Optimisation Statique et Dynamique
Master ISC année 2013/14, session 2

P. Riedinger

Dans l'évaluation de votre travail, on attachera autant d'importance aux explications qu'aux résultats proprement dits.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Soit A une matrice $m \times n$ avec $m < n$. On cherche à déterminer parmi les solutions de l'equation $Ax = b$ celle de norme minimum. Autrement dit on cherche à résoudre le problème :

$$\min_x \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad (= \frac{1}{2}x^T x)$$

sous la contrainte $Ax = b$.

1. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
2. En supposant que la matrice AA^T est inversible, montrer que la solution s'écrit : $x = A^+ b$ avec $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.

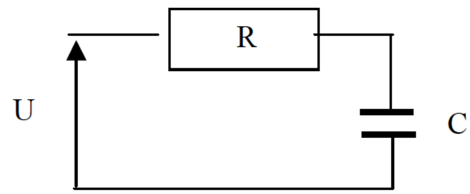
Exercice 2 [Programmation dynamique] On dispose d'une quantité Q à répartir sur N places $(p_1, p_2, ..., p_N)$.

Le tableau G donne les gains $g(i, j)$ obtenus lorsqu'on place la quantité q_i dans la place p_j. Les places ont une capacité limitée c_i.

$$G = \left(\begin{array}{c|c|c|c} q_i & p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 55 & 30 & 10 \\ 2 & 60 & 45 & 50 \\ 3 & 70 & 60 & 80 \\ 4 & 80 & & \end{array} \right)$$

1. Montrer que ce problème peut se résoudre en appliquant le principe de la programmation dynamique : on précisera
   - les commandes
   - l'état
   - l'ensemble de "temps"
   - le critère à optimiser
2. Ecrire l'équation d'optimalité qui permettra de résoudre le problème
3. Donner l'algorithme pour résoudre le problème de manière générale (N, Q, G et c_i quelconques)
4. Résoudre le problème pour le cas particulier $Q = 5$ et le tableau G ci dessus.

Exercice 3 [Pontriaguine] On charge une capacité C grâce à une source de tension réglable u.



On rappelle que les equations de base : $q(t)$ charge de la capacité à l'instant t ; $i(t)$ intensité dans le circuit

$$u = ri + \frac{q}{c} \tag{1}$$

$$i = \dot{q} \tag{2}$$

1. Si à un instant t le condensateur c est à la charge q_{ref}, quelle est la commande u_{ref} qui permet de maintenir la charge à la valeur de référence constante q_{ref} ? On note u_{ref} cette commande.
2. On pose le changement de variable $x = q - q_{ref}$ et $v = u - u_{ref}$. Montrer que x vérifie une équation de la forme $\dot{x} = Ax + Bv$ où l'on précisera A et B.
3. On part qu'une charge initiale nulle $q(0) = q_0$. On veut charger le condensateur à la valeur q_{ref} en tenant compte de l'énergie dépensée par effet Joule dans la résistance, le critère à minimiser est alors :

$$J = \int_0^T \mu(q - q_{ref})^2 + ri^2(t)dt$$

avec $\mu > 0$.
Exprimer le critère en fonction de x et v et montrer que l'on a alors à résoudre un problème LQ de forme générale, c'est à dire de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T v^T Rv + x^T Qx + 2x^T Nvdt$$

4. En utilisant le théorème de Pontriaguine, et en supposant que le vecteur adjoint noté p s'écrit :

$$p(t) = S(t)x(t)$$

montrer que la commande optimale est de la forme "retour d'état" :

$$\hat{v} = -K(t)x(t)$$

5. En dérivant $p(t) = S(t)x(t)$, montrer que $S(t)$ vérifie une équation différentielle de Riccati

$$-\dot{S} = SA + A^T S - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q$$

et préciser la condition finale $S(T)$.
6. Par passage à la limite lorsque $T \to +\infty$, on admettra que $\dot{S} = 0$. Résoudre alors le problème posé sur horizon infini et en déduire l'expression de la commande $u = u_{ref} + v$ en fonction de q et q_{ref}. Que produit la commande optimale si $\mu = 0$?