Nous aurons besoin des différentes notions de convolutions et les transformées de Fourier qui leurs sont attachées. Cette note succinte recapitule ce dont il faut se souvenir pour la tranformée de Fourier des fonctions de $\mathbb{R}$ (son) ou $\mathbb{R}^2$) (images).

Transformée de Fourier continue Entrée: une fonction, sortie: une fonction. Dans la suite on prendra p. ex. $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (pour un signal 1D, un son p. ex) ou $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ (pour un signal 2D)[1]. Commençons par le cas 1D: On a $\mathcal{F}(f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$. (On remarque que $\hat{f}(\xi)$ n'est rien d'autre que la corrélation de f avec $\cos(\cdot\xi) + i\sin(\cdot\xi)$.) C'est une transformation linéaire (grâce à l'intégrale). A partir de $\hat{f}$ on peut reconstruire f; on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi}$. On a les propriétés suivantes, qui fonctionnent avec de petites variations près pour tous les types de transformation de Fourier (séries de Fourier, transformée de Fourier discrète).

Dans ce qui précède $*$ désigne $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$. On se souviendra qu'il ne faut pas de

Table 1: Quelques formules classiques. On remarquera que toutes ne sont pas à retenir: la 2 se déduit de la 1, la 4 de la 3. Une remarque pour la 6: dériver est une opération linéaire et invariante par translation (voir slides cours 1). C'est donc une convolution, dont on reconnaît la réponse fréquentielle dans la colonne de gauche. La même remarque s'applique aussi à la formule 3. On déduit immédiatement de la formule 1, que $f * g = g * f$.

Fonction	Sa transformée de Fourier
1. (convolution/formule du filtrage) $f * g$	$\hat{f}\hat{g}$
2. (produit) fg	$\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$
3. (translation) $f(\cdot - x_0)$	$\hat{f}(\xi) e^{ix_0\xi}$,
4. (modulation) $f(x) e^{i\xi_0 x}$	$\hat{f}(\xi - \xi_0)$
5. (zoom) $a \neq 0$, $f(\cdot a)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{f}(\frac{\cdot}{a})$
6. (derivation) f'	$i\xi \hat{f}(\xi)$
7. (symetrie Hessienne) $f(x) \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(-\xi) = \bar{\hat{f}}(\xi)$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué du complexe z.)
8. (Plancherel-Parseval) $\lvert\lvert f \rvert\rvert_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \lvert\lvert \hat{f} \rvert\rvert_{L^2}^2$.	

mélanger le type de transformation de Fourier avec la notion de convolution associé. La régularité de f[2] dépend de la décroissance de $\hat{f}(\xi)$ pour $\xi \to \pm\infty$. Autrement dit, plus l'image est floue au plus vite $\hat{f}$ décroit. Plus précisément, s'il existe une constante K et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{K}{1 + |\xi|^{p+1+\varepsilon}} \tag{1}$$

alors $f \in C^p$, ie. f est p fois dérivable, et $f^{(p)}$ est continue. Par exemple, si $\hat{f}$ est nulle pour ξ t.q. $|\xi|$ est suffisament grand alors f est C^∞ car la formule (1) est vérifiée pour tout p. Autrement dit, pour un signal $[-K, K]$ ($K > 0$) bande limitée ie qui satisfait $\hat{f}(\xi) = 0$ $\forall \xi$ t.q. $|\xi| > K$ on a tout de suite que f est $C^\infty(\mathbb{R})$ c-a-d dérivable une infinité de fois partout.

En 2D cela fonctionne de la même manière: $\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) e^{-i\xi_1 x_1} e^{-i\xi_2 x_2} dx_1 dx_2$; $f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi_1, \xi_2) e^{+i\xi_1 x_1} e^{+i\xi_2 x_2} d\xi_1 d\xi_2$; en 2D Plancherel devient $||f||_{L^2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} ||\hat{f}||_{L^2}^2$; les autres formules sont encore valide à des modification mineures près de la constante multiplicative, et $*$ est simplement $f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1 - y_1, x_2 - y_2) g(y_1, y_2) dy_1 dy_2$. (C'est exactement le même principe qu'en 1D, g est le noyau de convolution ou réponse impulsionnelle, et on calcule un produit scalaire –une moyenne à poids– entre f et g et translatant une des deux fonctions.) En 2D on peut ajouter une transformation de plus: la rotation. Si on tourne f (l'image) d'un angle θ sa transformée de Fourier tourne aussi de θ. Enfin, on déduit immédiatement de la table 1 formule 1, que $f * g = g * f$.

[1] Ce n'est pas l'objet de ce cours, mais il est bon de se savoir que définir une transformée de Fourier n'est pas toujours possible: dès que vous sortez de L^1 ou L^2 je vous conseille d'ouvrir un livre pour vérifier que ce que vous voulez faire est possible. Le risque est soit de mal interpréter un algorithme, soit d'en fabriquer (ou d'essayer en vain) un qui ne fonctionne pas du tout il devrait.

[2] Par régularité on pourra entendre: f très régulière signifie f possède des dérivées d'ordre élevé.