TD 01 - Méthode des différences finies.

I. Solution d'un problème aux limites dévolution par la méthode des différences finies (problème 1D transitoire)

On s'intéresse au problème aux limites suivant, pour la fonction $u(x,t)$:

$$\text{(1.a)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \qquad x \in]0,1[, t > 0$$

$$\text{(1.b)} \quad u(x=0,t) = 0 \qquad u(x=1,t) = 0$$

$$\text{(1.c)} \quad u(x, \text{t}=0) = u^0(x)$$

Où $f(x)$ est une fonction continue sur $]0,1[$. On supposera (ce qui n'est pas absolument nécessaire) que $u^0(0) = u^0(1) = 0$.

On introduit le pas d'espace h, tel que : $h = \dfrac{1}{N+1}$, la discrétisation est définie par $x_j = j.h$ avec $0 \leq j \leq N+1$. Le pas de temps est k, et on note $u_j{}^n \simeq u(x_j, n.k)$, avec $u_0{}^n = u_{N+1}{}^n = 0$. On pose enfin $U^n = (u_1{}^n, u_2{}^n, ..., u_N{}^n)$.

1°) On considère des schémas aux différences pour le système (1.a) - (1.b), décentrés avant en temps. Montrer que les schémas :

i) explicite
ii) implicite
iii) et de Crank-Nicholson

peuvent s'écrire :

$$BU^{n+1} = AU^n + kF$$

On précisera pour chaque cas les matrices A et B .

Aide : Il s'agit de démontrer ici que tous les schémas numériques peuvent s'écrire sur la forme générique précédente (seule les expressions des matrices A et B sont différentes).

Voir le Polycopié de cours pour la mise en œuvre de ces schémas.

Le schéma de Crank-Nicholson est un cas particulier du « r-schéma » qui est une moyenne pondérée des schémas explicite et implicite ($r = 0.5$) :

$$A_r = r.A_{\text{Imp}} + (1-r).A_{\text{Exp}} \qquad \text{avec : } r \in [0-1]$$

Il faut procéder en 2 étapes :

- Passage de l'EDP aux équations discrètes en remplaçant les dérivées partielles par des expressions différentielles.
- Passage des équations discrètes à la forme matricielle par assemblage.

On rappelle qu'à chaque nœud du domaine est associée une équation discrète. Cette équation discrète est relative à une composante u_j du vecteur inconnu U et fait apparaitre des relations linéaires entre cette inconnue principale et ses proches voisins.

On pourra introduire la matrice tri-diagonale suivante : $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2°) On s'intéresse au schéma 1) (explicite).

Montrer, dans ce cas, que sous la condition de stabilité $\alpha \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$, les valeurs propres de la matrice A sont, en valeurs absolues, strictement inférieures à 1. Soit e un vecteur propre associé à la valeur propre μ, on pourra montrer que le produit scalaire $e \cdot Ae$ vaut d'une part $|e|^2 - \alpha \frac{k}{h^2} \sum_{j=0}^{N} \left(e_{j+1} - e_j\right)^2$, puis l'exprimer en fonction de μ, et conclure.

Aide : Il faut poser un vecteur propre e de composantes e_j. Par définition, ce vecteur propre ne peut pas être nul. De plus, s'il est vecteur propre du problème, il doit en satisfaire les conditions aux limites, soit : $e_0 = e_{N+1} = 0$.
Une condition suffisante de stabilité est comme on le démontrera dans 3°) est que le rayon spectral de la matrice A soit inférieur à 1. En effet, la solution permanente s'obtient lorsque $n \to \infty$. Pour l'obtenir, on voit qu'il faut calculer la puissance « infinie » de cette matrice. Si le rayon spectrale de la matrice est supérieur à 1 alors la solution diverge et tend vers l'infini, ce qui n'est physiquement pas admissible.

3°) Toujours dans le cas du schéma explicite, montrer que :

$$U^n = A^n U^0 + k \sum_{p=0}^{n-1} A^p F$$

Montrer alors qu'à N fixé, U^n converge vers un vecteur V . Préciser l'équation vectorielle que vérifie V .

Aide : Il faut démonter cette relation par récurrence et pour le passage à la limite, faire remarquer que : $\sum_{p=0}^{\infty} A^p = \left(Id - A\right)^{-1}$
On procède ensuite dans l'ordre inverse, c'est-à-dire passage de la forme vectorielle à la forme discrète (en extrayant la ligne *j* de la forme matricielle).

4°) En déduire que les composantes $v_j, 1 \leq j \leq N$ de V, satisfont le schéma aux différences :

$$\alpha \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{h^2} = f\left(x_j\right)$$

<u>Aide :</u>

Puis, de la forme discrète à l'EDP en remplaçant les formes différentielles par des dérivées partielles.

avec quelle équation ce schéma est -il consistant ? Qu'elle est son ordre de précision ?

Le schéma est dit « consistant » si on arrive à montrer que l'EDP obtenue que doit satisfaire $v(x)$ (solution stationnaire) est bien égale à l'équation de départ sur $u(x,t)$ dans laquelle on a retiré la dérivée partielle en temps.

TP 01 – DF 1D instationnaire

5°) Programmer les schémas i) ii) iii) étudier leur précision en fonction des pas d'espace et de temps, pour la donnée initiale $u_0(x) = \frac{x}{2\alpha}(x-1)$ et le second membre $f(x) = 0$.

<u>Aide :</u>

Le but de ce TP :

- d'implémenter les 3 schémas numériques précédents.

Précision ou ordre des schémas :

- de donner les ordres de précision en temps et en espace de chaque schéma.

Etude de stabilité :

- Pour un pas d'espace donnée, faire varier le pas de temps et mettre en évidence la stabilité des schémas.
- Conclure sur les avantages et inconvénients des différents schémas en termes de temps de calcul et de précision.

Erreur d'approximation :

Il faut pour cela voir l'évolution de l'erreur d'approximation (différence entre la solution numérique approchée et la solution exacte) que l'on a dans le cas particulier décrit dans 5°) et que l'on peut calculer par séparation des variables (déterminer pour cela la solution analytique).

Il faut voir comment évolue cette erreur en faisant varier le pas d'espace (pour un pas de temps donnée) et tracer le ln(erreur) en fonction de ln(pas d'espace). Dans l'espace ln/ln, on doit obtenir une droite dont la pente donne l'ordre du schéma en espace. Idem pour le temps. On pourra comparer avec les résultats théoriques.

II. Traitement de l'Equation de Poisson dans le plan.

L'objet de ce TP est :

- ✓ de montrer comment il est possible de résoudre un problème 2D en le formalisant sous la forme d'un système linéaire.
- ✓ d'améliorer la précision du schéma en proposant deux différents méthodes (schémas décentré et centré pour traiter la condition aux limites de type Neumann
- ✓ Evaluer la précision du schéma (ordre de l'approximation) en comparant la solution numérique des 3 méthodes avec une solution analytique exacte.

Les trois méthodes sont :

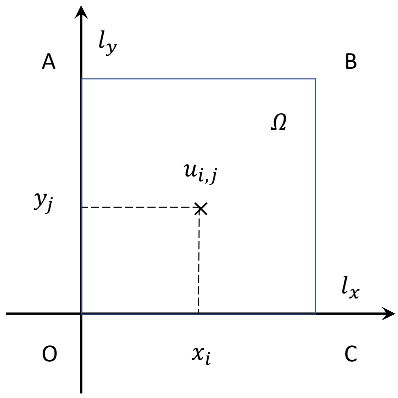
- Schéma d'ordre 1 « classique »
- Schéma d'ordre 2 décentré
- Schéma d'ordre 2

Considérons le domaine Ω du plan suivant $(x, y) \in \left]0, l_x\right[\times \left]0, l_y\right[$. On cherche à résoudre par la méthode des différences finies l'équation :

(1) $\Delta u = f$,

(2) $u = 0$ sur OABC

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -g(x)$ sur OC



1°) Soit h et k les pas du maillage en x et y, écrire le schéma qui discrétise l'EDP (1).

2°) Comme il est indiqué dans le cours discrétiser la condition de Neumann (3) de façon à obtenir un schéma globalement d'ordre 2.

3°) On numérote les nœuds du maillage par lignes horizontales (parallèle à l'axe des x), en commençant par la ligne y=0, les inconnues sont numérotées de même.

Assembler le système à résoudre,

4°) on se donne : $f(\mathrm{x}, y) = -\pi^2\left(\dfrac{1}{l_x^2} + \dfrac{1}{l_y^2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{l_y}\right)$ et $g(x) = -\dfrac{\pi}{l_y}\sin\left(\dfrac{\pi x}{l_x}\right)$

Ecrire le programme qui résout le problème précédent avec l_x, l_y les dimensions de la plaque et le nombre de points n_x, n_y par ligne et colonne comme paramètres.