1 Méthode des différences finies

1.1 Schéma explicite

Tout d'abord, nous avons besoin de résoudre le problème suivant en relation à fonction $u(x,t)$, que peut être traitée pour la méthode des différences finies (problème 1D transitoire).

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x),\\
&u(x=0,t) = 0,\\
&u(x,t=0) = u^0(x)
\end{aligned}$$

Les conditions limites du problème sont :

$$\begin{cases} u_0^n & = u(x=0, nT) = 0 \\ u_N^n & = u(x=L, nT) = 0 \end{cases}$$

Et les conditions initiales sont :

$$u_i^0 = u(x, t=0) = u^0(x)$$

Nous réalisons l'approximation (1), considérant que i représente l'espace x, n le temps et k le pas de temps.

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \alpha \partial^2_{x^2} &= f(x)\\
\partial^2_{x^2} u \simeq \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}&; \qquad (1)\\
t > 0 \text{ et } x \in]0, L[\ ; \quad L &= 1
\end{aligned}$$

Son schéma explicite est donnée pour :

$$\begin{aligned}
&\partial_t u \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}\\
&f(x_i) = f_i
\end{aligned}$$

Nous obtenons à travers de l'approximation donc :

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f_i\\
&\Longrightarrow h^2 \cdot \left(u_i^{n+1} - u_i^n\right) - \alpha k (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = h^2 \cdot k \cdot f_i\\
&\Longrightarrow u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\alpha k}{h^2}\right) u_i^n + \frac{\alpha k}{h^2} \cdot u_{i+1}^n + \frac{k}{h^2} \cdot u_{i-1}^n + k \cdot f_i
\end{aligned}$$

Donc, en posant : (2), nous aurons (3).

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & \frac{\alpha k}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & \frac{\alpha k}{h^2} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha k}{h^2} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & \frac{\alpha k}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} \end{bmatrix} \cdot U^n + kF \tag{3}$$

$$= A_{ex} \cdot U^n + kF \tag{4}$$

D'où $\quad B_{ex} \cdot U^{n+1} = A_{ex} \cdot U^n + kF \quad$, avec $\quad B_e x = Id \quad$ et $\quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$.

1.2 Schéma implicite

Pour obtenir le schéma implicite il suffit de prendre la dérivée seconde par rapport à l'espace à l'instant $n+1$. Encore une fois, nous réalisons une approximation de la dérivée, donnée cette fois pour la relation (5).

$$\partial^2_{X^2} \simeq \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \tag{5}$$

Et alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = f_i \\ &\Longrightarrow h^2 \left(u_i^{n+1} - u_i^n\right) - \alpha k \left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) = h^2 k f \\ &\Longrightarrow u_i^{n+1} \left(1 + \frac{2\alpha k}{h^2}\right) - \frac{\alpha k}{h^2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{\alpha k}{h^2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n + k f_i \\ &\Longrightarrow B_{im} \cdot U^{n+1} = A_{im} \cdot U^n + kF \end{aligned}$$

Où nous aurons que :

$$B_{im} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & -\frac{\alpha k}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & -\frac{\alpha k}{h^2} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha k}{h^2} & 1--\frac{2\alpha k}{h^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha k}{h^2} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -\frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & -\frac{\alpha k}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_{im} = I_d$$

1.3 Schéma Crank-Nicholson

La méthode pour le schéma de Crank-Nicholson est une pondération selon un coefficient $r \in [0,1]$ des schémas implicite et explicite. La relation suivante fait référence à les matrices définies avant. Nous aurons $B_r \cdot U^{n+1} = A_r \cdot U^n + kF$, avec :

$$\begin{cases} B_r = rB_{im} + (1-r)B_{ex} \\ A_r = rA_{im} + (1-r)A_{ex} \end{cases}$$

1.4 Calcul du erreur

Pour le calcul du erreur d'approximation, nous aurons :

$$\mathcal{E}^n = \sum_{i=0}^{N+1} ||u_i^n - u_{i-h}(x_i, nT)||_\infty,$$

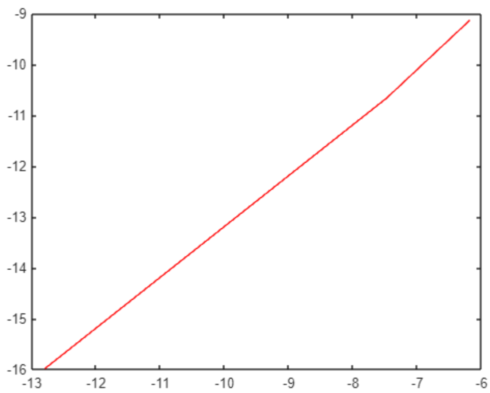
où $u_{i-h}(x,\gamma)$ est la solution analytique du problème.

Et si nous développons, nous aurons :

$$\mathcal{E} = u_i^{n+1} - u_i^n \simeq \frac{\partial^p u_i^n}{\partial x^p} \cdot \frac{h^p}{p!} \ ;$$

$$\implies ln(\mathcal{E}) = \text{const} + p \cdot ln(h)$$

Il suffira de tracer expérimentalement la droite $ln(\mathcal{E})$ en fonction de $ln(h)$. Le coefficient directeur nous donnera l'ordre de la méthode. Nous aurons alors :



2 Traitement de l'Équation de Poisson dans le plan

Nous avons le système d'équations :

$$\Delta u = f \tag{6}$$

Où les conditions aux limites sont données par :

$$u = 0 \text{ sur OABC}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -g(x) \text{ sur OC}$$

En faisant l'approximation en x et y comme fait avant :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En définissant le pas h en x et k en y, nous aurons :

$$h = \frac{1}{N_x + 1} \quad et$$

$$k = \frac{1}{N_y + 1}$$

La discrétisation de l'EDP sera fait pour :

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= u(x_i, y_j) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}
\end{aligned}$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \Delta u = f \to k^2 \left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + h^2 \left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = h^2 k^2 f_{i,j} \\
&\Longrightarrow k^2 u_{i+1,j} - 2k^2 u_{i,j} + k^2 u_{i-1,j} + h^2 u_{i,j+1} - 2h^2 u_{i,j} + h^2 u_{i,j-1} = h^2 k^2 f_{i,j} \\
&\Longrightarrow -2(h^2 + k^2) u_{i,j} + k^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 k^2 f_{i,j} \\
&\quad u_{i,j} - a\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - b\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = -c f_{i,j}
\end{aligned}$$

avec :

$$a = \frac{k^2}{2(h^2 + k^2)} \qquad b = \frac{h^2}{2(h^2 + k^2)} \qquad c = \frac{h^2 k^2}{2(h^2 + k^2)}$$

et aussi :

$$(i,j) \in [1, N_x] \; x \; [1, N_y]$$

2.1 Ordre 2 centré

conditions limites : $u = 0$ sur le chemin OABC sera pris en compte un initialisant les matrices vecteurs à 0.

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -g(x) \text{ sur OC} \tag{7}$$

Selon un développement limité à l'ordre deux nous obtenons :

$$\Longrightarrow u_{i,2} = u_{i,1} + \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_1)k + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_1)\frac{k^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i,y_1)k^3 + o(k^3) \tag{8}$$

En exploitant (6) et le fait que $\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i,y_1)k^3 + o(k^3)$ c'est un $O(k^3)$. Nous aurons aussi besoin de $\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_1)k = -g_i$.

$$\Longrightarrow u_{i,2} = u_{i,1} - g_i k + \frac{k^2}{2}\left(f_{i,1} - \frac{u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}}{h^2}\right) + O(k^3)$$

$$\Longrightarrow u_{i,2} = u_{i,1}\left(\frac{h^2 k^2}{h^2}\right) - g_i k + \frac{k^2}{2} f_{i,1} - \frac{k^2}{2h^2}(u_{i+1,1} + u_{i-1,1})$$

$$\Longrightarrow u_{i,2} \cdot \frac{h^2}{h^2+k^2} = u_{i,1} - 2k\left(\frac{h^2}{2(h^2+k^2)}\right) g_i + \frac{h^2k^2}{2(h^2+k^2)} f_{i,1} - \frac{k^2}{2(h^2+k^2)}\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right)$$

$$\Longrightarrow 2bu_{i,2} = u_{i,1} - 2kbg_i + cf_i - a(u_{i+1,1} + u_{i-1,1})$$

$$\Longrightarrow u_{i,1} - 2 \cdot b \cdot u_{i,2} - a(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) = 2 \cdot k \cdot b \cdot g_i - c \cdot f_{i,1}$$

D'où le schéma numérique

$$\begin{cases} u_{i,j} - a(u_{i+1,j} + u_{i+1,j}) - b(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -cf_{i,j} \ ; \ \ 1 \leq i \leq N_x, \ \ 2 \leq j \leq N_y \\ u_{i,1} - 2bu_{i,2} - a(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) = 2kbg_i - cf_{i,1} \quad 1 \leq i \leq N_x \end{cases}$$

En notant $U_j = \begin{pmatrix} u1,j \\ \vdots \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix}$; $F_j = \begin{pmatrix} f_{i,j} \\ \vdots \\ f_{N_x,j} \end{pmatrix}$. Nous définissons :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1 & -a & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -a & 1 & -a \\ 0 & \dots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

Nous aurons finalement :

$$N = 2kb \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N_x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & -2b \cdot I_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -b \cdot I_d & A & -bI_d & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -b \cdot I_d & A \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & M \cdot U = N \\ \implies & U = M^{-1} \cdot N \end{aligned} \tag{9}$$

2.2 Ordre 1

Pour l'ordre 1 on aura selon la relation (7), nous aurons :

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{k} = -g_i \\ & \implies \text{pour } j = 1 : \\ & u_{i,2} - u_{i,1} = -kg_i; \quad 1 \leq i \leq N_x \end{aligned}$$

Et alors nous aurons :

$$N = -k \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N_x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N_y} \end{pmatrix}$$

Que nous donnera selon 9 :

$$M = \begin{bmatrix} -I_d & +I_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -b \cdot I_d & A & -bI_d & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -b \cdot I_d & A \end{bmatrix}$$

2.3 Ordre 2 décentré

Pour l'ordre deux décentré, de la même façon, nous pouvons développer :

$$u_{i,2} = u_{i,1} + k \cdot \frac{\partial u_{i,1}}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_{i,1}}{\partial y^2} k^2 + O(k^3) \tag{10}$$

$$u_{i,3} = u_{i,1} + 2k \cdot \frac{\partial u_{i,1}}{\partial y} + 2k^2 \frac{\partial^2 u_{i,1}}{\partial y^2} k^2 + O(k^3) \tag{11}$$

Et en faisant (11) - 4·(10) pour supprimer le terme d'ordre deux, nous aurons :

$$u_{i,3} - 4u_{i,2} = -3u_{i,1} + 2g_i k + O(k^3)$$
$$\implies u_{i,3} - 4u_{i,2} + 3u_{i,1} = 2g_i k + O(k^3)$$

Et avec :

$$N = 2k \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N_x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N_y} \end{pmatrix}$$

Nous aurons à la fin, comme avant, selon (9) :

$$M = \begin{bmatrix} 3 \cdot I_d & -4 \cdot I_d & 1 \cdot I_d & 0 & \dots & 0 \\ -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -b \cdot I_d & A & -bI_d & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -b \cdot I_d & A & -b \cdot I_d \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -b \cdot I_d & A \end{bmatrix}$$