OITAVA AULA PRÁTICA – TRANSFORMADA DE FOURIER E PROCESSAMENTO DE IMAGENS

G. P. Calais, M. V. R. Campos

UFV, Viçosa, Brasil

E-mails: gabriel.calais@ufv.br, marciovonrondow96@gmail.com

Resumo: O presente relatório trata de uma aula prática sobre Transformada de Fourier bidimensional e processamento de imagens no *software MATLAB*. O objetivo da aula foi aprender sobre a Transformada de Fourier bidimensional e suas finalidades. Para tanto, foram mostradas algumas aplicações da mesma, além da proposição de exercícios. Com os exercícios foi possível o aprendizado sobre o processamento de imagens utilizando-se frequência.

Palavras-chave: *MATLAB*, Fourier, frequência, processamento, imagens.

Introdução

A transformada de Fourier é a transformada de Laplace calculada apenas para valores imaginários de "s". Sendo assim, a transformada de Fourier bidimensional é o cálculo citado feito para duas dimensões. Fourier mede apenas o caráter ondulatório de uma função ou sinal, ou seja, restringe-se a uma dimensão do mapa de Laplace.

A oitava aula prática da disciplina de Processamento Digital de Sinais consistiu na apresentação e aplicação de conceitos sobre Transformada de Fourier bidimensional e processamento de imagens no *software MATLAB*.

Na prática em questão, o *software* foi usado para a compreensão das aplicações da Transformada de Fourier no processamento de imagens, além da filtragem das mesmas, através de orientações e utilizando o comando *help*.

Materiais e métodos

Foi utilizado o *software MATLAB* com a finalidade de aprender sobre as aplicações da Transformada de Fourier bidimensional no processamento de diferentes sinais de imagem.

Alguns dos comandos mais importantes utilizados na aula prática constam na tabela 1.

Tabela 1: Principais comandos da aula prática.

Comando	Função
angle	Calcula o ângulo de fase de um número
abs	Calcula o módulo de um número
subplot	Divide uma figura em vários gráficos
imread	Carrega um arquivo de imagem para a *workspace*
imshow	Exibe uma imagem em uma figura
fft2	Realiza a transformada rápida de Fourier bidimensional.
ifft2	Realiza a transformada inversa de Fourier bidimensional.
fftshift	Centraliza a transformada de Fourier

A transformada de Fourier descreve um sinal no domínio da frequência em termos da sua magnitude e fase. Chamamos de espectro o conjunto de magnitudes estabelecidas para cada frequência determinada em sua exponencial complexa dada por:

$$X(jw) = \left|X_{(jw)}\right| e^{j\angle X_{jw}} \tag{1}$$

Onde $\left|X_{(jw)}\right|$ é a magnitude e $j\angle X_{jw}$ o ângulo de fase.

A partir da equação (1), calcula-se o par de transformadas discretas de Fourier aplicada em uma função bidimensional da seguinte forma:

$$F_{(u,v)} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right] \tag{2}$$

Para $u \; e \; v$ “discretizados” com $u = (0, 1, 2, \dots, M - 1)$ e $v = (0, 1, 2, \dots, N - 1)$ e a inversa:

$$f_{(x,y)} = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f(u,v) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right] \tag{3}$$

Para $x \; e \; y$ assumindo valores discretos, com $x = (0, 1, 2, \dots, M - 1)$ e $y = (0, 1, 2, \dots, N - 1)$. Onde $\Delta u = \frac{\Delta x}{M}$ e $\Delta v = \frac{\Delta y}{N}$.

Na prática, foi utilizado a operação de transformada de Fourier através do comando *fft2* a qual, devido às suas características de implementação, faz com que a complexidade da operação caia de N^2 para $N \log_2 N$. A qual garante uma economia computacional para valores de N muito grandes.

Para a realização do primeiro exercício prático, utilizou-se duas imagens em preto e branco interpretadas como um sinal $x(t_1, t_2)$, em que t_1, t_2 representa o eixo horizontal e vertical respectivamente. A transformada de Fourier $X(jw_1, jw_2)$ representa a decomposição da imagem capturando variações espaciais de $x(t_1, t_2)$ em diferentes frequências nas direções de cada eixo.

Dada duas imagens A e B, foi obtido as suas transformadas de Fourier bidimensional. Feita a modificação da imagem para sua forma complexa, realizou-se operações no domínio da frequência. Utilizou-se a magnitude das imagens mantendo o ângulo de fase igual a zero a fim de observar o resultado da imagem obtida a partir da transformada inversa de Fourier bidimensional sobre o espectro modificado.

O mesmo foi feito utilizando apenas a fase das imagens e mantendo a magnitude constante igual a um. Após as observações, obteve-se uma imagem utilizando as fases da Transformada de Fourier em A e B com os seus módulos do espectro a fim de analisar os resultados e discuti-los.

No exercício seguinte, foi realizado a filtragem de duas imagens no domínio da frequência. Foi observado o efeito de realce das imagens obtidas através da multiplicação da transformada de Fourier da imagem com a função de transferência do filtro:

$$Y(jw_1, jw_2) = X(jw_1, jw_2).H(jw_1, jw_2) \quad (4)$$

Para obter o realce é necessário aplicar um filtro passa-alta, pois esse tipo de filtro enfatiza os detalhes mais finos. Foi implementado o filtro Gaussiano H_b:

$$H_b = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Onde x e y representam os eixos horizontais e verticais respectivamente e σ representa o desvio padrão da distribuição Gaussiana dos pixels que compõem a imagem dado como parâmetro para a construção do filtro.

O filtro Gaussiano é um filtro passa-baixa, ele captura a força de brilho da imagem, o qual a maior parte está concentrada em níveis de baixa frequência. Para o filtro passa-alta foi utilizado $H_q = 1 - H_b$.

Após a utilização do filtro, a imagem original foi somada a imagem filtrada e observou-se o efeito de realce através da transformada inversa de Fourier.

Por fim, no último exercício, foi feito testes de filtros passa-alta e passa-baixa em duas imagens distintas, analisou-se os efeitos obtidos e em quais situações os filtros são mais indicados.

Resultados

Após os testes feitos implementou-se o código de programação com suas devidas finalidades. Nas figuras constam os resultados da resolução dos problemas propostos.

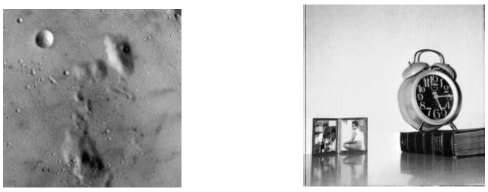

Figura 1: Imagens da superfície da lua e de uma estante, respectivamente.

Figura 2: Transformada inversa do módulo das imagens.

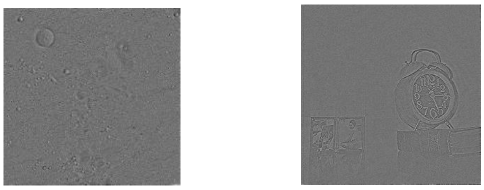

Figura 3: Transformada inversa da fase das imagens.

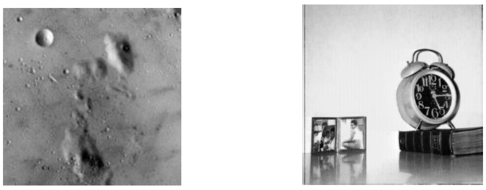

Figura 4: Transformada inversa do módulo e da fase das imagens.

Figura 5: Imagem da lua a ser filtrada.

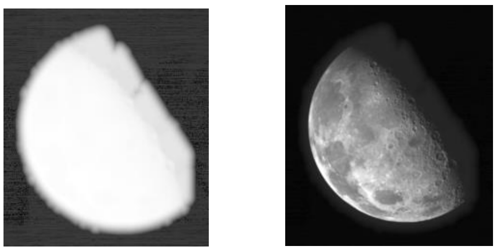

Figura 6: Imagem da lua após a aplicação de um filtro passa-baixas e imagem com fundo reconstruído, respectivamente.

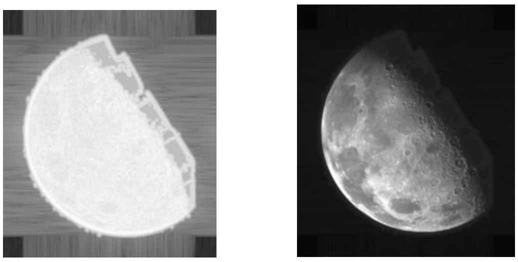

Figura 7: Imagem da lua após a aplicação de um filtro passa-altas e imagem com fundo reconstruído, respectivamente.

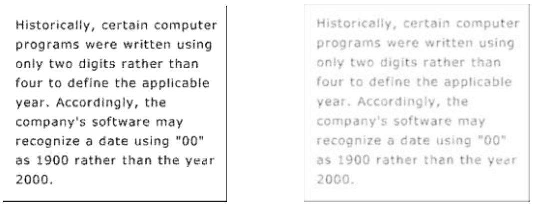

Figura 8: Imagem de texto original e após a aplicação de um filtro passa-baixas, respectivamente.

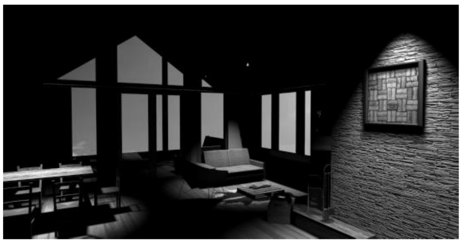

Figura 9: Imagem com pouca luminosidade.

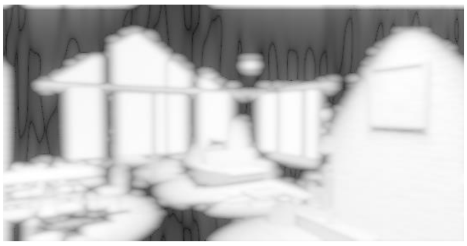

Figura 10: Imagem com pouca luminosidade após aplicação de um filtro passa-baixas.

Figura 11: Imagem mais clara e menos nítida após ser somada com seu espectro filtrado.

Figura 12: Imagem com muita luminosidade.

Figura 13: Imagem com muita luminosidade após aplicação de um filtro passa-altas.

Figura 14: Imagem menos clara e mais nítida após ser somada com seu espectro filtrado.

Discussão

No primeiro exercício prático, verificou-se que apenas o módulo do espectro da imagem não possui importância. Como observado na figura 2, a imagem retornada da transformada inversa de Fourier não apresentou nenhum dado relevante. Porém verificou-se que aplicando a transformada inversa mantendo a magnitude constante e a fase variando pelo espaço dos eixos coordenados a imagem obtida apresentou traços relevantes das descontinuidades do desenho, como se observa na figura 3.

Portanto a relação entre as fases contém informações significativas acerca da natureza do sinal, sem ela a imagem perde seus dados independente da magnitude do módulo contido nas somas exponenciais complexas.

A figura 4 indica que a magnitude dos módulos, junto com suas fases em cada nível de frequência estabelecida, define a nitidez da imagem identificando melhor a textura e as suas bordas.

No exercício seguinte realizou-se a filtragem da imagem da lua como mostram as figuras 5, 6 e 7, utilizou o filtro Gaussiano e obteve-se duas funções de transferência passa-baixa e passa-alta. A resposta obtida usando o filtro passa-baixa apresentou um maior brilho da imagem, visto que a maior força da imagem está concentrada nas componentes de baixas frequências, consequentemente a imagem ficou mais borrada e menos nítida.

Quanto ao filtro passa-alta, a resposta apresentou um nível de detalhamento pouco perceptível, visto que sua função é capturar os componentes de alta frequência responsáveis pelas transições abruptas do nível de cinza. Porém, foi possível perceber detalhes nos contornos externos a imagem. O fundo preto apresentou maior número de bordas destacadas em comparação com a imagem original.

Em seguida, dada a imagem texto com palavras desgastadas, foi utilizado o filtro passa-baixa a fim de solucionar o problema. Os ruídos presentes na imagem são devido aos componentes de alta frequência, assim o filtro passa-baixa captura as frequências mais próximas da origem do espectro e melhora a qualidade da imagem. Como se observa na figura 8 a imagem apresenta um nível maior de brilho e as letras mais legíveis em comparação com a original.

O último exercício proposto, teve como objetivo compreender o significado dos filtros passa-alta e passa-baixa aplicados nas imagens.

O filtro passa-baixa captura os componentes de baixa frequências com raio próximo a origem do espectro da imagem, utilizada para melhorar a qualidade de uma imagem ruidosa, porém ela tira a sua nitidez deixando-a mais suave.

Foi realizado um teste de filtro passa-baixa em um ambiente escuro, o qual, pela figura 11, percebe-se que houve um maior brilho em torno das regiões iluminadas, isso se deve ao fato de que a maior força da imagem se concentra nas regiões de baixa frequência.

Em seguida aplicou-se um filtro passa-alta em uma imagem clara. Como se observa na figura 14, o resultado da imagem filtrada foi imperceptível, visto que a imagem possui poucas bordas e transições abruptas de nível de cinza, o filtro passa-alta é responsável por aumentar o nível de detalhamento da imagem devido aos componentes de alta frequência. Neste caso, o filtro manteve a imagem nítida.

Conclusão

Dado o exposto, a prática em questão focou na Transformada de Fourier bidimensional como ferramenta para análise de sinais no domínio da frequência. Além disso, foi estudado, também, o processamento de sinais de imagem. De acordo com os resultados obtidos e discutidos, foi possível observar as aplicações da Transformada de Fourier e das técnicas de filtragem para alterar a qualidade de algumas imagens. Assim, pode-se concluir que os recursos matemáticos abordados podem ser amplamente utilizados na análise e filtragem de diferentes tipos de sinais, como os de imagem.

Referências

[1] LATHI, B.P. Sinais e Sistemas Lineares. 2ª edição. Porto Alegre, Bookman, 2007.

[2] Mathworks. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/>. Acessado em 26/10/2019

[3] IC - UFF. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/~aconci/filtragemdominiofrequencia.pdf>. Acessado em 28/10/2019

[4] Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/viewFile/477/483>. Acessado em 26/10/2019