ENSEM 3ère année - Master ISC Optimisation Statique

Exercice 1. Résoudre par l'algorithme du simplexe le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^3$

$$\min f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq -2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre par la méthode du simplexe le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^4$

$$\min f(x) = 2x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{cc} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 & = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 & \end{array} \tag{1}$$

Exercice 3. Soit le problème de minimisation :

$$\begin{gathered} \min \tfrac{1}{2} x^T A x - b^T x \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{gathered}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) Formuler les conditions de Kuhn Tucker et en déduire la solution
(2) Que donne la solution sans contrainte ?
(3) Quels algorithmes peut on utiliser pour résoudre ce genre de problème ?

Exercice 4. Soit le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^2$

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{cc} x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 & \end{array} \tag{2}$$

En partant du point $x = (0, 0.5)$ sur la contrainte active $\{x_1 = 0\}$, résoudre graphiquement par la méthode des contraintes actives ce problème. Faites un dessin et expliciter clairement les étapes (minima intermédiaires obtenus, ajout et suppression de contraintes, etc.).

Exercice 5. On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ soumise à la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

(1) Quels sont les extrema de cette fonction ?

(2) Quels sont les minima ?

Exercice 6. Soit le problème de minimisation

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

sous la contrainte $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$.

Ecrire les conditions nécessaires de minimum et résoudre le problème.

Exercice 7. Soit le problème de minimisation sur $\mathbb{R}^2$

$$\min f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1$$

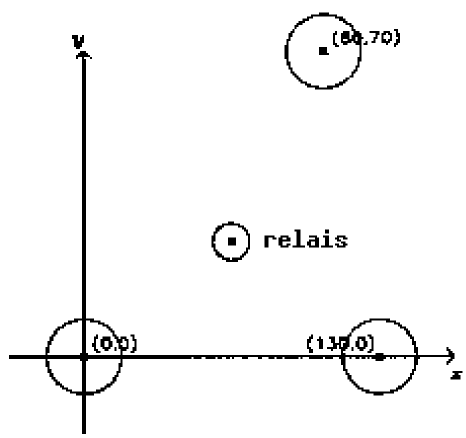
sous les contraintes

$$\begin{array}{rl} -x_1 - x_2 & \geq -2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 & \end{array}$$

En partant du point $x = (0, 1)$, dérouler l'algorithme des contraintes actives.

Exercice 8. On veut construire un relais électrique capable d'approvisionner trois installations par des câbles sous-terrains. Pour diverses raisons, la centrale ne peut se situer à moins de 50 m de toute installation. L'objectif est de placer cette centrale afin de minimiser la longueur totale du câblage sous-terrain.

Formuler ce problème sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes.



Exercice 9. Au ministère de l'agriculture, on a établi la fonction de profit suivante pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches :

$$P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy \tag{3}$$

où P(x, y) sont les profits annuels en euros, x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja, et y donne le nombre d'acres plantés en pistaches. Un fermier possède une terre de 500 acres.

Comment devrait-il allouer ses terres à ces deux cultures pour obtenir un profit maximal ? Utiliser la méthode du Lagrangien.

Montrer qu'il s'agit d'un maximum absolu et donner le montant du profit obtenu.

Interpréter le multiplicateur de Lagrange. En vous basant sur cette interprétation, suggéreriez-vous au fermier d'augmenter la surface totale consacrée à ces deux cultures ou, au contraire, de la diminuer ?

Exercice 10. Résoudre le problème de minimisation ci-dessous en utilisant les conditions de Kuhn Tucker

Minimiser

$$x_1^2 - x_2 \tag{4}$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 = 6 \tag{5}$$

$$x_1 - 1 \geqslant 0 \tag{6}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 26 \tag{7}$$