Programmation Dynamique

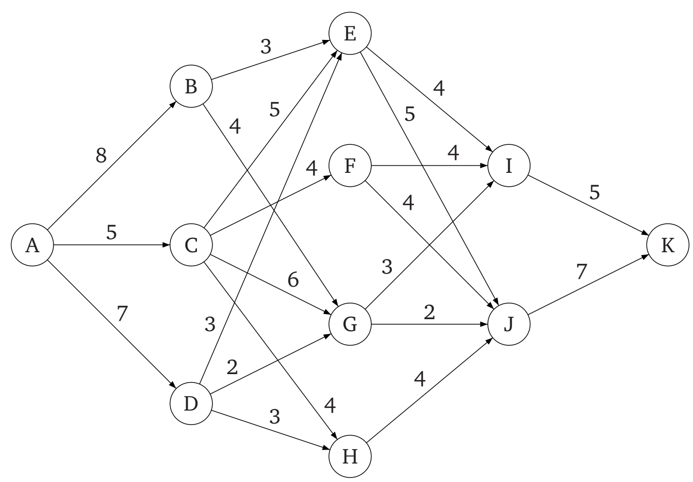

Figure 1 – Graphe 1

Exercice 1 Déterminer le plus court chemin joignant A à K de la figure 1.

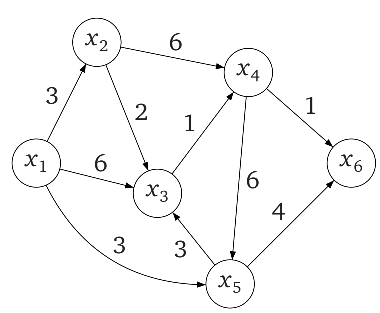

Figure 2 – Graphe 2

Exercice 2 Déterminer le plus court chemin joignant x_1 à x_6 de la figure 2.

Exercice 3 Un contrebandier habite dans un pays P_1 à proximité de deux autres pays P_2 et P_3. Il effectue un passage par nuit de P_i à P_j. Les rapports R_{ij} de chaque passage sont données dans le tableau (Figure 3).

1. Calculer le revenu maximum du contrebandier en 5 nuits et l'ordre des traversées qu'il doit effectuer.
2. Même question en 5 nuits mais en prenant en compte son désir d'être de retour chez lui le cinquième jour. Dans ce cas quel est le pays qu'il a intérêt à habiter ?

Exercice 4 Un étudiant a 4 heures pour réviser 4 examens portant sur les cours C_0, C_1, C_2 et C_3. Suivant le nombre d'heure de travail passé sur chaque cours les notes (sur 100) obtenues seront les suivantes :

		Arrivée		
	i \ j	1	2	3
Départ	1	0	10	7
	2	1	0	4
	3	8	2	0

FIGURE 3 – Tableau des revenus

h / N_i	N_0	N_1	N_2	N_3
0	20	40	40	80
1	45	45	52	91
2	65	57	62	95
3	75	61	71	97
4	83	69	72	98

Etablir son plan de travail optimum.

Exercice 5 Soit le système

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k$$

(équation d'état linéaire du premier ordre). Trouver la commande qui fait passer le système de x_1 à 0 en N coups ($x_{n+1} = 0$) en minimisant le critère

$$J_N(x_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} u_k^2.$$

On montrera par recurrence que la solution est du type $\hat{J}_n(x_n) = \beta_n x_n^2$ et $\hat{u}_n = \alpha_n x_n$

Exercice 6 On considère un convertisseur de puissance type "Buck" en temps discret défini par le système suivant :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^2$ l'état du convertisseur, $u_k \in \mathbb{R}$ la commande et $A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le point d'équilibre x^e ($x^e = Ax^e + Bu^e$) pour une entrée constante $u^e = 1$
2. En posant le changement de variable $z_k = x_k - x^e$ et $v_k = u_k - u^e$, montrer formellement que

$$z_{k+1} = Az_k + Bv_k$$

3. On souhaite depuis une position initiale z_0 quelconque, minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} z_{i+1}^T z_{i+1} + v_i^T v_i$$

avec N un entier fixé. On note par $J_p(z_p, v_p, \cdots, v_{N-1})$, la somme partielle :

$$J_p(z_p, v_p, \cdots, v_{N-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{N-1} z_{i+1}^T z_{i+1} + v_i^T v_i$$

obtenue en partant à l'instant p de z_p et en appliquant les commandes v_i, $i = p, \cdots, N-1$. On note le coût optimal partiel par :

$$J_p^*(z_p) = \min_{v_i,\ i=p,\cdots,N-1} J_p(z_p, v_p, \cdots, v_{N-1}).$$

En utilisant la programmation dynamique, écrire l'équation d'optimalité entre les coûts optimaux partiels $J_p^*(z_p)$ et $J_{p+1}^*(z_{p+1})$ en précisant les contraintes.

4. Initialiser l'algorithme pour $p = N - 1$.
5. Montrer par récurrence et formellement (c'est à dire sans remplacer A et B par leur valeur numérique) que la solution s'écrit sous la forme :

$$v_p^* = -K_p z_p \quad J_p = z_p^T P_p z_p$$

avec K_p une matrice ligne et P_p une matrice 2×2.

Exercice 7 Après un changement de l'équipe dirigeante, une entreprise décide de rationaliser sa production pour maximiser ses revenus.

En effet, leur chaîne de production fabrique n types d'objets en plastique qui nécessitent un volume v_k, $k = 1 \cdots, n$ de matière première (plastique) et sont vendus aux prix p_k en conformité avec une récente étude de marché. Ce prix s'avère ne pas avoir de relation simple avec le volume de matière v_k nécessaire à la fabrication. Le problème est donc de décider, à partir d'un volume limité V de matière première, quels objets produire et en quelle quantité pour maximiser le revenu.

Voici un tableau donnant pour chaque type d'objet (ici $n = 4$), le volume de matière nécessaire à sa fabrication et le prix de vente :

Type k	1	2	3	4
Volume v_k	2	3	5	7
Prix p_k	2	7	8	15

1. En utilisant le programmation dynamique, écrire l'algorithme permettant de trouver la solution optimale à partir d'un volume V de 8 unités de plastique. On prendra soin au préalable de bien formaliser le problème en définissant l'état, la commande, l'équation d'état et le critère à maximiser.
2. Résoudre le problème. On pourra remplir un tableau en indiquant la valeur du coût optimal $\hat{J}_k$ (de l'étape k à l'étape n) et la valeur de la commande optimale u_k, en fonction de l'étape k et de la valeur de l'état x_k :

état x / Etape k	1	2	3	4
0	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
1	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
2	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
3	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
4	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
5	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
6	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
7	-	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$
8	$\hat{J}_1 =?\quad \hat{u}_1 =?$	$\hat{J}_2 =?\quad \hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?\quad \hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?\quad \hat{u}_4 =?$

Exercice 8 (6pts) Trouver, par la programmation dynamique, la trajectoire optimale qui amène en $N = 3$ étapes le système discret :

$$\begin{aligned} x_n &= y_{n-1} \\ y_n &= -2y_{n-1} + u_{n-1} \end{aligned}$$

du point de départ ($x_0 = y_0 = 0$) en un point d'arrivée (x_3, y_3) qui vérifie :

$$x_3 + y_3 = 1$$

tout en minimisant le critère :

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2} u_n^2$$

1. Donner une représentation d'état de la forme : $X_{n+1} = AX_n + Bu_n$ en précisant le vecteur X_n et les matrices A et B.
2. On note $J_k(X_k) = min_{u_k,\cdots,u_2} \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{2} u_n^2$, pour $k = 0, 1, 2$. Ecrire l'équation d'optimalité liant $J_k(X_k)$ et $J_{k+1}(X_{k+1})$.

3. Initialiser l'algorithme ($k = 2$) en tenant compte de la contrainte finale sur l'état. En déduire, l'expression de la commande et du critère à cette étape.
4. Résoudre le problème aux étapes $k = 1$ puis $k = 0$. En déduire, le coût total et les commandes à appliquer.

Exercice 9 [Programmation dynamique]
On s'intéresse à la gestion d'un stock (en quantité entière) décrit par l'équation d'évolution :

$$x_{k+1} = \max(0, x_k + u_k - d_k)$$

L'indice k correspond à une période mensuelle. x_k représente l'état du stock, u_k l'approvisionnement et d_k la demande au mois k.

Connaissant les demandes à venir sur une période de durée N, on souhaite planifier les approvisionnements afin de limiter les ruptures de stock (et donc satisfaire la clientèle) et les frais d'achats. Le prix d'achat p_k et la demande d_k par période sont supposés connus à l'avance et les approvisionnement effectués en début de période sont limités par la capacité de stockage M, soit la contrainte : $x_k + u_k \leq M$. On souhaite donc minimiser un critère J qui représente la somme des coûts occasionnés par les approvisionnements et une pénalisation liée aux ruptures de stock. On fait le choix suivant :

$$J = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i + 20 f_i$$

où

$$f_i = \begin{cases} |x_i + u_i - d_i| \text{ si } x_i + u_i - d_i < 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \\ x_i + u_i &\leq M \end{aligned}$$

1. On notera $J_k(x_k)$ le coût optimal de l'étape k à l'étape $N+1$ obtenu en partant de l'état x_k, soit

   $$J_k(x_k) = \min_{u_i,\ i=k,\cdots,N} \sum_{i=k}^{N} p_i u_i + 20 f_i$$

   En utilisant la programmation dynamique, écrire l'équation d'optimalité sans oublier de préciser l'ensemble des contraintes.
2. Sans connaitre a priori la valeur x_k, donner un encadrement en fonction de M et d_k, des valeurs admissibles pour x_{k+1}.
3. Résoudre le problème avec les données suivantes : $x_1 = 0;\ N = 3;\ M = 3;\ p_1 = 8,\ p_2 = 10,\ p_3 = 9;\ d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2.$

Exercice 10 Soit N un entier et $x \geq 0$. On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\max \sum_{i=1}^{N} u_i^2$$

sous les contraintes $u_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} u_i = x$.

En posant $V_N(x)$, la solution optimale du problème paramètré par x et N, proposer une formulation du problème qui permet d'utiliser la programmation dynamique pour le résoudre.

1. On prendra soin de bien définir le système dynamique et les contraintes sur l'état et la commande.
2. Déterminer l'équation d'optimalité
3. Donner son initialisation.
4. Montrer par récurrence le résultat c'est à dire $V_N(x) = x^2/N$ et $u_i^* = x/N$ pour $i = 1, 2, ...N$.

Exercice 11 Un sous-traitant fabrique par lots une pièce détachée qu'il fournit à une usine d'automobiles. Les contrats de production pour les 4 prochains mois l'obligent à fournir respectivement 100, 40, 60 et 130 lots. Il peut très bien fabriquer les lots d'avance et les stocker : le coût de stockage est de 2 euros par lot et par mois. Le coût de mise en train d'une fabrication est de 300 euros, quel que soit le nombre de lots fabriqués et on suppose que le délai de fabrication est nul. Déterminer un plan de production optimal, sachant qu'il n'y a pas de stock initial et qu'il ne doit rester à la fin aucun excédent.

Précisions : les inventaires se font en fin de mois. Les fabrications se font au début du mois et les lots ainsi fabriqués sont immédiatement disponibles pour satisfaire la demande du mois.

Exercice 12 Vous cherchez à planifier un long voyage. Vous commencez au kilomètre 0. Sur votre route, il y a n hôtels, situés respectivement aux kilomètres $a_1 < a_2 < .... < a_n$, où chaque a_i est mesuré à partir du point de départ. Le seuls endroits où vous êtes autorisés à vous arrêter sont ces hôtels, mais vous pouvez choisir parmi ces hôtels ceux auxquels vous vous arrêtez. Le dernier hôtel est votre destination.

Vous souhaitez idéalement voyager 200 kilomètres par jour, mais cela peut ne pas être possible (en fonction de l'espacement des hôtels). Si vous voyagez x kilomètres au cours d'une journée, la pénalité pour ce jour-là est $(200-x)^2$. Vous souhaitez alors minimiser la pénalité totale, somme des pénalités quotidiennes. Donner un algorithme efficace qui détermine la séquence optimale des hôtels où s'arrêter.

Exercice 13 Un livreur doit organiser une tournée parmi un ensemble de points de livraison notés, $\{1, 2, \cdots, n\}$. Il part de son lieu de travail situé à la position 0 et termine sa tournée en 0. Les distances entre deux positions i et j sont données par d_{ij}. On cherche un algorithme efficace permettant de déterminer le parcours de distance minimale.

Note : On doit passer par une position donnée qu'une et une seule fois.

Pour tout sous ensemble de positions $S \subseteq \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ qui inclue les positions 0 et j, on notera $D(S, j)$ la plus petite distance permettant de joindre 0 à j en passant une et une seule fois par les autres positions de S.

— Quelle relation d'ordre existe-t-il entre entre $D(S, j)$ et la somme $D(S \setminus \{j\}, i) + d_{ij}$ pour tout indice $i \in S \setminus \{0, j\}$? Peut il y avoir égalité ?
  Notation : $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
— Lorsque le sous ensemble S se limite au couple $S = \{0, j\}$ que vaut $D(S, j)$?
— Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de déterminer $D(S, j)$ à partir de la donnée (S, j).
— Si $S = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, justifier que le parcours de distance minimale est obtenu au final par :

$$L = \min_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} (D(S, i) + d_{i0})$$

— Application : A partir du tableau des distances d_{ij} :

$i \setminus j$	0	1	2	3
0	0	2	3	4
1		0	2	7
2			0	5
3				0

résoudre le problème en appliquant l'algorithme et en remplissant le tableau :

S	D(S,1)	D(S,2)	D(S,3)
{0,1}	2	×	×
{0,2}	×	3	×
{0,3}	×	×	4
{0,1,2}	5	4	×
{0,1,3}	11	×	9
{0,2,3}	×	9	8
{0,1,2,3}	11	13	9

Et conclure en indiquant la valeur de L et la séquence ordonnée P des positions à visiter :

L = 13
P = 0, 1, 2 , 3, 0

Exercice 14 Une entreprise met en place une nouvelle politique de vente dans trois secteurs numérotés I, II et III. Elle peut embaucher au plus quatre représentants. Le directeur commercial prend la décision compte-tenu des bénéfices espérés et de la politique de développement définie par la direction générale. Les estimations des volumes des ventes dans chaque secteur, en fonction du nombre de représentants qui y sont affectés, sont précisées dans le tableau suivant :

représentants	0	1	2	3	4
Secteur I	15	20	24	29	33
Secteur II	14	21	25	30	33
Secteur III	20	32	34	39	45

1. Formaliser le problème par la programmation dynamique. On précisera bien la signification des différentes variables utilisées, le critère à maximiser, l'équation d'état et les différentes contraintes.
2. Enoncer l'algorithme de résolution
3. Donner la politique optimale d'affectation si le nombre total de représentants embauchés est de 4. On pourra faire un tableau résumant les calculs.

Exercice 15 (8pts) On dispose d'une quantité Q à répartir sur N places $(p_1, p_2, ..., p_N)$. Le tableau G (g_{ij}) donne les gains obtenus lorsqu'on place la quantité q_i dans la place p_j. Les places ont une capacité limitée c_i.

q_i	p_1	p_2	p_3
0	0	0	0
1	55	30	10
2	60	45	50
3	70	60	80
4	80		

1. Montrer que ce problème peut se résoudre en appliquant le principe de la programmation dynamique : on précisera pour cela
   — le nombre d'étape
   — l'état
   — les commandes
   — l'équation d'état
   — les contraintes sur l'état et la commande
   — le critère à optimiser
2. Donner l'algorithme avec son initialisation pour résoudre le problème de manière générale (N, Q, G et c_i quelconques). On précisera bien l'ensemble des contraintes sur la commande et l'état.
3. Application : Résoudre, en remplissant le tableau ci-dessous, le problème pour le cas particulier $Q = 5$ et le tableau G ci-dessus, sachant que $c_1 = 4$, $c_2 = 3$ et $c_3 = 3$.

x / k	1	2	3
0	$\times$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$
1	$\times$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$
2	$\times$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$
3	$\times$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$
4	$\times$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$
5	$J_1 =$ $u_1 =$	$J_2 =$ $u_2 =$	$J_3 =$ $u_3 =$

Exercice 16 Programmation dynamique

Soit le système régit par l'équation de récurrence :

$$x_{k+1} = x_k + u_k \tag{1}$$

Avec les conditions initiales et finales :

$$x_0 = 12; x_4 = 0 \tag{2}$$

On veut minimiser le critère J :

$$J = \sum_{k=0}^{k=3} u_k^2 \tag{3}$$

1. Ecrire l'équation d'optimalité entre l'étape k et $k+1$.
2. Trouver la solution optimale avec les contraintes sur les deux premières commandes :

$$|u_0| \leq 1; |u_1| \leq 2 \tag{4}$$

Exercice 17 On se propose de faire une campagne de publicité dans 4 régions. On possède un budget de 5 unités. On investit un certain nombre d'unités dans chaque région le rendement étant donné dans le tableau suivant :

	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,35
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53

Déterminer la stratégie optimale d'investissement.
Indications : Formalisation :
— Temps : k=1,2,3,4 (+5) Initialisation
— Etats : x_k nombre d'unités de Budget restant à investir à l'étape k
— Commandes : u_k nombre d'unités de Budget investi dans la région k
Ecrire l'algorithme complet
(Eq. d'état + Eq. d'optimalité + Initialisation) et déterminer la solution optimale.

Exercice 18 Gestion de stock. On considère le stockage de pièces de rechange d'un type donné. On désire réaliser la gestion optimale de ce stock pour une période de N mois. L'approvisionnement est effectué au début de chaque mois n et correspond à la quantité a_n achetée au prix unitaire p_n. Durant le mois la demande est supposée estimée de façon exacte, soit d_n connu. On suppose connus le stock initial et les différents p_n et d_n . On désire minimiser la dépense totale d'approvisionnement tout en assurant toujours la demande, avec un stock qui ne peut dépasser la quantité maximale S.

1. On établira l'équation d'état du système en choisissant pour état x_n le stock relatif au début du mois n avant l'approvisionnement a_n. Définir les contraintes sur a_n
2. Ecrire l'équation d'optimalité et l'appliquer à l'exemple numérique : $N = 4$, $p_1 = 10$, $p_2 = 8$, $p_3 = 10$, $p_4 = 9$ $S = 3$, $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1$
3. Quelle est la politique relative à $x_1 = 2$?

Exercice 19 Le problème posé consiste à optimiser une gestion de stocks en décidant des approvisionnements, compte tenu des achats prévisibles des clients(sorties de stock) et des coûts.

On travaille par période ($k = 1, 2..., N$), on appelle x_k la quantité de stock en debut de période k (avant approvisionnement), a_k la quantité de produits rentrant dans le stock en début de période et s_k la demande de marchandise pendant la période.

Le coût relatif à chaque période $c(x_k, a_k, s_k)$ comprend le prix des achats (prix unitaire p) et un coût $H(x_k, a_k, s_k)$ qui dépend du stock restant (coût d'immobilisation) et d'une éventuelle insatisfaction des clients qui ne peuvent voir leur demande satisfaite si le stock disponible est insuffisant.

$$c(x_k, a_k, s_k) = p\ a_k + H(x_k, a_k, s_k)$$

$$H(x_k, a_k, s_k) = \max(0, x_k + a_k - s_k) + 3\max(0, -x_k - a_k + s_k)$$

La capacité maximale du stock est S, le stock ne peut être négatif.

1. Cas déterministe
   On suppose que la suite de s_k est connue.
   — Ecrire l'équation d'optimalité relative à ce problème.
   — Résoudre le problème sur 2 périodes pour $p = 1$, $S = 2$, $x_1 = 0, 1, 2$ et $s_1 = s_2 = 1$
2. Cas stochastique
   La demande des clients n'est pas connue à l'avance (hypothèse plus réaliste), on a seulement une idée de sa probabilité $P(s_k)$
   — Ecrire l'équation d'optimalité dans ce cas.
   — Résoudre le problème sur 2 périodes avec les mêmes données que précédemment, mais en remplaçant la donnée de s_k par :
   $$P(s_k = 0) = 0.1,\ P(s_k = 1) = 0.7,\ P(s_k = 2) = 0.2$$

Exercice 20 Maintenance préventive.

Soit une machine qui marche ou tombe en panne , pendant un intervalle de temps élémentaire d'une semaine.
— Si elle fonctionne pendant une semaine le revenu est de 100.
— Si elle tombe en panne pendant la semaine le revenu est de 0.
— Si elle fonctionne au début d'une semaine on peut effectuer une action de maintenance préventive ou non.
  — Si « maintenance préventive » alors « proba de panne » = 0.4 et coût : 20 sinon « proba de panne » = 0.7 et coût : 0
— Si la machine est en panne en fin de semaine on peut la réparer ou la remplacer
  — Si « réparation » alors « proba de panne » = 0.4 et coût : 40
  — Si « remplacer » alors « proba de panne » = 0 et coût : 150

Etablir la stratégie (réparation , maintenance , remplacement) qui rend le gain maximal sur 4 semaines (on démarre avec une machine neuve).

Exercice 21 Une entreprise pétrolière dispose d'un stockage de produits finis dans une zone industrielle en rapide expansion. Les prévisions de construction et de développement d'industries consommatrices de produits pétroliers dans la région permettent de connaître pour les dix années à venir les quantités qui devront chaque année passer par le dépôt. On peut en déduire la capacité minimum que doit avoir chaque année le dépot pour assurer la distribution des produits. Pour simplifier les calculs nous diviserons la période d'étude de dix ans en cinq périodes de deux ans. Les capacités minimales du dépôt pour chaque période sont les suivantes :

Période	0	1	2	3	4	5
Capacité minimale	3	4	5	8	10	11

La capacité en service au début de la période 0 est de 3 unités. La capacité à l'année 10 devra être exactement égale à 11. Les augmentations de capacités sont obtenues par la construction de réservoirs supplémentaires. Le cout de construction (reflétant une économie d'échelle) est donné ci-dessous en fonction de la taille des réservoirs :

Capacité du réservoir	1	2	3	4	5
Cout de construction	20	36	50	63	75

On n'envisage pas la construction de réservoirs d'une capacité supérieure à 5 unités. Les frais d'exploitation et d'entretien du dépot sont proportionnels à sa capacité globale et égaux à 2 par unité de capacité. Nous nous proposons de déterminer la politique d'investissement optimale, c'est-à-dire permettant d'obtenir le minimum de la somme des couts de construction et des frais d'exploitation, ceci sur la période d'étude de 10 ans.

Exercice 22 Un fabricant de gros outillage produit trois types de machines, désignées par A, B et C. La capacité de production de l'entreprise est limitée à 500 machines par an. La répartition de la production entre les différents types de machines n'influe pas sur la capacité de production. On supposera que le stock initial est nul et que toute machine fabriquée est vendue immédiatement. Les contraintes d'absorption du marché limitent la production à un maximum de 300 machines du type A, 500 du type B et 200 du type C.

Le fabricant produit les machines de chaque type par séries de 100. Pour lancer une ou plusieurs séries de machines d'un type donné, il doit effectuer un investissement en outillage, en main d'oeuvre et en effort de distribution dont

Séries de 100 machines	0	1	2	3	4	5
Machines de type A	-500	500	1400	2150	-	-
Machines de type B	-300	650	1550	2250	2850	3500
Machines de type C	-100	950	1850	-	-	-

TABLE 1 – Coût de production

il connaît la valeur actuelle nette (prix de revient). S'il ne lance aucune série d'appareils d'un type donné, certains équipements de l'usine sont inutilisés, ce qui entraîne une valeur actuelle nette négative de l'investissement réalisé. Ces valeurs sont fournies, en milliers d'euros, par le tableau suivant :

Le fabricant désire maximiser la somme des valeurs actuelles nettes de ses investissements. On utilisera la programmation dynamique.

Exercice 23 On considère une scierie qui connaît le prix de vente p_i pour une planche de longueur i . Lorsqu'elle reçoit en entrée une planche de longueur n, elle peut soit en tirer directement le profit p_n, soit chercher à la découper en k morceaux pour en tirer plusieurs (sous) planches de longueur $i_1, i_2, \cdots, i_k$ (avec $i_1+i_2+\cdots+i_k = n$) et obtenir comme profit la somme $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$ des prix de vente des sous-planches. Le problème de la scierie est alors de déterminer la solution qui lui garantie un profit maximal.

Voici le tableau du prix de vente en fonction de la longeur :

longueur i (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prix p_i	0	1	5	8	9	10	16	17	20	24	30

A titre d'exemple et sachant que les longueurs admissibles des planches sont toutes des multiples du mètre, la découpe d'une planche de 4 mètres donne comme possibilité :

— aucune découpe : profit 9
— découpe 1 + 3 : profit 1 + 8 = 9
— découpe 2 + 2 : profit 5 + 5 = 10
— découpe 3 + 1 : profit 8 + 1 = 9
— découpe 1+1+2 : profit 1 + 1 + 5 = 7
— découpe 1+2+1 : profit 1 + 5 + 1 = 7
— découpe 2+1+1 : profit 5 + 1 + 1 = 7
— découpe 1+1+1+1 : profit 1 + 1 + 1 + 1 = 4.

La solution optimale est donc une découpe 2+2, c'est à dire 2 morceaux de longueur 2.

On souhaite déterminer la solution pour une planche de longueur n via la programmation dynamique afin de minimiser le nombre de calculs nécessaires.

— Formaliser le problème à l'aide de la programmation dynamique (état, commande, équation d'état, critère, contraintes)
— Ecrire l'algorithme permettant de déterminer la solution pour une planche de longueur n en précisant bien l'ensemble des contraintes.
— Si on note $r^*(i)$ le profit optimal réalisé pour une planche de longueur i et $u^*(i)$ la décision optimale, remplir le tableau "solution" en fonction de i :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r^*(i)$											
$u^*(i)$											

Exercice 24 Une entreprise produit (et vend) une certaine marchandise M. Cette production nécessite une pièce particulière P que l'entreprise achète chez un fournisseur. L'entreprise possède un entrepôt où elle peut stocker jusqu'à 5 pièces P. Si une pièce P n'est pas utilisée au cours du mois, le coût de stockage sur cette période est de 1. Elle achète chaque début de mois une certaine quantité de pièces P pour lui permettre de satisfaire les demandes des mois à venir. Les prix d'achat des pièces P fluctuent de mois en mois mais sont supposés connus à l'avance. De plus, l'entreprise dispose de la demande de produit M pour chacune des périodes que l'on considère. Ces données (prix d'achat de P et demandes de M à satisfaire) sont présentés dans le tableau :

	mois 1	mois 2	mois 3	mois 4	mois 5
Prix d'achat unitaire p_i	3	1	2	4	3
Demande d_i	2	2	2	4	1

Sachant qu'une pièce P est nécessaire à la production d'un objet M, le but du problème est de déterminer une stratégie d'achat optimale pour l'entreprise : plus précisément, il s'agit de décider la quantité de P à acheter au début de chaque mois de manière à satisfaire la demande et en minimisant le coût total (achat et stockage). On supposera de plus que le stock initial est nul et que l'on veut un stock final nul.

— Formaliser le problème à l'aide de la programmation dynamique (état, commande, équation d'état, critère, contraintes)
— Ecrire l'algorithme permettant de déterminer la solution en précisant bien les différentes contraintes.
— Application numérique : Résoudre le problème