

SÉTIMA AULA PRÁTICA – TRANSFORMADA DE FOURIER E FILTRAGEM NA FREQUÊNCIA

G. P. Calais, M. V. R. Campos

UFV, Viçosa, Brasil

E-mails: gabriel.calais@ufv.br, marciovonrondow96@gmail.com

Resumo: O presente relatório trata de uma aula prática sobre Transformada de Fourier e Filtragem na Frequência no *software MATLAB*. O objetivo da aula foi aprender sobre a Transformada de Fourier e suas finalidades. Para tanto, foram mostradas algumas aplicações da mesma, além da proposição de exercícios. Com os exercícios foi possível o aprendizado sobre a filtragem de sinais na frequência.

Palavras-chave: *MATLAB*, Fourier, frequência, sinais, filtragem.

Introdução

A sétima aula prática da disciplina de Processamento Digital de Sinais consistiu na apresentação e aplicação de conceitos sobre Transformada de Fourier e filtragem na frequência no *software MATLAB*.

A transformada de Fourier é a transformada de Laplace calculada apenas para valores imaginários de "s". Sendo assim, a transformada de Fourier gera apenas uma linha de números, não um mapa como Laplace. Fourier mede apenas o caráter ondulatório de uma função ou sinal, ou seja, restringe-se a uma dimensão do mapa de Laplace.

Na prática em questão, o *software* foi usado para a compreensão das aplicações da Transformada de Fourier no processamento de sinais, além da filtragem dos mesmos, através de orientações e utilizando o comando *help*.

Materiais e métodos

Foi utilizado o *software MATLAB* com a finalidade de aprender sobre as aplicações da Transformada de Fourier na filtragem diferentes sinais.

Através da janela *Editor* do programa, foram criados códigos em programação de acordo com as instruções do roteiro da aula prática no computador. Durante a implementação do código, foram selecionadas determinadas partes do mesmo e analisadas as respostas para que fosse possível testar e verificar êxito na realização das tarefas.

Alguns dos comandos mais importantes utilizados na aula prática constam na tabela 1.

Tabela 1: Principais comandos da aula prática.

Comando	Função
<i>load</i>	Carrega um arquivo para a <i>workspace</i>
<i>subplot</i>	Divide uma figura em vários gráficos
<i>abs</i>	Calcula o módulo de um número
<i>audioread</i>	Carrega um arquivo de áudio para a <i>workspace</i>
<i>plot</i>	Plota um gráfico em uma figura
<i>fft</i>	Realiza a transformada rápida de Fourier.
<i>ifft</i>	Realiza a transformada inversa de Fourier.
<i>fftshift</i>	Ajusta a transformada de Fourier

Na prática em questão foi trabalhada a transformada de Fourier, a qual consiste em transformar a série de Fourier no domínio do tempo para o domínio da frequência. Através da operação, obteve-se a soma de senoides no domínio de w identificada por $X(w)$:

$$X(w) = \sum_{n=0}^{N_o-1} x_n e^{-j\Omega_o n} \quad (1)$$

Onde x_n é a soma de senoides, $\Omega_o = wT$, w a frequência, T o período de amostragem e n o número de pontos na faixa de frequência

Pela equação (1), nota-se que a transformada de Fourier trabalha com o domínio da frequência, o primeiro exercício proposto no roteiro teve o objetivo de verificar o seu funcionamento gráfico.

Foi ordenado a criação de uma soma de duas senoides de frequências de 500 Hz e 2 KHz junto a um ruído. Em um espectro com faixa de -4000 a 4000 Hz foi aplicado a transformada de Fourier através do comando *fft* e plotado a resposta em gráfico afim de observar a amplitude em determinadas frequências.

Como a transformada de Fourier aplicada não é simétrica em relação ao eixo devido a processamento numérico realizado pelo *software MATLAB*, foi utilizado o comando *fftshift* afim de centralizar o resultado, além disso foi plotado a metade positiva da

frequência, pois ela possuía as informações inéditas e ideais para melhor aplicabilidade.

Após a realização de cada etapa, foi aplicado a transformada de Fourier inversa no sinal modificado pelo comando *ifft* afim de retornar o mesmo resultado da soma de senoides criada no domínio do tempo. Foram feitas observações analíticas e gráficas no final do exercício.

No exercício seguinte, foi trabalhado a função dos filtros passa-baixas e passa-altas aplicado em um sinal de entrada. O filtro passa-baixa possui uma utilidade de atenuar as altas frequências e sua função de transferência pode ser dada da seguinte forma:

$$H_L(w) = \frac{\alpha}{\alpha + jw} \quad (2)$$

Onde α é a frequência de corte e w a frequência.

Por definição, a resposta de um sinal filtrado é dada através da convolução do filtro e do sinal de entrada no domínio do tempo discreto. Usando a transformada de Fourier é possível reescrever essa resposta como sendo o produto do filtro com o sinal de entrada no domínio da frequência em amostras discretizadas da seguinte forma:

$$Y(w) = X(w)H(w) \quad (3)$$

Onde w é a frequência.

Assim, para encontrar a resposta filtrada, foi feito a transformada de Fourier sobre o sinal criado no primeiro exercício e multiplicou seu resultado com o filtro identificado na equação (2). Após esse procedimento, foi feito a transformada de Fourier inversa sobre o sinal retornado e feito as devidas análises e comparações gráficas no domínio do tempo e frequência do sinal modificado com o sinal original criado.

O filtro passa-alta tem a função de atenuar as baixas frequências. Para a sua função de transferência foi utilizado a seguinte fórmula:

$$H_L(w) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + jw} \quad (4)$$

Onde α é a frequência de corte e w a frequência.

As mesmas etapas foram realizadas para o cálculo da resposta filtrada, e as mesmas observações foram feitas.

Para o último exercício, foi utilizado um arquivo de áudio com ruído. Em seguida aplicou-se filtros passa-baixa e passa-alta sobre o mesmo com frequências de corte de 500 Hz fazendo as devidas observações comparando o som filtrado com o som original.

Por fim, foram carregados quatro novos arquivos de áudio e esses três arquivos foram *mixados* em um, no qual foram aplicados testes de filtros passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa afim de eliminar interferência de som alheio (sons do bumbo e do prato de uma bateria) sobre o som ideal (som de uma trombeta).

Resultados

Após os testes feitos implementou-se o código de programação com suas devidas finalidades. Nas figuras constam os resultados da resolução dos problemas propostos.

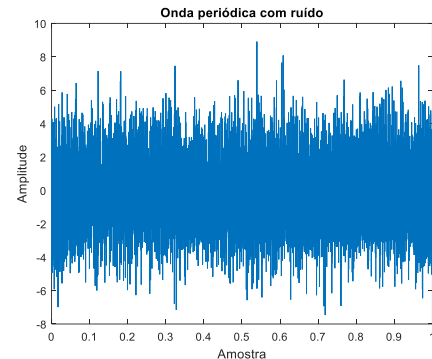


Figura 1: Sinal periódico com ruído.

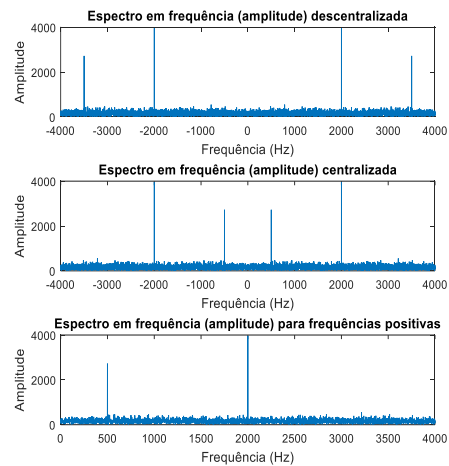


Figura 2: Espectro em frequência do sinal descentralizada, centralizada e para frequências positivas.

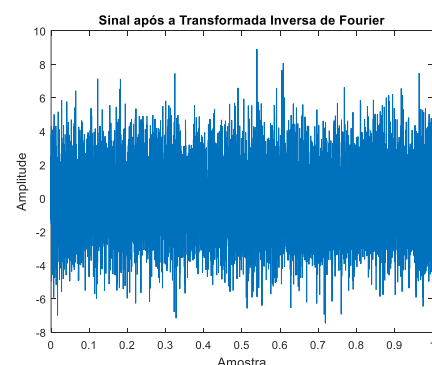


Figura 3: Sinal periódico com ruído após ser transformado para o domínio da frequência e de volta ao domínio do tempo.

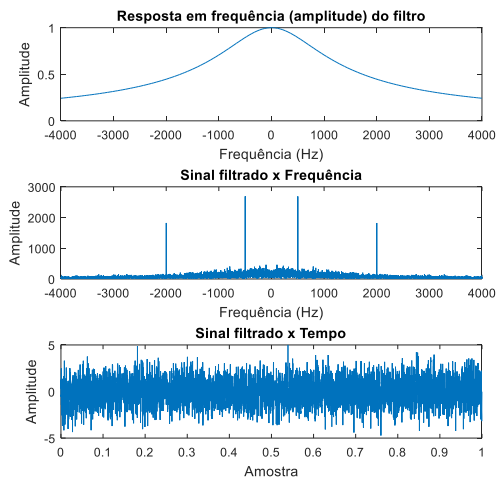


Figura 4: Resposta em frequência do filtro, sinal filtrado no domínio da frequência e sinal filtrado no domínio do tempo.

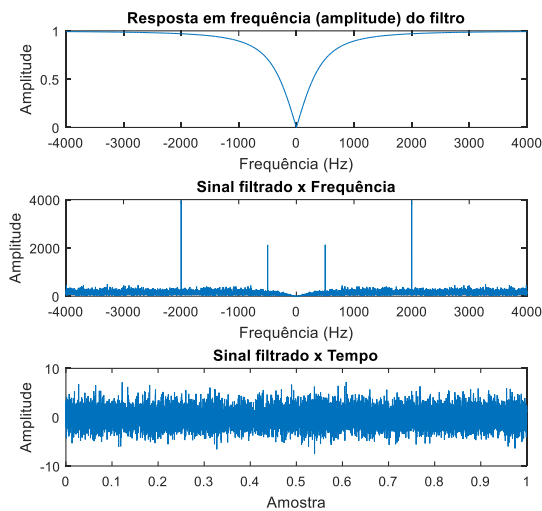


Figura 5: Resposta em frequência do filtro, sinal filtrado no domínio da frequência e sinal filtrado no domínio do tempo.

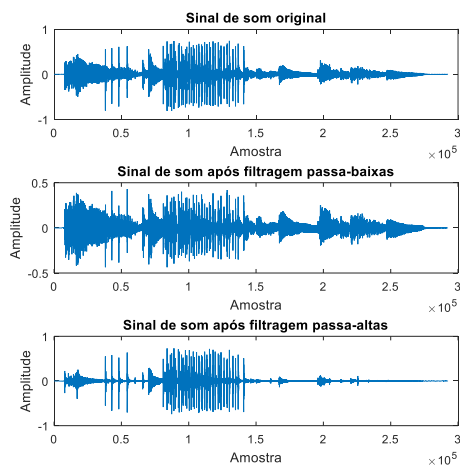


Figura 6: Sinal de som original e após filtrações passa-baixas e passa-altas.

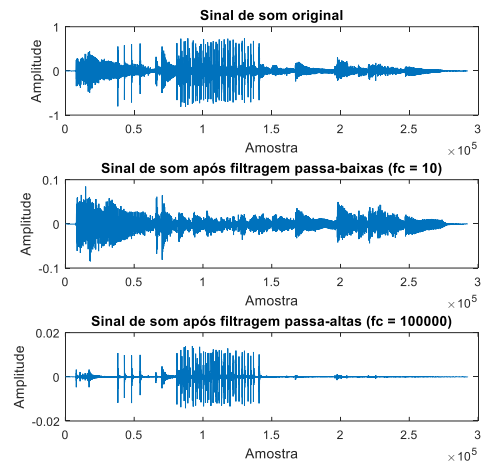


Figura 7: Sinal de som original e após filtrações passa-baixas e passa-altas para frequências de corte diferentes.

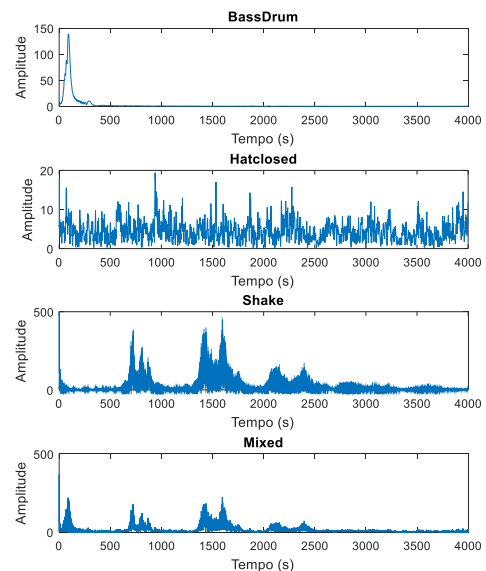


Figura 8: Espectro em frequência dos arquivos de áudio analisados.

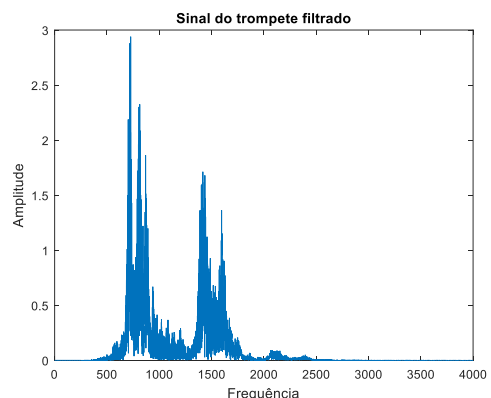


Figura 9: Espectro em frequência do sinal do trompete, após a filtragem do mix.

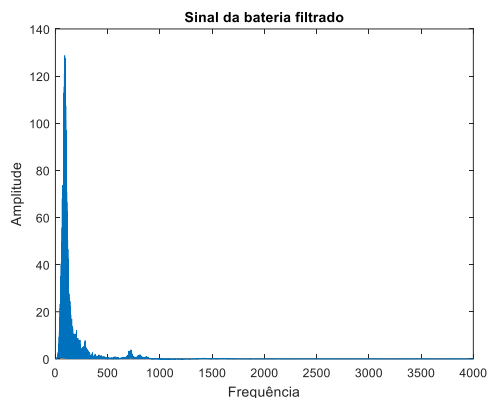


Figura 10: Espectro em frequência do sinal de bateria, após a filtragem do mix.

Discussão

Como se pode observar na figura 2, temos que a realização da transformada de Fourier aplicado em um sinal retorna uma resposta não simétrica, com duas porções, uma negativa e outra positiva.

O comando *fftshift* corrigiu esse problema centralizando a resposta como se observa no gráfico plotado, porém ainda com a porção de frequências negativas.

Para modificar esse último resultado, foi plotado o sinal transformado em uma faixa de frequência de 0 a 4000 Hz, obtendo assim a resposta definitiva do sinal criado pela soma das duas senoides e o ruído no domínio da frequência. Como se verifica na figura 2, a amplitude do sinal senoidal com frequência de 500 Hz foi menor que a de frequência de 2 KHz.

Ao final do exercício foi comparado o sinal original criado com o sinal retornado através da transformada de Fourier inversa e obteve-se semelhança como observado nas figuras 1 e 3.

No segundo exercício, observa-se o espectro da amplitude em frequência do filtro passa-baixa na figura 5, nota-se que a medida que a frequência se aproxima de zero mais próxima do valor unitário é a amplitude da onda.

No resultado do produto entre o filtro passa-baixa com o sinal de entrada criado verificou-se que a amplitude da senoide com 500 Hz de frequência foi maior em relação com a de 2 KHz. Esse resultado observado na figura 4 confirma que o filtro passa baixa atenua as amplitudes de sinais com altas frequências.

De forma semelhante ocorreu utilizando o filtro passa-alta. Na figura 5, observa-se a aproximação da amplitude unitária em frequências acima de zero, consequentemente a amplitude do sinal de 2KHz foi maior que o de 500 Hz atenuando a intensidade das frequências mais baixas.

Aplicando a transformada de Fourier inversa para análise no domínio do tempo nos sinais filtrados, observa-se que a amplitude do sinal da figura 4 teve um alcance abaixo de 5 unidades, enquanto o da figura 5 foi maior, com alcance abaixo de 10 unidades. Essa diferença é devido à aplicação do filtro passa baixa, que

atenuou a amplitude maior pertencente à alta frequência e ao filtro passa-alta que manteve essa amplitude.

No exercício seguinte, realizando as comparações nas figuras 6 e 7, observa-se que a aplicação do filtro passa-baixa com frequência de corte de 10Hz atenuou as amplitudes acima dela e tornou o som inaudível, enquanto que aplicando o filtro passa-alta a uma frequência de corte de 500 Hz as amplitudes de maior intensidade se mantiveram por toda faixa de tempo o que tornou o som mais perceptível.

A partir dessa comparação, conclui-se que o espectro da onda original possui maiores amplitudes no sinal em uma faixa de frequências acima de 20 Hz para menores erros na percepção sonora, ou seja, o som possui uma faixa de frequência de 20 Hz a altos valores de frequência.

Finalmente, no exercício de separação de instrumentos musicais, foram testados diversos filtros a fim de eliminar o som da bateria preservando somente o trompete, sendo eles um filtro rejeita-faixa com frequências de corte 30 e 500 Hz, um filtro passa-baixa com frequência de corte 2700 Hz e, por último, um passa-faixa com frequências de corte 600 e 900 Hz. Após as filtrações, o som foi analisado e verificou-se que, pelo fato de as frequências do prato da bateria e do trompete coincidirem em alguns trechos, não foi possível eliminar totalmente o som da bateria. Porém, foi possível atenuar de modo que quando o trompete toca, o som da bateria fica imperceptível.

Já para manter somente o som do bumbo da bateria, foi preciso apenas utilizar um filtro passa-faixa, já que a frequência predominante desse instrumento não coincide com a dos outros instrumentos. Apesar disso, quando não há o som do bumbo da bateria, é possível perceber o trompete, já que o seu som foi atenuado, e não excluído.

Conclusão

Dado o exposto, a prática em questão focou na Transformada de Fourier como ferramenta para análise de sinais no domínio da frequência. Além disso, foi estudada, também, a filtragem de sinais sonoros. De acordo com os resultados obtidos e discutidos, foi possível observar as aplicações da Transformada de Fourier e das técnicas de filtragem para melhorar a qualidade de variados tipos de sinais. Assim, pode-se concluir que os recursos matemáticos abordados podem ser amplamente utilizados na análise e filtragem de diferentes tipos de sinais, como os de som.

Referências

- [1] LATHI, B.P. Sinais e Sistemas Lineares. 2ª edição. Porto Alegre, Bookman, 2007.
- [2] Mathworks. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/matlab/>>. Acessado em 19/10/2019