Optimisation Dynamique
2A ISN année 2014/15

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Soit N un entier et $x \geq 0$. On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{N} u_i^2$$

sous les contraintes $u_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} u_i = x$.

1. En utilisant les conditions de Kuhn et Tucker, déterminer la solution.
   Correction : Le Lagrangien s'écrit : $L = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i \lambda_i - (\sum_{i=1}^{N} u_i - x)\mu$
   Les C.N.s sont alors :

$$2u_i - \lambda_i - \mu = 0 \quad i = 1, ...N \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i - x = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_i u_i = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_i \geq 0 \tag{4}$$

$$u_i \geq 0 \tag{5}$$

Discussion : Ces conditions nécessaires montrent que :
- **Si** $u_i > 0$ **alors** $\lambda_i = 0$ **et** $2u_i = \mu > 0$
- **Si** $u_i = 0$ **alors** $\mu = -\lambda_i \leq 0$

On voit donc que : ou bien tous les $u_i > 0$ **ou bien tous les** $u_i = 0$ **sinon on a une contradiction de signe concernant** μ**.**
Si tous les u_i **sont nuls alors la contrainte** $\sum_{i=1}^{N} u_i = x$ **n'est satisfaite que si** $x = 0$**.**
Donc tous les $u_i > 0$ **si** $x \neq 0$ **et** $\lambda_i = 0$**. Comme** $2u_i = \mu > 0$**, on trouve** $\sum_{i=1}^{N} u_i = \sum_{i=1}^{N} \mu/2 = N\mu/2 = x$ **soit** $\mu = 2x/N$**.**
Et on conclue que :

$$u_i = x/N$$

2. En posant $V_N(x)$, la solution optimale du problème, proposer une formulation du problème qui permet d'utiliser la programmation dynamique pour le résoudre.
   (a) On prendra soin de bien définir le système dynamique et les contraintes sur l'état et la commande.
   (b) Déterminer l'équation d'optimalité
   (c) Donner son initialisation.
   (d) Montrer par récurrence le résultat.

Correction : Il s'agit d'un problème classique consistant à répartir une ressource présente en quantité x entre plusieurs taches. Lorsque l'on affecte une quantité u_i à la tache i le gain est $g(u_i) = u_i^2$ et la ressource diminue de u_i.
- **L'équation d'état est déterminée par $x_{i+1} = x_i - u_i$ avec $x_0 = x$**
- **L'état et les commandes sont positifs ou nuls et contraints par la quantité de ressource disponible i.e. $0 \leq x_i$ et $0 \leq u_i \leq x_i \leq x$.**
- **L'équation d'optimalité est alors $V_p(x_p) = \min_{u_p \geq 0}(u_p^2 + V_{p-1}(x_p - u_p))$**
- **L'initialisation donne pour un $0 \leq x_N \leq x$, $V_N(x) = x_N^2$ et $u_N = x_N$ On dépense toute la ressource disponible à l'étape N puisqu'il n'y a que la tache N à prendre en compte.**

Correction : Déroulement de l'algorithme :
A l'étape $N-1$, on cherche pour $0 \leq x_{N-1} \leq x$,

$$V_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{x_{N-1} \geq u_{N-1} \geq 0}(u_{N-1}^2 + V_N(x_{N-1} - u_{N-1}))$$

Soit encore d'après l'initialisation,

$$V_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{x_{N-1} \geq u_{N-1} \geq 0}(u_{N-1}^2 + (x_{N-1} - u_{N-1})^2)$$

La condition nécessaire de minimum conduit alors à :

$$2u_{N-1} - 2(x_{N-1} - u_{N-1}) = 0$$

Soit

$$u_{N-1} = x_{N-1}/2$$

Par récurrence, en remarquant que $(N-p+1)$ est le nombre d'étape pour aller à la fin, on peut inférer qu'à l'étape p,

$$u_p = x_p/(N-p+1)$$

et

$$V_p(x_p) = (x_p^2/(N-p+1))$$

Montrons le par reccurence :

$$V_p(x_p) = \min_{x_p \geq u_p \geq 0}(u_p^2 + V_{p+1}(x_p - u_p))$$

Par l'hypothèse de reccurence :

$$V_p(x_p) = \min_{x_p \geq u_p \geq 0}(u_p^2 + \frac{(x_p - u_p)^2}{N-p}$$

La condition nécessaire de minimum conduit alors à :

$$2u_p - 2\frac{(x_p - u_p)}{(N-p)} = 0$$

Soit

$$u_p = x_p/(N-p+1)$$

On a donc démontrer le résultat pour tout p et en particulier pour $p = 1$, on trouve $u_1 = x/N$ et $V_1(x) = x^2/N$

Exercice 2 On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = 2x + u$$

A partir d'une position initiale x_0, on souhaite minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt$$

où le temps final T est fixé.

1. La commande peut elle s'exprimer sous la forme d'un retour d'état de la forme $u(t) = -h(t)x(t)$? Justifier votre réponse. **Correction : Oui, car on a affaire à un problème LQ en temps fini avec critère terminal.** $A = 2$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 0$ **et** $P_T = 1$
2. Comment s'appelle l'équation différentielle suivie par h ? Donner son expression. **Correction :L'équation suivie par h est une équation différentielle de Riccati**

$$-\dot{h} = 4h - h^2, \quad h(T) = 1$$

3. En déduire, la valeur du feedback lorsque $T \to +\infty$. **Correction : Lorsque $T \to +\infty$, l'équation différentielle de Riccati devient une équation algébrique ($\dot{h} = 0$). Soit $0 = 4h - h^2 = h(4-h)$. La solution strictement positive i.e. $h = 4$ permet de définir la commande par retour d'état :**

$$u = -4x$$

et l'équation du système bouclé devient

$$\dot{x} = -2x$$

Exercice 3 Un fabricant de gros outillage produit trois types de machines, désignées par A, B et C. La capacité de production de l'entreprise est limitée à 500 machines par an. La répartition de la production entre les différents types de machines n'influe pas sur la capacité de production. On supposera que le stock initial est nul et que toute machine fabriquée est vendue immédiatement. Les contraintes d'absorption du marché limitent la production à un maximum de 300 machines du type A, 500 du type B et 200 du type C.

Le fabricant produit les machines de chaque type par séries de 100. Pour lancer une ou plusieurs séries de machines d'un type donné, il doit effectuer un investissement en outillage, en main d'oeuvre et en effort de distribution dont il connaît la valeur actuelle nette (prix de revient). S'il ne lance aucune série d'appareils d'un type donné, certains équipements de l'usine sont inutilisés, ce qui entraîne une valeur actuelle nette négative de l'investissement réalisé. Ces valeurs sont fournies, en milliers d'euros, par le tableau suivant :

Le fabricant désire maximiser la somme des valeurs actuelles nettes de ses investissements. On utilisera la programmation dynamique.

Séries de 100 machines	0	1	2	3	4	5
Machines de type A	-500	500	1400	2150	-	-
Machines de type B	-300	650	1550	2250	2850	3500
Machines de type C	-100	950	1850	-	-	-

Table 1 – Coût de production

On désigne par u_i i=$\{1,2,3\}$ le nombre respectivement de série de machine du type $\{A, B, C\}$. On a les contraintes suivantes liées au marché et à la production :

$$0 \leq u_1 \leq 3 \tag{6}$$
$$0 \leq u_2 \leq 5 \tag{7}$$
$$0 \leq u_3 \leq 2 \tag{8}$$
$$u_1 + u_2 + u_3 \leq 5 \tag{9}$$

Les gains algébriques élémentaires noté $g(u_i)$ sont fournis par le tableau en fonction du nombre de séries produites et du type de machine. On a maximiser la somme des valeurs actuelles nettes de ses investissements c'est à dire

$$g(u_1) + g(u_2) + g(u_3)$$

On procède en 3 étapes (+1 pour la fin) en affectant à chaque étape un nombre de série à produire pour les machines de type $\{A, B, C\}$. Les étapes 1, 2 et 3 concernent respectivement les machines de type A,B et C. L'état x_i est le nombre maximal de séries pouvant être produite à l'étape i. On a $x_1 = 5$. La dynamique est alors

$$x_{i+1} = x_i - u_i$$

— L'équation d'optimalité est alors :

$$G_i(x_i) = \max_{u_i}(g_i(u_i) + G_i(x_{i+1}))$$

— L'initialisation se fait à l'étape 3

$$G_3(x_3) = \max_{0 \leq u_3 \leq 2}(g_3(u_3))$$

La commande optimale est, compte tenu de la contrainte sur u_3 :

$$u_3 = min(x_3, 2)$$

On obtient alors le tableau suivant :

x_3	u_3	$G_3(x_3)$
0	0	-100
1	1	950
2	2	1850
3	2	1850
4	2	1850
5	2	1850

— A l'étape 2, l'application de l'équation d'optimalité donne

$$G_2(x_2) = \max_{0 \leq u_2 \leq 5} (g_2(u_2) + G_3(x_3))$$

d'où le tableau :

x_2	u_2	$G_2(x_2)$	x_3	u_3	$G_3(x_3)$
0	0	-400	0	0	-100
1	0	650	1	1	950
2	1	1600	2	2	1850
3	1 ou 2	2500	3	2	1850
4	2	3400	4	2	1850
5	3	4100	5	2	1850

— A l'étape 1, $x_1 = 5$ l'application de l'équation d'optimalité donne

$$G_1(x_1) = \max_{0 \leq u_1 \leq 3} (g_1(u_1) + G_2(x_2))$$

d'où le tableau :

x_1	u_1	$G_1(x_1)$	x_2	u_2	$G_2(x_2)$	x_3	u_3	$G_3(x_3)$
			0	0	-400	0	0	-100
			1	0	650	1	1	950
			2	1	1600	2	2	1850
			3	1 ou 2	2500	3	2	1850
			4	2	3400	4	2	1850
5	1 ou 2	3900	5	3	4100	5	2	1850

L'optimum est donc 3900 et correspond aux sequences $\{u_1, u_2, u_3\} = \{1, 2, 2\}$, $\{2, 1, 2\}$ et $\{2, 2, 1\}$