Yohann Tendero
yohann.tendero@telecom-paristech.fr
http://perso.telecom-paristech.fr/~ytendero/

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Quelques rappels :

- Transformée de Fourier Discrete (TFD)
- Algorithmes simples bases sur la TFD :
  - Convolution/ Filtre inversible, Déconvolution et sensibilité au bruit.
  - Translation
  - Zoom in (zero padding)
  - Rotation : 3 translations de Yaroslavsky.

Plan

- Rappels
- **Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.**
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Visulaliser le module d'une TFD

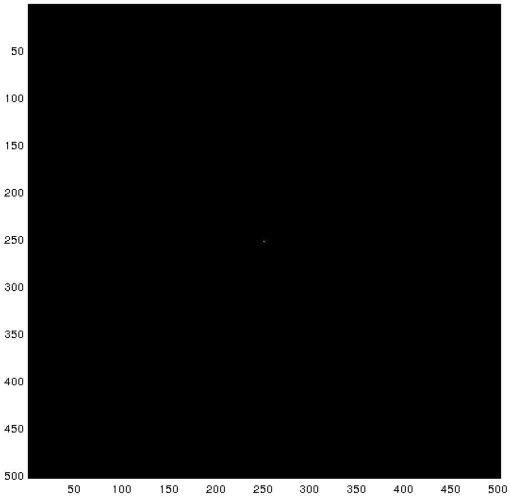
Algorithme pour afficher le spectre ou module d'une TFD :
1) Calculer la TFD-2D : `fft2_I=fft2(I);`
2) Extraire le module (commande abs en matlab) `modulus=fftshift(abs(fft2_I));`
3) Ajouter 1 et prendre le log : `modulus=log(modulus+1);`
4) Changer la dynamique : mettre le minimum à zero et le max à 1 :

```
modulus=modulus-min(modulus(:));
modulus=modulus/max(modulus(:));
```

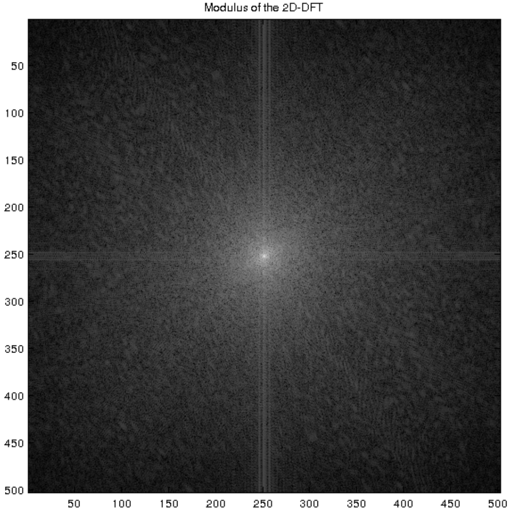
5) Afficher : `imshow(modulus)` [1]

1. Imshow affiche des images dont la valeur est dans $[0,1]$. Les valeurs $\leqslant 0$ sont toutes noires, les valeurs $\geqslant 1$ sont toutes blanches.

Module (ou spectre) de la TFD d'une image



Module (ou spectre) de la TFD d'une image : echelle Log

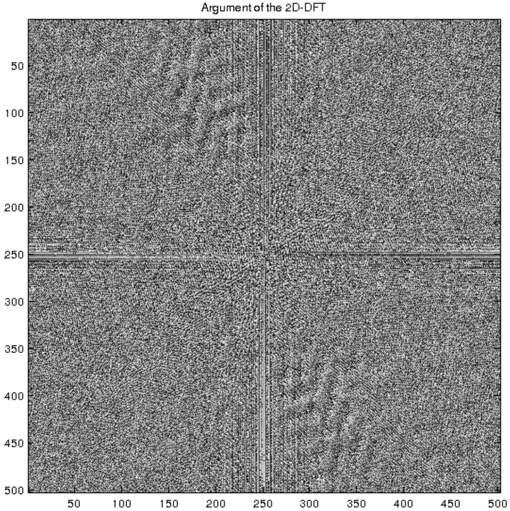


Visulaliser la phase d'une TFD

Algorithme :
1) Calculer la TFD-2D : fft2_I=fft2(I) ;
2) Extraire la phase (commande angle en matlab) angle=fftshift(fft2_I) ;
3) Changer la dynamique : mettre le minimum à zero et le max à 1 :
angle=angle-min(angle(:)) ;
angle=angle/max(angle(:)) ;
4) Afficher : imshow(modulus) [2]

2. Imshow affiche des images dont la valeur est dans $[0, 1]$. Les valeurs $\leqslant 0$ sont toutes noires, les valeurs $\geqslant 1$ sont toutes blanches.

Phase de la TFD d'une image



Echange phase/module


Echange phase/module


L'image de gauche à le module de la maison et la phase de Lena. L'image de droite à le module de Lena et la phase de la maison. => Les structures géométriques sont essentiellement stockées dans la phase.

Conclusion

- C'est dans la phase que se trouve le contenu "géométrique" de l'image
- Le module lui, contient des information plutôt relatives à la netteté.

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- **Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.**
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Zoom out : direct decimation : Aliasing

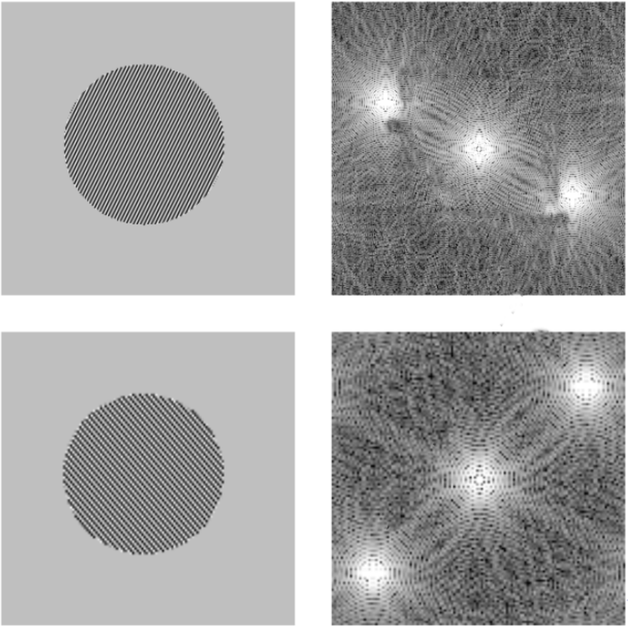
Zoom out (2) : original

Zoom out :(2) direct decimation : Aliasing

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- **Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.**
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Explication du phénomène de repliement spectral (Aliasing)



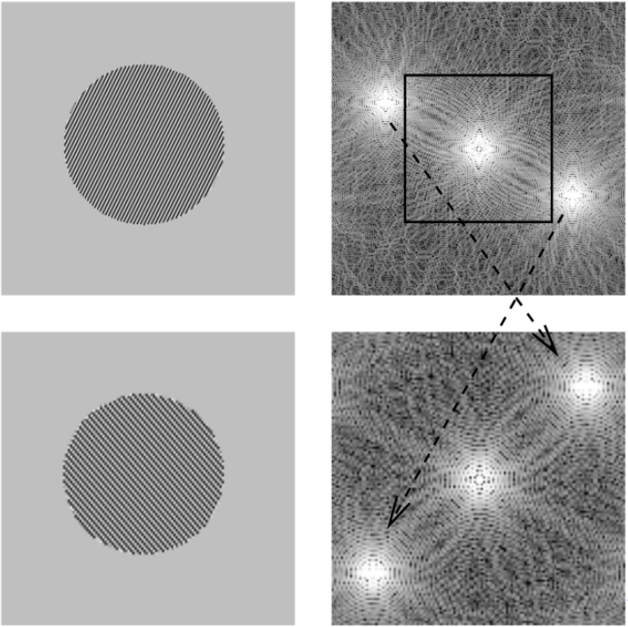
Rappel

Trois manifestations de l'aliasing dans les images

- Repliement spectral des textures (chmt. de période, d'orientation) ;
- Perte de connexité des structures fines ;
- Crénelage.

Formule de Poisson (au tableau + notes de cours).

Explication du phénomène de repliement spectral (Aliasing)



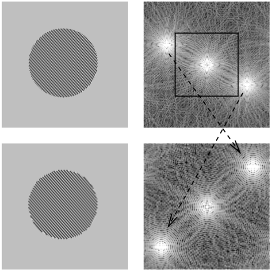
Plan (rappel)

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- **Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.**
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Eviter l'aliasing

Comment éviter l'aliasing ?

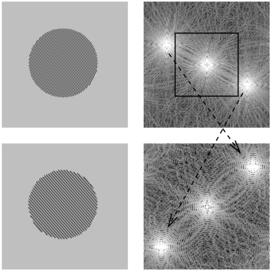
$$\sum_n f(n) e^{-in\xi} = \sum_m \hat{f}(2\pi m + \xi).$$



Eviter l'aliasing

Comment éviter l'aliasing ?

$$\sum_n f(n)e^{-in\xi} = \sum_m \hat{f}(2\pi m + \xi).$$

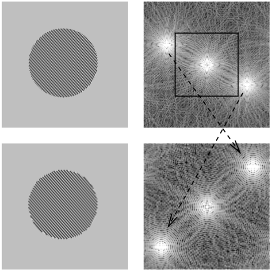


- On coupe (met à zéro) les hautes fréquences avant de sous-échantillonner.
- Par construction on peut éviter l'aliasing.

Eviter l'aliasing

Comment éviter l'aliasing ?

$$\sum_n f(n)e^{-in\xi} = \sum_m \hat{f}(2\pi m + \xi).$$



- On coupe (met à zéro) les hautes fréquences avant de sous-échantillonner.
- Par construction on peut éviter l'aliasing.
- Tests

Test 1 : image originale

Test 1 : apres zoom

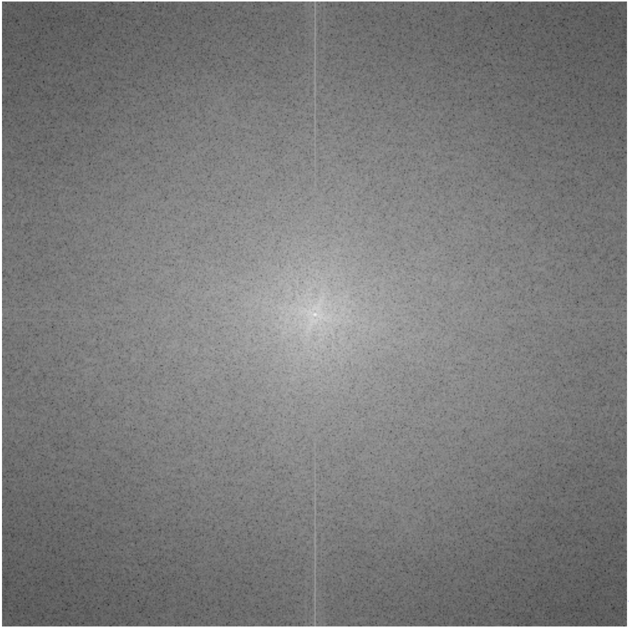
Test 2 : image originale

Test 2 : apres zoom

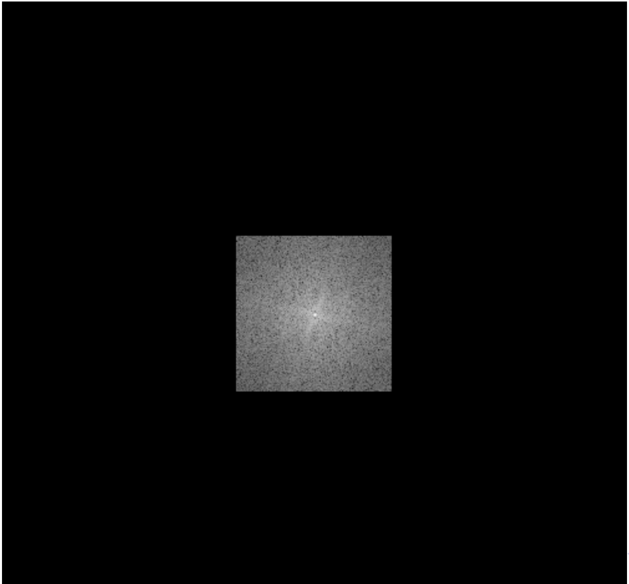
Conclusion partielle

- On voit apparaître des oscillations fort peu naturelles dans l'image.
- Ces oscillations sont appelées "ringing".
- Explication : visualisation des TFD.

Module de la TFD d'une image



Module de la TFD d'une image après coupure des hautes fréquences



Remarque importante

- Le spectre d'une image naturelle tend lentement vers zéro aux bords, i.e., pour les fréquences élevées

Remarque importante

- Le spectre d'une image naturelle tend lentement vers zéro aux bords, i.e., pour les fréquences élevées
- Ce n'est plus le cas après le filtrage passe bas idéal.
- Lorsque le spectre d'une image est "discontinu" : on voit apparaître du "ringing", i.e., des oscillations parasites dans l'image.

Plan (rappel)

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- **Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.**
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Rappel : definition du gradient et du laplacien

On rappelle que le gradient d'une fonction e.g. $f : (x, y) \ni \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est le vecteur donné par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Le laplacien de f est donné par

$$\Delta f(x,y) = Laplacien\ f(x,y) = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Ces quantités peuvent être évaluées par exemple à partir de schéma numériques aux différences finies.

Pour calculer le gradient en x et en y d'une image (utile p. ex. dans les détecteurs de contours)

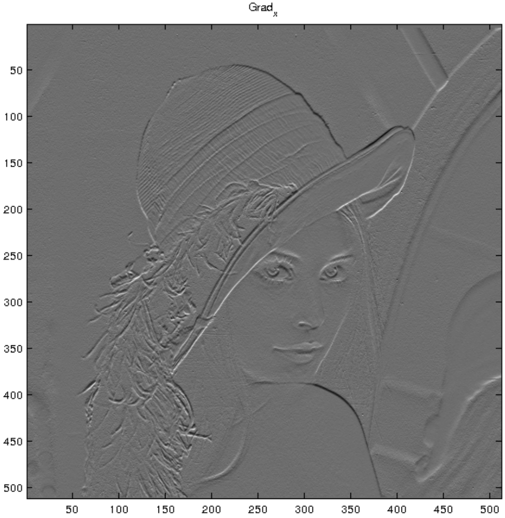
I= double(imread('lena.bmp'))/255 ; [3]
grad_x=I(1 :end-1, :)-I(2 :end, :) ;
grad_y=I(:,1 :end-1)-I(:,2 :end) ;
(C'est la formule " $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ")
Pour obtenir la magnitude :
grad_mag=sqrt(grad_x(:,1 :end-1).^2+grad_y(1 :end-1, :)^2) ;
(On tronque l'égèrement à cause des effets de bords.)

3. Commande pour lire une image, 255 pour passer de 8-bits image a des valeurs dans 0,...,255 à $[0, 1]$, double pour changer le type et avoir accès aux nombres à vigules.

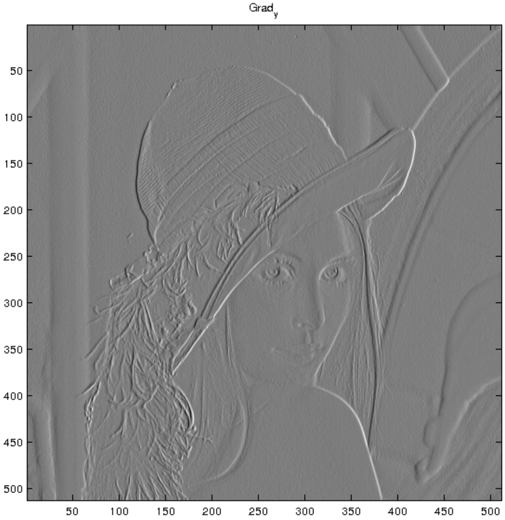
Image

Image I

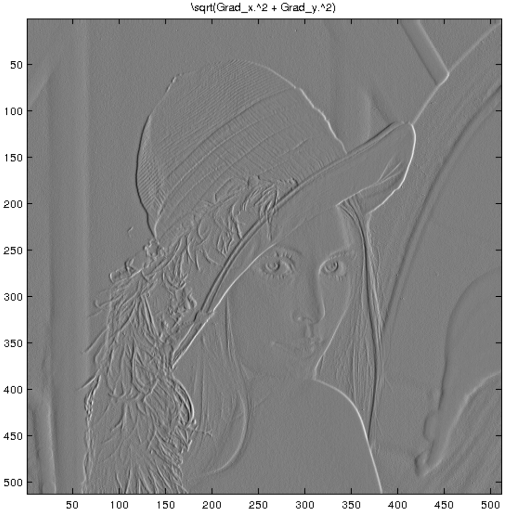
Grad x


Grad$_x$
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Grad y


Grad$_y$
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

Module du gradient



Laplacien

Remarque

L'observation de ces images permet de se rendre compte qu'une image est une fonction qui possède des dérivées "petites" "presque partout".
Une fonction qui a presque partout zéro est dite "sparse" ou creuse.

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- **Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.**
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Reculer une caméra 1

On se donne une image u_0. On veut modéliser ce qu'il se passe quand on recule la caméra, afin de zoomer out u_0.

$$M_h u_0(x) = \frac{1}{\pi h^2} \int_{D(x,h)} u_0(y) dy.$$

Cette equation signifie que l'on ajoute un petit flou à u_0. On a (pour $u_0 \in C^2$)

$$M_h u_0(x) = u_0(x) + \frac{h^2}{8} Laplacien(u_0)(x) + h^2 \varepsilon(x, h).$$

On voit apparaitre l'equation de la chaleur.

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{8} Laplacien(u)(x,t) \quad (1)$$
$$u(x,0) = u_0. \quad (2)$$

Quand on voit ce genre d'equation : on doit penser à un film.
Dans (2) u_0 est la donnee initiale, c'est la première scène du film.
L'equation (d'évolution) (1) nous dit comment évolue la scène dans le temps.
Pour une image cette equation modélise ce qu'il se passe quand on recule la caméra : on fait défiler le film.
C'est à dire : reculer la caméra $\leftrightarrow$ avancer dans le temps par (1) en commençant avec (2).

" $Laplacien = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ".

Reculer une caméra 2

Supposons qu'on itère M_h, cad, on calcule $M_h^n = M_h \circ \ldots M_h$.
En d'autres termes, on répète l'opération : reculer légèrement la caméra.
On a $\lim_{n \to +\infty, nh^2 \to t} M_h^n u(x) = u(x,t)$, où $u(x,t)$ est la solution ...

Reculer une caméra 2

Supposons qu'on itère M_h, cad, on calcule $M_h^n = M_h \circ \ldots M_h$.
En d'autres termes, on répète l'opération : reculer légèrement la caméra.
On a $\lim_{n \to +\infty, nh^2 \to t} M_h^n u(x) = u(x,t)$, où $u(x,t)$ est la solution ... de l'équation de la chaleur.

Justification 3 de l'équation de la chaleur

Voir demo matlab : filtre itere.

Conclusion :
Il nous faut donc une méthode pour calculer la solution de l'équation de la chaleur.

Reculer la caméra méthodologie numérique

Etant donné u_0 une image on veut calculer la solution de l'equation de la chaleur, i.e., simuler ce qu'il se passe quand on éloigne la caméra.
On a

$$u(x,t) = u_0 * G_t(x)$$

avec $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{dimension/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$.

Autrement dit, reculer la caméra revient effectuer un filtrage Gaussien : c'est ce qu'il faut absolument retenir.

Propriétés

On a (semi-groupe) $G_{t_1} * G_{t_2} = G_{t_1+t_2}$

Propriétés

On a (semi-groupe) $G_{t_1} * G_{t_2} = G_{t_1+t_2}$
Autrement dit reculer de t_1 puis reculer à nouveau de t_2 revient à reculer d'un seul coup de $t_1 + t_2$.
En particulier, ce filtre garde sa forme en l'itérant.
La gaussienne est le seul filtre qui garde sa forme en itérant.
Tous les autres filtres tendent vers la gaussienne en les iterants (Théoreme central limite).
On déduit donc aisément l'algorithme pour dé-zoomer.

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- **Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.**
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Algorithme pour de-zoomer

Pour éviter le repliement, il faut d'abord tuer les hautes fréquences.
Nous pourrions les mettre brutalement à zéro, mais cela provoque du "ringing".
Nos yeux ont l'habitude de voir des images avec des spectres tendant vers 0 aux bords.
Algorithme :
1) Convoler l'image avec une Gaussienne d'écart type $0.8\sqrt{zoom\_factor^2 - 1}$; [4]
2) Sous-échantillonner : Ne retenir qu'une valeur tous les zoom_factor dans les deux directions.

Dans la litterature on peut voir $0.8 zoom\_factor$, cela provient du fait que $\sqrt{zoom\_factor^2 - 1} \approx zoom\_factor^2$ pour $zoom\_factor^2 >> 1$.

4. Pour la justification de ce facteur voir Morel, J. M., & Yu, G. (2008). "On the consistency of the sift method." equation (7)

Zoom out (1) : original

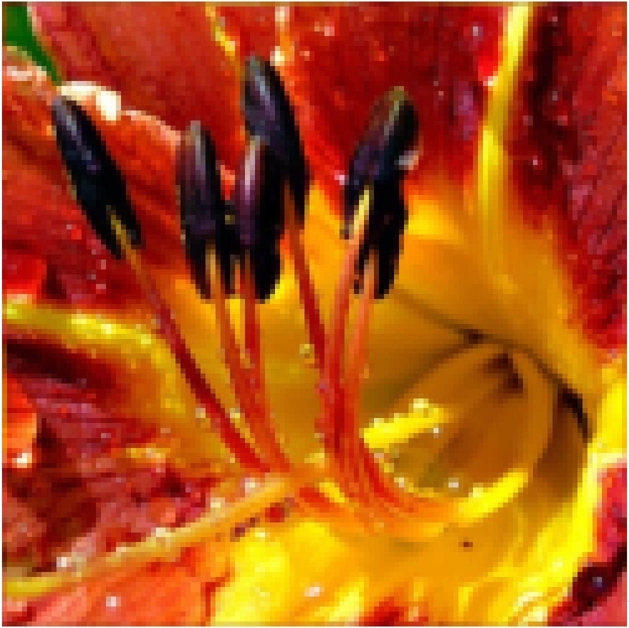
Zoom out (1) : après convolution par une Gaussienne

Zoom out (2) : original

Zoom out (2) : après convolution par une Gaussienne

Zoom out (3) : original

Zoom out (3) : après convolution par une Gaussienne



Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- **Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.**
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.

Definition pyramide Gaussienne

Une pyramide Gaussienne est une pile d'image dont on passe de l'étage au suivant par un sous-échantillonnage (généralement par deux). L'étage initial (zero) est l'image original. Les étages sont généralement appelées "octaves" ; souvent la 4eme octave est l'étage 5 car on a zoomé arrière 4 fois.
Algorithme : Entree image I, nombre d'etage max (en général, 4 ou 8)
Repeter pour etage=1... etage max
1) convoler I avec une Gaussienne d'écart type $0.8\sqrt{2^2-1}$
2) octave(etage)=I(1 :2^etage :end,1 :2^etage :end) ;
En matlab "end" signifie jusqu'à la fin. La commande précédente veut donc dire :
On commence à 1, on va de 2^etage en 2^etage et on continue ainsi tant qu'on peut.
Cela permet 1) de simuler une collection d'image prises de plus en plus loin. Une analyse "multi-échelle", en appliquant des traitements pour chaque octave.

Pyramide Laplacienne

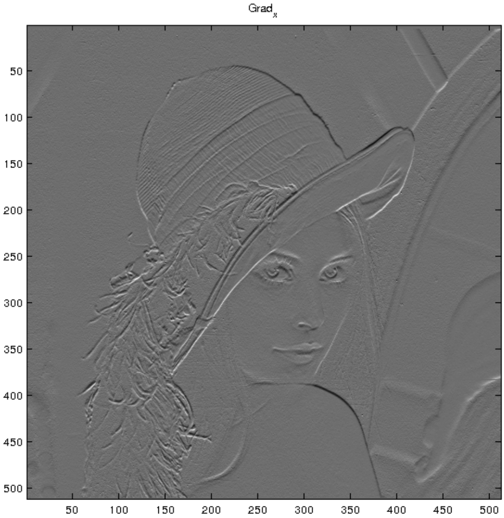
Une pyramide laplacienne s'obtient paar soustraction successive ces étages d'une pyramide Gaussienne.
Si, dans un algorithme, on voit apparaitre, des *d*ifference de Gaussiennes (DoG en anglais) on doit immédiatement penser à des laplaciens. En effet, une Dog est une approximation du laplacien. C'est évident en regardant l'équation de la chaleur.

Exemple (simpliste) d'utilisation d'une pyramide gaussienne : associer une échelle à un contour.
On va regarder le gradient et le laplacien à travers les échelles.

Image

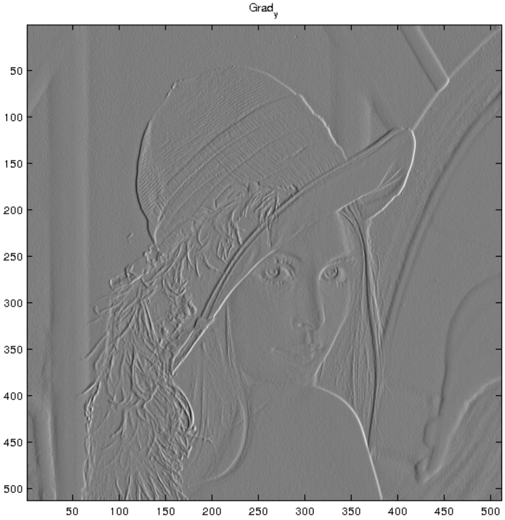
Image I

Grad x

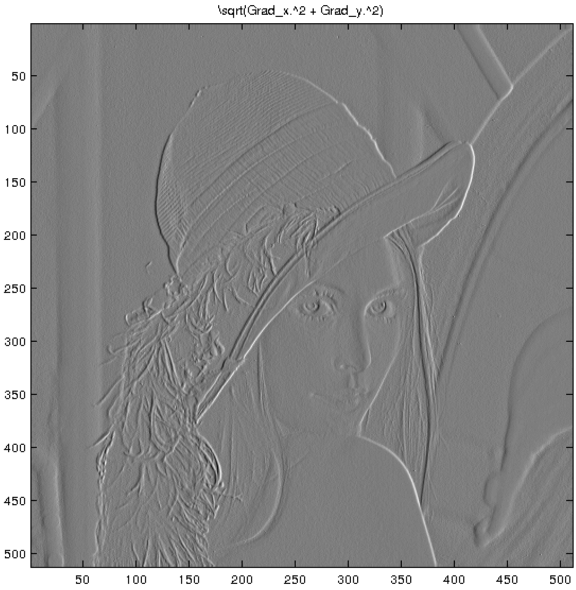


Grad$_x$
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

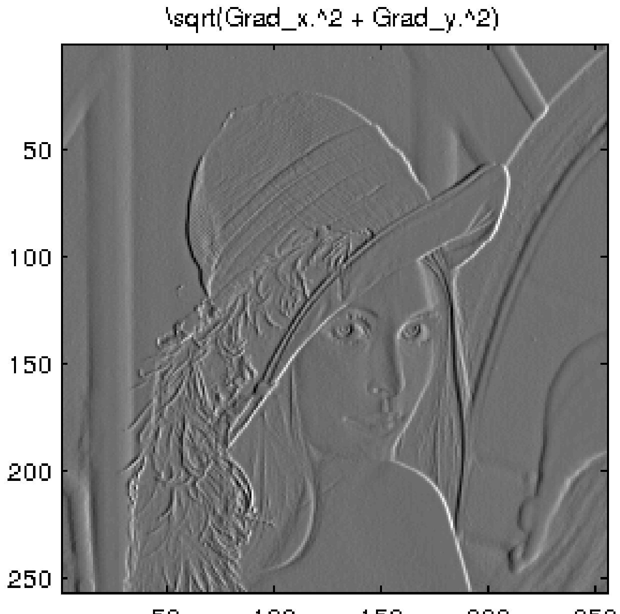
Grad y


Grad$_y$
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Module du gradient



Module du gradient



Module du gradient

Laplacien

Laplacien

Laplacien

Plan

- Rappels
- Comprendre ce que contient la phase et le module dans une TFD. Visualiser la phase/le module d'une TFD. Que contient la phase/le module d'une TFD.
- Zoom out d'une image 1. Décimation directe. Exemples. Phénomène : Aliasing.
- Comprendre et expliquer l'aliasing dans les images. Moyen : Exemples et Formule sommatoire de Poisson. Autre conséquence : calcul scientifique, e.g., calculer une intégrale.
- Zoom out d'une image 2. Passe bas idéal. Ringing.
- Dérivées dans une image 1. Gradients, Laplacien.
- Zoom out d'une image 3 : Modélisation fine. L'equation de la chaleur, sa solution, et le filtre itéré.
- Zoom out d'une image 3. Zoom out après filtre passe bas Gaussien.
- Autres utilisation des zooms out d'une image. Pyramide Gaussienne, Laplacienne.
- Dérivées dans une image 2. Gradients, Laplacien.
- **Atténuation des effets de bords des méthodes basées sur la TFD : Transformée en cosinus discrets implicite.**

Reductions des effets de bords.

Tous les calculs par TFD supposent l'image périodique.
Ce n'est en général pas vrai.
On peut "forcer" les choses en répliquant l'image.
(Faire un dessin)
Cela est équivalent à utiliser des TCD (Tranformée en cosinus discret)
Tous les traitements que nous avons vu s'adaptent facilement.
En matlab

```
J( :, :, :)=[I(1 :end,1 :end, :) I(1 :end,end :-1 :1, :) ; I(end :-1 :1,1 :end, :)
I(end :-1 :1,end :-1 :1, :)] ;
```

original

periodisee : symmetrie mirroir

zoom par padding direct

zoom par TCD implicite

References

Quelques référence :
H. Maitre, Le traitement des images.
S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing.
G. Blanchet et M. Charbit, Traitement numérique du signal, Simulation sous Matlab
Traitement numérique du signal, une introduction. cours et exercices corrigés, Ad.W.M., ed. Dunod, 2003
Traitement numérique du signal, théorie et pratique, Maurice Bellanger, ed. Dunod, 2002
Mathématiques pour le traitement du signal, Cours et exercices corrigés, Maïtine Bergounioux.

Pour du Fourier :
C. Gasquet et P. Witomski. Analyse de Fourier et applications.
J.M. Bony. Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier : théorie des distributions et analyse de Fourier.