

Задачи
для подготовки к рубежному контролю по модулю 3.
Дискретная математика, ИУ5 – 2 курс, 4 семестр, 2015 г.
Лектор Ткачев С.Б.

Элементы общей алгебры

1. На множестве M определена операция \circ по правилу $x \circ y = x$. Установите, является ли алгебра (M, \circ) полугруппой. Существуют ли в ней правые (левые) нейтральные элементы?
2. Пусть на множестве M^2 , где M — некоторое множество, определена бинарная операция \circ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли (M^2, \circ) полугруппой? Существует ли в ней нейтральный элемент?
3. На множестве целых чисел Z определена операция \circ по правилу $a \circ b = a + b + ab$. Покажите, что алгебра (Z, \circ) является коммутативным моноидом.
4. Является ли моноидом алгебра $(2^A, \cap)$, где A — некоторое множество.
5. В аддитивной группе вычетов по модулю 7 решить уравнение $4 \oplus_7 x = 2$.
7. В мультипликативной группе вычетов по модулю 7 решить уравнение $3^{2011} \odot_7 x = 2$.
8. В группе подстановок S_4 решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

9. В группе подстановок S_7 решите уравнение

$$(1\ 3\ 6) \circ (5\ 6) \circ X \circ (1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5).$$

10. В мультипликативной группе вычетов Z_{31}° решите уравнение $2 \odot x \odot 8 = 5$.
11. Покажите, что алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$, где $x \odot y = 3xy$, является группой. Решите в этой группе уравнение $2 \odot x = 5$.
12. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \cap, \cup)$? Основные теоретико-множественные тождества считать известными.
13. Установите, является ли кольцом алгебра $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?
14. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \Delta, \cap)$, где A — некоторое множество?
15. Установите, являются ли полями следующие кольца вычетов: $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{31}$. Ответ обоснуйте.
16. В поле \mathbb{Z}_7 решите систему уравнений

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$

$$4x_1 - 6x_3 = 2.$$

17. Существуют ли делители нуля в кольце \mathbb{Z}_4 вычетов по модулю 4? В кольце Z_5 ? Z_{2015} ?

18. Какие из множеств матриц, элементы которых - действительные числа, образуют кольцо относительно матричных операций умножения и сложения? Какие из колец являются полями?

(а) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$?

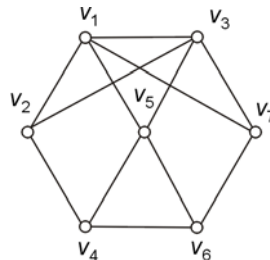
(б) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

19. Установить, разрешима ли в кольце \mathbb{Z}_{21} система уравнений

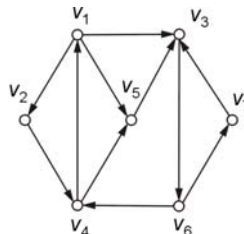
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ y - 11x = 13? \end{cases}$$

Теория графов

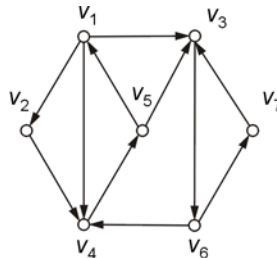
1. Выполнить **поиск в глубину** в неориентированном графе из вершины V_1 . Записать списки смежности. Вершины в списке смежности расположить в порядке возрастания номеров. Привести протокол работы алгоритма, указать D-номера вершин. Построить глубинное остовное дерево.



2. Выполнить **поиск в глубину** в ориентированном графе из вершины V_5 . Записать списки смежности. Вершины в списке смежности расположить в порядке возрастания номеров. Привести протокол работы алгоритма, указать D-номера вершин. Построить глубинное остовное дерево.



3. Выполнить **поиск в ширину** в ориентированном графе из вершины V_5 . Записать списки смежности. Привести протокол работы алгоритма (работу с очередью, изменения массива меток на каждом шаге). На графе указать номера вершин, присваиваемых им в соответствии с порядком посещения при работе алгоритма. Отметить на графе кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные, используя массив «предков», сформированный при работе алгоритма.



4. Решив систему уравнений в полукольце B , найти матрицу достижимости ориентированного графа. Матрица A смежности вершин графа задана таблицей. Решение подробно описать. При нахождении решения пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце.

0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

5. Решив систему уравнений в полукольце \mathfrak{K}^+ , найти матрицу стоимости ориентированного графа. Матрица A меток дуг графа задана таблицей. Решение подробно описать. При нахождении решения пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

∞	2	∞	∞	6
∞	5	∞	∞	2
2	∞	∞	6	4
∞	∞	∞	3	3
3	∞	∞	∞	1