Optimisation Statique et Dynamique
Master ISC année 2013/14

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 En utilisant les conditions de Kuhn et Tucker, trouver le minimum de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sous les contraintes $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ et $x_1 - x_2 + x_3 = -2$.

Solution 1 *Problème de recherche du minimum d'une fonction de 3 variables en présence de 2 contraintes "égalité"*

Remarquons géométriquement que les courbes de niveau sont des sphères centrées à l'origine, les contraintes définissent une droite (intersection, de deux plans). Le minimum sera atteint pour la sphère tangente à cette droite

le problème se résout par les multiplicateurs de Lagrange On construit la fonction complétée

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3 - 4) + \mu(x_1 - x_2 + x_3 + 2) \tag{1}$$

Cette fonction doit être stationnaire par rapport à toutes les variables.

Ce qui nous donne le système d'équations

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda + \mu \tag{2a}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda - \mu \tag{2b}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda + \mu \tag{2c}$$

auxquelles s'ajoutent les équations de contraintes

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \tag{3a}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -2 \tag{3b}$$

des équations2, on tire

$$x_1 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \tag{4a}$$

$$x_2 = -\lambda + \frac{\mu}{2} \tag{4b}$$

$$x_3 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \tag{4c}$$

en remplaçant dans les équations3, on trouve le système

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} + 2(-\lambda + \frac{\mu}{2}) - (\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}) \quad = \quad -3\lambda + \mu = 4 \tag{5}$$

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} - (-\lambda + \frac{\mu}{2}) + \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \quad = \quad \lambda - \frac{3}{2}\mu = -2 \tag{6}$$

dont la solution est : $\left\{\lambda = -\frac{8}{7}, \mu = \frac{4}{7}\right\}$
en remplaçant dans les équations 4, on trouve

$$x_1 = \frac{2}{7} \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{10}{7} \tag{8}$$

$$x_3 = -\frac{6}{7} \tag{9}$$

Exercice 2 Soit le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^2$

$$\min f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 & \end{aligned}$$

On souhaite utiliser l'algorithme des contraintes actives en partant du point $x_0 = (0, 1)$. Dérouler cet algorithme en détaillant à chaque étape : l'ensemble des contraintes actives, le sous problème d'optimisation à traiter, sa solution et le cas échéant le retrait ou l'ajout de contraintes à l'ensemble des contraintes actives.

Solution 2 *Notons :*

$$c_1(x) = x_1$$

$$c_2(x) = x_2$$

$$c_3(x) = -x_1 - x_2 + 2$$

les contraintes inégalités.

Pour $k = 0$ *:*
état initial $x_0 = (0, 1)$
Ensemble des contraintes actives $A(x^0) = \{c_2\}$. *Le sous problème à résoudre est :*

$$min f(x)$$

sous la contrainte

$$c_2(x) = x_2 = 0$$

Comme $x_2 = 0$, *on trouve directement* $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 3 = 0$ *soit* $x_1 = 3/2$.
Le point $x^1 = (3/2, 0)$ *est admissible.*

On calcule le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte c_2 (remarque : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_3 = 0$ car contrainte non active). A partir de la CN :

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = 0,$$

on trouve $\lambda_2 = -x_1 < 0$.

On peut donc améliorer la valeur de f en relâchant la contrainte c_2.

Le nouvel ensemble de contrainte active est maintenant $A(x^1) = \{\emptyset\}$.

Le sous problème à résoudre est donc

$$\min f(x)$$

sans contrainte.

Le minimum est donné par la CN :

$$\nabla f = 0$$

et on trouve

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0 \tag{10}$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0 \tag{11}$$

soit $x^2 = (x_1, x_2) = (2, 1)$. Ce point n'est pas admissible car la contrainte c_3 n'est pas satisfaite. On repart donc du point situé à l'intersection de c_3 et du segment $[x^1, x^2]$ soit le point

$$x^3 = (5/3, 1/3)$$

avec comme ensemble de contrainte actives $A(x^3) = \{c_3\}$. Le sous problème est maintenant,

$$\min f(x)$$

sous les contraintes $-x_1 - x_2 = -2$.

Par substitution, on trouve

$$\min f(x) = (-x_2 + 2)^2 - (-x_2 + 2)x_2 + x_2^2 - 3(-x_2 + 2)$$

et $x_1 = -x_2 + 2$

Soit

$$\min f(x) = 3x^2 - 3x - 2$$

La CN donne $x_2 = 1/2$ et $x_1 = 3/2$. Le point est admissible et le multiplicateur de Lagrange est alors $\lambda_3 = 1/2 > 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). On peut donc conclure que l'ensemble des conditions nécessaires sont satisfaites. Le minimum de f sous l'ensemble des contraintes $c_i(x) \geq 0$ $i = 1, 2, 3$ est donc obtenu au point $x = (3/2, 1/2)$

Exercice 3 Déplacement à énergie et temps minimum

On considère un système dynamique dont l'equation d'évolution est donné par :

$$\dot{x} = -x + u$$

On souhaite effectuer un déplacement de la position $x_0 = 0$ à la position $x(t_f) = 10$ en minimisant un compromis entre la dépense d'énergie et le temps de transfert. Ce compromis est représenté par le critère :

$$J = \int_0^{t_f} 1 + \frac{1}{2}u^2 dt.$$

où le temps final t_f n'est pas fixé.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système
   Solution : L'Hamiltonien du problème s'écrit :
   $$H(,p,u) = 1 + \frac{1}{2}u^2 + p(-x+u)$$
   et l'equation adjointe est donnée par
   $$\dot{p} = p$$
2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité. La condition d'optimalité donne :
   $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$
   Soit $u(t) = -p(t)$
3. Que sait on de la variable adjointe aux extrémités ? x_0 et x_{t_f} sont fixés donc p_0 et $p(t_f)$ sont libres.
4. Que sait on de la valeur de l'Hamiltonien ? En déduire la valeur de la variable adjointe à l'instant $t = 0$. L'Hamiltonien est constant et comme t_f n'est pas fixé, $H = 0$. A l'instant $t = 0$, cela donne :
   $$0 = 1 + \frac{1}{2}p_0^2 + p_0(-x_0 - p_0)$$
   Soit encore :
   $$p_0^2 = 2$$
   Soit $p_0 = \pm\sqrt{(}2)$
5. Donner explicitement l'expression de la variable adjointe pour $t \geq 0$. On a immédiatement : $p(t) = e^t p_0$ Comme p(t) ne change pas de signe, et compte tenu de la position initiale et finale, il est nécessaire que $u(t) = -p(t) > 0$ d'où $u_0 = -p_0 = \sqrt{(}2)$.
6. En déduire l'expression de $x(t)$ pour $t \geq 0$
   $$x(t) = \int_0^t e^{(-1)(t-s)}e^s u_0 ds$$
   $$x(t) = u_0 e^{-t}\int_0^t e^{(2s)}ds$$
   $$x(t) = u_0 e^{-t}[e^{(2s)}]_0^t/2$$
   $$x(t) = u_0(e^t - e^{-t})/2 = \sqrt{2}\sinh(t)$$
7. Déterminer la valeur de t_f.
   $$t_f = \arg\sinh(10/\sqrt{2})$$

(Rappel : la solution du système $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$ est déterminée par $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)

Exercice 4 [Programmation dynamique]

Le problème posé consiste à optimiser une gestion de stocks en décidant des approvisionnements, compte tenu des achats prévisibles des clients(sorties de stock) et des coûts.

On travaille par période ($k = 1, 2..., N$), on appelle x_k la quantité de stock en debut de période k (avant approvisionnement), a_k la quantité de produits rentrant dans le stock en début de période et s_k la demande de marchandise pendant la période.

Le coût relatif à chaque période $c(x_k, a_k, s_k)$ comprend le prix des achats (prix unitaire p) et un coût $H(x_k, a_k, s_k)$ qui dépend du stock restant (coût d'immobilisation) et d'une éventuelle insatisfaction des clients qui ne peuvent voir leur demande satisfaite si le stock disponible est insuffisant.

$$c(x_k, a_k, s_k) = p\ a_k + H(x_k, a_k, s_k)$$

$$H(x_k, a_k, s_k) = \max(0, x_k + a_k - s_k) + 3 \max(0, -x_k - a_k + s_k)$$

La capacité maximale du stock est S, le stock ne peut être négatif.

On suppose que la suite de s_k est connue.

- Ecrire l'équation d'optimalité relative à ce problème.
- Résoudre le problème sur 2 périodes pour $p = 1$, $S = 2$, $x_1 = 0, 1, 2$ et $s_1 = s_2 = 1$