ELT 355 - Laboratório de sinais e sistemas

Aula Prática 8: Análise de Similaridade

Departamento de Engenharia Elétrica

Centro de Ciência Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Viçosa

1 Introdução

A estimativa do quanto dois sinais são parecidos têm muitas aplicações em processamento de sinais. Por exemplo, ferramentas como radar, sonar, etc, necessitam dessas medidas para inferir sobre a distância de objetos. Além disso, em muitos casos as saídas de sistemas possuem uma relação sinal ruído muito baixa, fazendo com que seja difícil a detecção da resposta a uma dada entrada sem uma análise que seja mais imune ao efeito do ruído.

2 Função de correlação cruzada - $R_{xy}(t)$

A função de correlação cruzada quantifica o grau de similaridade entre dois sinais no domínio do tempo. Para os sinais $x[n]$ e $y[n]$ a correlação cruzada pode ser definida como

$$\hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=1}^{N-k} x[n]y[n+k], \tag{1}$$

onde $k = 0, 1, ..., m$ e N é o número de amostras.

O comando `xcorr` implementa a correlação-cruzada entre dois sinais. Como exemplo, plotemos a correlação-cruzada entre alguns sinais:

1. senóide de 10 Hz e cossenóide de 10 Hz;
2. dois ruídos diferentes;
3. senóide pura e senóide contaminada por ruído;

⇒*Comente todas as linhas de código!*

```
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
x1 = sin(2*pi*10*t);
x2 = cos(2*pi*10*t);
[Rx1x2,lags] = xcorr(x1,x2,'coeff');
figure;
subplot(221);plot(t,x1,'b')
subplot(222);plot(t,x2,'r')
subplot(223);plot(lags,Rx1x2,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])
```

Note que a correlação-cruzada é periódica[1] e com valores próximos a unidade, o que indica alta correlação. Observemos agora a correlação-cruzada entre dois ruídos diferentes:

```
r1 = randn(size(t));
```

[1]De fato, com período de 1/10 segundos

```
r2 = randn(size(t));
Rr1r2 = xcorr(r1,r2,'coeff');
figure
subplot(221);plot(t,r1,'b')
subplot(222);plot(t,r2,'r')
subplot(223);plot(lags,Rr1r2,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])
```

Os valores da correlação ficaram em torno de 0, além de não ser possível notar nenhuma periodicidade (o que era esperado, dado que os ruídos são não correlacionados). O que acontece se fizermos a correlação-cruzada entre um sinal e uma versão do mesmo contaminada por ruído?

```
mix = x1 + 3*r1;
Rxx = xcorr(x1,mix,'coeff');
figure
subplot(221);plot(t,x1,'b')
subplot(222);plot(t,mix,'r');axis tight
subplot(223);plot(lags,Rxx,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])
```

Observe que a função de correlação apresenta um comportamento periódico, indicando similaridade, apesar de os sinais no tempo serem bastante diferentes (pelo menos a olho nu.).

3 Função de coerência - $\gamma_{xy}^2(f)$

A função de coerência é uma ferramenta matemática muito usada na quantificação de similaridade entre sinais. Enquanto o coeficiente de correlação fornece uma medida global para esta quantificação, a coerência é discriminada em frequência, com o benefício de que sua magnitude é independente de qualquer atraso entre os sinais. A coerência entre os sinais $x[n]$ e $y[n]$ é obtida através da seguinte equação:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{M} X_i^*(f) Y_i(f)\right|^2}{\sum_{i=1}^{M} |X_i(f)|^2 \sum_{i=1}^{M} |Y_i(f)|^2}, \tag{2}$$

onde M é o número de janelas em que os sinais são divididos (como no espectrograma) e $X_i(f)$ e $Y_i(f)$ são as transformadas de Fourier das i-ésimas janelas de cada sinal.

O comando `mscohere` é usado no matlab para calcular a coerência. O uso de um índice espectral de similaridade pode ser observado a seguir.

Inicialmente, criemos dois sinais com algum conteúdo espectral coincidente, adicionemos ruído e calculemos seus espectros.

$\Rightarrow$*Comente todas as linhas de código!*

```
fs = 1024;
t = 0:1/fs:30;
F = linspace(0,fs/2,length(t)/2);
x = sin(2*pi*3*t) + sin(2*pi*7*t) + 3*randn(size(t));
y = sin(2*pi*7*t) + sin(2*pi*11*t) + 3*randn(size(t));
```

```
X = abs(fft(x));
Y = abs(fft(y));
```

Vejamos estes sinais no tempo e na frequência (o espectro vai até 512 hz; porém mostraremos de 0 até 20 Hz apenas).

```
figure;
subplot(221);plot(t,x)
subplot(222);plot(t,y)
subplot(223);plot(F,X(1:length(F)))
axis([0 20 0 max(X)])
subplot(224);plot(F,Y(1:length(F)))
axis([0 20 0 max(Y)])
```

Note, a partir dos espectros, que os sinais compartilham o sinal senoidal de 7 Hz, apesar dessa informação não ser facilmente depreendida na análise visual dos gráficos no tempo. Vejamos a coerência entre x e y:

```
[Cxy,F] = mscohere(x,y,boxcar(1024),0,1024,fs);
figure;plot(F,Cxy)
axis([0 20 0 1])
```

Repita a análise com a correlação-cruzada. Discuta os resultados obtidos e as vantagens/desvantagens de cada técnica para a analise de similaridade de sinais.

4 Roteiro

4.1 Exercício 1 - Estimação de atraso

Considere o radar abaixo.

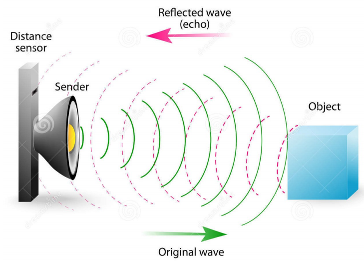

Figura 1: Ilustração de um radar

Um pulso $x(t)$ é transmitido e o sinal refletido em um objeto retorna ao receptor. Este sinal refletido $r(t)$ é atrasado de T segundos, atenuado e com ruído. O objetivo é medir (estimar) o atraso de tempo entre o sinal transmitido e refletido. Um método comum de estimação do tempo de atraso T envolve o calculo da correlação cruzada entre os sinais enviados e recebidos.

Gere um pulso a ser transmitido como na figura 2. Atrase o sinal em 32 amostras e reduza sua amplitude por um fator $\alpha = 0.65$, este sinal é $xd(n)$. Crie 256 amostras de um sinal aleatório gaussiano $\omega(n)$. o sinal recebido simulado deve ser composto do sinal refletido no objeto somado com o ruído como mostra a equação 3, onde σ é a amplitude do ruído.

$$r(n) = \alpha x(n-T) + \sigma\omega(n) \tag{3}$$

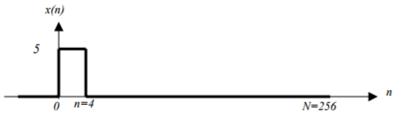

Figura 2: Sinal $x(n)$

Use o *subplot* para mostrar os sinais $x(n)$, $xd(n)$, e $r(n)$. Com título, nomes aos eixos e grid. Estime a correlação cruzada $R_{rx}(m)$ e plote com as demais figuras. Plote apenas metade da correlação. O trecho a seguir pode ajudar.

```
Y=xcorr(r,x);
R=Y(1:N);
Rrx=fliplr(R);
```

A posição do pico na correlação é a estimativa do tempo de atraso. Ela concorda com o valor esperado? Repita para diferentes valores de α, σ e N. Comente os resultados.

4.2 Exercício 2 - Aplicação de funções de correlação na análise de sistemas

Para um sistema linear invariante no tempo como o da 3 temos o seguinte teorema:
"A correlação cruzada entre a saída $y(n)$ e a entrada $x(n)$ é igual à resposta ao impulso do sistema quando a entrada é um ruído branco."

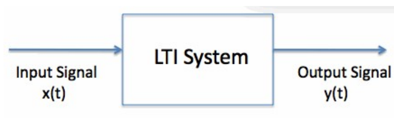

Figura 3: Sistema linear invariante no tempo

O objetivo dessa parte é ilustrar essa propriedade. O código abaixo mostra como obter a resposta real ao impulso. Use a correlação para provar a propriedade.

```
\% definindo um filtro passa-baixa simples
FS=2500;
fHz=[0 250 500 750 1000 1250];
m0=[1 1 1 0 0 0];
FH=fHz/(FS/2);
[b,a]=yulewalk(4,FH,m0);
[h,f]=freqz(b,a,1024);
\% encontrando a resposta ao impulso
N=32;
delta=[1,zeros(1,N)]; \% define o impulso
h=filter(b,a,delta); \% inpulso como entrada
subplot(2,1,1);
plot(h/max(h)); \% Plot resposta normalizada
title('Resposta real ao impulso');
grid;
```

Dica: como a entrada é aleatória o experimento não é valido para apenas uma estimativa. A simulação deve ser feita 150 vezes e o resultado final é a média de todas as simulações.