Série de Fourier e Efeito Gibbs

Déric Augusto F. de Sales - 96718
Departamento de Engenharia Elétrica,
Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG.
Email: deric.sales@ufv.br

1. Introdução

As práticas anteriores a esta, da disciplina de Sinais e Sistemas, trabalharam com a manipulação de sinais por meio da convolução, utilizando a operação para criar efeitos em imagens e descobrir a resposta de uma função no tempo em relação à uma outra. Para se executar a operação de convolução, os sinais (invariantes no tempo) foram representados como a combinação linear de impulsos deslocados. Entretanto, esses mesmo sinais podem também serem representados como a combinação linear de exponenciais complexas, através do uso das Séries de Fourier [1].

Assim como a convolução, as séries de Fourier apresentam sua versão discreta e contínua e para o uso em sistemas computacionais, trabalha-se com a versão discreta. Através da série de Fourier então, é possível desconstruir e construir um sinal, através das operações de Análise e Síntese de Fourier respectivamente.

Assim, a prática em questão trabalha com a aproximação de sinais através da síntese de Fourier, a análise e minimização do efeito Gibbs (gerado durante a síntese de sinais com descontinuidades) e a síntese de sinais sonoros.

2. Objetivos

O presente relatório é baseado no roteiro de aula prática 5 [2], que propõe os seguintes objetivos:

- sintetizar um sinal de onda quadrada por meio de uma aproximação com a série de Fourier;
- analisar a aproximação do sinal e a geração do efeito de Gibbs;
- testar técnicas de minimização do efeito de Gibbs;
- sintetizar um sinal sonoro de um trompete;
- analisar o sinal sintetizado;
- analisar o espectrograma no sinal original;
- sintetizá-lo com mais e menos harmônicos e variando a fase.

3. Materiais e Métodos

Para ser possível a sintetização de um sinal de onda quarada, foi utilizada a função *Ck* pronta junto ao roteiro [2]. A função é responsável por gerar os coeficientes da análise de Fourier, tal qual a Equação 1. Assim, através desses coeficientes, é possível sinterizar uma aproximação da função de onda quadrada tal qual a Equação 2. Para esta, quanto maior for o número de elementos atribuídos no somatório, mais aproximado será o resultado em relação à uma onda quadrada perfeita.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jk\omega_0 n} \tag{1}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk\omega_0 n} \tag{2}$$

As equações acima trabalham no domínio discreto, onde a coleta de dados é limitada dentro de um período específico. Nessas equações, o tempo é representado pela variável n e o período pela variável N, para deixar explícito que são grandezas discretas. Em uma situação teórica, para que o cálculo seja perfeito, e não uma aproximação, devem ser utilizadas as Equações 3 e 4, que consideram uma integral como somatório dos coeficientes da síntese de Fourier e um somatório infinito na análise, respectivamente.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt \tag{3}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \tag{4}$$

Assim, através da função *Ck* é possível sintetizar a onda quadrada utilizando a Equação 5 que advém da Eq. 2 apresentada.

$$x(t)_{aproximado} = \sum_{k=0}^{k_{max}} 2 \cdot |C_k| \cdot cos(k\omega_0 n + \angle C_k) \tag{5}$$

Busca-se então gerar sinais $x(t)$ aproximados e analisar o que ocorre ao se modificar o k_{max} em (5). Espera-se a geração do efeito de Gibbs nas descontinuidades da onda quadrada aproximada, que será estudado e minimizado. Para a minimização, pode-se utilizar o janelamento de Fejer, que consiste na multiplicação de $(K-k)/N$ à amplitude do k-ésimo harmônico na Eq. 2. É possível também a utilização do janelamento de Hamming que consiste na multiplicação do k-ésimo harmônico por $0,54+0,4 \cdot cos(k\pi/N)$ [2].

Além disso, buscou-se sintetizar sinais sonoros, tal qual na Aula Prática 3 [3], analisando o espectro do sinal, identificando seus harmônicos e o sintetizando novamente com apenas alguns dos harmônicos encontrados. Além disso, variando também a fase do sinal na sintetização, e comparando os resultados obtidos. Para todas essas operações de sintetização de áudio e também da aproximação da função de onda quadrada, foi utilizado o software MATLAB [4].

Para a sintetização de sinais sonoros, foi criada a função “sintetizador”, que recebe o vetor de tempo (t), o de frequências (f), o de módulo de um sinal (mag) o de fase (fas) e o sintetiza, através do uso da fórmula disposta na Equação 5, adaptada em código para o MATLAB como a relação (6), onde X é o vetor do sinal sonoro sintetizado normalizado (entre -1 à 1). Em software, para a implementação dos somatórios são utilizados ciclos (*for loops*). A função foi utilizada com e sem a consideração do vetor de fase. Para a não utilização da fase, fez-se $fas = 0$ na relação (6).

$$X = \frac{\sum_{j=<t>} \sum_{i=<mag>} 2 \cdot |mag(i)| \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot freq(i) \cdot t(j) + fas(i))}{max(|x|)} \tag{6}$$

4. Resultados

Primeiramente, a fim de compreender melhor a função *Ck*, foi gerada a Fig. 1 tal qual requisitado em [2]. Utilizando as ferramentas de *subfigure* do MATLAB, desenvolveu-se então a geração desta e das figuras seguintes.

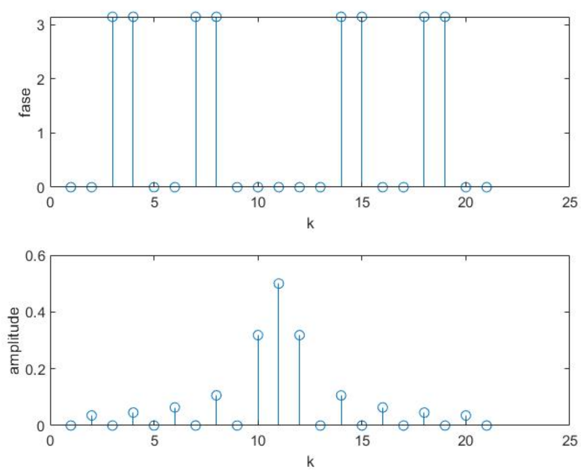

Figura 1: Dados da função *Ck* que gera os coeficientes para a síntese da onda quadrada.

Variando o valor de K_{max} (número de termos da soma) na relação (5), foi possível imprimir o resultado das aproximações da função de onda quadrada com o uso dos coeficientes a_k da função *Ck*, gerando a Figura 2.

É possível notar, observando esta figura, que ao gerar a onda quadrada com um número limitado de termos na soma, perto dos pontos de descontinuidade são gerados picos oscilatórios, que se assemelham a “chifrezinhos” na função. Na Figura 2 esse fenômeno pode ser observado quando o K_{max} é igual à 5 até 100 termos. Esse fenômeno

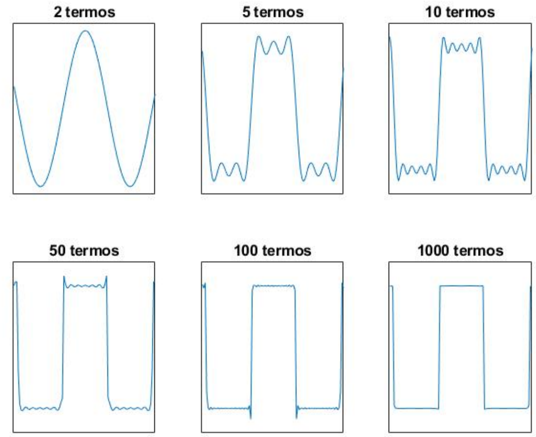

Figura 2: Síntese de Fourier de uma onda quadrada.

é justamente o Efeito Gibbs. A Figura 3 destaca o aparecimento do fenômeno nas proximidades da descontinuidade, comparando a função gerada pela aproximação do somatório com 50 termos (curva azul) à função ideal, gerada pelo somatório de infinitos termos (curva laranja).

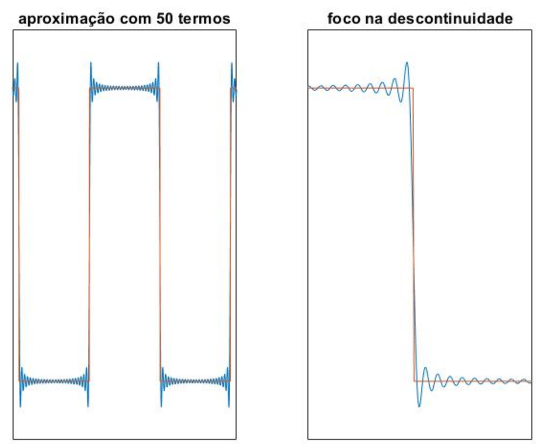

Figura 3: Aproximação a uma onda quadrada através da Série de Fourier.

Após a notória aparição do Efeito de Gibbs na Fig. 2, esta foi refeita utilizando as técnicas de minimização do efeito, na fórmula da síntese das aproximações onda quadrada geradas nos gráficos. Assim, foram geradas as Figuras 4 e 5, aplicando a síntese de Fejer e de Hamming respectivamente.

Após os estudos em relação ao Efeito de Gibbs, foram executados os exercícios propostos em [2] em relação à sintetização de sinais sonoros. Primeiramente, foi sintetizado o sinal puro do arquivo *trumpet.mat* a uma frequência de 11,025 Hz e foi possível ouvir o sinal sonoro de um trompete.

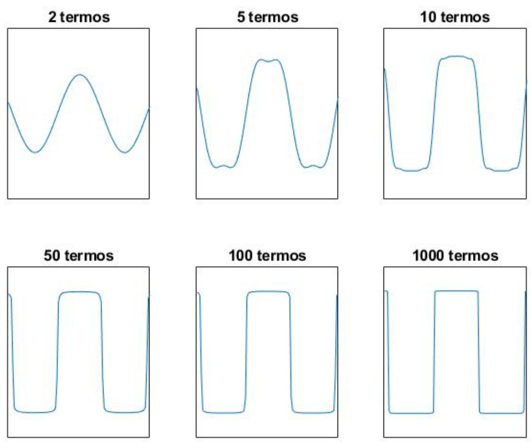

Figura 4: Síntese de Fourier de uma onda quadrada utilizando o janelamento de Fejer.

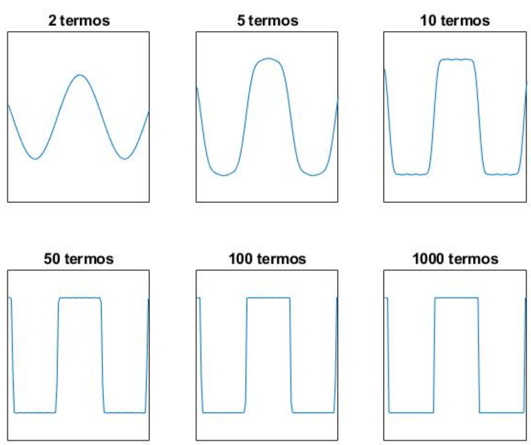

Figura 5: Síntese de Fourier de uma onda quadrada utilizando o janelamento de Hamming.

Através da Figura 6 é possível analisar a curva integral do sinal sonoro no tempo, e a Figura 7 permite uma análise mais detalhada desse sinal, dividindo essa curva em 3 trechos. A Figura 8 analisa o espectro do sinal original (gerado através da operação de *Fast Fourier Transform* do MATLAB), onde os picos da curva são os harmônicos do instrumento. É possível extrair as informações desses picos na curva para ter ciência dos harmônicos e sintetizar o instrumento apenas com esses harmônicos. Assim, através da ferramenta "*data cursor*" do MATLAB, foi possível a extração dos cinco maiores valores de pico da curva, que foram registrados na Tabela I.

Com o auxílio da função "sintetizador" desenvolvida, foram geradas as imagens das Figuras 9 e 10, que correspondem às curvas do sinal sintetizado sonoro utilizando os harmônicos encontrados e registrados na Tabela I.

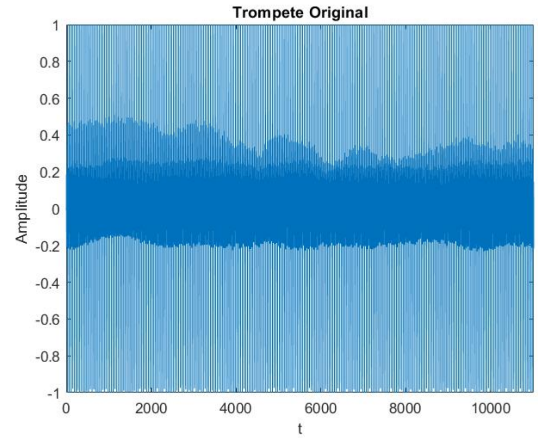

Figura 6: Áudio do trompete original.

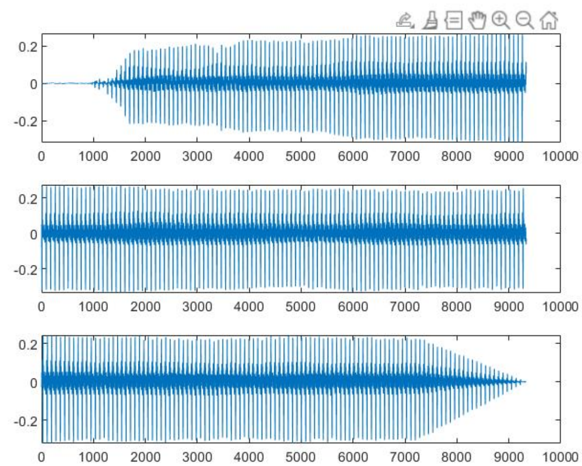

Figura 7: Sinal de som "*trumpet*" subdividido em 3 trechos.

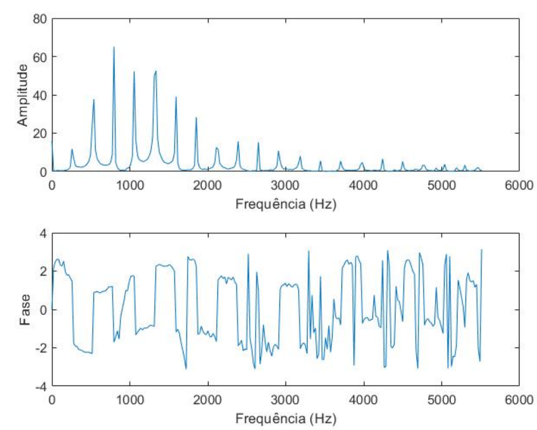

Figura 8: Espectro do áudio original do trompete.

frequência [Hz]	amplitude	fase
1593,50	38,994	-1,1788
1313,50	49,639	-0,8893
1055,10	52,244	1,7375
1335,10	52,593	2,2403
793,73	65,114	-1,7118

Tabela I: Os 5 maiores harmônicos

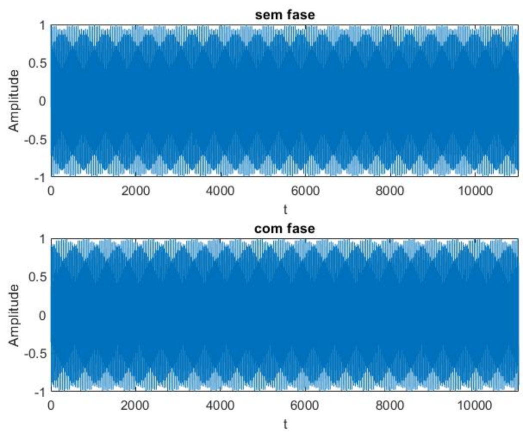

Figura 9: Áudio do trompete sintetizado com 2 harmônicos.

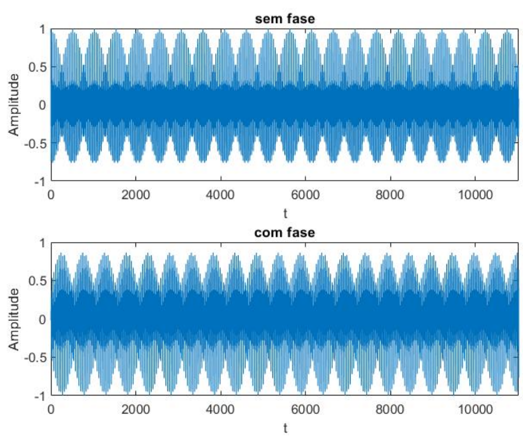

Figura 10: Áudio do trompete sintetizado com 5 harmônicos.

5. Discussões

Através dos resultados encontrados, destacando o enfoque proporcionado pela Figura 3, ficou evidente que o fenômeno de Gibbs aparece sempre que a série é truncada. Isso se dá pela forma com que a descontinuidade da função construída é gerada, já que, para gerar essa descontinuidade (ponto onde a derivada tende ao infinito), é necessário somar diversas senoides e cossenoides em todas as frequências na proporção certa para que sua amplitude se some justamente nos pontos de descontinuidade, gerando a reta de inclinação de aproximadamente 90º. O efeito de Gibbs se dá então, quando não há termos suficientes de senoides e cossenoides em diferentes frequências sendo somados para que eles se cancelem logo após a descontinuidade, aparentando uma oscilação amortecida em torno do valor que deveria ser aproximadamente constante (no caso da onda quadrada).

Foi possível perceber também a efetividade na minimização do efeito de Gibbs na aplicação das sínteses de Fejer e Hamming (Figuras 4 e 5 respectivamente), em comparação com a síntese de Fourier da Figura 2. É interessante notar também que nesta última, mesmo sem a aplicação das técnicas de minimização, o efeito de Gibbs é reduzido quando a série apresenta muitos termos sendo somados, fazendo com que tenha senoides o suficientes nas amplitudes certas para amortecer o pico do fenômeno de Gibbs.

A respeito das sintetizações dos sinais sonoros, foi percebido que a presença da fase altera as características do som, fazendo com que este fique mais abafado e com uma intensidade um pouco maior. Também, através das Figuras 9 e 10, é possível notar visualmente a pequena defasagem no sinal. Em relação à importância da quantidade de harmônicos na sintetização, ao utilizar apenas 2 harmônicos na construção do som, o timbre do trompete se perdeu, demonstrando que o nível de informação do áudio original utilizado para a construção do áudio sintetizado é proporcional à qualidade final deste áudio gerado. Assim, espera-se que quanto mais harmônicos do som original utilizado, melhor será a riqueza de detalhes do som sintetizado quando comparado ao original.

6. Considerações Finais

A partir do que foi exposto, a prática em questão trabalhou com a série de Fourier para a aproximação de sinais periódicos, notando os fenômenos provenientes da construção desses sinais de maneira artificial. Foi possível notar a importância do uso das técnicas de janelamento na minimização do efeito de Gibbs, além da relação entre o uso de harmônicos e fase na qualidade no sinal sintetizado. A teoria abordada pode então ser utilizada para a sintetização e análise de variados tipos de sinais, à exemplo dos sinais sonoros trabalhados.

Referências

[1] Alan V Oppenheim, Alan S. Willsky, Syed Hamid Nawab, Gloria Mata Hernandez, et al. *Signals Systems*. Pearson Educacion, 1997.

[2] Dr. Leonardo Bonato Felix. *ELT 355 - Sinais e Sistemas - Roteiro de Aula Prática 5 – Série de Fourier - Efeito Gibbs. CCE, DEL, Universidade Federal de Viçosa.*

[3] Dr. Leonardo Bonato Felix. *ELT 355 - Sinais e Sistemas - Aula Prática 3 – Filtragem no Domínio do Tempo. CCE, DEL, Universidade Federal de Viçosa.*

[4] MathWorks. *Math. Graphics. Programming. Disponível em: https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s_tid=hp_products_matlab.*