Pilotage à Energie minimale d'un véhicule

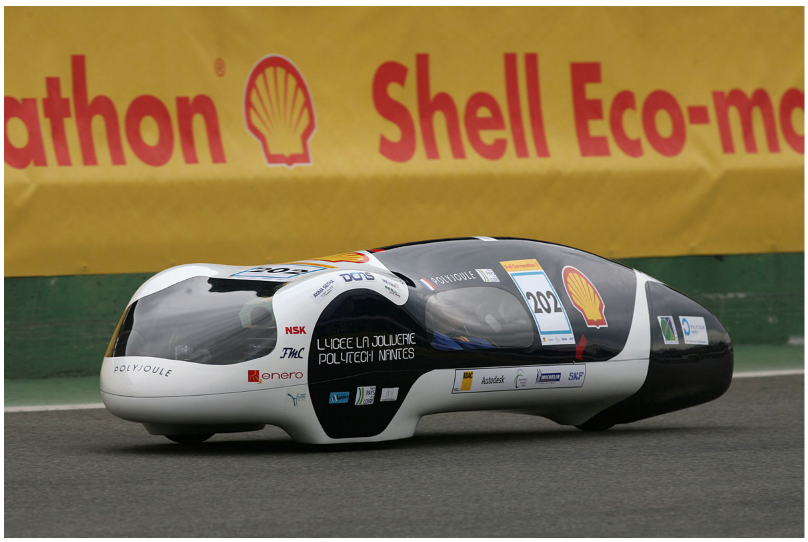

Figure 1 – Eco Marathon

L'Éco-marathon Shell est une compétition automobile annuelle mondiale dont le but est de parcourir la plus longue distance avec un litre de carburant. Les participants doivent couvrir une distance donnée en un temps limité à la suite de quoi leur consommation est mesurée. Le classement est établi selon la quantité de carburant consommée, et est donnée en kilomètres pour l'équivalent énergétique d'un litre d'essence sans plomb 95.

On souhaite déterminer un pilote automatique permettant de minimiser cette consommation énergétique tout en respectant les contraintes imposées (temps de parcours et distance parcourue).

Les équations de position p et de vitesse v du véhicule sont déterminées par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{p} = v \tag{1}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(-k_f v - k_F v^2 + k_u u - mg\frac{a}{1+a^2}) \tag{2}$$

Les différents termes et constantes sont définis comme suit :

- $m = 100kg$ est la masse du véhicule (avec le pilote)
- $g = 9.81$ la constante de gravité
- $k_f v$ est lié au frottement mécanique, $k_f = 10$
- $k_F v^2 = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$ est la force de trainée avec
  - ρ , masse volumique de l'air (en kg/m3), $\rho = 1.2$
  - v, vitesse du véhicule (en m/s)
  - S, maître-couple (en m2) correspond à la surface frontale maximale du véhicule, $S = 1m^2$
  - C_x, le coefficient de traînée (sans unité), $C_x = 0.25$
- $k_u u$ est la force exercée par le moteur en appliquant la commande u ; $k_u = 300$; La commande u est bornée $0 \leq u \leq 1$
- $mg\frac{a}{1+a^2}$ représente la projection du poids en fonction de la pente a (Figure(2))

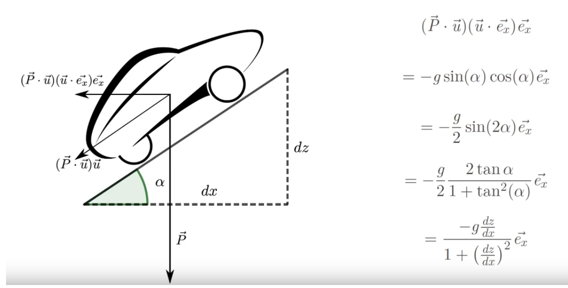

FIGURE 2 – Effet du relief

Condition de la course :

La distance à parcourir est de 1000m en moins de 3 mn. Le profil de la piste est connu en fonction de la position x et est donné par l'equation suivante :

$$h = 10e^{-(\frac{x-500}{100})^2}$$

où h représente la hauteur et x la position (Figure(3)).

Notons $x = (p, v)$ l'état du système avec p la position et v la vitesse.

On souhaite alors établir une commande optimale en minimisant une fonction énergie définie par le critère suivant :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \rho_{uv} vu + \rho_u u^2 dt + \frac{1}{2}(x(T) - x_{ref})^T Q_f (x(T) - x_{ref})$$

avec $x_{ref} = (1000, 1)$ et $\rho_{uv} \geq 0$, $\rho_u > 0$, $Q_f = Q_f^T > 0$

Le terme en vu est proportionnel à la puissance mécanique (Vitesse * Couple) et le terme en u^2 correspond aux pertes par effet Joule. Le rôle du critère terminal est une pénalisation destinée à imposer la valeur finale $x = x_{ref}$. On part de conditions initiales nulles $x_0 = (0, 0)$:

On pourra choisir dans un premier temps : $\rho_{uv} = 1$, $\rho_u = 1$, $Q_f = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

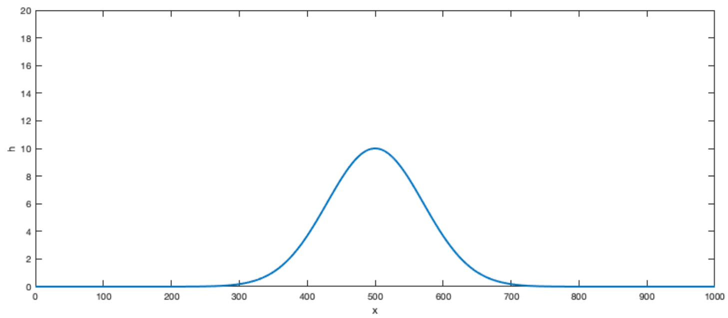

FIGURE 3 – Profil piste

L'algorithme dit "Forward Backward Sweep" ou "balayage avant arrière" basé sur les conditions nécessaires du Principe du Minimum permet de résoudre ce problème numériquement :

Pour un problème défini par :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3}$$

$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

$$\min_u J(u) = \int_0^T L(x, u)dt + \phi(x(T)) \tag{5}$$

il s'énonce de la manière suivante :

Algorithm FBS (Forward backward Sweep) :

A partir d'une commande u donnée et quelconque ($u(t) \in [0\ 1]$).

1. Intégration sur $[0\ T]$ du système :
$$\dot{x} = f(x, u),\ x(0) = x_0$$
2. Application de la condition de transversalité en T :
$$\lambda(T) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x(T))$$
3. Intégration sur $[T\ 0]$ du système adjoint (sens rétrograde) :
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x, u, \lambda)}{\partial x}$$
4. Calcul de $v = \arg\min_u H(x, u, \lambda)$
5. Mise à jour de u :
$$u = \arg\min_{u_\ell}\{J(u_\ell), \ell = 0, 1, 2, \cdots, \ell_{max}\}$$
avec $u_\ell = \Pi(u + \beta^\ell(v - u))$ où $\Pi(x)$ désigne la projection sur $[0\ 1]$ et $\beta \in (0, 1)$.
$$\Pi(x) = \max(\min(1, x), 0)$$

6. Si $\|J(u^{new}) - J(u^{old})\| < \epsilon$ arrêt sinon retour au point 1

Mise en oeuvre pratique :

— Pour intégrer numériquement en sens direct ou arrière, (point 1 et 3), il faut utiliser un schéma numérique d'intégration, par exemple Euler :

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, u_k)$$

avec $h = T/N$ et N nombre de points de discrétisation.

— Pour évaluer le critère intégral, une intégration d'Euler est également utile.

— La première commande (initialisation) pourra être choisie à $u(t) = 0.5$ pour tout t.

— Le nombre de points de discrétisation doit être suffisant (ici au moins 100) pour limiter les erreurs d'approximation liées au pas h.

— Au point 5, on peut prendre $\beta = 0.2$ et $\ell_{max} = 10$

Travail demandé :

1. Ecrire formellement, pour le problème à traiter, l'algorithme "FBS" et l'implémenter dans Matlab.
2. Prévoir l'affichage de la commande u et de l'état x_1 et x_2 en fonction du temps toutes les 10 itérations de l'algorithme.
3. Prévoir l'affichage de la valeur du critère $J(u)$ en fonction des itérations.
4. Analyse des résultats et de la convergence ou non de l'algorithme.
5. Etudier l'influence de la pondération utilisée dans le critère sur le résultat.
6. Rédiger un compte rendu synthétique à rendre en fin de séance.