Sûreté de fonctionnement

Approches par l'espace d'états.
Processus stochastiques.
Chaînes de Markov

Introduction

- la plupart des processus concurrents qui créent la dynamique des processus industriels mettent en jeu des phénomènes à caractère stochastique
- c'est, bien sûr, le cas des défaillances et des réparations directement liées à la sûreté de fonctionnement des systèmes
- c'est souvent le cas, également, des processus de sollicitation et de réponse liés aux condition d'engagement et de service
- dans ce contexte, les processus stochastiques, et plus particulièrement les processus markoviens sont des outils pertinents pour la modélisation et l'évaluation des performances et de la sûreté de fonctionnement
- dans le domaine de la sureté de fonctionnement les processus stochastiques concernent surtout **l'étude des systèmes réparables**
- la théorie des processus stochastiques offre un cadre pratique pour étudier l'évolution aléatoire d'être à différents instants consécutifs dans différents états
- **l'état d'un système est représenté par toutes les combinaisons possibles des états de ses composants**

Processus stochastiques

• un **processus stochastique** (ou processus aléatoire) est défini par une suite d'expériences ayant comme résultat une famille de variables aléatoires ξ indexées par le temps et prenant des valeurs dans un espace de valeurs discrètes (espace d'états discrets) E auquel est associé un espace de probabilité (application des éléments de E dans l'ensemble [0,1])

• lorsque l'intervalle d'observation T, auquel appartient la variable temps, est continu, les variables aléatoires ξ forment un processus stochastique continu

• lorsque l'intervalle d'observation T est un ensemble discret, les variables aléatoires ξ forment un processus stochastique récurrent

• un processus stochastique est représenté dans le cas continu par :

$$\{\xi(t) \mid t \in T, T = [a, b] \subset [0, \infty[\}$$

et dans le cas discret par :

$$\{\xi_n \mid n \in T, T \in \mathcal{N}\}$$

Processus stochastiques

Application à la SdF

Exemple

Soit un système élémentaire (1 seul composant) réparable caractérisé par un taux de défaillance λ et un taux de réparation μ constants.

Les deux états (1 et 2) du système sont :

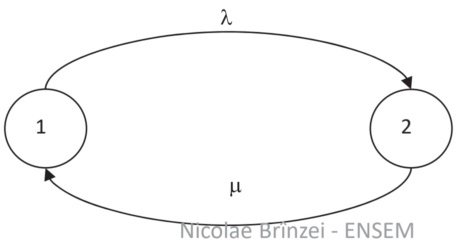
1 - le système fonctionne

2 - le système est en panne

Représentation graphique

• le système peut-être représenté par un graphe d'états

• les sommets du graphe représentent les états du système, les arcs les transitions d'état et on leur associe les taux de transition (ici défaillance et réparation)



Processus stochastiques

Composantes de la sûreté de fonctionnement

Disponibilité - probabilité qu'un système soit en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données à l'instant t

$$A(t) = \mathbb{P}(\text{système soit non défaillant à } t)$$

Fiabilité - probabilité qu'un système accomplisse une fonction requise dans des conditions données, pendant l'intervalle de temps [0, t]

$$R(t) = \mathbb{P}(\text{système soit non défaillant sur } [0, t])$$

Maintenabilité - probabilité que la maintenance d'un système assurée dans des conditions données s'achève à l'instant t sachant que l'entité est défaillante à l'instant t=0

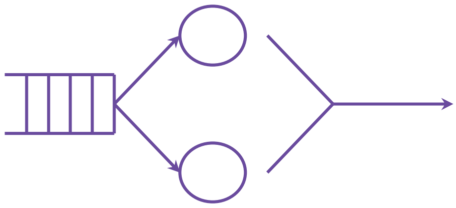
$$M(t) = \mathbb{P}(\text{système défaillant à l'instant initial soit réparée à } t)$$

Processus stochastiques

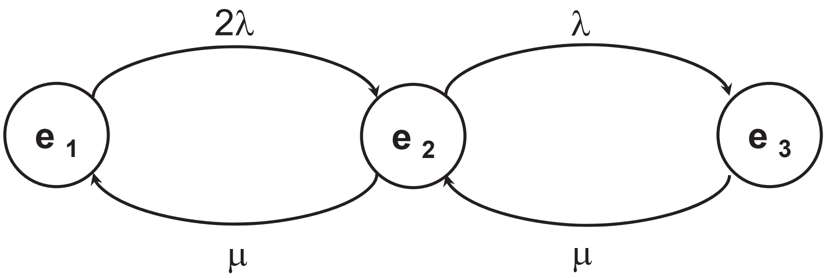
Composantes de la sûreté de fonctionnement

- les grandeurs de la sûreté de fonctionnement sont de la forme :

$$X(t) = \sum_{e_i \in \mathcal{E}_i} \mathbb{P}_i(t)$$



Disponibilité



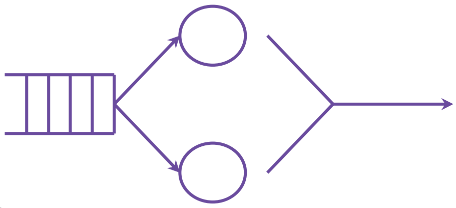
$$A(t) = \mathbb{P}\Big(\xi(t) \in \{e_1, e_2\} \Big| \xi(\tau) \in \{e_1, e_2, e_3\}, 0 \le \tau \le t\Big)$$

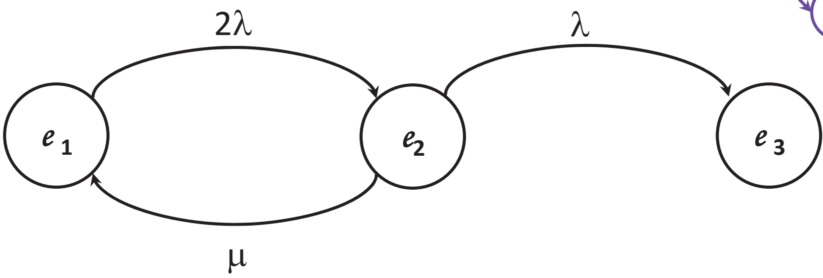
$$A_\infty = \lim_{t \to \infty} A(t)$$

Processus stochastiques

Composantes de la sûreté de fonctionnement

Fiabilité





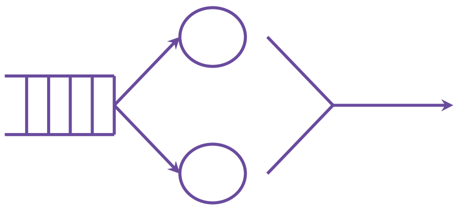
$$R(t)=\mathbb{P}\left(\xi(t)\in\{e_1,e_2\}\middle|\xi(\tau)\in\{e_1,e_2\},0\leq\tau\leq t\right)$$

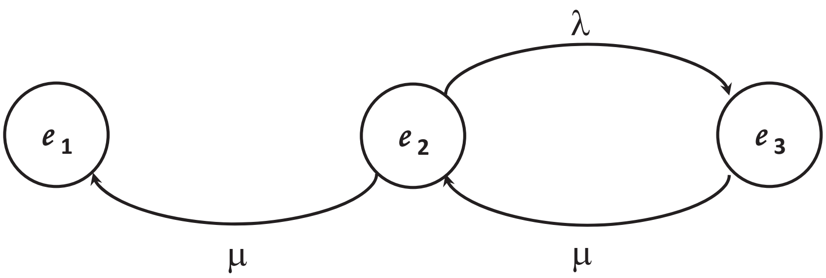
$$R_\infty=0$$

Processus stochastiques

Composantes de la sûreté de fonctionnement

Maintenabilité





$$M(t)=\mathbb{P}\left(\xi(t)\in\{e_1\}\middle|\xi(0)\in\{e_3\}\right)$$

$$M_\infty=1$$

Processus stochastiques

Indicateurs de performance

- dans les processus stochastiques, d'autres indices de performances peuvent être obtenus :

$$\Psi(t) = \sum_{e_i \in E} \psi_i \mathbb{P}\left(\xi(t) = e_i \middle| \xi(0)\right)$$

où ψ_i représente la valeur de l'indice de performance associée à l'état e_i

- **coût** $$C(t) = \sum_{e_i \in E} c_i \mathbb{P}\left(\xi(t) = e_i \middle| \xi(0)\right)$$

où c_i est un coût affecté aux états du système ; il peut correspondre à un gain (gain de production pour les états productifs), à une pénalité (coût d'opération de maintenance, manque à gagner …)

- **productivité** $$Pr(t) = \sum_{e_i \in E} pr_i \mathbb{P}\left(\xi(t) = e_i \middle| \xi(0)\right)$$

où pr_i est un taux de productivité associé aux états du système

Chaînes de Markov

- un processus stochastique est markovien si la seule connaissance de son état présent suffit pour déterminer son évolution future
- un processus markovien s'appelle **chaîne de Markov à temps discret** (ou parfois **chaîne de Markov**) lorsque l'intervalle d'observation T est un ensemble discret, et il s'appelle **chaîne de Markov à temps continu** ou parfois **processus de Markov**) lorsque l'intervalle d'observation T est un ensemble continu

Chaîne de Markov à temps continu

- une chaîne de Markov à temps continu est décrite par :

$$\mathbb{P}\left(\xi(t_n+dt)=e_j \middle| \xi(t_0),\xi(t_1),\xi(t_2),\dots,\xi(t_n)=e_i\right)=\mathbb{P}\left(\xi(t_n+dt)=e_j \middle| \xi(t_n)=e_i\right)\ \forall t\in T\subset[0,\infty[$$

appelée **probabilité de transition depuis l'état e_i vers l'état e_j**

- la connaissance de l'état du système aux instants $t_1<t_2<\ldots<t_n$ est une information entièrement contenue dans la connaissance de l'état à l'instant t_n
- la connaissance de son passé ne contient aucun élément d'ordre prédictif; l'état futur est défini seulement en fonction de l'état présent

Chaîne de Markov à temps continu

- une CdM à temps continu est dite **homogène** dans le temps quand ses probabilités de transitions ne dépendent pas directement des instants t_n+dt et t_n, mais seulement de leur différence, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\xi(t_n+dt)=e_j \middle| \xi(t_n)=e_i\right)=p_{ij}(t_n+dt-t_n)=p_{ij}(dt)$$

- si la CdM à temps continu est homogène la probabilité de transition est donnée par la relation suivante :

$$p_{ij}(dt)=\delta_{ij}+\lambda_{ij}\cdot dt$$

où λ_{ij} est le *taux de transition* de l'état e_i vers l'état e_j et δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{si } i=j\end{cases}$$

- les probabilités de transition vérifient les propriétés suivantes :

$$0\le p_{ij}(dt)\le 1 \quad \forall i,j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(dt)=1$$

- à partir de la relation ci-dessus on peut déduire le taux de transition de l'état e_i vers l'état e_i

$$\lambda_{ii}=-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}$$

Définition

On appelle **vecteur des probabilités d'état** ou distribution des probabilités d'états, le vecteur contenant les probabilités que le système se trouve dans chacun de ses états à un instant donné :

$$\mathcal{P}(t) = \left[\mathbb{P}_1(t)\,\mathbb{P}_2(t)\ldots\mathbb{P}_n(t)\right] \quad \forall t \in T$$

ou $P_i(t)$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état e_i à l'instant t :

$$\mathbb{P}_i(t) = \mathbb{P}\left(\xi(t) = e_i\right) \forall t \in T, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Le vecteur des probabilités d'état est un vecteur stochastique :

$$0 \le \mathbb{P}_i \le 1 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i = 1$$

Equation fondamentale d'une chaîne de Markov à temps continu

- la probabilité de se trouver dans un état donné e_i à l'instant t + dt est égale à la probabilité d'être dans l'état e_i à l'instant t et de y rester dans cet état pendant l'intervalle de temps dt plus la probabilité d'être dans un état quelconque $e_j \neq e_i$ à l'instant t et de passer de cet état e_j vers l'état e_i pendant l'intervalle de temps dt

$$\mathbb{P}_i(t+dt) = \mathbb{P}_i(t)\cdot\left[1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}\cdot dt\right] + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{P}_j(t)\cdot\lambda_{ji}\cdot dt$$

d'où on obtient :

$$\frac{d\mathbb{P}_i(t)}{dt} = \frac{\mathbb{P}_i(t+dt) - \mathbb{P}_i(t)}{dt} = -\mathbb{P}_i(t)\cdot\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{P}_j(t)\cdot\lambda_{ji}$$

$$\dot{\mathbb{P}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j(t)\cdot\lambda_{ji}$$

Chaîne de Markov à temps continu

Equation fondamentale d'une chaîne de Markov à temps continu

• la relation précédente écrite pour chaque état e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nous donne l'équation matricielle suivante :

$$\dot{\mathbb{P}}(t) = \mathbb{P}(t) \cdot \mathbf{A}$$

où $\mathbf{A} = \left[\lambda_{ij}\right]$ est **la matrice des taux de transition** et
$\mathbb{P}(t) = \left[\mathbb{P}_1(t)\, \mathbb{P}_2(t) \ldots \mathbb{P}_n(t)\right]$ est le vecteur des probabilités d'état

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_{1j} & \lambda_{12} & \cdot & \lambda_{1i} & \cdot & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\sum\limits_{j=1, j\neq 2}^{n}\lambda_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{i1} & \cdot & \cdot & -\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n}\lambda_{ij} & \cdot & \lambda_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\sum\limits_{j=1}^{n-1}\lambda_{nj} \end{bmatrix}$$

matrice carrée de dimension n égale au nombre des états de la CdM à temps continu

L'équation ci-dessus porte le nom d'**équation fondamentale de la CdM à temps continu**.
La matrice $\mathbf{A}$ s'appelle **le générateur infinitésimal de la CdM à temps continu**

Chaîne de Markov à temps continu

Equation fondamentale d'une chaîne de Markov à temps continu

• dans le cas des CdM homogènes, le générateur infinitésimal $\mathbf{A}$ est une matrice singulière, la somme des coefficients d'une ligne étant nulle

$$\lambda_{ij} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 0$$

• l'équation fondamentale de la CdM précédente décrit l'évolution dynamique du système

• la solution de cette équation est donnée par la relation suivante, en fonction du vecteur des probabilités d'états à l'instant initial $\mathbb{P}(0)$:

$$\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0) \cdot e^{\mathbf{A}t}$$

où : $e^{\mathbf{A}t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathbf{A}^n . t^n}{n!}$

Chaîne de Markov à temps continu

Définition

Une CdM à temps continu s'appelle **ergodique** si dans son comportement asymptotique le système tend vers une distribution limite unique, indépendante des conditions initiales :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbb{P}(\infty) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(t)$$

Le vecteur représente la distribution de probabilités d'états en régime permanent et est appelé **distribution stationnaire des probabilités**.

En régime stationnaire $(t \to \infty)$, l'équation fondamentale dévient :

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{A}$$

et permet de déterminer la distribution stationnaire π, en tenant compte que :

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \bar{\boldsymbol{1}} = 1$$

où $\bar{1}$ est un vecteur de 1 uniquement.

On a alors, par exemple : $\boldsymbol{\pi} = [0, 0, ..., 0, 1].\mathbf{A}_m^{-1}$, où $\mathbf{A}_m$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en remplaçant la dernière colonne par des 1.

Dans la suite on considère uniquement des processus ergodiques.

Chaîne de Markov à temps continu

La durée moyenne de séjour de la CdM à temps continu dans un état e_i est donnée par :

$$\eta_i = \frac{1}{-\lambda_{ii}}$$

Chaîne de Markov à temps continu

Remarque

Pour satisfaire la propriété de Markov, le temps passé par un processus stochastique dans un de ses états (temps de séjour) doit exhiber la propriété sans mémoire qui se traduit par le fait qu'à chaque instant, le temps restant à passer dans l'état courant est indépendant du temps qui a déjà été passé. Cela signifie que le temps de séjour doit suivre une distribution géométrique dans le cas d'une chaîne de Markov à temps discret et une distribution exponentielle dans le cas d'une chaîne de Markov à temps continu.

Ces deux distributions (exponentielle et géométrique) sont les seules à posséder la propriété sans mémoire.

Composantes de la SdF

- la solution de l'équation fondamentale de la CdM donne la probabilité du système de se trouver dans chaque état
- cependant, du point de vue de la SdF, on s'intéresse à un sous-ensemble de l'ensemble des états E correspondant à un certain état de fonctionnement, par exemple en fonctionnement opérationnel, en panne, en maintenance …
- si on considère que le système ne peut être qu'en panne ou en fonctionnement, l'ensemble d'états E du système est partagé en deux sous-ensembles :
  - le sous-ensemble des états de fonctionnement E_f, représentant les n_f états de fonctionnement dans lesquels la fonction requise est réalisée
  - le sous-ensemble des états de dysfonctionnement (ou panne) E_d, représentant les n_d états de panne dans lesquels la fonction requise n'est pas réalisée par le système
- le générateur infinitésimal $\mathbf{A}$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}\begin{array}{l} E_f \\ E_d \end{array}$$

- ce partitionnement permet de simplifier les calculs en réduisant la taille des matrices intervenant dans le calculs des différentes composantes de la SdF

Composantes de la SdF

Disponibilité

- la disponibilité ou l'indisponibilité du système s'obtiennent en utilisant le graphe complet de la CdM à temps continu et en sommant les probabilités que le système soit dans un état du sous-ensemble E_f (pour la disponibilité) ou que le système soit dans un état du sous-ensemble Ed (dans le cas de l'indisponibilité)

$$A(t) = \mathbb{P}(0) \cdot e^{\mathbf{A}t} \cdot \bar{\mathbf{1}}_f \qquad \bar{A}(t) = \mathbb{P}(0) \cdot e^{\mathbf{A}t} \cdot \bar{\mathbf{1}}_d$$

ou en régime asymptotique :

$$A(\infty) = \boldsymbol{\pi} \cdot \bar{\mathbf{1}}_f \qquad \bar{A}(\infty) = \boldsymbol{\pi} \cdot \bar{\mathbf{1}}_d$$

où $\bar{\mathbf{1}}_f = \left[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{nf}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{nd}\right]^T$ est le vecteur colonne de sommation relatif aux états E_f (comportant n_f états)

et $\bar{\mathbf{1}}_d = \left[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{nf}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{nd}\right]^T$ est le vecteur colonne de sommation relatif aux états E_d (comportant n_d états)

Composantes de la SdF

Fiabilité

- pour évaluer la fiabilité des systèmes, les états de non fonctionnement sont rendus absorbants
- le système est défaillant dès la première transition d'un état de fonctionnement à un état de non fonctionnement et y demeure
- la matrice des taux de transition a la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{G_{11}}}^{E_f} & \overbrace{\phantom{G_{12}}}^{E_d} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \end{array}$$

- on a toujours :

$$\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0).e^{\mathbf{A}t}$$

- si on s'intéresse seulement aux états de fonctionnement, on peut écrire en partitionnant le vecteur des probabilités

$$\left[\mathbb{P}_f(t) \;,\; \boldsymbol{O}\right] = \left[\mathbb{P}_f(t) \;,\; \mathbb{P}_d(t)\right].\mathbf{I}_f \qquad \mathbf{I}_F = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ & \cdot & \mathbf{O} \\ 0 & 1 & \\ \hline \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}E_f \\ \}E_d \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{E_f} & \underbrace{}_{E_d} \end{array} \end{array}$$

Composantes de la SdF

Fiabilité

d’autre part :

$$\dot{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\cdot\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right]\cdot\mathbf{I}_{\mathrm{f}} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right]\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_{\mathrm{f}}$$

soit :

$$\left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \boldsymbol{O}\right] = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right]. \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \text{soit:} \quad \left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \boldsymbol{O}\right] = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}\cdot\mathbf{G}_{11}, \boldsymbol{O}\right] \quad \text{soit encore:} \quad \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}} = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}.\mathbf{G}_{11}$$

dont la solution est :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\cdot \mathrm{e}^{\mathbf{G}_{11}\mathrm{t}}$$

et la fiabilité est la somme des probabilités d’être dans un des états de fonctionnement :

$$\mathrm{R}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t})\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nf}} = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\cdot \mathrm{e}^{\mathbf{G}_{11}\mathrm{t}}\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nf}}$$

avec $\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nf}} = \left[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\mathrm{nf}}\right]^{\mathrm{T}}$ vecteur de sommation sur tous les états de fonctionnement

Composantes de la SdF

Fiabilité

Conséquence

La fiabilité est déduite de la matrice des taux de transition en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux états de défaillance.

Composantes de la SdF

Fiabilité

Transformée de Laplace de la fiabilité

- on peut aussi donner une expression de la transformée de Laplace de la fiabilité
- pour cela, décomposons l'équation d'état du système selon la partition des états de fonctionnement et des états défaillants :

$$\dot{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cdot \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right] = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right].\mathbf{A} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{G}_{11} \quad , \quad \mathbb{P}_{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{G}_{12}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{G}_{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{G}_{12}$$

Composantes de la SdF

Fiabilité

Transformée de Laplace de la fiabilité

- soit en notation de Laplace :

$$\mathrm{s}.\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s}) - \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s}) \cdot \mathbf{G}_{11}$$

$$\mathrm{s}.\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) - \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s}) \cdot \mathbf{G}_{12}$$

où $\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(s)$ est le vecteur ligne des transformées de Laplace des probabilités d'être dans chacun des états de fonctionnement, $\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(s)$ est le vecteur ligne des transformées de Laplace des probabilités d'être dans chacun des états de défaillance, $\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)$ le vecteur ligne des probabilités d'être dans chacun des états de fonctionnement à l'instant initial et $\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0)$ le vecteur ligne des probabilités d'être dans chacun des états de défaillance à ce même instant

- de la première équation on déduit :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s})\left[\mathrm{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{G}_{11}\right] = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0) \cdot \left[\mathrm{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{G}_{11}\right]^{-1}$$

- et en repartant dans la 2ème équation :

$$\mathrm{s}.\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) + \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\left[\mathrm{s}.\mathbf{I} - \mathbf{G}_{11}\right]^{-1}.\mathbf{G}_{12}$$

Composantes de la SdF

Fiabilité

Transformée de Laplace de la fiabilité

La transformée de Laplace R(s) de R(t) s'obtient en sommant les probabilités d'être dans des états de fonctionnement.

$$\mathrm{R}(\mathrm{s}) = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\left[\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{G}_{11}\right]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{nf}}$$

MTTFF

- conforment au chapitre 1 : $\mathrm{MTTFF} = \lim\limits_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{R}(\mathrm{s})$

$$\mathrm{MTTFF} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\cdot\left(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{G}_{11}\right)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{nf}}$$

d'où : $\mathrm{MTTFF} = \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)\cdot\left(-\mathbf{G}_{11}\right)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{nf}}$

Composantes de la SdF

Maintenabilité

- on peut assimiler le processus de réparation à celui du fonctionnement, les états de défaillance étant ceux pendant lesquels ont lieu les réparations et les états de mise en fonctionnement représentant des états absorbants par rapport à ceux-ci (c'est justifiable car en général MTTFF >> MTTR).

- dans ce cas, la matrice des taux de transition $\mathbf{A}$ peut être partitionnée ainsi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}$$

- comme dans le cas de la fiabilité, établissons une forme réduite de l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\dot{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\cdot\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right]\cdot\mathbf{I}_{\mathrm{d}} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right]\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_{\mathrm{d}}$$

$$\mathbf{I}_{\mathrm{D}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\hphantom{\mathbf{O}\quad}}_{\mathrm{E_f}} & \underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad}}_{\mathrm{E_d}} \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\,\mathrm{E_f} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}\mathrm{E_d} \end{array}$$

Composantes de la SdF

Maintenabilité

soit :

$$\left[\mathbf{O}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right] = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{soit:} \quad \left[\mathbf{O}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right] = \left[\mathbf{O}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}} \cdot \mathbf{G}_{22}\right] \quad \text{soit encore: } \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}} = \mathbb{P}_{\mathrm{d}} \cdot \mathbf{G}_{22}$$

dont la solution est :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{G}_{22}\mathrm{t}}$$

et la maintenabilité est le complément à 1 de la la somme des probabilités d'être dans un des états de réparation :

$$\mathrm{M}(\mathrm{t}) = 1 - \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) \cdot \bar{\mathbb{1}}_{\mathrm{nd}} = 1 - \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{G}_{22}\mathrm{t}} \cdot \bar{\mathbb{1}}_{\mathrm{nd}}$$

avec $\bar{\mathbb{1}}_{\mathrm{nd}} = \left[\underbrace{1, 1, \ldots., 1}_{\mathrm{nd}}\right]^{\mathrm{T}}$ vecteur de sommation des états de réparation

Composantes de la SdF

Maintenabilité

Transformée de Laplace de la maintenabilité

• compte tenu de la partition de $\mathbf{A}$

$$\dot{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cdot \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathbb{P}}_{\mathrm{d}}\right] = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right] \cdot \mathbf{A} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{f}}, \mathbb{P}_{\mathrm{d}}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} = \left[\mathbb{P}_{\mathrm{d}} \cdot \mathbf{G}_{21} \quad , \quad \mathbb{P}_{\mathrm{d}} \cdot \mathbf{G}_{22}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{G}_{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{G}_{22}$$

• en passant à la notation de Laplace :

$$\mathrm{s} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s}) - \mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) \cdot \mathbf{G}_{21}$$

$$\mathrm{s} \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) - \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) = \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) \cdot \mathbf{G}_{22}$$

Composantes de la SdF

Maintenabilité
Transformée de Laplace de la maintenabilité

- de la deuxième équation on déduit :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s})\left[\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{G}_{22}\right]=\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s})=\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0).\left[\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{G}_{22}\right]^{-1}$$

- et en reportant dans la 1ère équation :

$$\mathrm{s}\cdot\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(\mathrm{s})=\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)+\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0)\left[\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{G}_{22}\right]^{-1}\cdot\mathbf{G}_{21}$$

La transformée de Laplace de M(t) s'obtient en sommant les transformées de Laplace $\mathbb{P}_{\mathrm{d}}$(s) des probabilités d'être dans des états de dysfonctionnement.

$$\mathrm{M}(\mathrm{s})=1-\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(0)\left[\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{G}_{22}\right]^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nd}}$$

MTTR
Le MTTR sera la limite pour s→0 de $\mathbb{P}_{\mathrm{d}}(\mathrm{s})\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nd}}$:

$$\mathrm{MTTR}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}(0)\cdot\left(-\mathbf{G}_{22}\right)^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nd}}$$

Composantes de la SdF

Calcul du MUT, MDT et MTBF
On peut considérer que le MUT se déduit du calcul du MTTF (les taux étant constants) à condition de remplacer la distribution des probabilités à l'instant zéro par la distribution asymptotique des probabilités d'entrer dans un état de fonctionnement sachant qu'il y a eu réparation (c'est une probabilité conditionnelle). On peut l'écrire sous forme matricielle pour l'ensemble d'états :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)=\frac{\mathbb{P}(\text{etre en fonct. }\underline{\text{et}}\text{ avoir répar.})}{\mathbb{P}(\text{avoir répar.})}=\frac{\mathbb{P}(\text{passer de déf. à fonct}).}{\mathbb{P}(\text{avoir répar.})}$$

$$\mathbb{P}_{\mathrm{f}}(0)=\frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{d}}\cdot\mathbf{G}_{21}}{\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{d}}\cdot\mathbf{G}_{21}\cdot\bar{\boldsymbol{1}}_{\mathrm{nf}}}$$

$\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{d}}$ est le vecteur ligne des probabilités asymptotiques d'être en état de défaillance

$\mathbf{G}_{21}$ la matrice des probabilités de passer d'un état de défaillance à un état de fonctionnement

Le produit est donc le vecteur ligne des probabilités d'être dans chacun des états de fonctionnement après réparation.
Le dénominateur est la somme des probabilités précédentes ; il représente donc la probabilité qu'une réparation soit faite, c'est-à-dire la maintenabilité asymptotique.

Composantes de la SdF

Calcul du MUT, MDT et MTBF

L'équation fondamentale de la CdM en régime stationnaire, compte tenu du partitionnement, s'écrit:

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{A} = [\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f}, \boldsymbol{\pi}_\mathrm{d}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}$$

soit

$$\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{11} + \boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21} = \boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} + \boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{22} = \boldsymbol{O}$$

D'autre part $\mathbf{G}_{11} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf} + \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd} = \boldsymbol{0}$, et $\mathbf{G}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf} + \mathbf{G}_{22} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd} = \boldsymbol{0}$ (la matrice $\mathbf{A}$ est singulière, chaque terme de ces vecteurs représente la somme des termes d'une ligne de $\mathbf{A}$).

On en déduit les formes équivalentes de $\mathbb{P}_\mathrm{f}(0)$:

$$\mathbb{P}_\mathrm{f}(0) = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{11}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{11} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}} = -\frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{11}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}}$$

Composantes de la SdF

Calcul du MUT, MDT et MTBF

d'où l'expression de MUT à partir de $\mathrm{MTTF} = \mathbb{P}_\mathrm{f}(0) \cdot (-\mathbf{G}_{11})^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}$ en remplaçant $\mathbb{P}_\mathrm{f}(0)$:

$$\mathrm{MUT} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{11} \cdot \mathbf{G}_{11}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}}$$

Le temps moyen pendant lequel le système reste défaillant après l'occurrence de la défaillance MDT se calcule par une procédure identique à partir de l'expression du MTTR :

$$\mathrm{MDT} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}}$$

On peut définir la durée moyenne du cycle défaillance-réparation-défaillance MTBF par :

MTBF = MDT + MUT et puisque : $\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf} + \boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd} = 1$

$$\mathrm{MTBF} = \frac{1}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nd}} = \frac{1}{\boldsymbol{\pi}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{G}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{1}}_\mathrm{nf}}$$

Modélisation par des chaînes de Markov

Exemple

Soit un système à deux sous ensembles X_1, X_2

X_i représente l'état du sous-système en fonctionnement
$\overline{X}_i$ représente l'état du sous-système en réparation (la probabilité de réparation décrit tout le cycle depuis la défaillance jusqu'à la remise en service)

Les états physiques : $\left\{X_1X_2, \overline{X}_1X_2, X_1\overline{X}_2, \overline{X}_1\overline{X}_2\right\}$

Exemple

Si on dispose d'autant de réparateurs que de sous ensembles à maintenir, une réparation commence dès qu'un sous-ensemble est en panne (on suppose que la probabilité d'une double défaillance au même instant est improbable).

La CdM à temps continu du système peut alors être tracée à partir de ces quatre états :

Exemple

Supposons maintenant une politique de maintenance à un seul réparateur, la réparation du sous système X_2 étant prioritaire.

On peut encore déterminer la CdM à temps continu simplement :

Exemple

Si maintenant on adopte une politique de maintenance à un seul réparateur avec priorité à la réparation du sous-ensemble tombé le premier en panne.

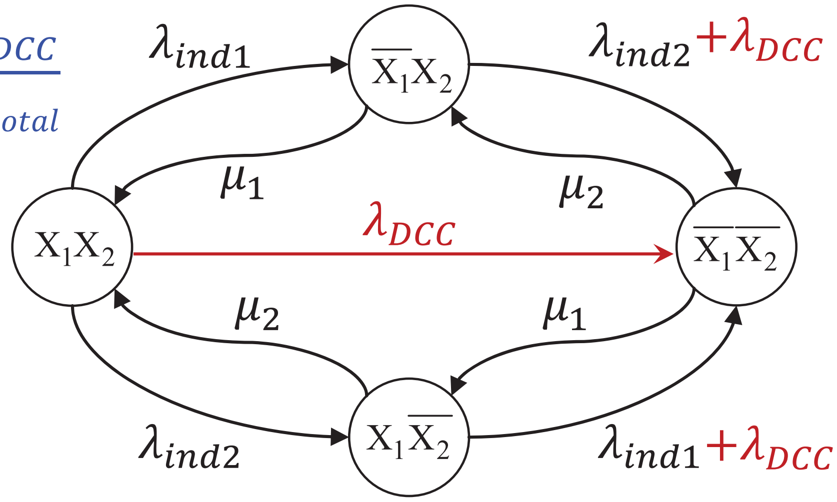
Si les deux sous-ensembles sont en panne, on ne peut pas prévoir l'état futur sans savoir lequel est tombé en panne le premier. Pour cela, il faut introduire une sorte d'effet mémoire pour construire la CdM à temps continu :

Modélisation par des chaînes de Markov

Défaillances de cause commune DCC (common cause failures CCF) : modèle du facteur β

$$\lambda_{total} = \lambda_{ind} + \lambda_{DCC}$$

$$\beta = \frac{\lambda_{DCC}}{\lambda_{ind} + \lambda_{DCC}} = \frac{\lambda_{DCC}}{\lambda_{total}}$$



Le modèle du facteur β modélise bien les DCC sur un ensemble de composants identiques $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$

Modélisation par des chaînes de Markov

Défaillances de cause commune DCC (common cause failures CCF) : modèle du facteur β

Comment procéder dans le cas des composants différents ?

Dans ce cas un λ_{DCC} peut être calculé à partir des lambda des composants et c'est ce paramètre qui sera multiplié par le β.
Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer le λ_{DCC} :

- le minimum des lambda des composants (non recommandée)
- le maximum des lambda des composants afin de rester conservatif pour les DCC (peut être pénalisant si les lambda des composants sont très variés les uns par rapport aux autres)
- la moyenne arithmétique des lambda des composants
- la moyenne géométrique des lambda des composants (méthode recommandée par le SINTEF ; la moyenne géométrique et moins sensible aux valeurs plus élevées d'une série des données que la moyenne arithmétique)

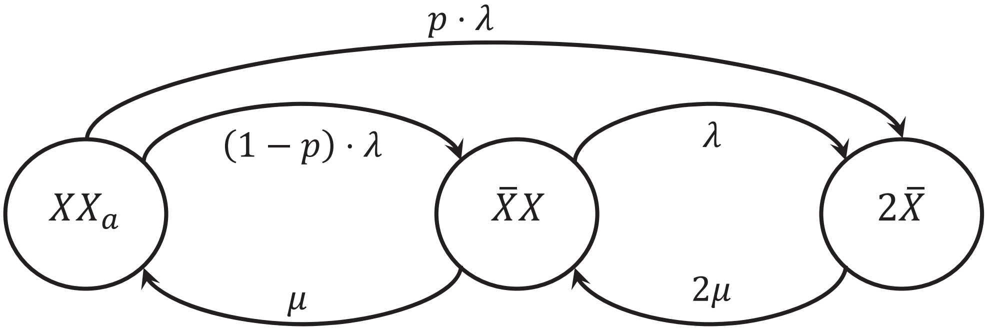
Modélisation par des chaînes de Markov

Prise en compte d'une distribution de probabilités discrètes

Comment modéliser :

- le refus de démarrage ?
- la réussite / l'échec d'une réparation ?

Besoin d'une distribution de probabilités discrètes pour modéliser ce type de phénomènes.



Système de deux composants en redondance passive
(2ème composant en stand-by) avec une probabilité p de refus de démarrage

Modélisation par des chaînes de Markov

Prise en compte des défaillances « critiques » versus défaillances « dégradées »

Les modes de défaillance des composants industriels sont souvent séparés en deux catégories :

- les pannes « critiques » qui font perdre immédiatement la fonction ;
- les pannes « dégradées » qui ne font pas perdre la fonction, mais doivent être rapidement réparées.

Il en résulte que la réparation des pannes dégradées peut être différées pendant quelque temps lorsque cela s'avère nécessaire.

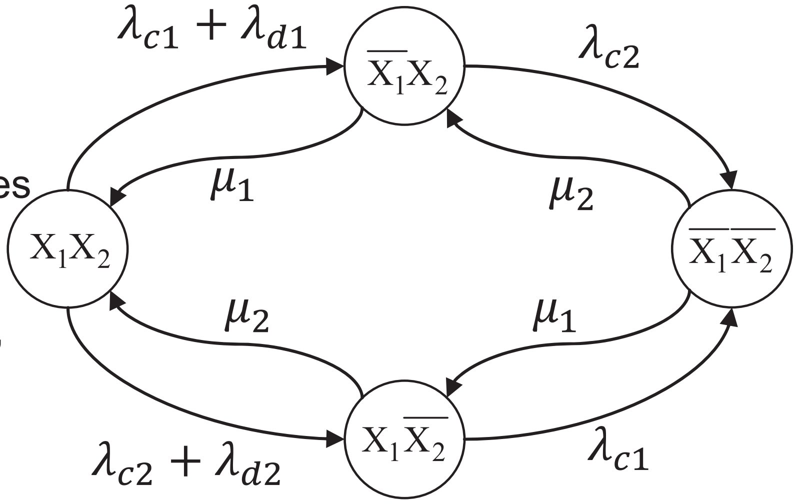
Dans l'état ou les deux composants X_1 et X_2 fonctionnent, si X_1 tombe en panne dégradée, il est inutile d'ajourner la réparation puisque la fonction continue à être assurée par X_2 qui est redondante. Il y a même intérêt à réparer le plus vite possible avant que X_2 ne tombe en panne.

Par contre, dans l'état où X_1 est défaillant, si X_2 tombe en panne dégradée, il y a tout intérêt à attendre que X_1 soit réparé avant d'entreprendre la réparation de X_2 afin d'éviter de perdre la fonction assurée par le système.

Modélisation par des chaînes de Markov

Prise en compte des défaillances « critiques » versus défaillances « dégradées »

Cette politique de maintenance est modélisée sur la figure suivante :



Pour la première panne, défaillances critiques et dégradées sont prises en compte et réparées.
Par contre, pour la seconde panne, qui met le système totalement en panne, seules les défaillances critiques sont prises en compte.

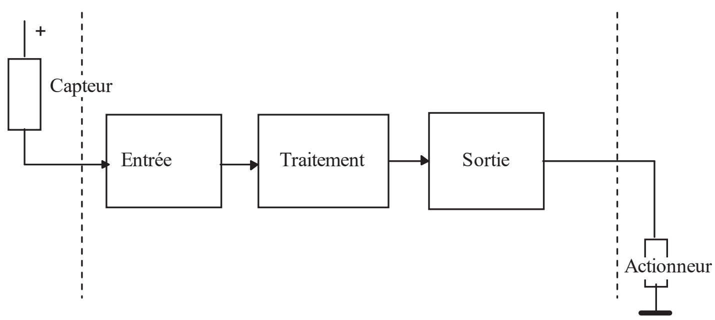
La réparation des pannes dégradées de X_1 dépend de l'état de X_2 et réciproquement. Il s'agit là d'une interdépendance entre X_1 et X_2 très facile à modéliser avec une chaîne de Markov, ce qu'il est impossible de faire avec, par exemple, les RBD ou les AdD.

Exercices

Exercice 1

On considère un système d'automatisme constitué d'une unité de traitement, d'une unité d'entrée (reliée à un capteur de niveau par exemple) et d'une unité de sortie (reliée à un actionneur, une vanne ou une pompe par exemple).
Chacun de ces trois types de composants est caractérisé par un taux de défaillance constant. Ces taux sont notés respectivement λ_T, λ_E, λ_S.
Le taux de réparation est commun à tous les éléments.
On suppose que dès que le système ne fonctionne plus, il est mis à l'arrêt pour réparation et par conséquent, une seconde défaillance ne peut intervenir.

Construisez la CdM à temps continu représentant les états du système.



Valeurs numériques : $\lambda_T = 0{,}7.10^{-6}\ h^{-1}$, $\lambda_E = 0{,}5\ .10^{-6}\ h^{-1}$, $\lambda_S = 1{,}6.10^{-6}\ h^{-1}$, $\mu = 10^{-4}\ h^{-1}$

Exercices

Exercice 2

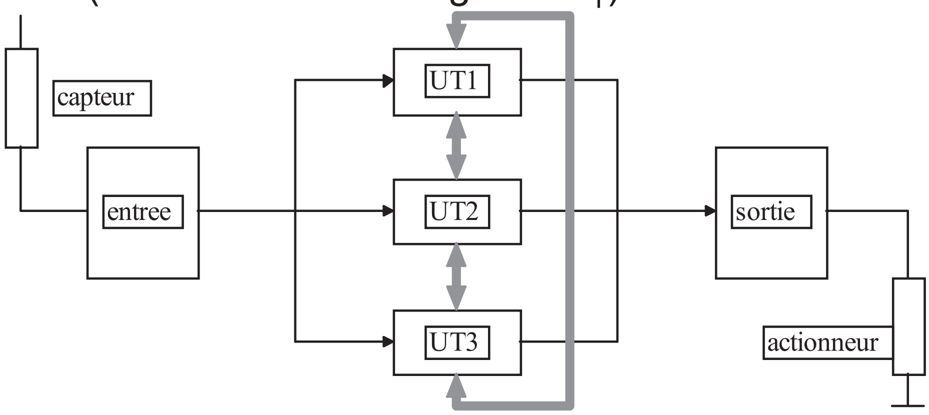
Pour augmenter la disponibilité du système présenté à l'exercice précédent, on cherche à introduire des éléments redondants. Compte tenu des données numériques du problème, quel élément devra être doublé en priorité ?
Le taux de réparation μ est toujours commun à tous les éléments et on dispose d'un seul réparateur, c'est-à-dire qu'on répare toujours le premier élément tombé en panne.
On suppose toujours que dès que le système ne fonctionne plus, il est mis à l'arrêt pour réparation et par conséquent, une seconde défaillance ne peut intervenir. Les circuits de sortie peuvent, par contre, être l'un ou l'autre réparés (changement) en cours de fonctionnement.

Faire le bilan des différents états possibles du système (certains ayant éventuellement été regroupés).
Déterminer la CdM à temps continu représentant les états du système.
Donner la matrice de taux de transition, calculer le MTTFF.

Exercices

Exercice 3

On considère un système d'automatisme constitué d'une carte d'entrée, d'une carte de sortie et de trois unités de traitement montées en redondance 2 sur 3. Chacun de ces trois types de composants est caractérisé par un taux de défaillance constant. Ces taux sont notés respectivement λ_E, λ_T, λ_S.
Les unités de traitement communiquent entre elles par des liaisons série haute vitesse qui leur permet d'échanger leurs informations et de s'accorder sur la valeur à transmettre lorsqu'au moins deux sont d'accord. Chaque UT est maître d'une liaison, on peut donc considérer l'ensemble 1 UT + 1 liaison comme formant un tout (taux de défaillance global λ_T).



Exercices

Exercice 3

Le taux de réparation est commun à tous les éléments et on dispose d'un seul réparateur qui répare toujours le premier élément tombé en panne, sauf s'il s'agit d'une UT que l'on doit réparer en priorité.
On suppose en outre que dès que le système ne fonctionne plus, il est mis à l'arrêt pour réparation et par conséquent, une seconde défaillance ne peut intervenir. Les unités de traitement peuvent par contre être changées en cours de fonctionnement.

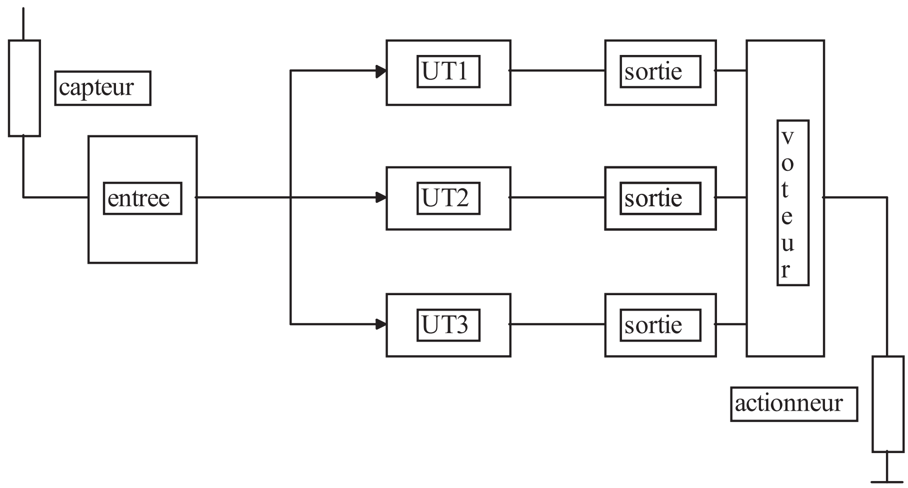
Déterminer la CdM à temps continu représentant les états du système et la matrice de taux de transition.
Calculer le MTTFF.
On suppose que le système démarre avec tous ses composants en état de marche.

Application numérique: $\lambda_T = 1{,}5.10^{-7}\ h^{-1}$, $\lambda_E = 0{,}5.10^{-7}\ h^{-1}$, $\lambda_S = 0{,}8.10^{-7}\ h^{-1}$, $\mu = 3\ .10^{-4}\ h^{-1}$

Exercices

Exercice 4

On considère maintenant la structure suivante (évolution de l'exercice précédent) dans laquelle le vote est assuré par un circuit voteur majoritaire électronique, en aval des circuits de sortie qui sont également triplées.



En supposant toujours que l'on répare l'UT en priorité, calculer le MTTFF et le MTTR d'un bras constitué d'une UT et d'un circuit de sortie. En déduire le taux équivalent de défaillance et de réparation de chaque bras.

Exercices

Exercice 4

Quelle hypothèse est alors nécessaire pour pouvoir réutiliser la structure de la CdM à temps continu du système précédant afin de calculer les temps caractéristiques de ce nouveau système ?

Que vaut alors le MTTFF?

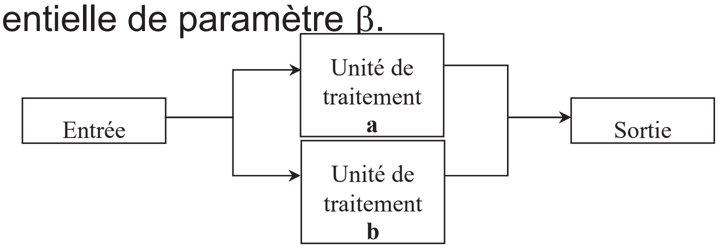
Application numérique : le voteur a même taux de réparation et son taux de défaillance est $\lambda_V = 0{,}3.10^{-7}\ h^{-1}$.

Exercices

Exercice 5

Système en redondance chaude avec temps de commutation[1]

Soit un système contenant deux unités de traitement de données (**a** et **b**) fonctionnant en redondance chaude : les deux unités de traitement fonctionnent en parallèle, mais seulement une est utilisée à un instant donné pour fournir la sortie. Pendant leur fonctionnement, les deux unités de traitement peuvent tomber en panne avec des taux de défaillance constants λ_a, respectivement λ_b et elles sont réparées avec des taux de réparation constants μ_a, respectivement μ_b. Lorsque l'unité de traitement utilisée pour fournir la sortie tombe en panne, le système commute sur la deuxième unité de traitement (si celle-ci est en état de fonctionnement) après un temps de commutation qui suit une loi exponentielle de paramètre β.



1 Cette problématique générale est rencontrée dans un grand nombre des systèmes réels ; par exemple c'est le cas de deux calculateurs dans un système embarqué qui doivent fournir des consignes aux actionneurs à la sortie en fonction des entrées obtenues à partir des capteurs, c'est aussi les cas de deux satellites qui se trouvent sur l'orbite terrestre et lorsque l'un deux ne fonctionne plus il faut que le deuxième prenne le relais pour assurer la transmission des données dans le domaine des radio communications.

Exercices

Exercice 6

Système de deux calculateurs en redondance

On considère un sous-système composé de deux entités[1] identiques en parallèle : l'une est en service et l'autre est en attente prête à fonctionner (lorsque l'entité qui est en service tombe en panne, celle qui est en attente prend le relai instantanément). Chaque entité est caractérisée par deux modes de défaillance :

- défaillance en fonctionnement de taux λ_1 constant ;
- défaillance en attente de taux λ_2 constant.

Les défaillances en fonctionnement et en attente sont détectées immédiatement et la réparation est engagée si l'opérateur de maintenance est disponible. On dispose d'un seul réparateur et il répare en priorité la première entité défaillante.
La loi du temps de réparation après défaillance en fonctionnement est caractérisée par un taux μ_1 constant et la loi du temps de réparation après défaillance en attente est caractérisée par un taux μ_2 constant.
Application numérique :

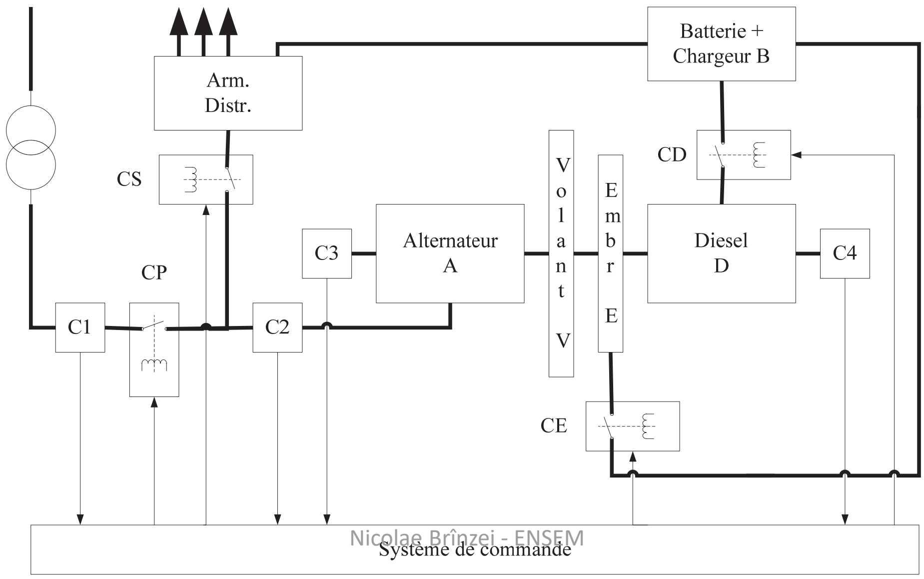
$$\lambda_1 = 3.5 \cdot 10^{-4} h^{-1} \ ; \lambda_2 = 1 \cdot 10^{-4} h^{-1} \ ; \mu_1 = 1.6 \cdot 10^{-2} h^{-1} \ ; \mu_2 = 2 \cdot 10^{-2} h^{-1}$$

1 Cette problématique générale est rencontrée dans un grand nombre des systèmes réels ; par exemple c'est le cas de deux calculateurs dans un système de embarqué qui doivent fournir des consignes aux actionneurs à la sortie en fonction des entrées obtenues à partir des capteurs.

Exercices

Exercice 7

On considère un système dont l'alimentation électrique ne doit pas être interrompue. Pour cela, en plus de la connexion au réseau de distribution public par l'intermédiaire d'un transformateur, le réseau interne du système est en permanence connecté à une alimentation de secours constituée d'un alternateur, d'un volant d'inertie et d'un moteur diesel.



Exercices

Exercice 7

En marche normale, le réseau public fournit l'énergie à l'installation et alimente l'alternateur auto-excité qui entraîne le volant d'inertie. Le système de commande maintient le contacteur principal CP et surveille les réseaux par les capteurs C1 et C2.
Dès la défaillance du réseau public, le système de commande ouvre le contacteur CP et commande le démarrage du moteur diesel. L'énergie cinétique accumulée dans le volant d'inertie est restituée au réseau interne pendant le transitoire de démarrage du diesel. Dès que les vitesses de l'alternateur et du diesel sont suffisamment voisines (mesurées par les capteurs C3 et C4), le système de commande enclenche la fermeture de l'embrayage électromécanique et le diesel fournit alors l'énergie nécessaire.
En cas de commande infructueuse, le système de commande ouvre le contacteur secondaire CS par sécurité.

Exercices

Exercice 7

On se propose d'étudier ce système du point de vue de la disponibilité de l'énergie sur le réseau interne, en tenant compte de la stratégie de maintenance suivante:

- on ne peut que subir le réseau public caractérisé par son MTTFF et son MTTR
- on regroupera dans une même entité le système de commande, les capteurs et les contacteurs que l'on appellera "commande"
- la panne de l'alternateur peut être détectée à tout moment grâce aux capteurs et sa maintenance entreprise immédiatement par l'ouvrier de maintenance électrique
- des tests périodiques permettent de diagnostiquer la défaillance du démarrage du moteur diesel ; s'il s'agit d'une panne électrique (batterie+ chargeur), l'ouvrier de maintenance électrique peut intervenir ; s'il s'agit d'une panne du diesel, il faut faire intervenir une entreprise sous contrat de maintenance
- la panne de l'embrayage est couverte par la même procédure que celle du diesel
- consigne est donnée à l'ouvrier de maintenance électrique de réparer les pannes dans l'ordre de leur arrivée

Exercices

Exercice 7

- le système de commande a fait l'objet d'une conception soignée (éléments redondants et tests multiples) et en cas de défaillance fournit une téléalarme qui permet l'intervention d'une entreprise de maintenance ; en attendant l'état dans lequel se trouve le système du point de vue de la source d'énergie est auto-maintenu par les contacteurs jusqu'à la prochaine défaillance (coupure du réseau public ou panne du diesel).

L'étude de disponibilité du système de secours est indépendante du reste du système. Une étude préalable peut donc être menée pour étudier son MTTFF.

Le sous-système est décomposé en trois parties :
- l'alternateur A
- la partie électrique du groupe diesel, embrayage, batterie, chargeur : E
- la partie mécanique diesel, embrayage… M

1. Définir les états possibles du système en fonction des états de ses parties ainsi définies.
2. Déterminer la CdM à temps continu correspondante et la matrice de taux de transitior
3. Expliquer comment on peut calculer la probabilité pour que l'installation soit alimentée

Bibliographie

[Kirkwood15] Kirkwood, James R.. Boca Raton, F.L., Markov processes, CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015 (*Cote bibliothèque: Eole 519.2 KIR*).

[Iosifescu10] Iosifescu, M. *et al.*, Modèles stochastiques, Lavoisier, 2007 (*Cote bibliothèque: Eole 519.2 IOS*).

[Iosifescu10] Iosifescu, M. *et al.*, Introduction to stochastic models, Hoboken, London, 2010 (*Cote bibliothèque: Eole 519.2 IOS i*).

[Nakagawa11] Nakagawa T., Stochastic Processes with Applications to Reliability Theory, Springer Series on Reliability Engineering https://link-springer-com.bases-doc.univ-lorraine.fr/book/10.1007/978-0-85729-274-2

[Osaki02] Stochastic models in reliability and maintenance, Springer, 2002 https://link-springer-com.bases-doc.univ-lorraine.fr/book/10.1007/978-3-540-24808-8