Yohann Tendero
yohann.tendero@telecom-paristech.fr
http://perso.telecom-paristech.fr/~ytendero/

Example 1 : Contraste

Example 1 : Contraste

Example 2 : Flou

Example 2 : Flou

Exemple 3 : copier-coller/fusion

Failure : the modification is obvious.

With Poisson's equation.

Example 4 : Débruitage

Example 4 : Débruitage

Example 5 : Rotation

Example 5 : Rotation

- Modalités de validations
- Modèle de formation d'image : sténopé ("pinhole")
- Théorème fondamental de la photographie : comment contrôler le bruit (grain) dans une image
- Universalité de la convolution
- Des pixels à la scène observée et vice-versa : le théorème de Shannon-whittaker
- Quelques algorithmes simples basés sur la TFD

- Chaque semaine : des devoirs théoriques et pratiques (Matlab/Octave). Rendre : code et un court rapport : incluant des exemples, une rapide discussion, commentaire critique. Travail seul ou en groupe : $\leqslant 3$ personnes.
- Un projet : implémentation, exemples et rapport. Exemples tirés de l'année dernière :
  Panoramas, Edition de Poisson, Détection de visages, débruitage d'image, amélioration locale du contraste, détection d'émotions. Travail seul ou en groupe : $\leqslant 3$ personnes.
- Chaque semaine mon site web (`perso.telecom-paristech.fr/~ytendero/`) les transparents
- Feuille avec vos courriels pour pouvoir vous contacter. Si vous ne recevez pas de courriel de ma part d'ici demain 12h envoyez moi un email.

Nicéphore Niépce, plus ancienne photo conservée, 1827.

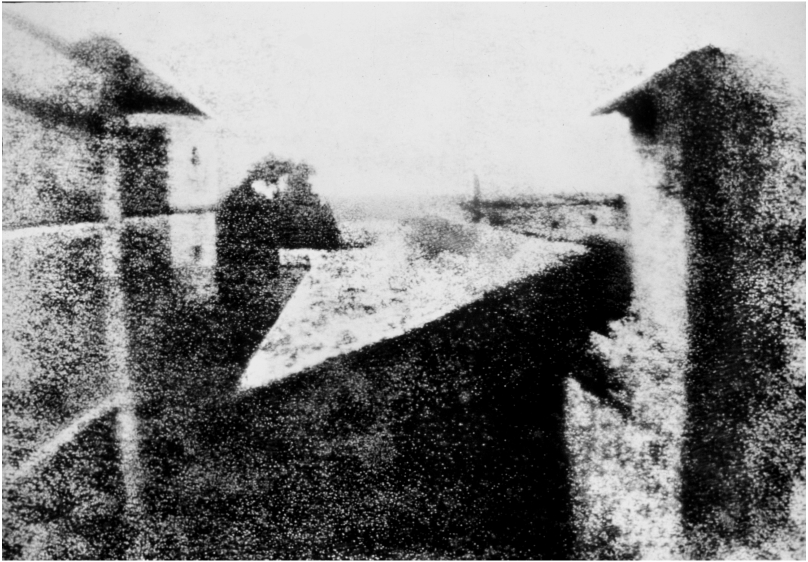
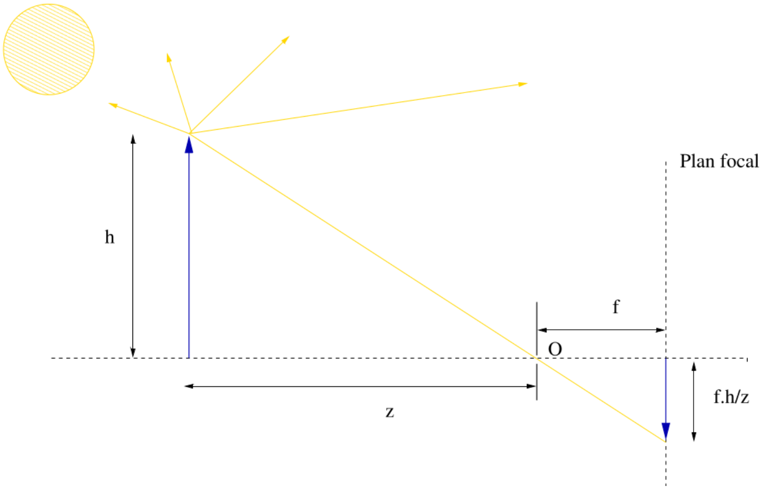


Tableau : defs signal, discret continu, periodique L^2, ℓ^2

Pinhole (ou *camera obscura*), 1D



- Photo $\approx$ une projection de la scène 3D sur un capteur 2D.
  Points cachés/masqués ; occlusion.
- Sur le plan focal se trouve un maillage de photo-récepteurs : le "capteur"
- Photo-récepteur $\approx$ compteur de photons
- Photo-récepteur $<=>$ pixel (i, j)
- Le photo-recepteur estime $u(i, j)$: l'intensité lumineuse au pixel (i, j) qui est stockée.

Théorème fondamental de la photographie

Nature quantique de l'émission photonique : photons émis comme suivant une variable aléatoire de Poisson, $\lambda(i,j)$ l'intensité d'émission photonique (photons/secondes) a la position (i,j) sur le capteur.

Theorem

Soit $\Delta t > 0$ le temps d'exposition, et $\lambda(i,j) > 0$ l'émission photonique au pixel (i,j). La valeur du pixel peut être n'importe quelle réalisation de $u(i,j) \sim \frac{P\left(\int_0^{\Delta t} \lambda(i,j)dt\right)}{\Delta t}$ [1].

1. La notation $X \sim Y$ signifie a pour loi.

Théorème fondamental de la photographie

Nature quantique de l'émission photonique : photons émis comme suivant une variable aléatoire de Poisson, $\lambda(i,j)$ l'intensité d'émission photonique (photons/secondes) a la position (i,j) sur le capteur.

Theorem

Soit $\Delta t > 0$ le temps d'exposition, et $\lambda(i,j) > 0$ l'émission photonique au pixel (i,j). La valeur du pixel peut être n'importe quelle réalisation de $u(i,j) \sim \frac{P\left(\int_0^{\Delta t} \lambda(i,j)dt\right)}{\Delta t}$[1]. On a $\mathbb{E}(u(i,j)) = \lambda(i,j)$ et $\mathrm{var}(u(i,j)) = \frac{\lambda(i,j)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to +\infty} 0$. Le rapport signal à bruit est $\frac{\mathbb{E}(u(i,j))}{\sqrt{\mathrm{var}(u(i,j))}} = \sqrt{\lambda(i,j)\Delta t}$.

Ce théorème indique qu'il est possible de contrôler le niveau de bruit dans une image en contrôlant le temps d'exposition ou l'intensité d'émission λ (à l'aide d'un flash).

1. La notation $X \sim Y$ signifie a pour loi.

Système d'acquisition passifs : qualité image vs temps d'exposition

Système d'acquisition passifs : qualité image vs temps d'exposition

Système d'acquisition passifs : qualité image vs temps d'exposition

Système d'acquisition passifs : qualité image vs temps d'exposition

Critiques

Nous avons négligé

- l'ouverture (diamètre de la lentille) => Du flou, des distorsions géométriques (lignes droites sont incurvées), vignettage ("coins sombres")
- Le "bruit" (voir la première partie)
- La quantification (remplacer un nombre réel par un nombre p. ex dans $\{0, \ldots, 255\}$. Peut etre vue comme une source de bruit.)
- Le démosaickage (appareil classique) : observe 1 seule des 3 couleurs pour (i, j))
- L'effet du capteur (échantillonnage)

Flous

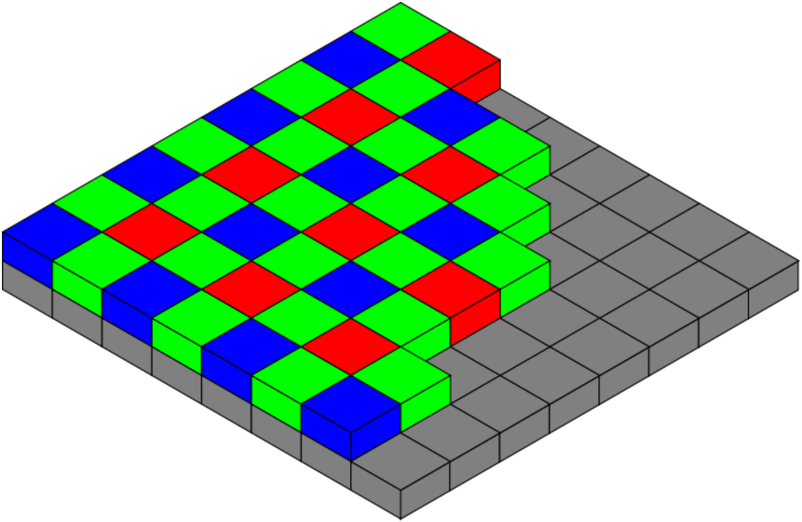
Distorsions géométriques

Vignettage

Quantification

Quantification

Demosaickage



Demosaickage

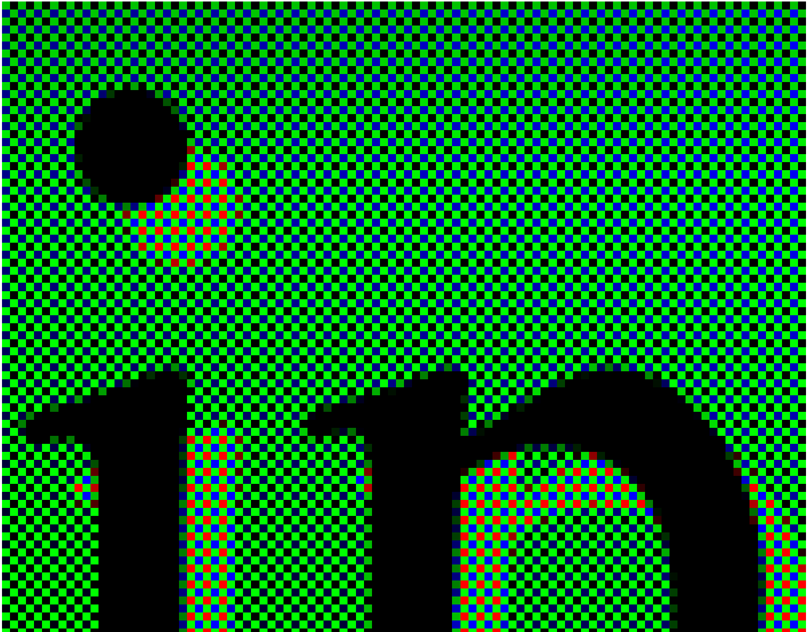


Image digitale : tableau de valeurs - échantillons - discret.
Scène observée : continue.

On veut pouvoir manipuler l'image digitale comme si on manipulait la scène observée continue.

Nécessaire pour, p. ex., faire une rotation d'image, une translation non pixellique, etc.

Plan :

- Etape 1 : Scène observée => Signal vu par le capteur (universalité de la convolution)
- Etape 2 : Lien échantillons et signal vu par le capteur (Théorème de Shannon-Whittaker).

Dans ce qui suit nous allons simplifier le problème supposer que le bruit est négligeable. (Voir théorème fondamental de la photographie).

Universalité de la convolution, théorème fondamental du traitement du signal

Invariance par translation : En première analyse, le traitement du signal doit être invariant par translation temporelle, puisque ce traitement ne dépend en général pas de l'instant, inconnu, où le signal commence.

Definition

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $(\tau_x f)(y) = f(y - x)$. (C'est la translatée de f par le vecteur x.) On dit qu'un opérateur T agissant sur des fonctions est invariant par translation si $T(\tau_x f) = \tau_x(Tf)$.

Theorem

Soit $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors, il existe une unique fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $T(f) = f * g$ pour tout f.

$(f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dy)$

Conséquences importantes

- Modélisation d'une caméra par une convolution (discussion sur les hypothèses).
- g est unique. Donner T est équivalent à donner g.
- La fonction g s'appelle **réponse impulsionnelle**. Comme elle est dans L^2 g admet une transformée de Fourier $\hat{g}$. La fonction $\hat{g}$ s'appelle **réponse fréquentielle**.

Tableau : Fourier, def, linearite, zoom, translation, modulation, symetries, produit, dérivation, modulation.

Shannon-Whittaker

On dit que f est à bande-limité si ($f \in L^1 \cup L^2$) satisfait : $\hat{f}(\xi) = 0$ pour tous ξ t.q. $|\xi| > K$.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $[-\pi, \pi]$ bande limitée. Alors on a
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\text{sinc}(x-n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
avec $\text{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ On observe des échantillons $\ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots$ (ie. une suite) et la formule nous dit comment récupérer toute la fonction f. En d'autres termes de $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on déduit que $f = g$.
Pour une image cela donne : (on doit alors supposer que $\hat{f}$ est supporté par $[-\pi, \pi]^2$)

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m,n)\text{sinc}(x-m)\text{sinc}(y-n) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Discussion autours de la validité pratique, de la chaîne d'échantillonnage idéale, de comment obtenir la coupure fréquentielle.

Algorithmes de traitements d'images basés sur un filtrage linéaire.

Le filtrage linéaire correspond à convoler le signal observé u par une une fonction, appelée *réponse impulsionnelle g*.
Il est donc crucial de savoir comment calculer efficacement des convolutions.
On distinguera deux types de convolutions discrètes

1. la convolution de signaux définis sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$ (formellement)

$$u * g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(n-m)g(m)$$

$$u * g(m,n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(m-k, n-l)g(k,l)$$

   Pour des signaux discrets finis, ces formules demandent d'étendre suffisamment u et/ou g sinon le résultat n'est pas défini aux bords.
   De plus, dès que le support de g est un peu grand cela devient très long à calculer. (Le support de u est en général très grand.)
   En matlab ce sont les commandes conv, conv2. Les paramètres permettent de choisir les conditions aux bords. Si on choisit des conditions périodiques cela devient une convolution circulaire.

2 la convolution de signaux périodiques (dite circulaire pour les signaux discrets).
On suppose que u et g sont définis sur $\{0, \ldots, M-1\}$.
(Discussion sur g défini que $\{0, \ldots, N-1\}$ et $N < M$.)

$$u \underset{per}{*} g(n) = \sum_{m=0}^{M-1} u((n-m) mod(M)) g(m)$$

En matlab c'est la commande cconv (pour circular convolution).
(Pour une raison que j'ignore cconv2 ne semble pas exister pas en matlab.)

Rappel : g s'appelle réponse impulsionnelle. $\hat{g}$ est la réponse fréquentielle.
Il y a un moyen rapide de calculer les convolutions circulaires.

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Soit u une suite finie définie sur $\{0, \dots, N-1\}$. La TFD (ou DFT en anglais) de u est

$$\hat{u}(k) := \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-2i\pi \frac{k}{N} n} \text{ pour } k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

On a (formule d'inversion)

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}(k) e^{2i\pi \frac{k}{N} n} \text{ pour } n \in \{0, \dots, N-1\}. \tag{1}$$

Si on applique (1) pour $n = N$ on retrouve $u(0)$, etc. La suite u est implicitement vue comme un polynôme trigonométrique. Elle est se prolonge naturellement à tout $\mathbb{Z}$ par périodicité. On a en plus (Formule convolution/TFD)

$$\widehat{u \underset{per}{*} g} = \hat{u}\hat{v}.$$

Les transformée de Fourier discrètes (TFD) se calculent rapidement (en Nlog(N)), par les algorithmes de "Fast Fourier Transform" (FFT).
Commandes matlab :

- fft (fft2 pour la 2D) pour la TFD (2D-DFT)
- ifft (ifft2 pour la 2D) pour la TFD inverse (2D-DFT inverse)
- Les commandes fftshift/ifftshift pour ré-ordonner (i pour la transformation inverse) les termes, si besoin.)

Il faut se souvenir de (Formule convolution/TFD)

$$\widehat{u \underset{per}{*} g} = \hat{u}\hat{v}.$$

References

Quelques classiques :

H. Maitre, Le traitement des images.
S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing.
G. Blanchet et M. Charbit, Traitement numérique du signal, Simulation sous Matlab

Pour du Fourier :

C. Gasquet et P. Witomski. Analyse de Fourier et applications.
J.M. Bony. Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier : théorie des distributions et analyse de Fourier.