

# SÉRIE DE FOURIER E EFEITO GIBBS

## MATHEUS MORAES PEREIRA SALES DE AZEVEDO

matheus.m.sales@ufv.br

**Resumo:** Este relatório fundamenta-se em realizar um estudo de comandos, funções e aplicações, utilizando o software interativo MATLAB, com enfoque nas operações de cuja finalidade consistem no estudo introdutório acerca da Série de Fourier, fenômeno de Gibbs e sintetização de sinais sonoros.

**Palavras-chave:** Série de Fourier, Gibbs, sinais sonoros.

### Introdução

Esta prática teve como objetivo estudar a representação de sinais periódicos através da série de Fourier, a qual consiste na representação de ondas periódicas como uma soma de senóides [1]. As aplicações que serão representadas neste relatório são chamadas séries de Fourier truncadas, as quais são representadas dentro de um intervalo previamente definido. Ao representar um sinal periódico como uma série de Fourier, nem sempre essa representação é perfeita. Dessa forma, é notável o aparecimento do efeito Gibbs, que será elucidado posteriormente. Serão mostrados também, métodos para minimizar esse efeito.

Além disso, serão trabalhados métodos para o processamento de sinais sonoros através do uso da série de Fourier, voltados para diferentes técnicas usadas para a síntese de tais tipos de sinais.

### Materiais e métodos

**Fenômeno de Gibbs:** A convergência das somas parciais da série de Fourier de uma função suave por partes em torno de um salto apresenta oscilações cujas amplitudes não convergem para zero. A convergência ponto a ponto acontece, mas se olharmos para o valor absoluto da diferença entre a função e soma parcial sempre encontramos um ponto onde esse valor é aproximadamente 8,9% da amplitude do salto [2]. Esse fenômeno é chamado de Fenômeno de Gibbs.

Ademais, temos que a Série de Fourier é uma forma de série trigonométrica usada para representar funções infinitas e periódicas complexas dos processos físicos, na forma de funções trigonométricas simples de senos e cossenos.

Em primeira análise, será feita a reconstrução de um sinal de entrada  $x(t)$  usando a ferramenta matemática aludida. Por conseguinte, partindo-se da função criada, serão observados os efeitos gerados pela série, o Fenômeno de Gibbs.

Sendo assim, primeiramente foi efetuado o *download* no Pvanet do *script* da função  $ak(k)$ , que retorna para o usuário, dada uma entrada  $k$ , o  $k$ -ésimo coeficiente da onda quadrada, a qual desejamos refazer. Sendo assim, posteriormente plotou-se, com o uso dos comando *Plot()*, *steam()*, *abs()*, *angle*, o módulo e a fase de  $ak()$ . Comandos que respectivamente, plotam o gráfico da

função, discretiza o sinal de entrada e retorna o módulo e a fase do sinal.

À vista disso, foi produzido um *script* que implementa a síntese de  $x(t)$ . Para tal, foi escolhida entre as três fórmulas propostas pelo roteiro, a forma trigonométrica compacta. Sendo assim, para traduzir a equação para a linguagem do *software* foi necessário o uso do comando *for*. Consequentemente, foram realizadas as plotagens da função com valores distintos de  $k$  (5,15,30) e para um intervalo  $t$  de -10 a 10 com variação de 0.1.

Ademais, foi realizado o *plot* entre a função criada e a função desejada.

**Minimização do efeito Gibbs:** Visto que, o objetivo é construir um função que se assemelha ao máximo a função quadrada proposta usando a série de Fourier, é de suma importância que o fenômeno de Gibbs seja reduzido drasticamente. Sendo assim, é necessário o uso de mais dois artifícios matemáticos; o janelamento de Fejer e a aproximação sigma.

**Sintetizador de som:** Nesta parte da prática, foi utilizada a ferramenta matemática Série de Fourier para realizar a síntese de um sinal sonoro. Posto isso, primeiramente foi efetuado o *download* do arquivo *trumpet* no Pvanet.

Por conseguinte, foram realizados *plots* de três trechos distintos do sinal, com o intuito de verificar a similaridade da onda ao decorrer da mesma. Para tal, foi usado o comando *plot*.

Consequentemente, também foi realizado o *plot* do módulo e da fase do sinal inicial *trumpet* no domínio da frequência. Para tanto, foi utilizado o *script* fornecido pelo roteiro da prática, situado no quarto item da parte de sintetizador de som.

Ademais, um outro método de realizar a síntese de um sinal sonoro, tem como base usar a informação de picos do módulo. À vista disso, tomou-se os cinco picos de maiores valores e suas respectivas frequências. Por fim, por meio da função criada *somaFourierNorm* [3], foi realizado a soma de Fourier e por conseguinte realizado o respectivo *plot* do sinal reconstruído.

A fim de analisar a eficácia dos métodos de síntese do sinal sonoro *trumpet*, foram executados o sinal original juntamente com o sintético e realizadas as devidas análises em cima do resultado obtido. Ademais, também foram realizados os respectivos *plots* de fragmentos de cada sinal para complementar o estudo.

Outrossim, foi realizada mais uma síntese do sinal, entretanto, com o acréscimo da informação da fase do mesmo. Sendo assim, o processo foi semelhante ao já realizado anteriormente, mas agora a função criada para realizar o cálculo da soma de Fourier, deve também incluir nos cálculos a fase do sinal. Por fim, foi executado

o mesmo para realizar as devidas análises e comparações com os sinais obtidos anteriormente.

## Resultados

Atendendo aos requerimentos da primeira parte do roteiro, referente ao fenômeno de Gibbs, realizou-se a plotagem da fase e do módulo de  $ak$ , pode-se destacar que ambos os gráficos foram discretizados, com a finalidade de facilitar a análise do observador, como mostra a figura 1.

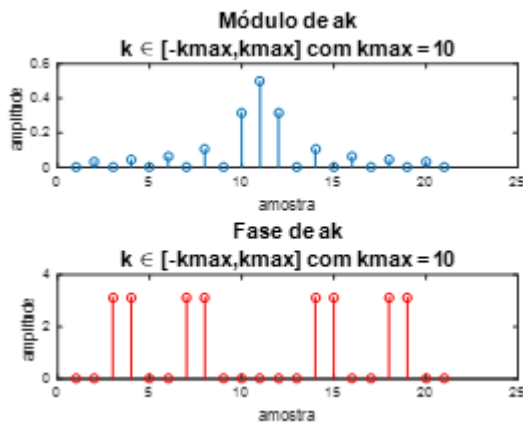


Figura 1: Parâmetros de  $ak$  discretizados.

Com a finalidade de implementar um código capaz de gerar um sinal quadrado e periódico, optou-se pela escolha da série de Fourier como ponto de partida. Sendo assim, variando-se o número de iterações ( $k$ ) da série, notou-se que ao se aumentar o valor de  $k$ , o sinal de saída tornou-se mais próximo do esperado, todavia notou-se uma distorção nas bordas de subida, causada pelo efeito Gibbs, como mostra a figura 2.

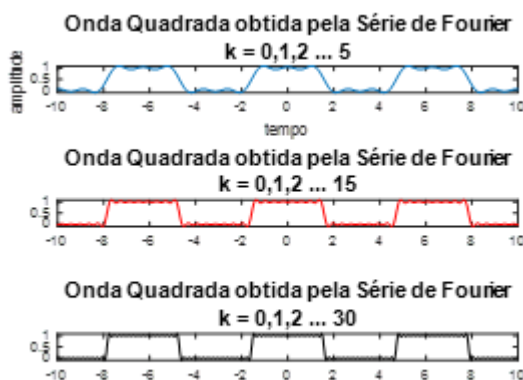
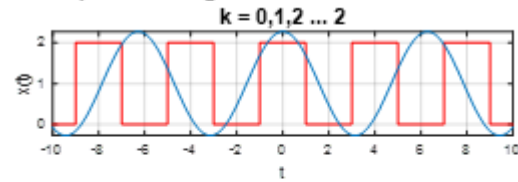


Figura 2: Sinal periódico baseado na série de Fourier.

Com o intuito de comparar um sinal originalmente quadrado com outro gerado a partir da série de Fourier foram plotados os dois gráficos sobrepondo-os. Sendo assim, para um número alto de iterações, observou-se

uma atuação menor do efeito Gibbs, como mostram a figura 3 e 4.

Onda quadrada original e baseada na Série de Fourier



Onda quadrada original e baseada na Série de Fourier

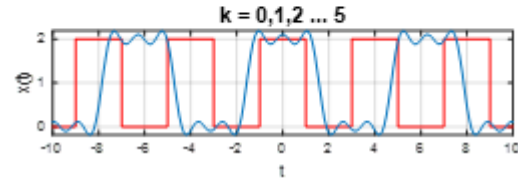
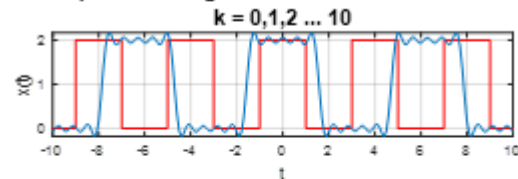


Figura 3: Comparação entre sinal quadrado original e outro gerado baseando-se na Série de Fourier.

Onda quadrada original e baseada na Série de Fourier



Onda quadrada original e baseada na Série de Fourier

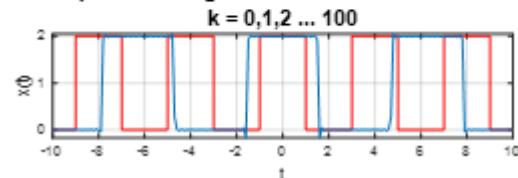


Figura 4: Comparação entre sinal quadrado original e outro gerado baseando-se na Série de Fourier.

Em face aos códigos implementados anteriormente, objetivando diminuir a atuação do efeito Gibbs, implementou-se as técnicas de Janelamento Fejer e a aproximação sigma. Sendo assim, é possível afirmar que o segundo processo se mostrou mais eficaz para um valor de  $k=30$ , como mostra a figura 4.

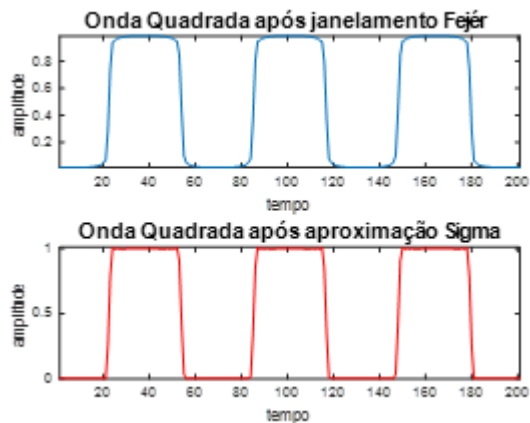


Figura 4: Técnicas para diminuição do efeito Gibbs.

Dando continuidade ao roteiro, criou-se um novo *script* para a parte referente ao sintetizador de som. Primeiramente, fragmentou-se o espectro do *trumpet* em três trechos diferentes, para observar os resultados com maior clareza, converteu-se os documentos em arquivos de áudio, e plotou-se os mesmos, observando-se uma semelhança muito grande entre os sinais, como mostra a figura 5.

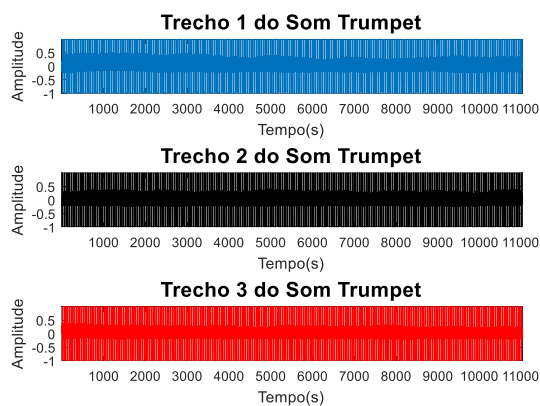


Figura 5: Arquivo *trumpet* fragmentado.

Uma ferramenta muito útil no processamento de sinais consiste em realizar uma análise no domínio da frequência. Sendo assim, após implementar o código que realiza esta operação, foram gerados os gráficos referentes ao módulo e a fase do sinal *trumpet*. Observando a figura 6, pode-se inferir que para uma determinada faixa de frequências, o módulo possui valor elevado.

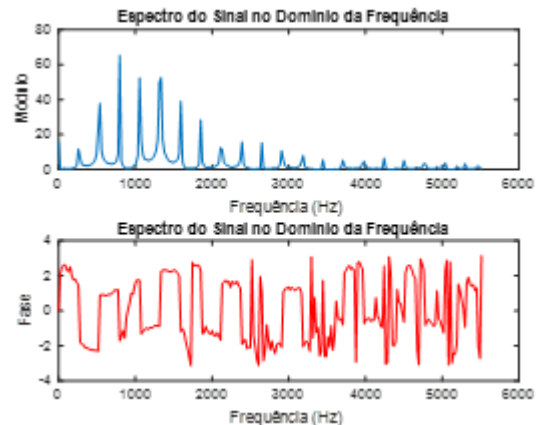


Figura 6: *Trumpet* no domínio da frequência.

Uma outra maneira de sintetizar um sinal trabalhada nesta prática constituiu-se no uso dos 5 maiores picos e suas respectivas frequências. Desta maneira, executando esta parte do código obteve-se uma comparação entre o sinal sintetizado e alguns trechos do *trumpet*, notando-se uma semelhança entre os sinais, como mostra a figura 7.

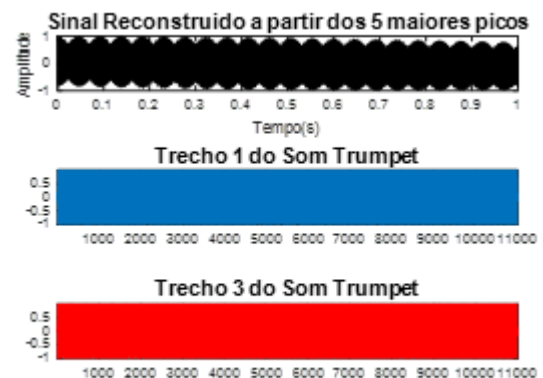


Figura 7: Comparação envolvendo *trumpet* reconstruído com os 5 maiores picos.

Variando-se o número de picos na sintetização do sinal sonoro, obteve-se uma comparação gráfica mostrada na figura 8. É necessário destacar que ao executar os arquivos de áudio referentes a cada sinal gerado, observou-se que quanto maior o número de picos, notou-se mais semelhança com o som original.

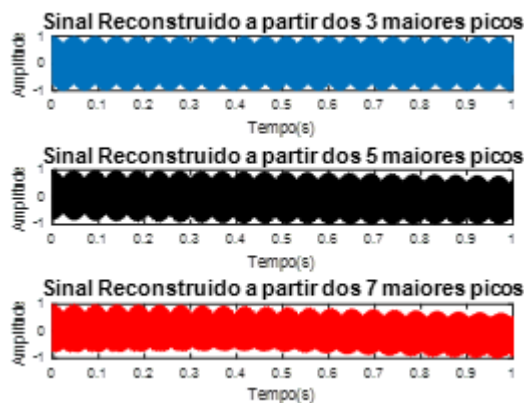


Figura 8: *Trumpet* reconstruído a partir de 3 variações no número de picos.

Por fim, trabalhou-se a reconstrução de um sinal utilizando a fase. Para isso, utilizou-se tal grandeza fasorial de 2 maneiras; primeiramente utilizando um módulo unitário e posteriormente fazendo uso da fase normalmente. Sendo assim, ao executar os arquivos de áudio e observar o gráfico, notou-se que os sinais se assemelham aos sintetizados anteriormente, como mostra figura 9.

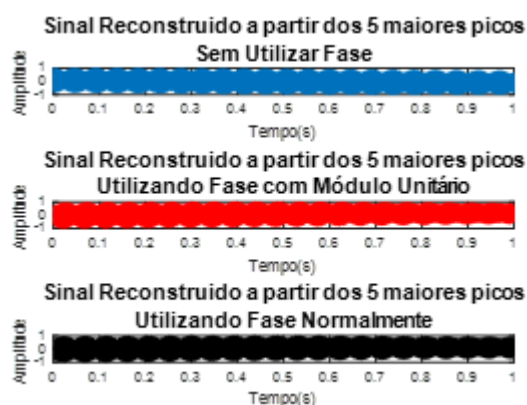


Figura 9: *Trumpet* sintetizado fazendo uso da fase.

## Discussão

Em primeira análise é necessário destacar a aplicabilidade do software nas diminuições dos efeitos Gibbs, em que o mesmo se mostrou muito útil em tais aplicações, possibilitando ao usuário o uso de várias técnicas que visam diminuir tal efeito.

Ademais, é necessário afirmar que o software se mostrou muito eficaz em aplicações envolvendo a ferramenta matemática Série de Fourier, a qual apresenta bastante complexidade de ser realizada manualmente, possibilitando ao usuário realizar este tipo de cálculo com um tempo mais viável.

Além disso, pode-se inferir que as sínteses realizadas com arquivos de som apresentaram um nível de eficiência bastante satisfatório, uma vez que, em muitos casos, é possível observar algumas nuances em sinais

sonoros, as quais são imperceptíveis limitando-se aos recursos auditivos, todavia com o recurso gráfico tais características são notáveis com maior facilidade.

## Conclusão

O software se mostrou muito eficiente em trabalhos envolvendo manipulação de sinais, haja visto que o MATLAB apresenta certa facilidade em operações abrangendo determinadas ferramentas matemáticas, como na criação de uma função que realiza o cálculo da série de Fourier, a qual apresenta certa complexidade de ser realizada manualmente. Em face à esta ideia, outra ferramenta muito útil trabalhada nesta prática foi a síntese de um sinal sonoro, realizada por diferentes métodos, na qual utilizou-se a função criada anteriormente que realiza o cálculo matemático possibilitando a análise baseada nos tipos de síntese e a sua eficácia em reconstruir um determinado sinal sonoro.

## Referências

- [1] B.P.LATHI, Sinais e sistemas lineares.
  - [2] A.V.OPPENHEIM, Sinais e sistemas lineares.
  - [3] MATLAB, Disponível em [https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab\\_prog/create-functions-in-files.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/create-functions-in-files.html)
- Acesso em 28 de setembro de 2019.