

Síntese de sinais e minimização do Efeito Gibbs

Alexandre Gomes Caldeira - 96701
Departamento de Engenharia Elétrica,
Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG
E-mail: alexandre.caldeira@ufv.br

Abstract—O presente trabalho trata do fenômeno conhecido como Efeito Gibbs, que ocorre na síntese de sinais descontínuos a partir da série de Fourier de tempo discreto. No curso deste relatório, são apresentadas demonstrações do efeito e das metodologias de Fejer e de Hamming para minimização do mesmo. Ainda, é apresentado o espectro de um sinal de áudio e sua reconstrução através da série de Fourier, demonstrando a aplicabilidade desta metodologia.

I. INTRODUÇÃO

Em 1822 Joseph Fourier propôs e provou uma série capaz de sintetizar sinais contínuos ou descontínuos através de uma soma (série infinita) ponderada de senos e cossenos, a partir da fórmula de Euler [1]. Fourier propôs o que veio a ser conhecido a Transformada de Fourier como uma ferramenta matemática, a princípio, para modelagem sistemas térmicos estudando suas respostas a entradas variantes no tempo.

Atualmente, em conjunto com a transformada de Laplace e a transformada Z, a série e a transformada de Fourier para tempo contínuo e discreto são empregadas tanto para síntese quanto para decomposição de sinais de maneira aproximada. Como abordado anteriormente em outros trabalhos nesta disciplina, sabe-se que a multiplicação na frequência tem propriedade de identidade à convolução de sinais no tempo.

Dessa maneira, a capacidade de sintetizar sinais através de uma soma ponderada de senóides é essencial para a teoria moderna de sinais e sistemas, principalmente no contexto digital. Entretanto, apesar de convergir para o sinal desejado através de uma soma infinita, ao empregar-se uma quantidade finita de termos existem artefatos e fenômenos que podem afetar a síntese dos sinais desejados.

Conhecido como "Efeito Gibbs" [2], a síntese de sinais descontínuos como formas de ondas senoidais contínuas a partir da Série de Fourier de Tempo Discreto (SFTD) com um número finito de termos resulta em picos de amplitude nas proximidades das discontinuidades do sinal discreto. Na literatura, existem diferentes metodologias para se minimizar este efeito, cada um com diferentes objetivos principais e portanto, resultados diferentes.

II. OBJETIVOS

Este trabalho busca estudar e comparar, em termos práticos, metodologias de síntese de sinais contínuos reconstruídos a partir de suas séries de Fourier em tempo

discreto. Especificamente, será apresentado o Efeito Gibbs e as metodologias de Fejer e de Hamming para amortecimento de distorções nas proximidades de discontinuidades do sinal sintetizado. A partir do roteiro desta prática [3], este documento relata atividades demonstrando o Efeito Gibbs na síntese do sinal de onda quadrada. Finalmente, será sintetizado um sinal sonoro aplicando as metodologias estudadas de forma a comparar de maneira prática cada uma.

III. MATERIAIS E MÉTODOS

Conforme propôs inicialmente por Fourier, a síntese de sinais contínuos a partir de uma série de termos discretos pode ser realizada através da SFTD apresentada na Eq. 1, empregando a fórmula de Euler:

$$x(t) = \sum_{k=-k_{max}}^{k_{max}} \{C_k e^{jk\omega_0 t}\} = \sum_{k=0}^{k_{max}} \{2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \angle C_k)\} \quad (1)$$

A. Efeito Gibbs

Computacionalmente, em MATLAB, foi providenciada a função "ck.m", descrevendo coeficientes da onda quadrada conforme o código abaixo:

```
function fct=ck(k)

% Esta funcao produz os coeficientes da serie de
% Fourier de uma onda quadrada para ser usada na aula
% pratica de ELT 355. Note que a funcao tem um
% argumento de entrada 'k' e retorna ck, o k-esimo
% coeficiente desta serie. A funcao pode tambem
% retornar um conjunto de coeficientes se a entrada k
% for um vetor. Por exemplo, se k = [0,1,2], a funcao
% retornara os coeficientes [c0,c1,c2].

fct = zeros(size(k));
T1 = pi/2;
T = 2*pi;
for m=1:length(k)
    if k(m)==0
        fct(m)=2*T1/T;
    else
        fct(m)=1./(k(m)*pi).*(sin(k(m)*T1));
    end
end

return;
```

Dada então a série c_k , empregando um diferente número de termos, apresentaremos a síntese da onda quadrada e o subsequente efeito Gibbs.

B. Janelamento

Diante das possíveis técnicas para minimização deste fenômeno, existe o Janelamento de Fejer, aplicando um fator de correção a cada harmônico segundo o algoritmo abaixo:

```
function [x] = sintetizaX_fejer(t,kmax,w0)
    k = -kmax:1:kmax;
    x = 0;
    for iterador_K = 1:numel(k)
        k_atual = k(iterador_K);
        x = x +
            ((kmax-k_atual)/kmax)*2*abs(ck(k_atual))*
            cos(k_atual*w0*t + angle(ck(k_atual)));
    end
end
```

Além disso, será aplicado também o Janelamento de Hamming, o qual aplica um mesmo fator de ponderação para cada harmônico, conforme apresentado no algoritmo:

```
function [x] = sintetizaX_hamming(t,kmax,w0)
    k = -kmax:1:kmax;
    x = 0;
    for iterador_K = 1:numel(k)
        k_atual = k(iterador_K);
        x = x + (0.54 + 0.46*cos((k_atual*pi)/kmax))*
            2*abs(ck(k_atual))*
            cos(k_atual*w0*t+angle(ck(k_atual)));
    end
end
```

C. Síntese de áudio

Evidentemente, apesar das demonstrações iniciais da SFTD terem como objetivo estudo de sistemas térmicos, a mesma metodologia pode e é aplicada a diversos tipos de sinais, incluindo imagens e como neste caso, áudio. Seguindo instruções do roteiro [3], será apresentado o sinal de áudio de um trompete no tempo a partir do algoritmo abaixo:

```
% Carregando e reproduzindo o arquivo trumpet.mat:
load('trumpet.mat')
sound(y,Fs)

% Observando 3 janelas diferentes:
segmento = floor(length(y)/3); % calcula 1/3 do sinal
y1 = y(1:segmento);           % inicio a 1/3 do audio
y2 = y(segmento+1:2*segmento); % 1/3 a 2/3 do audio
y3 = y(2*segmento+1:end);      % acessa restante
```

Ainda, será também apresentado o espectro do sinal de áudio na frequência, além da sua reconstrução com e sem informação de fase, discutindo o efeito destas técnicas.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante dos códigos

A. Efeito Gibbs

Empregando a função dada, foi reconstruída e apresentada a transformada de Fourier da série c_k que descreve o espectro da onda quadrada na frequência, apresentada em magnitude e ângulo em radianos na Figura 1.

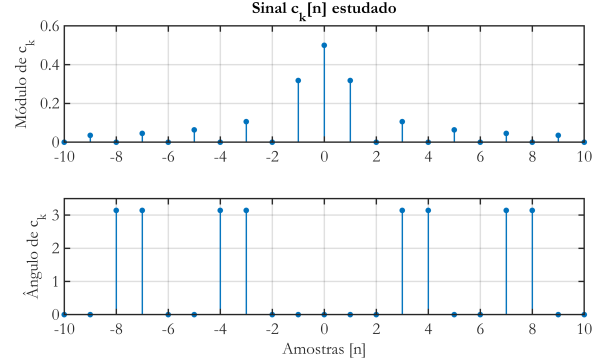


Fig. 1. Módulo e fase de diferentes amostras da série c_k .

Ainda, a partir dos algoritmos descritos, foi reconstruída a onda quadrada (já conhecida) utilizando a Eq. 1 com k termos, conforme apresentado na Figura 1. Evidentemente, nota-se que o aumento no número de harmônicos (senóides de frequências múltiplas da fundamental) faz com que o sinal contínuo obtido se aproxime cada vez mais da onda quadrada, com o fenômeno do Efeito Gibbs se destacando nos instantes próximos a 1.5 segundos. Especificamente neste instante, a função da onda quadrada torna-se descontínua com limite esquerdo tendendo a 2 e limite direito tendendo a 0.

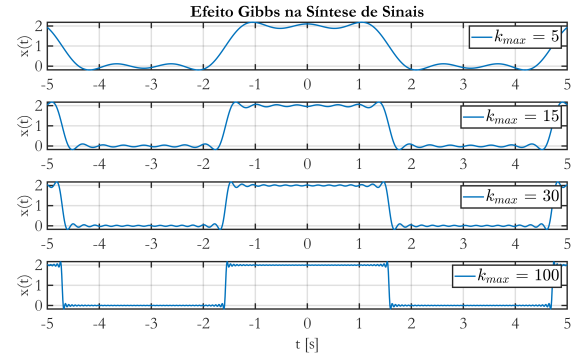


Fig. 2. Sinal c_k reconstruído como $x(t)$, a onda quadrada.

Assim, principalmente ao reconstruir o sinal com 100 senóides, observa-se na Figura 2 uma onda com baixa amplitude de ondulação mas picos próximos das descontinuidades, como esperado.

B. Janelamento

Uma vez visualizado o efeito, sua minimização a partir das metodologias de Fejer e de Hamming foi aplicada empregando os algoritmos apresentados na seção de metodologia. Na Figura 3, observa-se um amortecimento

do Efeito Gibbs e suavização da onda resultante da síntese pela SFTD, resultando em picos de menor amplitude nas proximidades das discontinuidades da função.

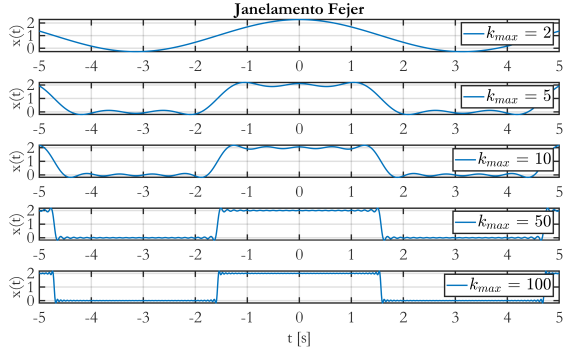


Fig. 3. Sinal c_k reconstruído com compensação de distorções por janelamento Fejer.

Similarmente, aplicando o algoritmo que implementa o Janelamento Hamming, obteve-se a Figura 4. Nota-se agora uma suavização maior, de tal maneira que a onda resultante quase não apresenta ondulações visualmente perceptíveis devido à ponderação aplicada aos termos.

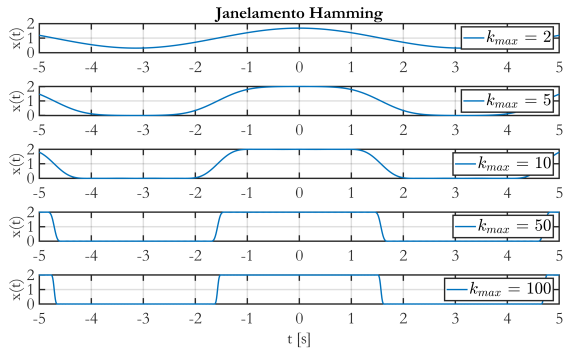


Fig. 4. Sinal c_k reconstruído com compensação de distorções por janelamento Hamming.

Assim, o janelamento Hamming apresenta-se como metodologia mais rígida, resultando em uma forma de onda mais suave em relação ao Janelamento de Fejer. Entretanto, o decrescimento da função nas proximidades da discontinuidade é também amortecido, podendo ser indesejado em determinadas situações. Evidentemente, para poucos termos (poucas harmônicas sintetizadas), o Janelamento de Fejer obtém resultados menos distorcidos apesar de ser menos suaves do que os resultados do Janelamento de Hamming para um alto número de senóides componentes.

C. Síntese de áudio

A partir dos algoritmos apresentados na seção de metodologia, foram importados os dados do arquivo "trumpet.mat", cujo áudio tem suas amplitudes dispostas no tempo na Figura 5. Nota-se uma oscilação que se repete

em uma alta frequência, composta de diversas senóides harmônicas, ocasionando uma forma de onda bastante diferente da senóide oscilando em uma única frequência fixa.

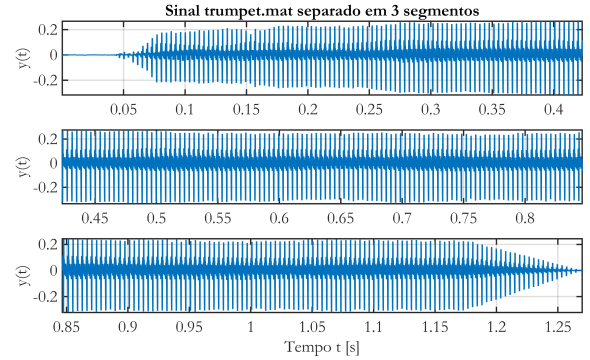


Fig. 5. Sinal sonoro de um trompete continuamente tocando um acorde, apresentado em três segmentos.

Aplicando a transformada rápida de Fourier discutida em relatórios anteriores, foi obtida a Figura 6, apresentando a informação de magnitude e fase do sinal da Figura 5. Selecionando os primeiros picos de magnitude e frequência, conforme apresentado na Figura 7, o som do trompete foi reconstruído a partir de um diferente número de termos.

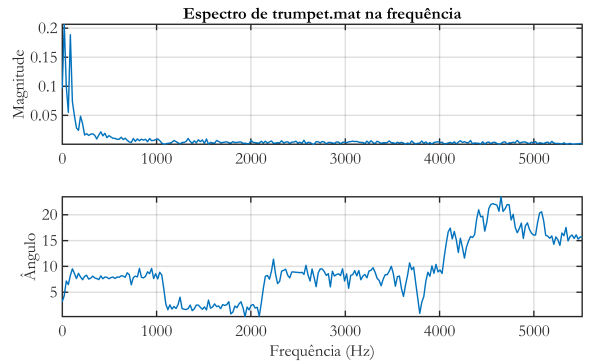


Fig. 6. Espectro na frequência do áudio do trompete em magnitude e ângulo (radianos).

A reconstrução do sinal com e sem informação de fase foi comparada visualmente e em termos de áudio, apresentada na Figura 8 na página seguinte. De fato, o sinal auditivo obtido com informação de fase se adequa melhor à reconstrução, e se aproxima bastante ao sinal original. Entretanto, observou-se também que quanto mais harmônicas usadas (empregou-se cinco, sete e doze), melhor o sinal auditivo resultante, conforme apresentando anteriormente na seção de Efeito Gibbs.

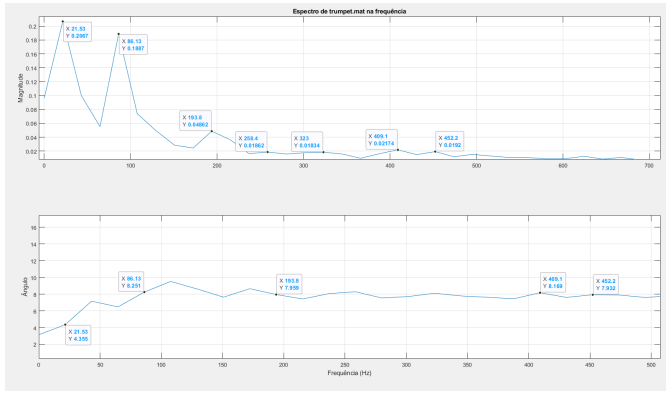


Fig. 7. Frequências selecionadas do sinal original para síntese do sinal reconstruído.

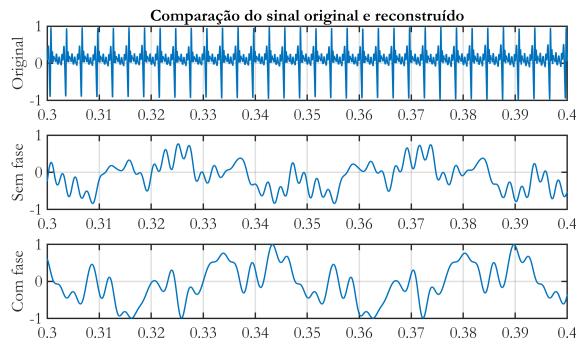


Fig. 8. Sinal original, reconstruído sem informação de fase, e reconstruído com informação de fase, empregando as sete harmônicas mais proeminentes no espectro.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este relatório apresentou uma breve história da proposição da transformada e série de Fourier como método de estudo de sinais no domínio da frequência e de reconstrução (síntese) de sinais contínuos a partir de amostras discretas. Especificamente, notou-se que discontinuidades no sinal amostrado levam a picos harmônicos na síntese, que são amortecidos cada vez mais para um termo crescente de senóides componentes do sinal sintetizado.

Entretanto, devido a limitações comuns de tempo, recursos computacionais e até analógicos em determinados sistemas, são frequentemente empregadas técnicas de minimização artificiais destes picos (denominados Efeito Gibbs). Apresentou-se o efeito e comparação de duas destas técnicas: o janelamento de Fejer e Hamming.

O janelamento Fejer se mostrou mais eficaz para um número menor de amostras, amortecendo os picos do Efeito Gibbs sem excesso de distorção no sinal sintetizado. Porém, para um elevado número de amostras, o Janelamento Hamming mostrou-se mais efetivo visualmente, convergindo para um sinal mais suave. Finalmente, foi apresentado espectro no tempo e na frequência de um sinal sonoro de trompete, empregando seus picos para sintetizar o sinal original com mais e menos informação. Demonstrou-se assim que o emprego da informação de fase é essencial para sintetização devida do sinal original, e que o quanto mais senóides forem usadas, mais próximo do sinal original será o sinal sintetizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. V. Oppenheim, *Sinais e sistemas*. Prentice-Hall, 2010.
- [2] B. P. Lathi, *Sinais e sistemas lineares-2*. Bookman, 2006.
- [3] L. B. Felix, *Roteiro da Aula Prática 5: Série de Fourier - Efeito Gibbs*. Departamento de Engenharia Elétrica Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Viçosa Universidade, 2022.