T.D de mécanique numérique :

Résolution par éléments finis de type P_1/2D d'un écoulement de Poiseuille de liquides visqueux non newtoniens dans une conduite de section arbitraire

On chercher à calculer la vitesse d'un fluide dans une conduite cylindrique de surface S et de section quelconque V d'un fluide incompressible visqueux non newtonien. Celle-ci est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} div\left(\vec{V}\right)=0 \\ \rho\,\overrightarrow{grad}\left(\vec{V}\right)\vec{V}=div(\tau)-\overrightarrow{grad}(P)+\rho\vec{g} \end{cases} \quad \text{avec : } \vec{V}\left|\begin{matrix}u_x\\u_y\\u_z\end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \vec{V}=0 \text{ sur } S$$

Partie préliminaire : *Simplification de l'EDP à résoudre*

1. Montrer que le champ de vitesse sous les hypothèses classiques (fluide incompressible et écoulement 1D) n'a qu'une seule composante $u(x,y)$ non nulle selon la direction $\vec{z}$ qui ne dépend que de x et de y.
2. On introduit $\hat{P}$ la pression motrice telle que : $\hat{P}=P-\rho\vec{g}.\overrightarrow{OM}$. Montrer que l'équation à résoudre devient :

$$div(\tau)=\overrightarrow{grad}\left(\hat{P}\right)$$

Dans le cas non-newtonien, le tenseur des contraintes τ est relié au tenseur des déformations qui contient la partie symétrique du gradient de vitesse $D=\left(\nabla\vec{V}+\nabla^t\vec{V}\right)/2$ par la relation : $\tau=2\mu\left(\left\|\nabla u\right\|\right)D$ (Remarque : Dans le cas Newtonien, $\mu=C^{ste}$).

3. Montrer que l'EDP à résoudre peut se simplifier de la manière suivante :

$$\begin{cases} div\left(\mu\left(\left\|\nabla u\right\|\right)\overrightarrow{grad}(u)\right)=-a \quad dans \quad V \\ u=0 \quad sur \quad S \end{cases} \quad \text{avec : } a=-\frac{\partial\hat{P}}{\partial z}=C^{Ste}$$

4. Expliquer ce que devient cette équation dans le cas d'un fluide Newtonien. Que pouvez-vous conclure sur l'existence et unicité de la solution ?

Dans la suite de ce TD, nous allons dans une première partie définir un élément fini triangulaire à 3 nœuds de type P_1/2D ainsi que les fonctions d'interpolation linéaires $N_i(x,y)$ associées qui vont nous servir dans une seconde partie à mettre en place un schéma numérique permettant d'obtenir une solution approchée du problème.

Rappels de cours :

On cherche une solution approchée $u(x,y)$ de la solution exacte $u_{ex}(x,y)$ telle que l'erreur $e(x,y)=u(x,y)-u_{ex}(x,y)$ soit la plus petite possible. Pour construire cette solution approchée, on écrit :

$$u(x,y)=P_1(x,y)a_1+P_2(x,y)a_2\ldots+P_n(x,y)a_n=\langle P\rangle\{a\} \qquad \textbf{(a)}$$

Les fonctions $P_n(x,y)$ sont les fonctions de base de l'interpolation qui sont linéairement indépendantes. Les a_i sont les paramètres généraux de d'approximation tels que en tout nœud du domaine, on ait : $u(x_n,y_n)=u_{ex}(x_n,y_n)$. En général, les a_i tels qu'ils sont définis ici n'ont pas de sens physique. On va chercher à faire en sorte que

$a_i = u_{ex}(x_i, y_i)$ aux différents nœuds du domaine et que la fonction approchée coïncide avec la fonction exacte en ces nœuds, soit : $u(x_i, y_i) = u_{ex}(x_i, y_i) = u_i$. La fonction approchée s'écrit alors :

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 \ldots + N_n(x, y)u_n = \langle N \rangle \{U\} \quad \textbf{\textit{(b)}}$$

Lorsque le nombre de nœuds et donc de variables nodales (ou paramètres nodaux) u_i devient important, la détermination des fonctions $N_i(x,y)$ est difficile. La méthode des *éléments finis* consiste alors à décomposer le domaine V en un ensemble de sous-domaines V^e qui représente une partition de V et à définir sur chaque sous-domaine une solution approchée $U^e(x,y)$ différente. On fait en sorte également que $U^e(x,y)$ ne dépende que des valeurs nodales attachées aux nœuds appartenant à V^e et à sa frontière. De même, les fonctions approchées seront construites de manière à satisfaire des conditions de continuité sur l'élément V^e et de continuité entre éléments.

Partie 1 : *construction des fonctions d'interpolation N(x,y) pour un élément triangulaire à 3 nœuds*

Le forme faible de l'équation différentielle fait intervenir soit des intégrales de volumes (surfaces en *2D*) sur les élément réels V^e, soit des intégrales de surfaces (curvilignes en *2D*) sur les frontières de ces éléments. Pour le calcul de ces intégrales, il est commode d'introduire un élément de référence V^r, repéré dans un espace de référence et qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique τ :

$$\tau : \boldsymbol{\zeta}(\zeta, \eta) \rightarrow \mathbf{x}(x, y) = \overline{N}(\zeta, \eta)\{(x_n, y_n)\}$$

Cette transformation définit chaque coordonnées de l'élément réel (x_i, y_i) à partir des coordonnées (ζ_i, η_i) du point correspondant de l'élément de référence. Les fonctions $\overline{N}$ sont les fonctions de transformation géométrique qui sont choisies identiques pour les différentes coordonnées x et y.

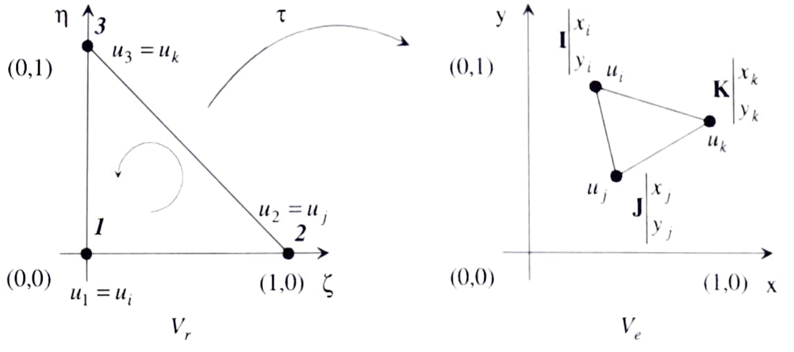
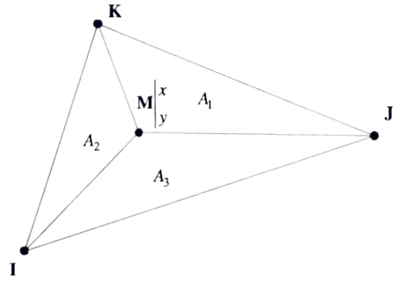


Figure 1 : *élément de référence triangulaire à 3 nœuds de type P_1*

Nous allons chercher à déterminer les différentes fonctions d'interpolation N et de transformation géométrique $\overline{N}$ que nous choisirons linéaires dans le cas d'un élément triangulaire à 3 nœuds.

1. Justifier que dans le cas de l'élément choisi : $N = \overline{N}$.
2. On prendra sur l'élément de référence la base polynomiale suivante : $\langle P(\zeta, \eta) \rangle = \langle 1, \zeta, \eta \rangle$. Déterminer alors l'expression des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence $N_i(\zeta, \eta)$ puis sur l'élément réel $N_i(x, y)$. On montrera alors que l'approximation u est de classe C^0 sur tout le domaine V.

3. Un point $M(x,y)$ peut être repéré sur l'élément réel à partir de ses coordonnées barycentriques L_1, L_2 et L_3 telles que : $L_i = A_i/A$ (i=1,2 et 3). Monter que : $N_i = L_i$.



A représente l'aire de l'élément réel *(IJK)* et A_i les différentes aires des triangles *(JKM)*, *(IMK)* et *(IJM)*.

Figure 2 : *coordonnées barycentriques*

4. Les équations du problème physique écrites sur le domaine réel font intervenir des fonctions inconnues mais aussi leurs dérivées. Etablir la relation entre $\{\partial\zeta\}$ et $\{\partial\mathbf{x}\}$. On notera $[J]$ la matrice *Jacobienne* associée à la transformation géométrique τ : $(\zeta,\eta)\rightarrow(x,y)$. Déterminer l'expression de la matrice $[J]$ et montrer que dans notre cas : $\det(J)=2A$.

5. Montrer que : $\int_{V^e} f(x,y,z)dxdydz = \int_{V^r} f(\zeta,\eta,\xi)\det(J)d\zeta d\eta d\xi$ *Intégrale de volume*

***Partie 2 :** résolution par la méthode des éléments finis*

1. Nous considérons une section droite V quelconque. On considérera un maillage triangulaire isoparamétrique. Rappeler la notion de table des coordonnées, table des connectivités, ainsi que la notion de matrices élémentaires, de matrices globales et d'assemblage.

2. Montrer que la forme variationnelle faible sur une surface élémentaire V^e est de la forme suivante :

$$\underbrace{-\mu^e\iint_{V^e}\overrightarrow{grad}(\phi).\overrightarrow{grad}(u)\,dV^e}_{(I)} + \underbrace{\int_{S^e}\phi.\mu^e.\overrightarrow{grad}(u).\vec{n}\,dS^e}_{(I')} = \underbrace{-a\iint_{V^e}\phi dV^e}_{(II)}$$

Expliquer comment traiter le terme *(I')* lorsque V^e est soit interne au domaine V, soit élément frontière de V.

3. On prend pour ϕ les fonctions N définies dans la ***Partie I*** et on cherche une solution approchée u^e de u sur chaque V^e telle que : $u^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e(x,y).u_i^e = \langle N\rangle\{u^e\}$. Déterminer les expressions de la matrice de rigidité $\mathbf{K}^e$ et vecteur de sollicitation $\mathbf{F}^e$ élémentaires.

4. Expliquer comment obtenir la matrice de rigidité globale $\mathbf{K}$ et vecteur $\mathbf{F}$ de sollicitation global. Montrer que la solution $\mathbf{U}$ peut être obtenue en résolvant le système linéaire suivant : $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$ où $\mathbf{U}$ représente le vecteur inconnu qui contient les valeurs de la vitesse en tous nœuds du domaine.