Задачи для подготовки к экзамену по курсу "Дискретная математика"
ИУ5, 4 семестр. Лектор - Ткачев С.Б.

1) На множестве упорядоченных пар (x, y), x, $y \in \mathbb{R}$, задано отношение τ по правилу

$$(x_1, y_1)\ \tau\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 2y_1^2 = x_2^2 - 2y_2^2.$$

Показать, что τ — отношение эквивалентности.

Указать классы эквивалентности. Для точек $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, 1)$ изобразить классы эквивалентности графически.

2) На множестве $M = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ упорядоченных пар задано отношение π по правилу

$$(x_1, y_1)\ \pi\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ и } y_1 \geq y_2.$$

Показать, что π — отношение порядка. Установить, является ли упорядоченное множество (M, π) индуктивным?

Найти множество нижних и верхних граней множества $\{A, B, C\}$, где $A = (1, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, 1)$. Указать $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$, если последние существуют. Привести графическую иллюстрацию.

3) На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел определено отношение делимости $|$ по правилу

$$m \mid n \Leftrightarrow m \text{ делит нацело } n.$$

Показать, что $|$ есть отношение порядка.

Установить, будет ли упорядоченное множество $(\mathbb{N}, |)$ индуктивным? Существуют ли $A \subset \mathbb{N}$, такие, что $(A, |)$ будут индуктивными?

4) Для бинарного отношения $<$ на множестве $\mathbb{N}$ показать, что $< \circ < \neq <$.

5) Показать, что в общем случае

$$\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau)$$

для бинарных отношений ρ, σ и τ на некотором множестве M, однако равенство не имеет места. Привести пример трех бинарных отношений на множестве $\{1, 2, 3\}$, для которых имеет место строгое включение.

6) Пусть M — некоторое множество. Является ли алгебра $\mathcal{A} = (2^M, \cap, \cup)$ полукольцом? Кольцом?

Если $\mathcal{A}$ является полукольцом (но не кольцом), установить, будет ли $\mathcal{A}$ замкнутым полукольцом?

Если $\mathcal{A}$ является кольцом, установить, есть ли в $\mathcal{A}$ делители нуля? Является ли кольцо $\mathcal{A}$ полем?

7) Пусть M — некоторое множество. Является ли алгебра $\mathcal{A} = (2^M, \triangle, \cap)$ кольцом? Полем? Если $\mathcal{A}$ является кольцом, установить, есть ли в $\mathcal{A}$ делители нуля?

8) На множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ определена операция $\odot$ по правилу

$$a \odot b = 2ab.$$

Установить, является ли алгебра $(M, \odot)$ полугруппой? Моноидом? Группой?

Имеет ли решение уравнение $5 \odot x = 2$? Если да, найти это решение.

9) В полукольце $S_{[0,1]} = ([0,1], \oplus, \odot)$, носителем которого является отрезок $[0,1]$ числовой прямой, $x \oplus y = \max\{x,y\}$, $x \odot y = \min\{x,y\}$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 \oplus 0{,}2x_2 \oplus 0{,}1, \\ x_2 = 0{,}4x_1 \oplus 0{,}3x_2 \oplus 0{,}2. \end{cases}$$

10) В полукольце $\mathcal{S} = (2^M, \cup, \cap)$, где $M = [0,1]$ — отрезок числовой прямой, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = Ax_1 + Bx_2 + C, \\ x_2 = Dx_1 + Ex_2 + F. \end{cases}$$

Здесь $A = [0,\ 0{,}5]$, $B = [0{,}2,\ 0{,}9]$, $C = [0{,}4,\ 0{,}7]$, $D = [0,\ 0{,}5]$, $E = [0{,}3,\ 0{,}8]$, $F = [0{,}4,\ 0{,}7]$.

11) Показать, что полукольцо

$$\mathcal{D}_{12} = (\textit{Дел}(12),\ \oplus\ ,\ \odot\ ),$$

где $\textit{Дел}(12)$ — множество делителей числа 12, $\oplus$ — операция вычисления наименьшего общего кратного, $\odot$ — операция вычисления наибольшего общего делителя, является замкнутым.

Представить множество $\textit{Дел}(12)$ с естественным порядком идемпотентного полукольца диаграммой Хассе.

Установить, сравнимы ли число 3 и наименьшее решение уравнения $x = 2 \odot x \oplus 4$?

12) В группе подстановок S_7 решить уравнение

$$(1\,3\,2)(7\,5\,4)X(2\,4\,6)^{2012} = (2\,3\,5).$$

13) В поле $\mathbb{Z}_7$ решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

14) В поле $\mathbb{Z}_7$ найти все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

15) В группе $\mathbb{Z}_{11}$ найти циклическую подгруппу $\mathcal{H}$, порожденную элементом $a = 5$. Используя полученный результат, найти элемент, обратный к 5.
Решить уравнение $5 \odot_{11} x \odot_{11} 6 = 7$.

16) Для ориентированного графа $G = (V,E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_6), (v_5,v_4), (v_5,v_6), (v_6,v_1), (v_2,v_4), (v_3,v_5)\}$, выполнить поиск в глубину из вершины v_5. Привести протокол работы алгоритма (работу со стеком, классификацию дуг в порядке их обработки, контуры в порядке их нахождения). Считать, что вершины в списке смежности упорядочены в порядке возрастания номеров.

17) Выполнить поиск в ширину из вершины v_1 для ориентированного графа $G = (V,E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_5), (v_4,v_5), (v_5,v_6), (v_6,v_4)\}$.

18) Построить два различных глубинных остовных леса с корнем v_4 для неориентированного графа $G = (V,E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_1\}\}$. Записать списки смежности, при которых проводились поиски в глубину и описать работу со стеками. Классификацию ребер для каждого варианта отобразить графически.

19) Решив систему уравнений в полукольце $\mathbb{B}$, вычислить матрицу достижимости ориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_3), (v_6, v_4)\}$. С использованием матрицы достижимости найти его бикомпоненты.

20) Решив систему уравнений в полукольце $\mathbb{R}^+$, вычислить матрицы стоимости взвешенного ориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_6), (v_5, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_2, v_4)\}$, а весовая функция которого определена следующим образом: $\varphi((v_1, v_2)) = 1$, $\varphi((v_1, v_3)) = 5$, $\varphi((v_2, v_3)) = 3$, $\varphi((v_3, v_4)) = 2$, $\varphi((v_4, v_6)) = 3$, $\varphi((v_5, v_4)) = 1$, $\varphi((v_5, v_6)) = 2$, $\varphi((v_6, v_1)) = 1$, $\varphi((v_2, v_4)) = 7$.

21) Решив систему уравнений в полукольце $\mathbb{R}^+$, вычислить матрицу стоимости взвешенного ориентированного графа, заданного матрицей меток дуг:

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & 1 \\ 2 & 3 & 2 & \mathbb{O} & 6 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & 1 & 5 & \mathbb{O} \\ 2 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & 2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & 7 \\ \mathbb{O} & 3 & \mathbb{O} & 1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbb{O}$ — нуль полукольца $\mathbb{R}^+$.

22) Построить конечный автомат по регулярному выражению $((aba)^* + bab)^*$ и детерминизировать его.

23) Построить конечный автомат, допускающий множество всех цепочек в алфавите $\{a, b\}$, кроме единственной цепочки aab.

24) Построить конечный автомат, допускающий множество всех цепочек в алфавите $\{0, 1\}$, не содержащих подцепочки 010.

25) Решить систему линейных уравнений с регулярными коэффициентами

$$x_1 = ax_1 + bx_2 + b,$$
$$x_2 = bx_1 + ax_2 + \lambda.$$

Построить конечный автомат, допускающий язык, заданный регулярным выражением x_2.

26) Доказать, что множество всех цепочек в алфавите $\{a, b\}$, содержащих каждая одинаковое число символов a и b, нерегулярно.

27) Найти язык, допускаемый конечным автоматом

$$M = \{\{a, b\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1\}, \{q_2, q_4\}, \delta(q_1, a) = \{q_1, q_3\}, \delta(q_1, b) = \{q_2\}, \\ \delta(q_2, b) = \{q_1\}, \delta(q_2, a) = \{q_3, q_4\}, \delta(q_3, a) = \{q_4\}, \delta(q_4, b) = \{q_3\}\}.$$

28) С использованием карты Карно выписать все тупиковые и найти минимальные ДНФ для функции

$$f = (0, 1, 2, 3, 7, 8, 10, 12, 13, 15).$$

Для функции f указаны номера тех наборов, на которых функция принимает значение 1.

29) С использованием карты Карно перечислить все тупиковые ДНФ и найти минимальные ДНФ для функции

$$f = (0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0).$$

30) С использованием карты Карно найти все тупиковые ДНФ и указать минимальные ДНФ для функции

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

31) Выяснить полноту множества F булевых функций

$$f_1 = \{0, 1, 2, 4, 7\},$$
$$f_2 = \{1, 3, 5\}.$$

Если множество не является полным, дополнить его такой булевой функцией h, чтобы множество $F' = \{f_1, f_2, h\}$ было полным.
Реализовать коньюнкцию в виде схемы из функциональных элементов над F или F'.
Дополнительную функцию h следует использовать только для тех построений, где использование f_1 и f_2 невозможно.
Для функций указаны номера наборов, на которых она принимает значение 1.

32) Установить, можно ли выразить константы 0, 1 и коньюнкцию формулами над множеством булевых функций $F = \{f, ^{-}\}$, где

$$f = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$$

Если можно, привести эти формулы. Если нельзя, дополнить множество F так, чтобы это можно было сделать и привести указанные формулы над дополненным множеством.

Выразить булеву функцию $f = (1\ 1\ 1\ 0)$ формулой над F или дополненным множеством.

33) Проверить, является ли полным множество булевых функций $F = \{\sim, 0\}$. В случае неполноты дополнить множество F так, чтобы оно стало полным. Выразить формулой над множеством F (или дополненым множеством) булеву функцию $\overline{x_1} \vee x_1 x_2$.