ELT 355 - Laboratório de sinais e sistemas

Aula Prática 7: Transformada de Fourier - Processamento de Imagens

Departamento de Engenharia Elétrica

Centro de Ciência Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Viçosa

1 Introdução

A transformada de Fourier, em termos de módulo e fase, é dada por

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}. \tag{1}$$

Pode-se pensar em $X(j\omega)$ como uma representação matemática que descreve o sinal $x(t)$ como o somatório de exponenciais complexas em diferentes frequências. Além disso, $|X(j\omega)|^2$ pode ser interpretado como a quantidade de energia no sinal $x(t)$ que se situa entre a faixa infinitesimal de frequência ω e $\omega + d\omega$. Assim, a magnitude $|X(j\omega)|$ nos dá a ideia do conteúdo harmônico básico de um sinal - isto é, $|X(j\omega)|$ fornece informação sobre as magnitudes relativas das exponenciais complexas que constituem $x(t)$. É o que costumamos chamar de espectro.

O ângulo de fase $\angle X(j\omega)$, por outro lado, não afeta as amplitudes dos componentes espectrais individuais. Ao invés disso, fornece informações acerca das fases relativas de cada exponencial. Apesar de não óbvio, as relações entre as fases de $\angle X(j\omega)$ contêm informações significativas acerca da natureza do sinal. Por exemplo, considere o sinal decomposto em cossenos:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t + \phi_1) + cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3}cos(6\pi t + \phi_3). \tag{2}$$

Na figura 1, é mostrado $x(t)$ para diversos valores de fase ϕ_i, mantendo-se o módulo inalterado. Como ser notado, os sinais resultantes podem diferir significantemente para diferentes valores de fase, apesar de o conteúdo harmônico não se alterar.

Em geral, mudanças na função fase $\angle X(j\omega)$ levam a alterações nas características temporais do sinal $x(t)$. Em alguns casos esta distorção de fase pode ser importante, por exemplo na reconstrução de sinais de fala. Como um caso extremo, imagine se as fases individuais forem distorcidas de 180^o num sinal de audio: isso significa que o audio será tocado de trás para frente, isto é, o espectro do sinal tem a mesma função magnitude do sinal original, porém fase distorcida.

A transformada de Fourier pode ser também aplicada na análise de imagens. Nesse sentido, uma imagem em preto-e-branco pode ser interpretada como um sinal $x(t_1, t_2)$, com t_1 denotando a coordenada horizontal de um ponto da imagem e t_2 a coordenada vertical. Assim, a transformada de Fourier $X(j\omega_1, j\omega_2)$ representa a decomposição da imagem em diferentes componentes da forma $e^{j\omega_1 t_1}e^{j\omega_2 t_2}$ que capturam as variações espaciais de $x(t_1, t_2)$ em diferentes frequências nas direções de cada uma das coordenadas. Uma aplicação da transformada bidimensional de Fourier é na compactação de imagens (os algoritmos dos formatos JPEG, TIF etc fazem uso de $X(j\omega_1, j\omega_2)$.)

2 Comandos úteis

- `help`, ajuda para usar um comando.

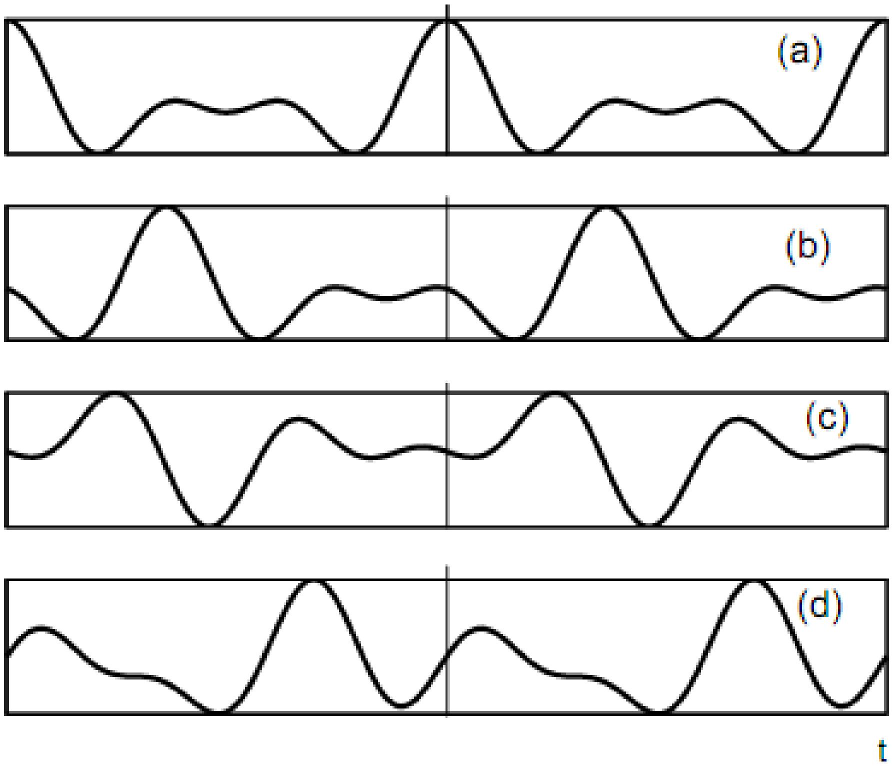

Figura 1: O sinal $x(t)$ dado na eq. (2) para diferentes valores de ϕ_i. (a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$; (b)$\phi_1 = 4$ rad, $\phi_2 = 8$ rad, $\phi_3 = 12$ rad; (c) $\phi_1 = 6$ rad, $\phi_2 = -2,7$ rad, $\phi_3 = 0,93$ rad; (d) $\phi_1 = 1,2$ rad, $\phi_2 = 4,1$ rad, $\phi_3 = -7,02$ rad.

- `imread`, importa imagem de um arquivo.
- `imshow`, plota imagem.
- `fft2`, transformada de Fourier bi-dimensional.
- `ifft2`, transformada de Fourier bi-dimensional inversa.
- `angle`, extrai a fase.
- `abs`, módulo.

3 Objetivos

Verificar o papel do módulo e da fase da transformada de Fourier na representação de imagens e o efeito de distorções nestas variáveis para reconstrução de imagens. Para isso, use o Matlab e disponha de duas imagens, A e B, de mesmas dimensões (números de linhas e colunas das imagens precisam ser os mesmos; encontre um banco de imagens naturais em http://sipi.usc.edu/services/database/database.cgi?volume=misc).

4 Roteiro

1. Plote as imagens A e B. Dica: se as imagens forem coloridas, tire a média pixel a pixel para obter uma imagem em tons de cinza.
2. Obtenha a transformada de Fourier bi-dimensional da imagem A, $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$.

3. Obtenha a transformada de Fourier bi-dimensional da imagem B, $X_B(j\omega_1, j\omega_2)$.

4. Plote uma imagem só com os módulos de $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$. Dica: talvez seja preciso ajustar a escala no comando `imshow` para que detalhes sejam percebidos (dê um `help imshow`).

5. Plote uma imagem só com as fases de $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$.

6. Em seguida, force as fases de $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$ serem zero (sem alterar as magnitudes), faça a transformada inversa, e plote a imagem obtida. Dica: a transformação inversa as vezes possui erros de arredondamento, levando a valores imaginários muito pequenos. Use o comando `real` na imagem resultante.

7. Faça as magnitudes de $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$ serem iguais a 1 (mantenha as fases originais), faça a transformada inversa, e plote a imagem obtida.

8. Finalmente, obtenha uma imagem usando as fases de $X_A(j\omega_1, j\omega_2)$ e os módulos de $X_B(j\omega_1, j\omega_2)$.

9. Analise as imagens obtidas e discuta sobre os significados e importâncias do módulo e da fase da transformada de Fourier de imagens.