

CHAIN 命题报告

清华大学 陈俊锬 吕欣

题意简述

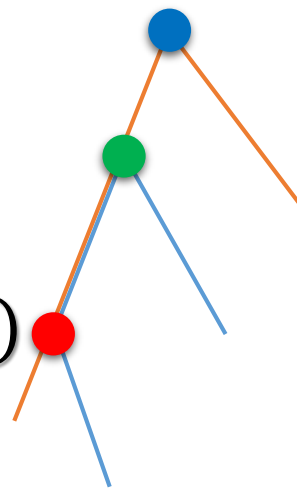
- 给出一棵 n 个点的树，每条边有非负边权
 - 再给出 m 条树上的链，用端点表示，每条链都有价值
 - 要求选出两条链，满足这两条链**至少有一条边相交**
 - 最大化选出的**链的权值和 + 被至少一条链覆盖的边的边权和**
-
- 一个测试点 10 组数据， $n \leq 50,000$ 、 $m \leq 100,000$
 - 时间限制 5 秒，空间限制 512 MB

部分分设计与算法提示

- 本题具有以下几档部分分，部分分可以提示正解
- 所有边权均为 0
 - 只需要对每条链找和它相交的最长链
 - 二分 + 树链剖分套主席树即可
 - 没有任何思维难度，对正解没有什么提示，只是送分用
- 所有链 (a, b) 满足 a 和 b 的 LCA 两两不同
 - 标算的第一个部分
- 所有链都经过点 1，即所有链的 LCA 全部相同
 - 标算的第二个部分

标算的第一部分：LCA 两两不同

- 本题要求求的是“被至少一条链覆盖的边”的和，即链并
- 对于 LCA 不同的两条链，两条链的交必然是直上直下的一段
- 因此可以把一条链拆成两条直上直下的链考虑
- 在树上枚举较下的交点（红点）
 - 要求两条链的下端点必须在红点的不同儿子子树中
- 长度和 + 权值和 - 红点深度 + $\max(\text{绿点深度}, \text{蓝点深度})$
- 于是可以想到对每个点记 $f(i, j)$
 - 下端点在 i 子树内，上端点深度为 j 的最大的链长度 + 权值
- 用启发式合并或线段树合并维护这个数组，复杂度 $O(m \log n)$

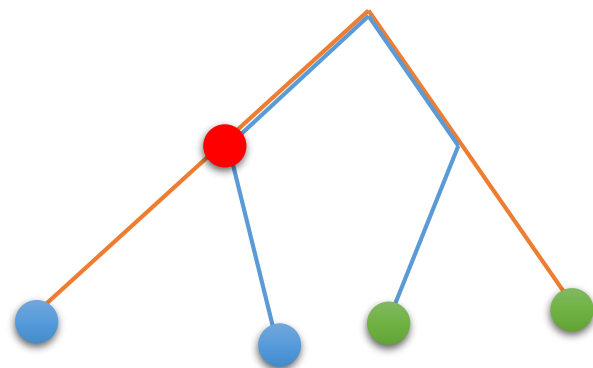


标算的第一部分 – 评注

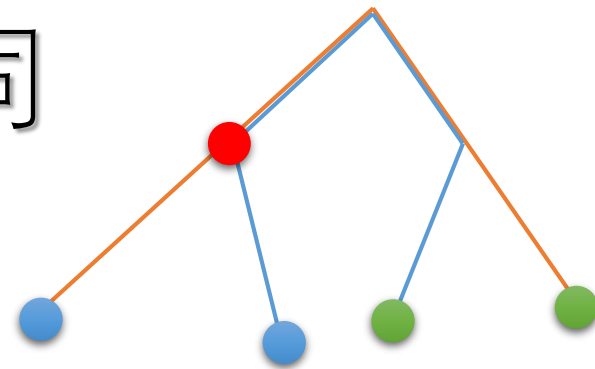
- 这一部分考察了选手对问题的简单分析能力、对式子的化简能力，以及简单的数据结构（套路）应用
- 具有较低的思维难度和中等的代码难度
- 这一部分并不是本题的关键，但对于细节处理有提示作用

标算的第二部分：LCA 全部相同

- 对于这一部分数据，两条链的交可能不是直上直下的
- 关键性质：链并的两倍 = 两条链长 + 蓝点距离 + 绿点距离
- 那么可以考虑枚举红点，即蓝点的 LCA
 - 要求两个蓝点属于红点不同儿子的子树
- 这时候要考虑绿点的距离
 - 如果仍然用深度减去 LCA 深度考虑，无从下手
 - 但我们是要最大化它们，可以直接从最远点对入手



标算的第二部分：LCA 全部相同



- 枚举红点之后，我们的任务是
 - 选出两个属于红点不同儿子子树的蓝点 a, b
 - 使得它们对应绿点 p_a, p_b 的距离 + 两条链链长和权值和 + 两个蓝点深度和 - $2 \times$ 红点深度最大
- 注意到红点深度是常数无需考虑
- 对于其他项，可以通过添加附加点 p'_a, p'_b 向 p_a, p_b 连接边权为自己所在链长 + 权值的边，转化为找最远点对 p'_a, p'_b
 - 要求支持集合合并
 - 在合并的时候，求出跨越两个集合的最远点对

标算的第二部分：LCA 全部相同

- 对于非负边权的树，两个点集的并的最远点对的一端，一定是原来两个点集中，某个点集的最远点对的一端
- 只需要对点集记录最远点对端点，即可支持合并
- 这个算法只需要在树上进行 DFS，以及求 m 次的 LCA
- 复杂度为 $O(n + m)$

标算的第二部分 – 评注

- 这一部分的算法的设计与之前的所有套路不同
- 需要推导出链并的表达式，仔细分析链交的性质，根据链交的一侧，通过一些不平凡、不套路的转化，将问题转化为最远点对
- 这个转化需要深入分析，有一定的技巧性和较高的思维难度
- 但在实现上比较简单，只需要实现求 LCA，没有什么代码难度
- 这一部分是题目的关键之处，也是本题的主要考点

标算

- 两条相交的链，要么 LCA 相同，要么 LCA 不同
- 对于 LCA 不同的所有情况已经可以处理了
- 对于 LCA 相同的情况，考虑同时考虑这些情况
- 对每个点 p 记录 $f(p, j)$ 表示在点 p 处理 LCA 为 j 时保存的蓝点的集合（记录的是最远点信息）
- 对 f 数组进行启发式合并，复杂度 $O(n + m \log n)$
 - 也可以进行点分治，考虑所有过重心的链，转化为全过一个点的情况，复杂度 $O(n \log n + m \log n)$
- 这样本题就在 $O(n + m \log n)$ 的时间复杂度内解决了

考察内容及难度评估

- 题目描述简洁易懂，解法自然
- 考察的知识点只有找 LCA 和启发式合并，无偏门知识点
- 本题的标算的第二部分虽然算法比较自然，但有较高的思维难度，考察了选手是否有问题的深入分析能力和模型的转化能力，以及处理问题的一些思路
- 综合来看，本题代码难度中等，思维难度较高，可以较全面地考察选手的综合能力，适合作为 NOI 的 D1T3 或 D2T3 出现