CM - Méthode des volumes finis.

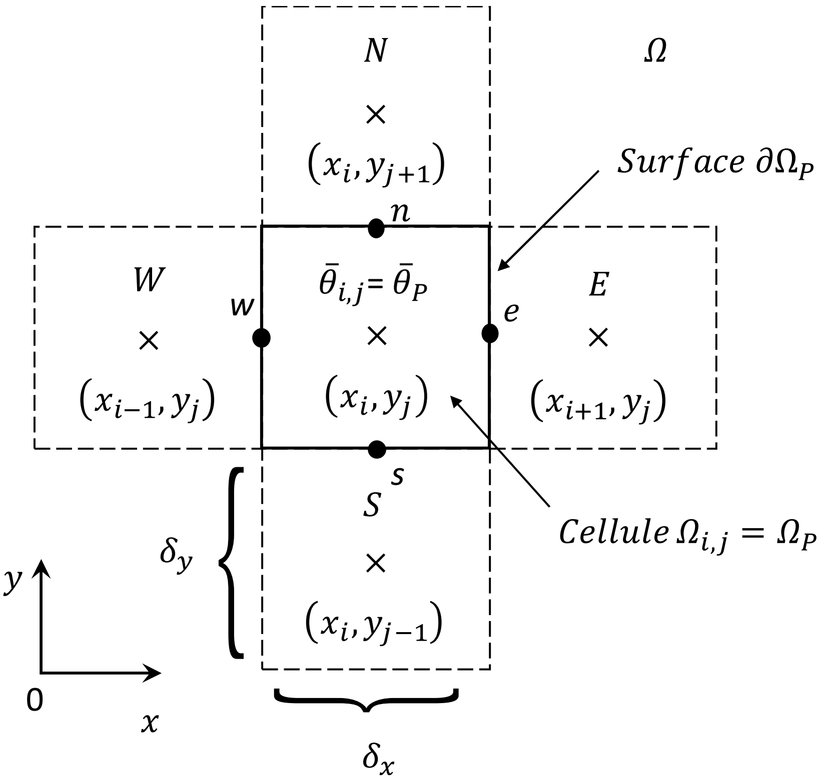
Transport d'un scalaire passif en Volumes Finis 2D instationnaire

On étudie le transport d'un scalaire passif $\theta(x, y, t)$ par un écoulement dont le champ de vitesse est donné dans un domaine bidimensionnel Ω : $\vec{V}(x, y, t) = u(x, y, t).\vec{x} + v(x, y, t).\vec{y}$. On cherche alors à résoudre l'équation de diffusion-dispersion suivante :

$$div\left(\lambda \overrightarrow{grad}(\theta)\right) - div\left(\rho C_p \theta . \vec{V}\right) = \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Le premier terme est relatif au terme de diffusion et le second terme au terme de transport via le champ de vitesse $\vec{V}$ dont on supposera qu'il transporte le scalaire « passif » $\theta(x, y, t)$ (i.e : la champ de vitesse est indépendant du champs scalaire θ). Le membre de droite correspond à un terme de stockage de la grandeur scalaire θ. Enfin, ce champ scalaire peut être vu soit comme un champ de température (chaleur), soit comme un champ de concentration (masse).

L'objectif est de calculer les évolutions aux cours du temps de ce champs scalaire $\theta(x, y, t)$ en mettant en œuvre la méthode des Volumes Finis.



Pour cela, on partitionne le domaine Ω en un nombre fini de volumes élémentaires $\Omega_{i,j}$ de volumes identiques $\delta_x \times \delta_y$ (Rq : Ici, en 2D les volumes sont des surfaces 2D d'extension unitaire δ_z comme indiqué sur la Figure ci-dessus). On définit comme « inconnues » de notre problème les valeurs moyennes du champs scalaire θ que l'on note $\overline{\theta}_{i,j}$ et que l'on localise au barycentre de chaque volume $\Omega_{i,j}$: $\boxed{\overline{\theta}_{i,j} = \frac{1}{\Omega_{i,j}} \iint_{\Omega_{i,k}} \theta(x, y)\, d\Omega_{i,j}}$.

Notations : Pour simplifier la compréhension de la mise en place des schémas numériques, il est commode d'introduire une cellule de référence Ω_P et les cellules voisines à gauche « Ω_W », à droite « Ω_E », en bas « Ω_S » et en haut « Ω_N » . On désignera par P le centre du volume de référence de coordonnées (x_i, y_j) et par W, E, S et N les centre des cellules voisines. Le centre des arêtes sera désigné par des lettres minuscules w, e, s et n et les arêtes correspondantes (ainsi que leur longueur) seront désignées par S_w, S_e, S_s et S_n . Enfin, la valeur d'un fonction f en e ou E , par exemple, sera notée respectivement f_e ou f_E . Avec cette nouvelle notation, on a naturellement : $\boxed{\overline{\theta}_P = \frac{1}{\Omega_p}\iint_{\Omega_p} \theta(x,y)\, d\Omega_p}$ avec : $\Omega_p = \delta_x \times \delta_y$.

Pour ne pas alourdir les notations, on enlèvera l'accentuation sur nos inconnues $\overline{\theta}_P$, les températures moyennes localisées au centre de chaque volume.

1. ***Forme intégrale***. En appliquant la méthode des volumes finis (prise de moyenne + théorème Flux-divergence), montrer que cette EDP peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

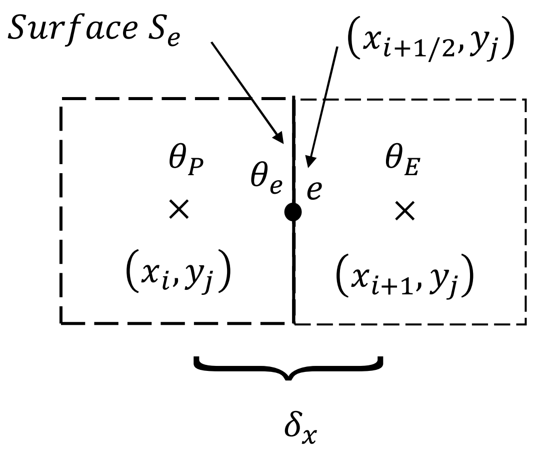
$$\frac{1}{\Omega_p}\int_{\partial\Omega_p} \lambda \overrightarrow{grad}(\theta).\vec{n} dS_p - \frac{1}{\Omega_p}\int_{\partial\Omega_p} \rho C_p \theta \vec{V}.\vec{n} dS_p = \rho C_p \frac{\partial \overline{\theta}_P}{\partial t}$$

où : dS_p représente la frontière du volume Ω_p avec naturellement : $S_p = S_e + S_n + S_w + S_s$ et $\vec{n}$ la normale sortante de cette frontière.

L'objectif est de calculer numériquement <u>les intégrales de surface</u> qui apparaissant dans cette équation que l'on peut écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{1}{\Omega_p}\int_{\partial\Omega_p} f(x,y)\, dS_p \text{ avec : } f(x,y) = \begin{cases} \lambda \overrightarrow{grad}(\theta).\vec{n} & \text{"}diffusion\text{"} \\ -\rho C_p \theta \overrightarrow{V}.\vec{n} & \text{"}dispersion\text{"} \end{cases}$$

2. ***Interpolation linéaire***. Connaissant les températures « moyennes » de chaque volume, on aura besoin d'une formulation d'interpolation *Linéaire* (ou *quadratique*) en x et y pour reconstruite à partir de ces valeurs moyennes le champ scalaire $\theta(x, y)$. Montrer à l'aide d'un développement de type Taylor que l'on a l'approximation <u>d'ordre 2</u> suivante :



$$\theta_e \simeq \frac{\theta_P + \theta_E}{2} \text{ et } \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \simeq \frac{\theta_E - \theta_P}{\delta_x}$$

3. ***Approximation d'une intégrale de surface***. Si $f\left(x,y\right)$ désigne une fonction intégrable sur Ω. Montrez qu'une bonne approximation de l'intégrale de surface de cette fonction peut-être donnée par :

$$\int_{S_e} f\left(x,y\right)dS_e \simeq f_e.S_e \quad \text{et qu'elle est \underline{d'ordre 2}.}$$

où : f_e représente la valeur de la fonction $f\left(x,y\right)$ au centre de l'arrête S_e et S_e la longueur de cette arrête soit ici : $S_e=\delta_y$.

Nous utiliserons par la suite cette approximation d'ordre 2 pour calculer nos intégrales de surface qui apparaissent dans la forme intégrale de notes EDP et l'interpolation linéaire proposée en 3., elle aussi d'ordre 2.

4. ***Mise en place du schéma numérique linéaire-linéaire.*** En utilisant les résultats des deux questions précédentes pour traiter les termes de diffusion et de dispersion, ainsi qu'un schéma d'Euler en temps explicite pour le terme transitoire, donner l'expression du schéma numérique discret obtenu sur la cellule de référence Ω_p (on notera δ_t le pas de temps).

5. ***Schéma Upwind***. Le schéma linéaire n'étant pas très adapté pour traiter le terme de transport (dispersion), on propose d'appliquer une autre interpolation, le schéma « Upwind ». Celui-ci consiste à prendre en compte le sens de l'écoulement pour l'évaluation de la fonction flux f_e sur la frontière. On pourra écrire par exemple :

$$f_e=\begin{cases} f_P & \text{si } \left(\vec{V}.\vec{n}\right)_e>0 \\ f_E & \text{si } \left(\vec{V}.\vec{n}\right)_e<0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{pour } \theta_e=\begin{cases} \theta_P & \text{si } \left(\vec{V}.\vec{n}\right)_e>0 \\ \theta_E & \text{si } \left(\vec{V}.\vec{n}\right)_e<0 \end{cases}$$

   Montrer que cette approximation est <u>d'ordre 1</u>.

6. ***Mise en place du schéma numérique linéaire-Upwind.*** Donner l'expression du schéma numérique discret obtenu pour la cellule de référence Ω_p (on notera δ_t le pas de temps), en utilisant un schéma linéaire pour le terme de diffusion, un schéma Upwind pour le terme de dispersion et un schéma d'Euler en temps explicite pour le terme transitoire.

7. ***Stabilité du schéma explicite en 1D purement diffusif.*** Donner un condition de stabilité faisant intervenir le pas d'espace δ_x et le pas de temps δ_t en utilisant la méthode de Von-Neumann qui exprime la solution sous la forme d'une série de Fourier généralisée, soit :

$$\theta_{i,j}^{\ n}=\theta\left(x_i,y_j,t^n\right)=a_n\exp\left(\left(i\delta_x+j\delta_y\right)\mathrm{I}\right) \quad \text{avec : } I^2=-1$$

   Dans notre étude en 1D, on a : $\theta_i^n=\theta\left(x_i,t^n\right)=a_n\exp\left(i\delta_x\mathrm{I}\right)$. On pourra introduire la variable : $F=\dfrac{a.\delta_t}{\delta_x^{\ 2}}$.

8. ***Même question pour le schéma linéaire-Upwind en 1D.*** On posera $u=C^{Ste}$ et $v=0$.

   On pourra introduire les variables : $F=\dfrac{a.\delta_t}{\delta_x^{\ 2}}$ et $C=\dfrac{u.\delta_t}{\delta_x}$.

Application :

Ecrire un programme Matlab pour étudier le transport d'un scalaire passif dans le domaine $\Omega = [-L_x, L_x] \times [-L_y, L_y]$ avec $L_x = L_y = 1$ **.**

Le champ de vitesse $\vec{V}(x,y)\Big|\begin{matrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{matrix}$ étant donné par :

« Spirale » aspirante : $$\vec{V}(x,y)\left|\begin{matrix} u(x,y) = -u_m \dfrac{y}{(x^2+y^2)} \\ v(x,y) = u_m \dfrac{x}{(x^2+y^2)} \end{matrix}\right.$$

avec : u_m (amplitude du tourbillon constant)

On supposera la condition initiale : $\theta(x,y,t=0) = \theta_0(x,y) = 1$ à l'intérieur du cercle centré en $(L_x/2, 0)$ et de rayon $L\ /4$ et $\theta_0(x,y) = 0$ ailleurs. De même, on supposera le domaine Ω suffisamment grand de sorte que $\theta(x,y,t) = 0 \quad (\forall t)$.

1. **Mettre en place le schéma numérique dans le cas de la diffusion pure.** *Pour vérifier le caractère isotrope du transfert, on pourra centrer la condition initiale.*

2. **Mettre en place le schéma linéaire-linéaire.**

3. **Mettre en place le schéma linéaire-Upwind.**

4. **Etudier la stabilité des différents schémas en jouant sur le pas d'espace** $\delta_x = \delta_y = \delta$ et l'amplitude du vecteur tourbillon $u_m = 1, 5$ et 10.

5. **En s'inspirant du TD, proposer un schéma d'ordre 2 pour traiter le terme de transport (dispersion) : le schéma « Quick ».**

6. **Comparer les 3 schémas : Linéaire-Linéaire, Linéaire-Upwind et Linéaire-Quick en terme de précision et de stabilité.**

7. **Mettre en œuvre ce troisième schéma et expliquer comment traiter les cellules bordantes.**