# Commande des Systèmes Dynamiques
# 2A ISA année 2014/15

P. Riedinger

*Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits*

Les exercices sont indépendants.

**Exercice 1** Une entreprise pétrolière dispose d'un stockage de produits finis dans une zone industrielle en rapide expansion. Les prévisions de construction et de développement d'industries consommatrices de produits pétroliers dans la région permettent de connaître pour les dix années à venir les quantités qui devront chaque année passer par le dépôt. On peut en déduire la capacité minimum que doit avoir chaque année le dépot pour assurer la distribution des produits. Pour simplifier les calculs nous diviserons la période d'étude de dix ans en cinq périodes de deux ans. Les capacités minimales du dépôt pour chaque période sont les suivantes :

| Période | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Capacité minimale | 3 | 4 | 5 | 8 | 10 | 11 |

La capacité en service au début de la période 0 est de 3 unités. La capacité à l'année 10 devra être exactement égale à 11. Les augmentations de capacités sont obtenues par la construction de réservoirs supplémentaires. Le cout de construction (reflétant une économie d'échelle) est donné ci-dessous en fonction de la taille des réservoirs :

| Capacité du réservoir | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cout de construction | 20 | 36 | 50 | 63 | 75 |

On n'envisage pas la construction de réservoirs d'une capacité supérieure à 5 unités. Les frais d'exploitation et d'entretien du dépot sont proportionnels à sa capacité globale et égaux à 2 par unité de capacité. Nous nous proposons de déterminer la politique d'investissement optimale, c'est-à-dire permettant d'obtenir le minimum de la somme des couts de construction et des frais d'exploitation, ceci sur la période d'étude de 10 ans.

**Exercice 2** On considère un système dynamique dont l'équation d'évolution est donnée par :

$$\dot{x} = x + u$$

A partir d'une position initiale $x_0$, on souhaite minimiser la position finale $x(T)$ à l'instant $T$ tout en minimisant l'énergie dépensée. Ce compromis est représenté par le critère :

$$J = x(T) + \int_0^T \frac{1}{2}u^2 dt.$$

où le temps final $T$ est fixé.

On résoudra ce problème en utilisant le théorème de Pontriaguine.

1. Déterminer l'Hamiltonien et l'équation adjointe du système
2. Caractériser les commandes qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.
3. Que sait on de la variable adjointe aux extrémités ?
4. En déduire, l'expression de la commande pour $t \geq 0$.
5. En déduire l'expression de $x(t)$ pour $t \geq 0$ (Rappel : la solution du système $\dot{x} = Ax + Bu$ est déterminée par $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$)

On modifie le critère en considérant à présent comme critère terminal le carré de la position finale, soit :

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{2}u^2 dt.$$

1. Qu'est ce qui change dans les conditions nécessaires ?
2. La commande peut elle s'exprimer sous la forme d'un retour d'état de la forme $u(t) = -h(t)x(t)$ ? Justifier votre réponse.
3. Comment s'appelle l'équation suivie par $h$ ? Donner son expression.
4. En déduire, la valeur du feedback lorsque $T \to +\infty$.