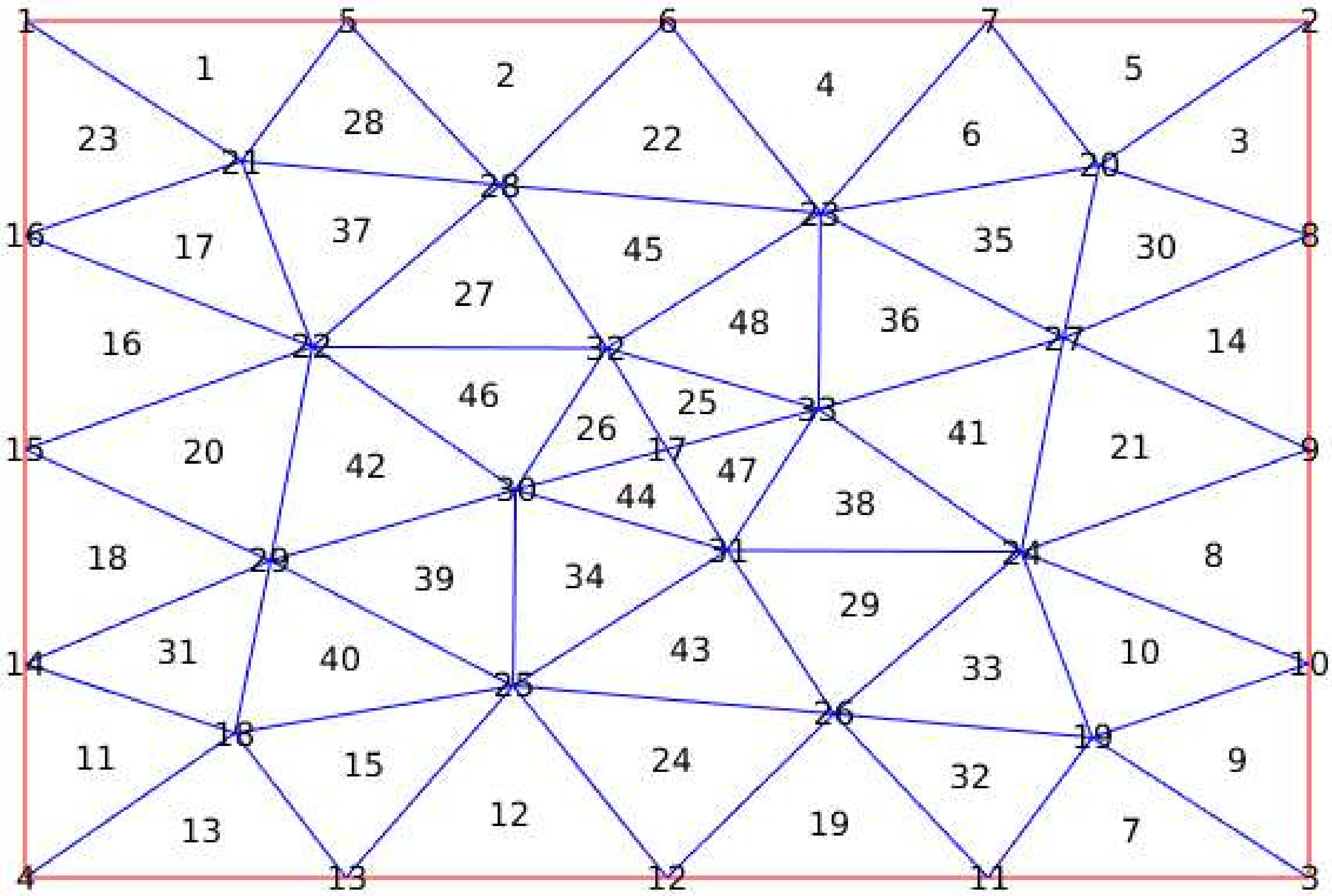
Eléments Finis

Maillage 2D constitué de triangles



Triangle de référence

Triangle du maillage

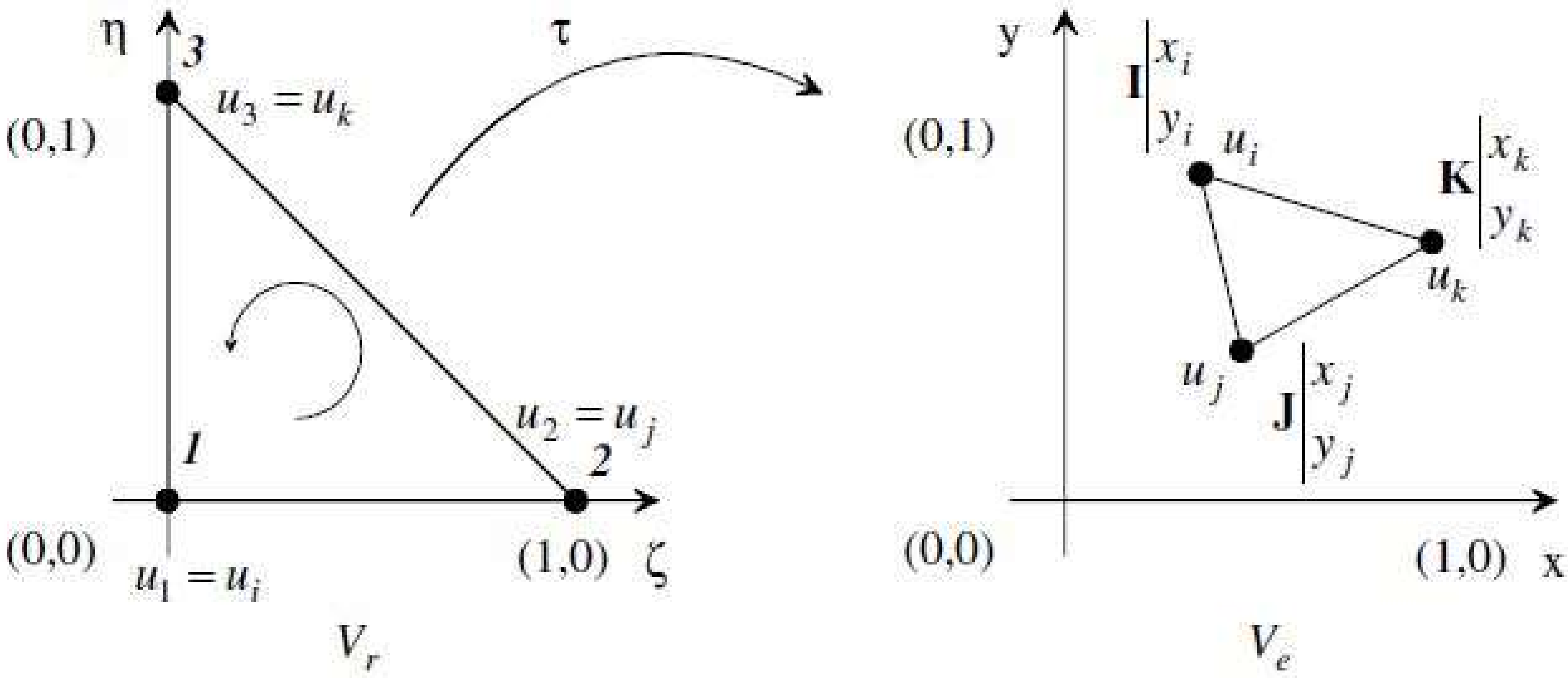


Figure 1 : *élément de référence triangulaire à 3 nœuds de type P_1*

2°) Détermination des fonctions d'interpolation N :

$$N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2(\xi,\eta) = \xi$$

$$N_3(\xi,\eta) = \eta$$

propriété fondamentale :

$$N_i(\xi_j,\eta_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Repère de référence

$$N_1(x,y) = 1 - \xi - \eta = \frac{(x_k - x_j)(y - y_j) - (x - x_j)(y_k - y_j)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)}$$

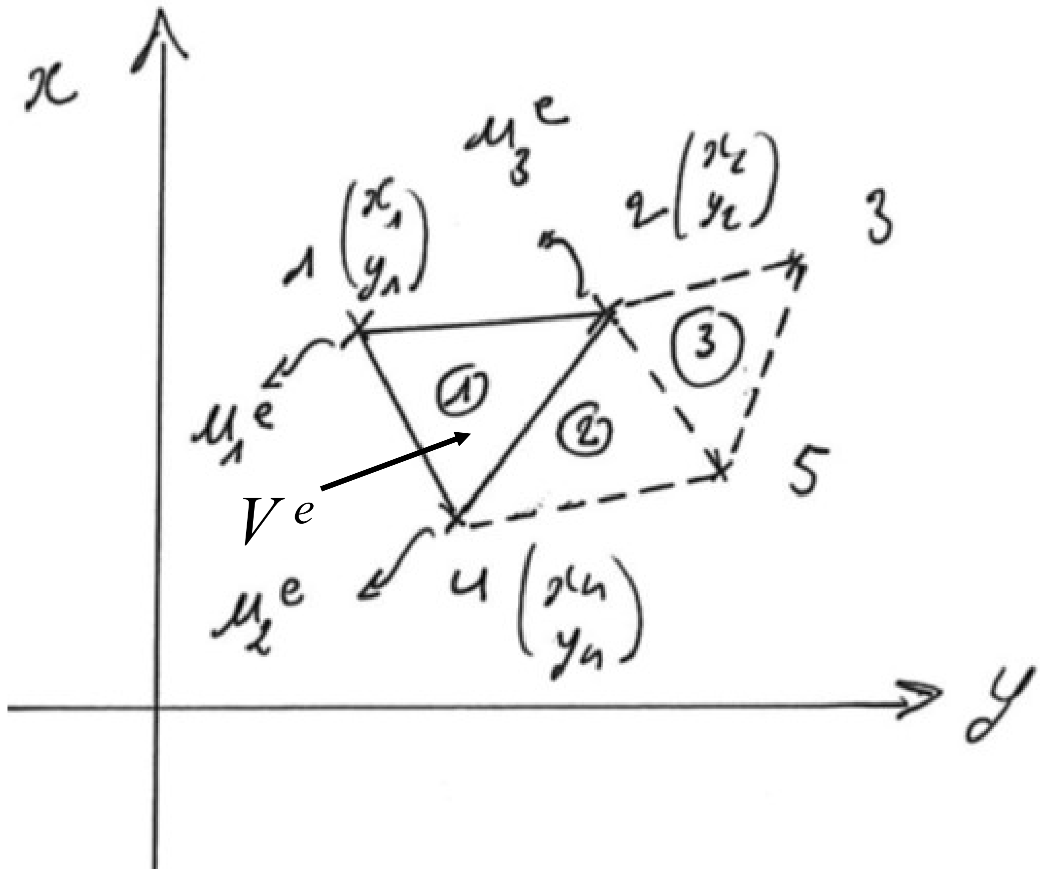
$$N_2(x,y) = \xi = \frac{(x - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y - y_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)}$$

$$N_3(x,y) = \eta = \frac{(x_j - x_i)(y - y_i) - (x - x_i)(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)}$$

Repère initial

3. On cherche une solution approchée u^e de u sur

chaque V^e telle que : $u^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e(x, y).u_i^e = \langle N^e \rangle \{u^e\}$



4) Forme Variationnelle Faible sur un sous-domaine V^e : $\iint_V - \phi \, dV$ (3)

On veut résoudre : $\begin{cases} \mathrm{div}(p \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, u) = -a & \text{dans } V \\ u = 0 & \text{sur } S \end{cases}$

Comme on cherche une solution approchée u^e qui n'est définie que sur chaque sous-domaine, cela revient à intégrer sur V^e (On a ensuite $V = \sum V^e$).

Avant d'intégrer, on multiplie l'équation par une fonction test Φ

$$\underbrace{\iint_{V^e} \mathrm{div}(p \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, u) \, . \, \phi \, dV^e}_{(I)} = -\underbrace{\iint_{V^e} a \, . \, \phi \, dV^e}_{(II)}$$

On intègre ensuite par parties le terme (I) (i.e : Théorème Flux_divergence)

$$= \int_{S^e} \cancel{\mu \, \overrightarrow{grad}\, u \cdot \vec{n}} \cdot \phi \, dS^e - \iint_{V^e} \mu \, \overrightarrow{grad}\, u \cdot \overrightarrow{grad}\, \phi \, dV^e$$

Alors :

$$\underbrace{\iint_{V^e} \mu \cdot \overrightarrow{grad}\, u \cdot \overrightarrow{grad}\, \phi \, dV^e}_{\text{Terme } (1)} = \underbrace{\iint_{V^e} a \cdot \phi \, dV^e}_{\text{Terme } (2)}$$

Terme ① : On remplace u par $u^e = \langle N^e(x,y) \rangle \{u^e\}$

On prend pour ϕ les fonctions N

$$\underbrace{K^e = \mu^e \left[\iint_{V^e} \vec{\text{grad}}^{\,t}(N) \cdot \vec{\text{grad}}(N) \, dV^e \right]}_{\text{Matrice } 3 \times 3} \times \{u^e\}$$

$$K^e = \frac{\mu^e}{4A} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 & -(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) & +(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2) \\ \text{Sym} & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 & -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) - (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) \\ \text{Sym.} & \text{Sym.} & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{bmatrix}$$

* Terme ② :

$$F^e = \iint_{V^e} a \cdot \cancel{\phi}\, dV^e = a \iint_{V^e} \{N\}\, dV^e = a \cdot \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sur un élément V^e, on a donc la relation suivante :

$$[K^e]\ \{u^e\} = \{F^e\}$$

matrice 3 x 3

valeurs de u aux 3 sommets du triangle V^e (Inconnues = Valeurs nodales)

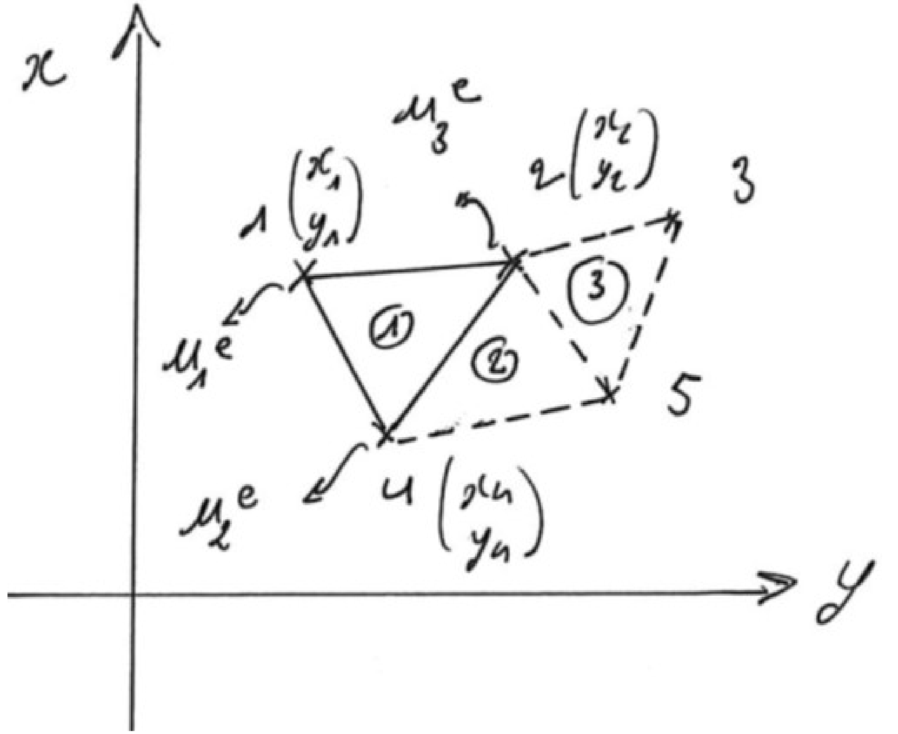
Vecteur 3 x 1

Assemblage ?

Supposons que l'on considère le premier élément (triangle). Il est constitué des 3 sommets (noeuds) 1, 4 et 2 donc

$$[K^1]\{U^1\} = \{F^1\}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ \text{sym} & & K_{33}^1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} U_1^1 = U_1 \\ U_2^1 = U_4 \\ U_3^1 = U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \end{array}$$



On retrouve ces différents termes dans la matrice globale K et vecteur global F

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & - & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ - \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{13}^1 & & K_{12}^1 \\ K_{31}^1 & K_{33}^1 & & K_{32}^1 \\ & & & \\ K_{21}^1 & K_{23}^1 & & K_{22}^1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ - \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_3^1 \\ \\ F_2^1 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ - \\ 4 \end{array}$$

Num(1,1) = 1

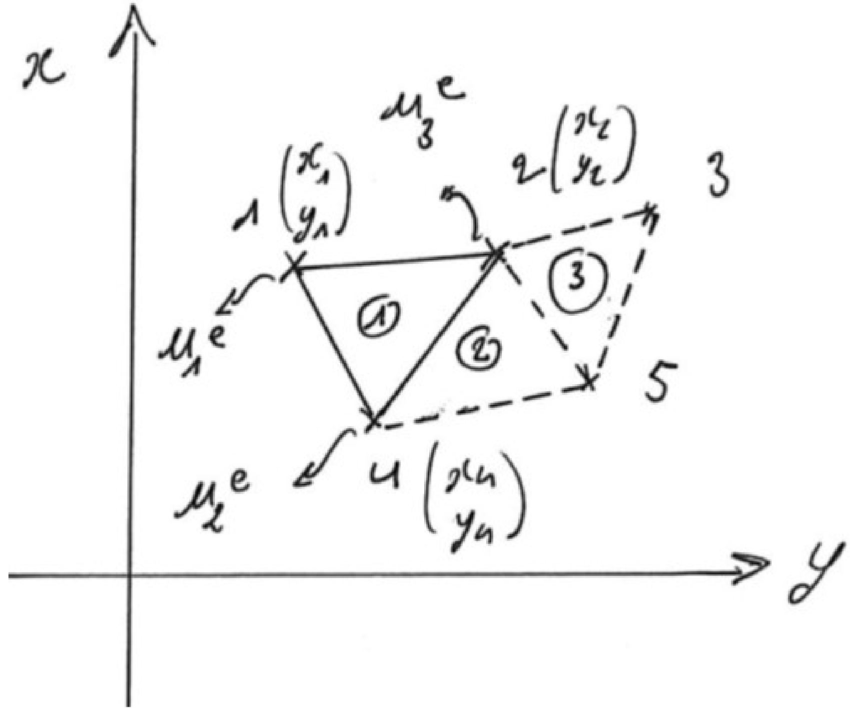
Num(2,1) = 4

Num(3,1) = 2

Avec le triangle 2

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 5 & 4 & 2 \\
\hline
5 & K^2_{11} & K^2_{12} & K^2_{13} \\
4 & & K^2_{22} & K^2_{23} \\
2 & \text{Sym} & & K^2_{33}
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix} U^2_1 = U_5 \\ U^2_2 = U_4 \\ U^2_3 = U_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F^2_1 \leftarrow 5 \\ F^2_2 \leftarrow 4 \\ F^2_3 \leftarrow 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & - & 2 & - & 4 & 5 \\
\hline
- & & & & & \\
2 & - & K^2_{33} & - & K^2_{32} & K^2_{31} \\
- & & & & & \\
4 & - & K^2_{23} & - & K^2_{22} & K^2_{21} \\
5 & - & K^2_{13} & - & K^2_{12} & K^2_{11}
\end{array}
\quad
\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} - \\ F^2_3 \\ - \\ F^2_2 \\ F^2_1 \end{Bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$



Num(1,2) = 5

Num(2,2) = 4

Num(3,2) = 2

triangle 1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & - & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ - \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
K^1_{11} & K^1_{13} & & K^1_{12} \\
K^1_{31} & K^1_{33} & & K^1_{32} \\
 & & & \\
K^1_{21} & K^1_{23} & & K^1_{22}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

triangle 2

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} - & 2 & - & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} - \\ 2 \\ - \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
 & & & & \\
- & K^2_{33} & - & K^2_{32} & K^2_{31} \\
 & & & & \\
- & K^2_{23} & - & K^2_{22} & K^2_{21} \\
- & K^2_{13} & - & K^2_{12} & K^2_{11}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Num(1,1) = 1

Num(2,1) = 4

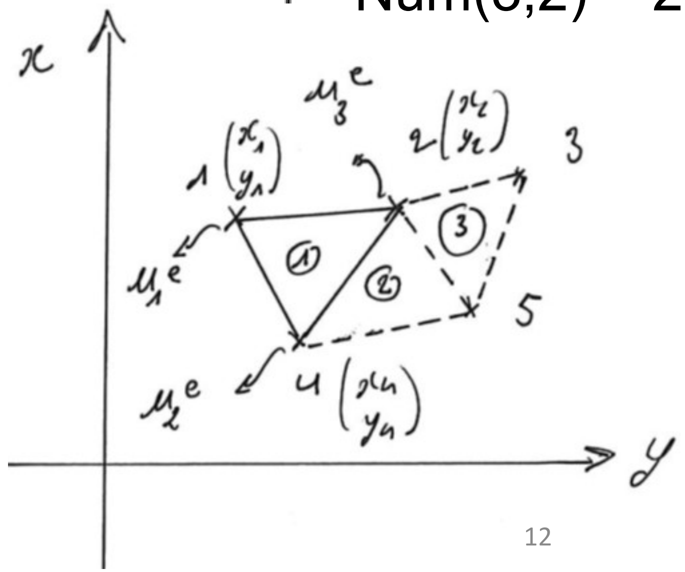
Num(3,1) = 2

Num(1,2) = 5

Num(2,2) = 4

Num(3,2) = 2

$$
\Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
K_{22} &= K^1_{33} + K^2_{33} + \ldots \\
K_{24} &= K^1_{32} + K^2_{32} + \ldots \\
K_{42} &= K^1_{23} + K^2_{23} + \ldots \\
K_{44} &= K^1_{22} + K^2_{22} + \ldots
\end{aligned}
$$



L’aire A du triangle (IJK) est donnée par :

$$2A = \left(\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \right) \cdot \vec{z} = \textbf{abs}\Big((x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) \Big)$$

tab{2,k}(1,1)

$$K^e = \frac{\mu^e}{4A} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 & -(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) & +(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2) \\ \text{Sym} & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 & -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) - (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) \\ \text{Sym.} & \text{Sym.} & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{bmatrix}$$