

**Программа курса**  
**"Дискретная математика" ИУ5, 4 семестр,**  
**2014 -15 учебный год.**

Множества, подмножества. Способы определения множеств. Равенство множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение). Множество всех подмножеств заданного множества. Метод двух включений доказательства теоретико-множественных тождеств. Основные тождества (с доказательством). Методы характеристических функций и эквивалентных преобразований.

Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение множеств. Свойства декартова произведения множеств (с доказательством).

Отображения: область определения, область значений. График отображения. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Частичное отображение. Соответствия. График и граф соответствия, область определения, область значения. Сечение соответствия. Сечение соответствия по множеству. Функциональность соответствия по компоненте. Бинарные и  $n$ -арные отношения. Композиция соответствий, обратное соответствие и их свойства (с доказательством).

Семейства множеств. Объединение и пересечение семейства множеств. Бесконечная дистрибутивность (с док-вом), бесконечные законы де Моргана (самостоятельно).

Специальные свойства бинарных отношений на множестве (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Признаки симметричности, антисимметричности и транзитивности (с доказательством). Примеры.

Классификация бинарных отношений на множестве: эквивалентность, толерантность, порядок, предпорядок, строгий порядок, строгий предпорядок. Связь между ними. Примеры. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения на множестве (с доказательством свойств рефлексивности и транзитивности).

Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Примеры. Теорема о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества (с доказательством).

Отношения предпорядка и порядка. Двойственный порядок. Отношение доминирования. Линейный порядок. Наибольший, максимальные, наименьший и минимальные элементы. Точная нижняя и верхняя грани множества. Вполне упорядоченное множество. Принцип двойственности. Диаграмма Хассе. Цепи и антицепи. Примеры.

Точная верхняя грань последовательности. Индуктивное упорядоченное множество. Непрерывное отображение. Монотонное отображение. Теорема о монотонности непрерывного отображения (с доказательством). Пример монотонного отображения, не являющегося непрерывным. неподвижная точка отображения. Теорема о неподвижной точке (с доказательством). Пример вычисления неподвижной точки.

Булева функция. Булев порядок. Булев куб. Примеры. Таблица булевой функции. Основные функции двух переменных. Фиктивные переменные. Равенство булевых функций.

Суперпозиции булевых функций. Формулы. Процесс построения формулы и его представление в виде ориентированного дерева. Подформулы. Функция, представляемая формулой.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Теорема о представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ (с док-вом). Примеры. Построение СДНФ и СКНФ по таблице функции.

Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Минимальная и кратчайшая ДНФ. Алгоритм Квайна—Мак-Клоски. Тождества склейки и поглощения. Интерпретация тождества склейки на булевом кубе. Простые импликанты. Сокращенная ДНФ. Карта Карно и ее связь с булевым кубом (самостоятельно). Ядровые импликанты. Ядро. Тупиковые ДНФ и задача их перечисления. Вспомогательная функция Патрика.

Таблица Квайна (самостоятельно).

Полное множество булевых функций. Теорема о доказательстве полноты множества путем представления его элементов формулами над полным множеством. Примеры.

Базис Жегалкина и его полнота. Полином Жегалкина. Теорема о единственности полинома Жегалкина для каждой булевой функции (с док-вом). Метод неопределенных коэффициентов вычисления полинома Жегалкина для функции, заданной таблично.

Классы Поста. Примеры. Теорема о замкнутости классов Поста (с док-вом). Утверждение о возможности получить константы из несамодвойственной функции (с док-вом). Утверждение о возможности получить отрицание из нелинейной функции (с док-вом). Утверждение о возможности получить конъюнкцию из нелинейной функции (с док-вом). Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста) (с док-вом). Примеры. Схемы из функциональных элементов. Реализация булевой функции схемой из функциональных элементов.

Операции на множестве. Понятие алгебраической структуры. Свойства операций (ассоциативность, коммутативность, идемпотентность). Нуль и нейтральный элемент (единица) относительно операции. Примеры. Универсальная алгебра, носитель, сигнатура. Примеры.

Группоиды, полугруппы, моноиды. Единственность нейтрального элемента (с док-вом). Обратный элемент. Группа. Единственность обратного элемента в группе (с док-вом). Коммутативные группы. Аддитивная и мультипликативная формы записи. Теорема об обратном к произведению элементов и обратном к обратному (с док-вом). Законы сокращения в группе (с док-вом). Решение уравнений  $a*x=b$  и  $x*a=b$  в группе  $(G, *)$  (с док-вом).

Группа подстановок  $S_n$ . Аддитивные группы вычетов. Мультипликативные моноиды и группы вычетов.

Степень элемента. Свойства степеней (без док-ва). Циклическая полугруппа (группа). Образующий элемент. Примеры конечных и бесконечных циклических полугрупп и групп. Порядок конечной группы. Порядок элемента. Теорема о равенстве порядка конечной циклической группы порядку группы (с док-вом) (самостоятельно).

Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Коммутативное кольцо. Кольца вычетов. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности вычитания относительно умножения) (с док-вом).

Тела и поля. Примеры полей. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов. Решение систем линейных уравнений в поле вычетов.

Подполугруппа, подмоноид, подгруппа. Примеры. Циклические подгруппы. Подкольца и подполя.

Полукольцо. Идемпотентное полукольцо. Примеры полуколец (с доказательством свойств). Естественный порядок идемпотентного полукольца (с доказательством рефлексивности, антисимметричности и транзитивности). Примеры. Теорема о точной верхней грани конечного подмножества идемпотентного полукольца (с док-вом).

Замкнутое полукольцо. Теорема о замкнутости конечного идемпотентного полукольца (с док-вом). Примеры замкнутых полуколец. Итерация элемента. Примеры вычисления итерации в различных замкнутых полукольцах.

Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце (с док-вом). Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.

Квадратные матрицы порядка  $n$  над идемпотентным полукольцом. Теорема о полукольце квадратных матриц (с док-вом). Замкнутость полукольца квадратных матриц над замкнутым полукольцом (без док-ва). Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах. Метод последовательного исключения переменных. Примеры. Вычисление итерации матрицы.

Неориентированный граф. Цепь, простая цепь, цикл. Отношение достижимости. Компоненты.

Понятие ориентированного графа. Путь, простой путь, контур. Отношение достижимости и взаимной достижимости и их свойства (с док-вом). Компоненты и бикомпоненты. Связность, сильная связность, слабая связность.

Подграф, подграф, порожденный множеством вершин, остовный подграф, максимальный подграф, обладающий заданным свойством.

Способы представления графов. Матрица смежности, списки смежности. Матрица достижимости.

Деревья. Ориентированные деревья. Высота ориентированного дерева, глубина вершины, высота и уровень вершины. Бинарное дерево. Полное бинарное дерево. Теорема о высоте бинарного дерева с заданным числом листьев (с док-вом). Задача сортировки. Дерево решений. Оценка сложности решения задачи сортировки.

Задача систематического обхода вершин графа. Поиск в глубину в неориентированном графе. Фундаментальные циклы. Древесные и обратные ребра. Соответствие между обратными ребрами и фундаментальными циклами (с док-вом). Глубинный остовный лес. Пример поиска.

Особенности поиска в глубину в ориентированном графе. Классификация дуг. Определение класса дуги по  $D$ -номерам вершин. Поиск контуров. Пример поиска.

Поиск в ширину в ориентированном графе. Алгоритм поиска. Примеры.

Задача о путях во взвешенных графах. Взвешенный ориентированный граф. Весовая функция. Матрица меток дуг. Метка пути. Стоимость прохождения из вершины в вершину. Утверждение о вычислении стоимости прохождения по всем путям длины  $l$  (с доказательством). Вычисление матрицы стоимостей ориентированного графа, размеченного над замкнутым полукольцом (с обоснованием). Пример.

Алфавит. Слово и язык в алфавите. Операция соединения слов. Соединение языков. Итерация языка. Полукольцо языков, его замкнутость (с доказательством выполнения аксиом полукольца и доказательством замкнутости). Регулярные языки. Индуктивная процедура порождения регулярных языков. Регулярные выражения. Полукольцо регулярных языков. Незамкнутость полукольца регулярных языков.

Конечные автоматы (КА). КА как устройство. Конфигурация КА. Входной алфавит. Система команд. Начальное и заключительные состояния. Представление автомата ориентированным графом, взвешенным над полукольцом регулярных языков. Функция разметки и ее особенности. Функция переходов КА. Язык, допускаемый КА. Эквивалентные КА. Теорема Клини (с док-вом). Задача синтеза КА по заданному регулярному выражению. Пример.

Вычисление языка, допускаемого КА как решение задачи о путях во взвешенных графах. Особенности составления и решения системы линейных уравнений для нахождения языка.

Детерминизация конечных автоматов. Теорема о детерминизации (без доказательства). Алгоритм детерминизации. Пример. Теорема о регулярности дополнения регулярного языка (с док-вом). Регулярность пересечения, разности и симметрической разности регулярных языков. Проблема пустоты для конечного автомата.

Лемма о разрастании для регулярных языков. Примеры использования. Пример, показывающий незамкнутость полукольца регулярных языков.