Optimisation Dynamique
2A ISN année 2016/17

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits

Les exercices sont indépendants. Barème approximatif.

Exercice 1 (8 pts)

Après un changement de l'équipe dirigeante, une entreprise décide de rationaliser sa production pour maximiser ses revenus.

En effet, leur chaîne de production fabrique n types d'objets en plastique qui nécessitent un volume v_k, $k = 1 \cdots, n$ de matière première (plastique) et sont vendus aux prix p_k en conformité avec une récente étude de marché. Ce prix s'avère ne pas avoir de relation simple avec la quantité de matière v_k nécessaire à la fabrication. Le problème est donc de décider, à partir d'une quantité limitée de matière première, quels objets produirent et en quelle quantité pour maximiser le revenu.

Voici un tableau donnant pour chaque type d'objet (ici $n = 4$, le volume de matière nécessaire à sa fabrication et le prix de vente :

Type	1	2	3	4
Volume	2	3	5	6
Prix	2	7	8	14

1. En utilisant le programmation dynamique, écrire l'algorithme permettant de trouver la solution optimale à partir d'une quantité V de 8 unités de volume de plastique. On prendra soin au préalable de bien formaliser le problème en définissant l'état, la commande, l'équation d'état et le critère à maximiser.
2. Résoudre le problème. On pourra remplir le tableau suivant en indiquant la valeur du coût optimal $\hat{J}_k$ et la valeur de la commande optimale u_k en fonction de l'étape k et de la valeur de l'état x_k :

état x / Etape k	1	2	3	4
0	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
1	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
2	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
3	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
4	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
5	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
6	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
7	-	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$
8	$\hat{J}_1 =?$ $\hat{u}_1 =?$	$\hat{J}_2 =?$ $\hat{u}_2 =?$	$\hat{J}_3 =?$ $\hat{u}_3 =?$	$\hat{J}_4 =?$ $\hat{u}_4 =?$

Solution 1 *Il s'agit d'un problème classique d'allocations multiples. Comme il faut décider des quantités à produire pour chaque objet (5 types), on procède en 5 étapes + 1 correspondant à la fin.*

L'espace des temps est donc $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

La command u_k *est le nombre d'objet de type* k *à produire*

L'état est le volume x_k *disponible à l'étape* k

L'équation d'état est alors :

$$x_{k+1} = x_k - u_k v_k$$

Le revenu élémentaire à l'étape k *est :* $u_k p_k$. *On cherche donc à maximiser la somme*

$$S = \sum_{k=1}^{5} u_k p_k$$

Les contraintes sont les suivantes : L'état ne peut être négatif $x_k \geq 0$. *La commande* u_k *est en nombre entier et est contrainte par*

$$u_k \leq \frac{x_k}{v_k}$$

En notant $\hat{J}_k(x_k)$ *le revenu optimal de l'étape* k *à l'étape 6 (la fin) en partant de l'état* x_k, *la principe d'optimalité permet d'écrire :*

$$\hat{J}_k(x_k) = max_{u_k}(u_k p_k + \hat{J}_{k+1}(x_{k+1}))$$

avec $x_{k+1} = x_k - u_k v_k$ *et* $u_k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq \frac{x_k}{v_k}$ *L'initalisation à lieu pour* $k = 5$, *avec* $\hat{J}_5(x_5) = max_{u_5}(u_5 p_5 + 0)$ *la solution optimale est trivialement déterminée en choisissant pour* u_5 *la plus grande valeur possible en fonction de* x_5, *soit :*

$$u_5 = \mathbb{E}(\frac{x_5}{v_5})$$

où $\mathbb{E}(x)$ *désigne la partie entière de* x.

En appliquant cette algorithme, on peut remplir le tableau suivant en commençant par la dernière colonne : Les lignes donne la politique optimale en fonction de la valeur de l'état et les colonnes en fonction de l'étape. Pour la première colonne, seul le calcul est fait pour $x_1 = 8$ *(volume initial disponible)*

état x/ Etape k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	-	$\hat{J}_2 = 0; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 0; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
1	-	$\hat{J}_2 = 0; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 0; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
2	-	$\hat{J}_2 = 0; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 0; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
3	-	$\hat{J}_2 = 7; \hat{u}_2 = 1$	$\hat{J}_3 = 0; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
4	-	$\hat{J}_2 = 7; \hat{u}_2 = 1$	$\hat{J}_3 = 0; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
5	-	$\hat{J}_2 = 8; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 8; \hat{u}_3 = 1$	$\hat{J}_4 = 0; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
6	-	$\hat{J}_2 = 14; \hat{u}_2 = 0$ *ou* 2	$\hat{J}_3 = 14; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 14; \hat{u}_4 = 1$	$\hat{J}_5 = 0; \hat{u}_5 = 0$
7	-	$\hat{J}_2 = 15; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 15; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 15; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 15; \hat{u}_5 = 1$
8	$\hat{J}_1 = 16; \hat{u}_1 = 1$	$\hat{J}_2 = 15; \hat{u}_2 = 0$	$\hat{J}_3 = 15; \hat{u}_3 = 0$	$\hat{J}_4 = 15; \hat{u}_4 = 0$	$\hat{J}_5 = 15; \hat{u}_5 = 1$

Conclusion : Il y a deux politiques optimales qui rapportent 16 : soit la sequence de commande $(1, 0, 0, 1, 0)$ *soit la sequence* $(1, 2, 0, 0, 0)$.

Exercice 2 (6pts) Résoudre l'équation de Riccati associée au problème suivant :

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^T Q x + u^T R u \; dt$$
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$x_0 \text{ donné.}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = 1$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire, la loi de feedback optimale $u^*(x)$.

Solution 2 *Il s'agit d'un problème LQ en temps infini classique pour lequel la solution est donnée sous la forme d'un retour d'état statique(cours) :* $u = -Kx$ *avec* $K = -R^{-1}B^T P$ *où* $P = P^T > 0$ *est la solution positive de l'équation de Riccati :*

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

En posant $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}$*, en développant l'équation de Riccati, on obtient :*

$$1 - p_3^2 = 0$$
$$p_1 + p_3 - p_2 p_3 = 0$$
$$-p_2^2 + 2p_2 + 2p_3 = 0$$

d'où

$$p_3 = +/-1$$
$$p_1 = p_3(p_2 - 1)$$
$$p_2^2 - 2p_2 - 2p_3 = 0$$

Rappelons que l'on cherche une matrice $P = P^T > 0$*, autrement dit* P *doit avoir des valeurs propres réelles* > 0*.*

Si $p_3 = -1$ *alors* $p_2^2 - 2p_2 + 2 = 0$ *ce qui entraine* $p_2 = 1 +/- i$ *et n'est pas admissible car* p_2 *doit être un nombre réel.*

Donc $p_3 = 1$ *et* $p_2^2 - 2p_2 - 2 = 0$ *d'où on tire :* $p_2 = 1 +/- \sqrt{3}$

Si $p_2 = 1 - \sqrt{3}$ *alors* $p_1 = -\sqrt{3}$ *ce qui est impossible car* P *doit être définie positive or le calcul de la trace donne trace*$(P) = p_1 + p_2 = 1 - 2\sqrt{3} < 0$*.*

Donc l'unique solution $P > 0$ *est obtenue pour* $p_3 = 1$*,* $p_2 = 1 + \sqrt{3}$ $p_1 = \sqrt{3}$*. Soit encore* $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *d'où on tire le feedback :*

$$u(x) = -R^{-1}B^T P x = -[1 \;\; 1+\sqrt{3}]x$$

Exercice 3 (6pts) Trouver, par la programmation dynamique, la trajectoire optimale qui amène en $N = 3$ étapes le système discret :

$$\begin{cases} x_n = y_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} + u_{n-1} \end{cases}$$

du point de départ $(x_0 = y_0 = 0)$ en un point d'arrivée (x_3, y_3) qui vérifie :

$$x_3 + y_3 = 1$$

tout en minimisant le critère :

$$C = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2} u_n^2$$

1. Donner une représentation d'état de la forma $X_{n+1} = AX_n + Bu_n$ en précisant le vecteur X_n et les matrices A et B.
2. On note $J_k(X_k) = min_{u_k,\cdots,u_2} \frac{1}{2}\sum_{n=k}^{2} u_n^2$, pour $k = 0, \cdots, 2$. Ecrire l'équation d'optimalité liant $J_k(X_k)$ et $J_{k+1}(X_{k+1})$ en précisant la contrainte dynamique.
3. Initialiser l'algorithme ($k = 2$) en tenant compte de la contrainte finale sur l'état. En déduire, l'expression de la commande et du critère à cette étape.
4. Résoudre le problème aux étapes $k = 1$ puis $k = 0$. En déduire, le coût total et les commandes à appliquer.

Solution 3 *Le système sous forme équation d'état s'écrit :*

$$X_n = AX_{n-1} + Bu_{n-1}$$

avec $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posons $J_k(x_k) = \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{3} u_i^2$ *la valeur du critère associé aux commandes* u_i *pour passer de l'étape* k *à l'étape 3 (la fin). Les hypothèses de la programmation dynamique étant trivialement vérifiée :*

On peut écrire l'équation d'optimalité reliant la valeur optimale du critère entre les étapes k *et* $k+1$ *:*

$$\hat{J}_k(X_k) = min_{u_k}(\frac{1}{2}u_k^2 + \hat{J}_{k+1}(X_{k+1}))$$

avec $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$

L'initialisation est obtenue pour $k = 2$ *et conduit au calcul suivant (puisque* $\hat{J}_3(X_3)) = 0$*) :*

$$\hat{J}_2(X_2) = min_{u_2}(\frac{1}{2}u_2^2 + 0)$$

avec $X_3 = AX_2 + Bu_2$ *et la contrainte terminale* $x_3 + y_3 = 1$

Dès 2 contraintes (dynamique et terminale), on en déduit que : $x_3 + y_3 = -y_2 + u_2 = 1$ *soit* $u_2 = 1 + y_2$ *La commande est unique et donc (nécessairement) optimale. Soit :*

$$\hat{J}_2(X_2) = min_{u_2}(\frac{1}{2}u_2^2) = \frac{1}{2}(1 + y_2)^2$$

A l'étape 1,

$$\hat{J}_1(X_1) = min_{u_1}(\frac{1}{2}u_1^2 + \hat{J}_2(X_2))$$

avec $X_2 = AX_1 + Bu_1$

Soit encore :

$$\hat{J}_1(X_1) = min_{u_1}(\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}(1 + y_2)^2)$$

avec $X_2 = AX_1 + Bu_1$

Puis en utilisant l'équation d'état :

$$\hat{J}_1(X_1) = min_{u_1}(\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}(1 - 2y_1 + u_1)^2)$$

La condition nécessaire de minimum est alors :

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}(1-2y_1+u_1)^2)}{\partial u_1} = 0$$

Soit :

$$u_1 + (1-2y_1+u_1) = 0$$

et on trouve la commande : $u_1^* = y_1 - \frac{1}{2}$
d'où l'on déduit la valeur du critère optimal :

$$\begin{aligned} \hat{J}_1(X_1) &= \frac{1}{2}(y_1-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(1-2y_1+y_1-\frac{1}{2})^2 && (1)\\ &= \frac{1}{2}(y_1-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(-y_1+\frac{1}{2})^2 && (2)\\ &= (y_1-\frac{1}{2})^2 && (3) \end{aligned}$$

A l'étape 0, on part du point $X_0 = (0,0)$ *et*

$$\hat{J}_0(X_0) = min_{u_0}(\frac{1}{2}u_0^2 + \hat{J}_1(X_1))$$

avec $X_0 = AX_0 + Bu_0$
Soit encore :

$$\hat{J}_0(X_0) = min_{u_0}(\frac{1}{2}u_0^2 + (y_1-\frac{1}{2})^2)$$

avec $X_0 = AX_0 + Bu_0$
Puis en utilisant l'équation d'état :

$$\hat{J}_0(X_0) = min_{u_0}(\frac{1}{2}u_0^2 + (-2y_0+u_0-\frac{1}{2})^2)$$

La condition nécessaire de minimum est alors :

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}u_0^2 + (-2y_0+u_0-\frac{1}{2})^2)}{\partial u_0} = 0$$

Soit :

$$u_0 + 2(-2y_0+u_0-\frac{1}{2}) = 0$$

et on trouve : $u_0^* = \frac{1}{3}(4y_0+\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$. *Soit un coût total de :*

$$\hat{J}_0(X_0) = (\frac{1}{2}\frac{1}{6}^2 + (\frac{1}{6}-\frac{1}{2})^2) = \frac{1}{8}$$