = (0, -1)$$

Comme $\alpha_2 < 1$, *on passe à l'étape 2*

Etape 2 : On ajoute l'indice 2 (nouvelle contrainte active) et on pose : $\mathcal{A}(x_3) = \{2, 4\}$ *et on retourne à l'étape 1 avec* $k = 3$

Etape 1 (k=3) :

Le problème à résoudre est maintenant :

On résout le sous problème :

$$\min_{\delta} \frac{1}{2}\delta^T Q\delta + r_3^T\delta$$
$$a_2^T\delta = 0,$$
$$a_4^T\delta = 0,$$

avec $r_3 = r + Qx_3$.

La solution est trivialement obtenue (intersection de 2 droites) avec

$$\delta^* = 0$$

et on pose :

$$x_4 = x_3$$

car trivialement $\alpha_3 = 1$ *(*$a_i^T \delta^* \geq 0$ *pour tout* i*).*

On passe alors à l'étape 3.

Etape 3 :

On calcule les multiplicateurs de Lagrange. La CN sur le Lagrangien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ *conduit à :*

$$Qx_4 + r - a_2\lambda_2 - a4\lambda_4 = 0$$

et on trouve : $\lambda_4 = 1$ *et* $\lambda_2 = 0$.

Les CN sont alors toutes satisfaites et on peut conclure que le minimum du problème est atteint en

$$x^* = x_4 = (0, -1)$$

Fin