

# Алгебра Лекции

Дима Трушин

2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Бинарные операции</b>	<b>3</b>
1.1	Определения	3
1.2	Свойства	4
1.2.1	Ассоциативность	4
1.2.2	Нейтральный элемент	5
1.2.3	Обратный элемент	5
1.2.4	Коммутативность	6
<b>2</b>	<b>Группы</b>	<b>6</b>
2.1	Определение	6
2.2	Мультипликативная и аддитивная нотации	7
2.3	Подгруппы	8
2.4	Циклические группы	8
2.5	Смежные классы	12
2.6	Теорема Лагранжа	13
2.7	Гомоморфизмы и изоморфизмы	14
2.8	Произведение групп	17
2.9	Конечные абелевы группы	17
<b>3</b>	<b>Криптография</b>	<b>20</b>
3.1	Общие слова	20
3.2	Быстрое возведение в степень	20
3.3	Сложность проблемы дискретного логарифмирования	21
3.4	Диффи-Хеллман	22
3.5	RSA	24
<b>4</b>	<b>Кольца и поля</b>	<b>25</b>
4.1	Определения	25
4.2	Элементы кольца	27
4.3	Идеалы	27
4.4	Гомоморфизмы и кольца	28
<b>5</b>	<b>Многочлены от одной переменной</b>	<b>29</b>
5.1	Определение	29
5.2	Алгоритм Евклида	30
5.3	Однозначное разложение на множители	32
5.4	Кольцо остатков	32

<b>6</b>	<b>Поля</b>	<b>34</b>
6.1	Характеристика . . . . .	34
6.2	Расширения полей . . . . .	35
6.3	Конечные поля . . . . .	36
6.4	Случайный генератор Галуа . . . . .	37
6.5	Потоковое шифрование . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Коды исправляющие ошибки</b>	<b>39</b>
7.1	Общие замечания . . . . .	39
7.2	Линейная алгебра . . . . .	40
7.3	Коды Хэмминга . . . . .	41
7.4	Коды Рида-Соломона . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Базисы Грёбнера</b>	<b>43</b>
8.1	Многочлены от нескольких переменных . . . . .	43
8.2	Мономиальные порядки . . . . .	44
8.3	Редукция . . . . .	45
8.4	Критерий Бухбергера . . . . .	47
8.5	Идеалы в кольце многочленов . . . . .	49
8.6	Задача принадлежности идеалу и исключение переменных . . . . .	50
8.7	Доказательство критерия Бухбергера . . . . .	51
8.8	Остановка алгоритма Бухбергера . . . . .	54
<b>9</b>	<b>Факторы</b>	<b>55</b>
9.1	Фактор множества . . . . .	55
9.2	Фактор группы . . . . .	56
9.3	Конгруэнции и нормальные подгруппы . . . . .	57
9.4	Теоремы о гомоморфизме . . . . .	59
9.5	Свободные абелевы группы и их факторы . . . . .	60
9.6	Конечные абелевы группы . . . . .	62

# 1 Бинарные операции

В математике часто изучаются разные структуры. Обычно это множества снабженные дополнительной структурой. В алгебре обычно множества снабжаются разного рода операциями. Простейший тип операций – бинарные операции, то есть операции с двумя аргументами. Давайте обсудим какие бывают бинарные операции и после перейдем к определению самой простой алгебраической структуры – группы.

## 1.1 Определения

**Определение 1.** Пусть  $X$  – некоторое множество. Бинарная операция на  $X$  – это отображение  $\circ: X \times X \rightarrow X$  по правилу  $(x, y) \mapsto x \circ y$  для всех  $x, y \in X$ .

В этом случае  $\circ$  – это имя операции. Проще говоря, операция – это правило, которое съедает два элемента из  $X$  и выплевывает один новый элемент, называемый  $x \circ y$ , из того же множества  $X$ . Новый элемент  $x \circ y$  обычно называется произведением элементов  $x$  и  $y$ .<sup>1</sup>

Обратите внимание, что у бинарных операций есть функциональный стиль обозначения, когда имя операции пишется не между аргументами, а в виде имени функции перед аргументами. Давайте я повторю определение операции в функциональном стиле.

**Определение 2.** Пусть  $X$  – некоторое множество. Бинарная операция на  $X$  – это отображение  $\mu: X \times X \rightarrow X$  по правилу  $(x, y) \mapsto \mu(x, y)$  для всех  $x, y \in X$ .

Это не новое определение, это всего лишь переобозначение предыдущего. Я буду предпочитать операторное обозначение.

*Примеры 3.* Бинарные операции:

1. Сложение целых чисел. В операторной форме

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

В функциональной форме

$$\text{add}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto \text{add}(m, n) = m + n$$

Так как мы привыкли к сложению в форме  $m + n$ , мы хотим, чтобы общее определение было похоже на привычную нам запись. С другой стороны, многие языки программирования допускают оба вида нотаций. Но по сути  $\text{add}(m, n)$  и  $m + n$  это одно и то же.

2. Умножение целых чисел. В операторной форме

$$\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m \cdot n$$

В функциональном стиле

$$\text{mult}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto \text{mult}(m, n) = m \cdot n$$

3. Максимум целых чисел. В операторной форме

$$\vee: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m \vee n$$

В функциональной форме

$$\text{max}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto \text{max}(m, n) = m \vee n$$

На всякий случай поясню, что  $\text{max}(m, n) = m \vee n$ , то лишь разные обозначения максимума.

---

<sup>1</sup>Операция может быть какой угодно, например, на множестве целых чисел можно рассматривать сложение, взятие максимума, или что-либо другое, но с абстрактной точки зрения результат операции все равно называется произведением элементов. Не забывайте, что математика – это искусство обозначать одинаковые вещи по-разному и разные вещи одинаково.

#### 4. Минимум целых чисел. В операторной форме

$$\wedge: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m \wedge n$$

В функциональной форме

$$\min: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto \min(m, n) = m \wedge n$$

Как и выше  $\min(m, n) = m \wedge n$  это разные обозначения минимума.

#### 5. Просто случайная дурацкая бинарная операция на целых числах

$$\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m^2 - n^2$$

Давайте резюмируем, что бинарная операция на  $X$  – это любое отображение вида  $f: X \times X \rightarrow X$ . И вы вольны задать его как вам вздумается по любому правилу. Но разные операции будут иметь разные свойства, какие-то операции будут лучше, чем другие. Давайте теперь обсудим какие же есть свойства у операций.

## 1.2 Свойства

Можно рассматривать множество различных свойств операций. Я хочу обсудить лишь те, которые нам понадобятся в дальнейшем для определения группы.

### 1.2.1 Ассоциативность

**Определение 4.** Операция  $\circ: X \times X \rightarrow X$  называется ассоциативной, если для любых элементов  $x, y, z \in X$  выполнено  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .

Если у вас есть бинарная операция  $\circ$  на множестве  $X$ , то вы можете посчитать произведение трех элементов  $x, y, z$  двумя разными способами:

- сначала посчитаем произведение  $w = x \circ y$  и потом вычислим  $w \circ z = (x \circ y) \circ z$ .
- сначала посчитаем произведение  $u = y \circ z$  и потом вычислим  $x \circ u = x \circ (y \circ z)$ .

Если операция взята произвольно, то может случиться, что эти два способа дают разные результаты для каких-то значений  $x, y$  и  $z$ . Ассоциативность означает, что не важен порядок, в котором вы вычисляете операции. Кроме того, если  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  для всех  $x, y, z \in X$ , то на самом деле не имеет значения, как вы расставляете скобки в произвольных произведениях. Например, все следующие выражения равны  $(x \circ y) \circ (z \circ w)$ ,  $x \circ (y \circ (z \circ w))$  and  $((x \circ y) \circ z) \circ w$ , а значит мы можем убрать все скобки и просто записать  $x \circ y \circ z \circ w$ . Поэтому для ассоциативных операций обычно не используют скобки, так как они не существенны.

*Примеры 5.* Ниже примеры ассоциативных и не ассоциативных операций.

#### 1. Целочисленное сложение ассоциативно.

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

Если  $m, n, k \in \mathbb{Z}$ , то мы знаем, что  $(m + n) + k = m + (n + k)$ .

#### 2. Вычитание целых чисел не ассоциативно.

$$-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m - n$$

Тогда равенство  $(m - n) - k = m - (n - k)$  не выполняется для всех целых чисел. Действительно, если взять  $m = n = 0$  и  $k = 1$ , то левая часть равенства будет  $-1$ , а правая  $-1$ . Так что,  $(0 - 0) - 1 \neq 0 - (0 - 1)$ .

### 1.2.2 Нейтральный элемент

**Определение 6.** Пусть  $\circ: X \times X \rightarrow X$  – некоторая операция на  $X$ . Элемент  $e \in X$  называется нейтральным если для каждого элемента  $x \in X$  выполнены равенства  $x \circ e = x$  и  $e \circ x = x$ .

По простому, нейтральный элемент  $e \in X$  – это такой элемент, который ничего не меняет по умножению в смысле операции.

*Примеры 7.* Нейтральный элемент может существовать, а может и не существовать.

1. Целочисленное сложение имеет нейтральный элемент.

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

Ясно, что элемент  $e = 0$  удовлетворяет всем требованиям на нейтральный элемент. Действительно, для всех  $m \in \mathbb{Z}$  имеем  $m + 0 = m$  и  $0 + m = m$ .

2. Целочисленное вычитание не имеет нейтрального элемента.

$$-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m - n$$

Давайте покажем, что нет элемента  $e \in \mathbb{Z}$  такого, что  $e - m = m$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ . Действительно, если такой  $e$  существует, то  $e = 2m$  для каждого  $m \in \mathbb{Z}$ . Но это не возможно, поскольку для  $m = 0$ ,  $e = 0$  а для  $m = 1$ ,  $e = 2$ , противоречие. С другой стороны, отметим, что  $m - 0 = m$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ . То есть 0 является нейтральным только с одной стороны для вычитания.

Последний пример показывает, что вообще говоря не достаточно проверять только одно из условий  $x \circ e = x$  или  $e \circ x = x$ . Это очень частая ошибка. Постарайтесь не забыть оба условия.

Правильный вопрос, которым теперь надо задаться: а сколько нейтральных элементов может быть? Правильный ответ – не более одного. Давайте покажем это.

**Утверждение 8.** Пусть  $X$  – некоторое множество и  $\circ: X \times X \rightarrow X$  – бинарная операция. Тогда существует не более одного нейтрального элемента.

*Доказательство.* Если нейтральных элементов нет, то и доказывать нечего. Пусть теперь  $e$  и  $e'$  – два произвольных нейтральных элемента. Мы должны показать, что они равны. Рассмотрим произведение  $e \circ e'$ . Так как  $e$  является нейтральным элементом,  $e \circ x = x$  для любого  $x \in X$ . В частности при  $x = e'$  мы получим, что  $e \circ e' = e'$ . С другой стороны, так как  $e'$  является нейтральным элементом, то  $x \circ e' = x$  для любого  $x \in X$ . И значит в частности при  $x = e$  имеем  $e \circ e' = e$ . То есть  $e = e \circ e' = e'$ .  $\square$

### 1.2.3 Обратный элемент

Я хочу начать с замечания, что это свойство зависит от предыдущего. А именно, для того чтобы говорить об обратных элементах необходимо, чтобы для операции существовал нейтральный элемент. Если же нейтрального элемента нет, то нет и способа говорить об обратимых элементах.

**Определение 9.** Пусть  $\circ: X \times X \rightarrow X$  – некоторая операция с нейтральным элементом  $e \in X$ . Элемент  $y \in X$  называется обратным к элементу  $x \in X$ , если выполнено  $x \circ y = e$  и  $y \circ x = e$ .

Я напому, что нейтральный элемент единственный если существует. Потому элемент  $e$  корректно определен в равенствах выше.

Правильный вопрос, которым надо задаться: а сколько может быть обратных элементов для заданного элемента  $x \in X$ ? Оказывается, что не больше одного, если операция ассоциативна.

**Утверждение 10.** Пусть  $\circ: X \times X \rightarrow X$  – некоторая ассоциативная бинарная операция с нейтральным элементом  $e \in X$ . Тогда, для любого  $x \in X$  существует не более одного обратного элемента.

*Доказательство.* Давайте зафиксируем элемент  $x \in X$ . Если для него нет обратного, то и доказывать нечего. Теперь предположим, что  $y_1$  и  $y_2$  – это два обратных элемента к  $x$ . Последнее означает, что выполнены равенства

$$\begin{cases} x \circ y_1 = e \\ y_1 \circ x = e \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \circ y_2 = e \\ y_2 \circ x = e \end{cases}$$

Теперь рассмотрим произведение  $y_1 \circ x \circ y_2$ . Так как  $\circ$  ассоциативна, то расстановка скобок не имеет значения, то есть  $(y_1 \circ x) \circ y_2 = y_1 \circ (x \circ y_2)$ . Если посчитать левую часть, то получим:

$$(y_1 \circ x) \circ y_2 = e \circ y_2 = y_2$$

А для правой части имеем:

$$y_1 \circ (x \circ y_2) = y_1 \circ e = y_1$$

Значит  $y_2 = (y_1 \circ x) \circ y_2 = y_1 \circ (x \circ y_2) = y_1$  и все доказано.  $\square$

Так как в общем случае существует не более одного обратного для элемента  $x$ , то его принято обозначать через  $x^{-1}$ .

*Примеры 11.* 1. Предположим, что операция – сложение целых чисел.

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

Нейтральный элемент у нас 0. Если  $n \in \mathbb{Z}$ , то обратный к нему будет  $-n$ . Действительно,  $n + (-n) = 0$  и  $(-n) + n = 0$ . Значит любой элемент имеет обратный для этой операции.

2. Предположим, что операция – это умножение целых чисел

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m \cdot n$$

Нейтральный элемент – 1. Если  $n = 1$ , то его обратный будет тоже 1. Если  $n = -1$ , то его обратный будет  $-1$ . Если же  $n \neq \pm 1$ , то обратного не существует в  $\mathbb{Z}$ . Потому только два элемента обратимы для этой операции.

#### 1.2.4 Коммутативность

**Определение 12.** Бинарная операция  $\circ : X \times X \rightarrow X$  называется коммутативной если для любых  $x, y \in X$  выполнено  $x \circ y = y \circ x$ .

То есть коммутативность означает, что нам не важен порядок операндов в операции.

*Примеры 13.* 1. Целочисленное сложение коммутативно.

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

Действительно, для любых  $m, n \in \mathbb{Z}$ , мы имеем  $m + n = n + m$ .

2. Целочисленное вычитание не коммутативно.

$$- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m - n$$

Коммутативность означает равенство  $m - n = n - m$  для всех целых  $m, n$ . Ясно, что это не выполнено уже в случае  $m = 0$  и  $n = 1$ .

## 2 Группы

### 2.1 Определение

Теперь мы готовы к тому, чтобы дать определение одного из самых важных в алгебре объектов – группы. Прежде чем сделать это, я хочу пояснить, что мы встретим много абстрактных определений в будущем и все они будут сотканы по единому шаблону. Давайте я проясню этот шаблон в начале. В любом абстрактном определении есть две части. В первой части говорится какие данные нам даны. А во второй части говорится каким аксиомам эти данные должны удовлетворять.<sup>2</sup>

**Определение 14.** Определение группы

- Данные:

---

<sup>2</sup>Если проводить аналогию с программированием, то первая часть описывает интерфейс, а вторая часть – это контракт на интерфейс.

1.  $G$  – множество.
2. Операция  $\circ: G \times G \rightarrow G$ .

• **Аксиомы:**

1. Операция  $\circ$  ассоциативна.
2. Операция  $\circ$  обладает нейтральным элементом.
3. Каждый элемент  $x \in G$  имеет обратный.

В этом случае мы будем говорить, что пара  $(G, \circ)$  является группой. Чтобы упростить обозначения, мы будем обычно говорить, что просто  $G$  является группой, подразумевая, что на  $G$  задана некоторая фиксированная операция. Если в дополнение к аксиомам выше выполнена следующая аксиома

4. Операция  $\circ$  коммутативна.

То группа  $G$  называется абелевой или просто коммутативной.

Если коротко, то группа – это множество с «хорошей» операцией. Здесь слово «хорошая» означает, что нам не важно как расставлять скобки, у нас есть нейтральный элемент и на любой элемент можно поделить. Если же в дополнение ко всему не важно в каком порядке стоят аргументы операции, то группа называется абелевой.

- Примеры 15.*
1. Целые числа по сложению  $(\mathbb{Z}, +)$  образуют абелеву группу. Действительно, операция  $+$  ассоциативна, нейтральный элемент – 0, для каждого числа  $n$  есть его обратный  $-n$  и порядок аргументов в сложении не важен  $n + m = m + n$ . Мы обычно называем эту группу просто  $\mathbb{Z}$  подразумевая, что операция обязательно сложение.
  2. Целые числа по умножению  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  группу не образуют. Мы знаем, что операция ассоциативна и есть нейтральный элемент 1. И мы уже проверяли, что только  $\pm 1$  являются обратимыми элементами.
  3. Не нулевые вещественные числа по умножению  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  образуют абелеву группу. Действительно, умножение ассоциативно. Нейтральным элементом будет 1, для всякого элемента  $x$  обратным будет  $1/x$ , и порядок аргументов в умножении не важен  $xy = yx$ .
  4. Пусть  $n$  – положительное целое, тогда множество  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  с операцией  $a + b \pmod{n}$  является абелевой группой. Для простоты операция сложения по модулю  $n$  так же обозначается просто  $+$ .
  5. Пусть  $n$  – положительное целое. Положим  $\mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid (m, n) = 1\}$  (множество всех чисел из  $\mathbb{Z}_n$  взаимно простых с  $n$ ), а операцию зададим как  $a \cdot b \pmod{n}$ . В этом случае мы так же получим абелеву группу. Для простоты операция в  $\mathbb{Z}_n^*$  обозначается как операция умножения  $\cdot$ .

## 2.2 Мультипликативная и аддитивная нотации

В определении группы  $G$  мы обозначали операцию  $\circ$ . Если надо использовать произведение нескольких элементов, то нам приходится писать  $x \circ y \circ z \circ w$ . Это не очень удобно. Вместо этого есть два более привычных стиля. А именно, давайте будем обозначать операцию как умножение  $\cdot$  или как сложение  $+$ . Тогда получаются две разные нотации: мультипликативная и аддитивная.

	Мультипликативная	Аддитивная
Операция	$\cdot: G \times G \rightarrow G$	$+: G \times G \rightarrow G$
На элементах	$(x, y) \mapsto xy$	$(x, y) \mapsto x + y$
Нейтральный элемент	1	0
Обратный элемент	$x^{-1}$	$-x$
Степень элемента	$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_n$	$nx = \underbrace{x + \dots + x}_n$

Обычно мультипликативная нотация используется в случае неабелевых групп или когда свойство коммутативности вообще говоря не известно. А аддитивная нотация зарезервирована сугубо для абелевых групп. Я буду в основном использовать мультипликативную нотацию.

Я подчеркну, что указанные нотации – это всего лишь два разных способа обозначать операцию  $\circ$ , а не какие-то новые специальные операции. То есть мы выбираем обозначение для  $\circ$  в виде  $\cdot$  или  $+$  в зависимости от наших предпочтений. Не надо путать эти обозначения с операциями сложения и умножения целых чисел. В случае произвольной группы  $G$  путаницы быть не должно, потому что там нет никаких заранее заданных операций сложения и умножения. Однако, если мы работаем с целыми числами (вещественными, рациональными, комплексными и т.д.), то операции  $+$  и  $\cdot$  обозначают обычные сложение и умножение.

## 2.3 Подгруппы

**Определение 16.** Пусть  $G$  – некоторая группа.<sup>3</sup> Определим подгруппу  $H$  в группе  $G$  следующим образом.

• **Данные:**

1. Подмножество  $H \subseteq G$ .

• **Аксиомы:**

1. Нейтральный элемент 1 группы  $G$  принадлежит  $H$ .
2. Если  $x, y \in H$ , то  $xy \in H$ .
3. Если  $x \in H$ , то  $x^{-1} \in H$ .

В этом случае, мы говорим, что  $H$  – подгруппа в группе  $G$ .

Стоит отметить, что если  $H$  – подгруппа в группе  $(G, \cdot)$ , то  $\cdot$  можно ограничить на  $H$  и получится операция на  $H$ . В этом случае  $(H, \cdot)$  удовлетворяет всем аксиомам группы. Таким образом подгруппа  $H$  сама является группой относительно той же самой операции (или точнее относительно ограничения операции), что была на группе  $G$ .

*Примеры 17.* Пусть  $G = \mathbb{Z}$  по сложению.

1. Если  $H \subseteq \mathbb{Z}$  – подмножество четных чисел  $H = 2\mathbb{Z}$ , то  $H$  является подгруппой.
2. Если  $H \subseteq \mathbb{Z}$  – подмножество нечетных чисел  $H = 1 + 2\mathbb{Z}$ , то  $H$  не является подгруппой. В этом случае  $H$  не содержит нейтрального элемента 0 и не замкнуто относительно операции сложения.

## 2.4 Циклические группы

Пусть  $G$  – некоторая группа и  $g \in G$  – ее элемент. Тогда мы можем определить целочисленные степени элемента  $g$  по следующим правилам.

Мультипликативная нотация	Аддитивная нотация
$g^n = \begin{cases} \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-n}, & n < 0 \end{cases}$	$ng = \begin{cases} \underbrace{g + \dots + g}_n, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ \underbrace{(-g) + \dots + (-g)}_{-n}, & n < 0 \end{cases}$

**Утверждение 18.** Пусть  $G$  – некоторая группа. Тогда

1. Для любых  $x, y \in G$  выполнено  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .
2. Для любого  $g \in G$  верно  $(g^{-1})^n = (g^n)^{-1} = g^{-n}$ .
3. Для любого  $g \in G$  и любых  $n, m \in \mathbb{Z}$  верно  $g^n g^m = g^{n+m}$ .

*Доказательство.* 1) Нам надо показать, что  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ . С психологической точки зрения удобно обозначить  $y^{-1}x^{-1}$  через  $z$ . Если мы покажем, что  $(xy)z = z(xy) = 1$ , то это будет означать, что  $z = (xy)^{-1}$  по определению. Теперь посчитаем

$$(xy)z = xy z = xy y^{-1} x^{-1} = x x^{-1} = 1$$

<sup>3</sup>Строго говоря  $(G, \cdot)$ , но я буду использовать более короткие обозначения.



Аналогично делается и второе равенство.

2) Сначала покажем первое равенство. Давайте применим предыдущее свойство несколько раз, получим

$$(g_1 \cdot \dots \cdot g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdot \dots \cdot g_1^{-1}, \text{ whenever } g_1, \dots, g_n \in G$$

При подстановке  $g_1 = \dots = g_n = g$ , получим нужное равенство для  $n > 0$ .

Если  $n = 0$ , то по определению  $(g^{-1})^0 = 1$ . С другой стороны,  $(g^0)^{-1} = 1^{-1} = 1$  потому что обратный к 1 есть 1.

Если  $n < 0$ , то по определению

$$(g^{-1})^n = \underbrace{(g^{-1})^{-1} \cdot \dots \cdot (g^{-1})^{-1}}_{-n}$$

С другой стороны

$$(g^n)^{-1} = \underbrace{(g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1})^{-1}}_{-n} = \underbrace{(g^{-1})^{-1} \cdot \dots \cdot (g^{-1})^{-1}}_{-n}$$

где последнее равенство берется из предыдущего пункта утверждения.

Теперь надо проверить второе равенство. В случае  $n > 0$  имеем по определению

$$(g^{-1})^n = \underbrace{(g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1})}_n \text{ и } g^{-n} = \underbrace{(g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1})}_n$$

Значит левая часть равна правой. Если  $n = 0$ , то обе части равны 1. Теперь рассмотрим  $n < 0$ . Для удобства изменим степень с  $n$  на  $-n$  и можно считать, что  $n > 0$ . Получаем

$$(g^{-1})^{-n} = \underbrace{((g^{-1})^{-1} \cdot \dots \cdot (g^{-1})^{-1})}_n \text{ и } g^{-(-n)} = \underbrace{(g \cdot \dots \cdot g)}_n$$

То есть теперь достаточно показать, что  $(g^{-1})^{-1} = g$ . А это делается по определению. Элемент  $g$  удовлетворяет равенствам  $gg^{-1} = 1$  и  $g^{-1}g = 1$ , то есть  $g$  является обратным к  $g^{-1}$ , что и требовалось.

3) Мы должны рассмотреть следующие 4 случая:

1.  $n \geq 0$  and  $m \geq 0$ .
2.  $n < 0$  and  $m \geq 0$ .
3.  $n \geq 0$  and  $m < 0$ .
4.  $n < 0$  and  $m < 0$ .

Пусть у нас первый случай:

$$g^n g^m = \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_n \cdot \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_m = \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{n+m} = g^{n+m}$$

Для удобства рассмотрим  $g^{-n} g^m$  где  $n > 0$  and  $m \geq 0$  во втором случае. Тогда

$$g^{-n} g^m = \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_n \cdot \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_m$$

Мы сокращаем множители в середине выражения. Если  $n > m$ , получим

$$\underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{n-m} = g^{-n+m}$$

Если  $n < m$ , имеем

$$\underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{m-n} = g^{m-n}$$

Если  $n = m$  получается  $1 = g^{m-n}$ .

Третий случай по сути является вторым с переставленными множителями. Значит остается разобрать четвертый случай. Опять же для удобства будем считать, что нам даны  $g^{-n}$  и  $g^{-m}$ , где  $n > 0$  и  $m > 0$ . Тогда

$$g^{-n} g^{-m} = \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_n \cdot \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_m = \underbrace{g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{n+m} = g^{-n-m}$$

Что и требовалось показать. □

**Определение 19.** Пусть  $G$  – группа и  $g \in G$  – некоторый элемент. Тогда обозначим множество всех целых степеней  $g$  следующим образом

$$\langle g \rangle = \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, \dots\} = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Данное подмножество удовлетворяет определению подгруппы в группе  $G$ .<sup>4</sup> Эта группа называется циклической подгруппой порожденной  $g$ . Элемент  $g$  называется порождающим подгруппы  $\langle g \rangle$ .

В аддитивной нотации циклическая подгруппа имеет вид

$$\langle g \rangle = \{\dots, -2g, -g, 0, g, 2g, \dots\} = \{kg \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

По построению  $\langle g \rangle$  – это самая маленькая подгруппа в  $G$  содержащая элемент  $g$ .

**Определение 20.** Пусть  $G$  – некоторая группа. Если найдется элемент  $g \in G$  такой, что  $\langle g \rangle = G$ , то группа  $G$  называется циклической.

*Примеры 21.* 1. Группа  $(\mathbb{Z}, +)$  является циклической. Ее образующие 1 и  $-1$ .

2. Группа  $(\mathbb{Z}_n, +)$  является циклической.

3. Группа перестановок на  $n$  элементах  $S_n$  не является циклической при  $n > 2$ .

4. Группа  $(\mathbb{R}, +)$  не является циклической.

**Определение 22.** Пусть  $G$  – некоторая группа и  $g \in G$  – ее элемент. Порядок элемента  $g$  – это минимальное положительное целое число такое, что  $g^n = 1$  и  $\infty$  если такого числа нет. Порядок  $g$  обозначается  $\text{ord } g$ .

#### Замечания

- Обратите внимание, что  $g = 1$  тогда и только тогда, когда  $\text{ord } g = 1$ .
- Если мы используем аддитивную нотацию, то есть будем обозначать операцию через  $+$ , то порядок  $g \in G$  – это такое минимальное положительное целое  $n$ , что  $ng = 0$ .

**Утверждение 23.** Пусть  $G$  – некоторая группа и  $g \in G$  ее элемент. Тогда есть два возможных случая

1. Все элементы  $g^n$  и  $g^m$  различны при различных  $n, m \in \mathbb{Z}$ .
2. Существует положительное целое  $n$  такое, что степени  $1, g, g^2, \dots, g^{n-1}$  различны. Более того, степени повторяются по циклу, а именно в ряду

$$\underbrace{\dots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, \dots, g^{n-1}}_{\text{элементы } g^{kn}, g^{1+kn}, \dots, g^{n-1+nk} \text{ совпадают с элементами } 1, g, \dots, g^{n-1} \text{ для любого } k \in \mathbb{Z}. \text{ В частности, в этом случае}}$$

элементы  $g^{kn}, g^{1+kn}, \dots, g^{n-1+nk}$  совпадают с элементами  $1, g, \dots, g^{n-1}$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . В частности, в этом случае

$$\langle g \rangle = \{1, g, \dots, g^{n-1}\}$$

При этом  $n = \text{ord } g$ .

*Доказательство.* Если  $g^n \neq g^m$  для всех различных  $m, n \in \mathbb{Z}$ , то доказывать нечего, у нас первый случай.

Давайте предположим, что для каких-то  $m \neq n \in \mathbb{Z}$  у нас выполнено равенство  $g^n = g^m$ . Можно считать, что  $n > m$ . Тогда умножим обе части равенства на  $g^{-m}$  и по правилам перемножения степеней получим  $g^{n-m} = 1$ . Значит для некоторого  $n > 0$  имеем  $g^n = 1$ .

Рассмотрим минимальное положительное  $n$  такое, что  $g^n = 1$ . Я утверждаю, что все степени  $1, g, \dots, g^{n-1}$  различны. Действительно, если  $g^k = g^s$  для некоторых  $k, s \in [0, n-1]$  и  $k > s$ , тогда  $g^{k-s} = 1$ . А это значит, что  $k-s$  не ноль и строго меньше, чем  $n$ . Последнее противоречит выбору  $n$ .

Теперь проверим, что любая степень  $g^N$  совпадает со степенью из списка  $1, g, \dots, g^{n-1}$ . Для этого поделим  $N$  с остатком на  $n$ , получим  $N = qn + r$ , где  $0 \leq r < n$ . Тогда

$$g^N = g^{qn+r} = (g^n)^q g^r = g^r$$

Осталось лишь заметить, что выбранное нами  $n$  по определению является  $\text{ord } g$ . □

<sup>4</sup>Действительно, нейтральный элемент содержится в ней. Это множество замкнуто по умножению в силу свойства (3) предыдущего утверждения и в силу свойства (2) предыдущего утверждения с каждым элементом лежит его обратный.

## Замечания

- Отметим, что  $n$  может быть равным 1 в случае, когда  $g$  совпадает с нейтральным элементом.
- Из предыдущего утверждения следует, что  $\text{ord } g$  совпадает с количеством элементов в подгруппе  $\langle g \rangle$ .

Теперь я хочу описать все подгруппы в группе целых чисел по сложению.

**Утверждение 24.** *Всякая подгруппа  $H$  группы  $\mathbb{Z}$ , точнее  $(\mathbb{Z}, +)$ , имеет вид  $k\mathbb{Z}$  для некоторого неотрицательного целого  $k$ .*

*Доказательство.* В начале давайте проверим, что  $k\mathbb{Z}$  действительно является подгруппой для любого  $k$ . Мы должны проверить три свойства подгруппы. Во-первых,  $k\mathbb{Z}$  должно быть замкнуто по сложению. Но это ясно из определения. Во-вторых, нейтральный элемент, то есть ноль, должен быть в  $k\mathbb{Z}$ . Это так же ясно, так как  $0 = k \cdot 0$ . В-третьих, для любого  $m = kh \in k\mathbb{Z}$ , его обратный  $-m = k(-h)$  так же в  $\mathbb{Z}$ , и мы проверили все три свойства.

Теперь покажем, что всякая подгруппа  $H$  имеет вид  $k\mathbb{Z}$  с неотрицательным  $k$ . Если  $H$  содержит только нейтральный элемент 0, то  $H = 0\mathbb{Z}$  и все доказано. Предположим  $H$  содержит ненулевой элемент. Возьмем произвольное ненулевое  $n \in H$ . Если  $n < 0$ , то  $-n$  должно быть в  $H$  по определению подгруппы. А значит, мы можем считать, что  $H$  содержит некоторое положительное число. Пусть  $k$  – наименьшее положительное число в  $H$ . Давайте покажем, что  $H = k\mathbb{Z}$ .

В начале покажем,  $H \supseteq k\mathbb{Z}$ . Действительно, если  $k \in H$ , то по определению и вся подгруппа степеней  $k$  лежит в  $H$ . В аддитивной записи это значит, что

$$mk = \underbrace{k + \dots + k}_m \in H \text{ и } (-n)k = \underbrace{(-k) + \dots + (-k)}_n \in H \text{ для любых } m, n \in \mathbb{N}$$

Значит,  $k\mathbb{Z} \subseteq H$ .

Теперь покажем, что  $H \subseteq k\mathbb{Z}$ . Если  $n \in H$  – произвольный элемент, давайте разделим его на  $k$  с остатком:  $n = qk + r$ , где  $q \in \mathbb{Z}$  и  $0 \leq r < k$ . Мы уже знаем, что  $qk \in k\mathbb{Z} \subseteq H$ . Значит,  $r = n - qk \in H$ . Но  $r$  является неотрицательным целым числом из  $H$  меньшим  $k$ . Так как  $k$  является минимальным положительным целым в  $H$ , то остается только случай  $r = 0$ . А значит,  $n = qk \in k\mathbb{Z}$  и все доказано.  $\square$

**Утверждение 25.** *Всякая подгруппа  $H$  группы  $\mathbb{Z}_n$ , точнее  $(\mathbb{Z}_n, +)$ , имеет вид  $k\mathbb{Z}_n = \{kh \in \mathbb{Z}_n \mid h \in \mathbb{Z}_n\}$  для некоторого положительного целого  $k \mid n$ .*

*Доказательство.* В начале проверим, что все числа кратные  $k$  для  $k \mid n$  образуют подгруппу в  $\mathbb{Z}_n$ . Во-первых, покажем, что  $k\mathbb{Z}_n$  замкнуто относительно сложения по модулю  $n$ . Допустим  $m_1 = kh_1$  и  $m_2 = kh_2$  – элементы  $k\mathbb{Z}_n$ . Тогда их сумма по модулю  $n$  – это остаток  $r$  такой, что  $m_1 + m_2 = r \pmod{n}$ . В этом случае

$$r = m_1 + m_2 + qn = kh_1 + kh_2 + qn$$

Так как  $k$  делит  $n$  все выражение целиком делится на  $k$ . Значит и  $r$  делится на  $k$ . Последнее означает, что  $k\mathbb{Z}_n$  замкнуто относительно сложения по модулю  $n$ . Во-вторых, надо проверить, что нейтральный элемент содержится в  $k\mathbb{Z}_n$ . Это ясно из равенства  $0 = k \cdot 0 \in k\mathbb{Z}_n$ . В-третьих, если  $m \in k\mathbb{Z}_n$  – не нулевой элемент, то его обратный имеет вид  $n - m$ . А так как  $n$  делится на  $k$ , то и  $n - m$  делится на  $k$ , а значит лежит в  $k\mathbb{Z}_n$ . В случае  $m = 0$  его обратный есть 0, а он лежит в  $k\mathbb{Z}_n$ . Потому для любого  $k \mid n$ ,  $k\mathbb{Z}_n$  является подгруппой в  $\mathbb{Z}_n$ .

Теперь давайте покажем, что любая подгруппа  $H$  в  $\mathbb{Z}_n$  совпадает с подгруппой вида  $k\mathbb{Z}_n$  где  $k \mid n$ . Подгруппа  $H$  должна содержать нейтральный элемент 0. Если больше нет других элементов в  $H$ , то  $H = \{0\} = n\mathbb{Z}_n$  и все доказано. Значит, мы можем предположить, что в  $H$  есть ненулевые элементы. Пусть  $k$  – наименьший положительный элемент в  $H$ . По определению циклическая подгруппа  $k\mathbb{Z}_n$  лежит в  $H$ . Потому нам надо показать только обратное включение  $H \subseteq k\mathbb{Z}_n$  и показать, что  $k$  делит  $n$ .

В начале покажем, что  $k$  делит  $n$ . Давайте разделим  $n$  с остатком на  $k$ , мы получим  $n = qk + r$ , где  $0 \leq r < k$ . Теперь,  $r = n - qk$ , а значит  $r = -qk \pmod{n}$ . Так как  $k \in H$ , последнее означает, что  $r$  тоже в  $H$ . Но это противоречит выбору  $k$ , оно было наименьшим положительным целым в  $H$ . Значит,  $r$  должен быть нулем, а это и означает, что  $k$  делит  $n$ . Теперь, давайте покажем, что каждый элемент  $H$  лежит в  $k\mathbb{Z}_n$ . Возьмем произвольный элемент  $h \in H$ . Разделим его на  $k$  с остатком и получим  $h = qk + r$ . Значит,  $r = h - qk$ . Так как  $h \in H$  и  $k \in H$ , все выражение  $h - qk$  лежит в  $H$ , то есть  $r \in H$ . Так как  $k$  был наименьшим положительным целым в  $H$ , получается, что  $r = 0$ . Последнее означает, что  $h$  делится на  $k$ , то есть лежит в  $k\mathbb{Z}_n$ .  $\square$

## 2.5 Смежные классы

Алгебра тяготеет к тому, чтобы изучать группы с помощью подгрупп, а не только элементов. Важным инструментом в таком подходе являются смежные классы.

**Определение 26.** Пусть  $G$  – некоторая группа,  $H \subseteq G$  – ее подгруппа и  $g \in G$  – произвольный элемент. Тогда множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

называется левым смежным классом элемента  $g$  по подгруппе  $H$ . Аналогично определяются правые смежные классы. Множество

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

называется правым смежным классом элемента  $g$  по подгруппе  $H$ .

### Замечания

1. Стоит заметить, что если  $G$  коммутативна, то нет разницы между левыми и правыми смежными классами для любой подгруппы  $H \subseteq G$ .
2. Сама подгруппа  $H$  является левым и правым смежным классом. Действительно,  $H = 1 \cdot H = H \cdot 1$ .
3. В произвольной группе, вообще говоря левый смежный класс  $gH$  не обязан равняться правому смежному классу  $Hg$  как показывает пример ниже.

*Примеры 27.* Некоторые примеры смежных классов.

1. Пусть  $G = (\mathbb{Z}, +)$  и  $H = 2\mathbb{Z}$  – подгруппа четных целых чисел. Тогда  $2\mathbb{Z}$  и  $1 + 2\mathbb{Z}$  – все возможные смежные классы  $H$ .
2. Пусть  $G = S_3$  – группа перестановок на трех элементах и  $H = \langle (1, 2) \rangle$  – циклическая подгруппа порожденная элементом  $(1, 2)$ . Мы можем перечислить все элементы  $G$  и  $H$

$$G = \{1, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\}, H = \{1, (1, 2)\}$$

Теперь мы видим, что есть три разных левых смежных класса  $H$

$$H = \{1, (1, 2)\}, (1, 3)H = \{(1, 3), (1, 2, 3)\}, (2, 3)H = \{(2, 3), (3, 2, 1)\}$$

А так же, три разных правых смежных класса  $H$

$$H = \{1, (1, 2)\}, H(1, 3) = \{(1, 3), (3, 2, 1)\}, H(2, 3) = \{(2, 3), (1, 2, 3)\}$$

Этот пример показывает, что  $(1, 3)H \neq H(1, 3)$ . Так же этот пример показывает, что

$$(1, 2)H = H, (1, 3)H = (1, 2, 3)H, (2, 3)H = (3, 2, 1)H$$

То есть одинаковые смежные классы могут порождаться разными элементами.

3. Пусть  $G = S_n$  – группа перестановок на  $n$  элементах и  $H = A_n$  – подгруппа четных перестановок. Тогда для всякой четной перестановки  $\sigma \in A_n$ , множество  $\sigma A_n$  состоит из всех четных перестановок. Аналогично, для всякой нечетной перестановки  $\sigma \in S_n \setminus A_n$ , множество  $\sigma A_n$  состоит из всех нечетных перестановок. Потому, есть всего два левых смежных класса по  $A_n$ , это

$$A_n \text{ и } (1, 2)A_n$$

Аналогично мы можем заметить, что есть всего два правых смежных класса по  $A_n$ , это

$$A_n \text{ и } A_n(1, 2)$$

Более того, мы видим, что  $\sigma A_n = A_n \sigma$  для всех  $\sigma \in S_n$ .

**Определение 28.** Пусть  $G$  группа и  $H$  ее подгруппа. Подгруппа  $H$  называется нормальной если  $gH = Hg$  для любого элемента  $g \in G$ .

**Утверждение 29.** Пусть  $G$  – некоторая группа и  $H$  – ее подгруппа. Следующие условия эквивалентны:

1.  $gH = Hg$  для любого  $g \in G$ .
2.  $gHg^{-1} = H$  для любого  $g \in G$ .
3.  $gHg^{-1} \subseteq H$  для любого  $g \in G$ .

*Доказательство.* (1) $\Leftrightarrow$ (2). Предположим  $gH = Hg$ . Умножая это равенство справа на  $g^{-1}$ , мы получаем  $gHg^{-1} = H$ . А если нам задано равенство  $gHg^{-1} = H$ , умножая его справа на  $g$ , мы получим  $gH = Hg$ .

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Надо проверить, что если выполнено  $gHg^{-1} \subseteq H$  для любого  $g \in G$ , то и  $gHg^{-1} = H$  выполнено для любого  $g \in G$ . Если  $gHg^{-1} \subseteq H$  для любого  $g \in G$ , то оно выполнено и для  $g^{-1}$  вместо  $g$ . Значит,  $g^{-1}Hg \subseteq H$  для любого  $g \in G$ . Умножим это равенство слева на  $g$ , получим  $Hg \subseteq gH$ . Теперь умножим это равенство справа на  $g^{-1}$  и получим  $H \subseteq gHg^{-1}$ . А это завершает доказательство.  $\square$

## 2.6 Теорема Лагранжа

**Свойства смежных классов** Прежде всего я хочу доказать некоторые свойства смежных классов. Так окажется, что левые смежные классы образуют разбиение группы  $G$  на не пересекающиеся множества одного размера. Аналогичное верно и для правых смежных классов. Подобное утверждение позволяет применить к изучению группы комбинаторные соображения.

**Утверждение 30.** Пусть  $G$  – некоторая группа,  $H \subseteq G$  – ее подгруппа и  $g_1, g_2 \in G$  – произвольные элементы. Тогда возможны только два случая:

1. Смежные классы не пересекаются:  $g_1H \cap g_2H = \emptyset$ .
2. Смежные классы совпадают:  $g_1H = g_2H$ .

Последнее означает, что каждый элемент группы  $G$  лежит в единственном смежном классе.

*Доказательство.* Если  $g_1H$  не пересекает  $g_2H$ , то доказывать нечего.

Предположим, что пересечение смежных классов  $g_1H \cap g_2H$  не пусто. Мы должны доказать, что  $g_1H = g_2H$ . Предположим, что  $g \in g_1H \cap g_2H$ . Тогда  $g \in g_1H$ ,  $g = g_1h_1$  для некоторого  $h_1 \in H$ . Аналогично,  $g \in g_2H$  влечет  $g = g_2h_2$  для некоторого  $h_2 \in H$ . Значит  $g_1h_1 = g_2h_2$ . Разделив на  $h_1$  справа, мы получим  $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$ . Так как  $H$  является подгруппой, то  $h = h_2h_1^{-1} \in H$ . То есть  $g_1 = g_2h$  для некоторого  $h \in H$ .

Давайте покажем, что  $g_1H \subseteq g_2H$ . Предположим, что произвольный элемент  $g \in g_1H$  имеет вид  $g = g_1h'$ , где  $h' \in H$ . Тогда  $g = g_2hh'$   $\in g_2H$  потому что  $hh' \in H$ . Аналогично показывается обратное вложение  $g_2H \subseteq g_1H$ . А именно, возьмем  $g \in g_2H$  в виде  $g = g_2h'$  где  $h' \in H$ . Значит,  $g = g_1h^{-1}h' \in g_1H$  потому что  $h^{-1}h' \in H$ .  $\square$

*Замечание 31.* Обратим внимание, что  $g_1H = g_2H$  тогда и только тогда, когда  $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ . Более того, это происходит тогда и только тогда, когда найдется элемент  $h \in H$  такой, что  $g_1 = g_2h$ . Последнее эквивалентно условию  $g_2^{-1}g_1 \in H$ . Это дает нам удобный способ проверять являются ли смежные классы одинаковыми.

**Утверждение 32.** Пусть  $G$  – некоторая группа,  $H \subseteq G$  – конечная подгруппа и  $g \in G$  – некоторый элемент. Тогда  $|gH| = |H| = |Hg|$ .

*Доказательство.* Я докажу утверждение для левых смежных классов. Для правых делается аналогично. Рассмотрим отображение

$$\phi: H \rightarrow gH \quad x \mapsto gx$$

Оно переводит элементы  $H$  в элементы  $gH$ . С другой стороны, существует обратное отображение

$$\psi: gH \rightarrow H \quad x \mapsto g^{-1}x$$

Поэтому  $\phi$  и  $\psi$  являются взаимно обратными биекциями.  $\square$

**Утверждение 33.** Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – ее подгруппа. Тогда

1. Количество левых смежных классов группы  $H$  равно  $|G|/|H|$ .
2. Количество правых смежных классов группы  $H$  равно  $|G|/|H|$ .

В частности, количество левых и правых смежных классов одно и то же.

*Доказательство.* Я докажу первое равенство для левых смежных классов. Утверждение 30 показывает, что  $G$  является дизъюнктивным объединением своих смежных классов, то есть  $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_kH$ . С другой стороны, утверждение 32 говорит, что все смежные классы  $g_1H, \dots, g_kH$  имеют один и тот же размер  $|H|$ . Значит

$$|G| = |g_1H| + \dots + |g_kH| = |H| + \dots + |H| = k|H|$$

Здесь  $k$  – это число различных левых смежных классов. □

**Определение 34.** Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – некоторая ее подгруппа. Тогда количество левых смежных классов  $H$  называется индексом  $H$  и обозначается  $(G : H)$ . Это число так же совпадает с количеством правых смежных классов.

Используя это определение, мы можем переписать утверждение 33 следующим образом.

**Утверждение 35** (Теорема Лагранжа). Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – некоторая ее подгруппа. Тогда,  $|G| = (G : H)|H|$

### Следствия теоремы Лагранжа

1. Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – ее некоторая подгруппа. Тогда  $|H|$  делит  $|G|$ .
2. Пусть  $G$  – конечная группа и  $g \in G$  – произвольный элемент. Тогда  $\text{ord}(g)$  делит  $|G|$ . Действительно,  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$  по утверждению 23. Но  $|\langle g \rangle|$  делит  $|G|$  по предыдущему пункту.
3. Пусть  $G$  – конечная группа и  $g \in G$  – некоторый элемент. Тогда  $g^{|G|} = 1$ . Действительно, мы уже знаем, что  $|G| = \text{ord}(g)k$ . Значит,

$$g^{|G|} = g^{\text{ord}(g)k} = \left(g^{\text{ord}(g)}\right)^k = 1^k = 1$$

4. Пусть  $G$  – группа простого порядка. Тогда  $G$  циклическая. Действительно, так как порядок  $G$  прост, то он больше 1. Значит, существует элемент  $g \in G$  такой, что  $g \neq 1$ . Тогда подгруппа  $\langle g \rangle$  имеет порядок больше 1. Но  $|\langle g \rangle|$  делит  $|G| = p$ . Так как  $p$  простое, единственно возможный случай – это  $|\langle g \rangle| = p = |G|$ . Последнее означает, что  $\langle g \rangle = G$  и все доказано.
5. Малая теорема Ферма. Пусть  $p \in \mathbb{Z}$  – простое число и  $a \in \mathbb{Z}$ . Если  $p$  не делит  $a$ , то  $p$  делит  $a^{p-1} - 1$ . Действительно, давайте рассмотрим группу  $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ . Для любого элемента  $b \in \mathbb{Z}_p^*$ , имеем  $b^{|\mathbb{Z}_p^*|} = 1 \pmod{p}$  по пункту (3). Но  $\mathbb{Z}_p^*$  состоит из  $p - 1$  элемента. Теперь возьмем произвольное  $a \in \mathbb{Z}$  взаимно простое с  $p$ . Пусть  $b$  – остаток от деления  $a$  на  $p$ . Тогда  $a^{p-1} = b^{p-1} = 1 \pmod{p}$  и все доказано.

## 2.7 Гомоморфизмы и изоморфизмы

Существует много различных групп. Кроме того, мы с вами изучим методы по построению новых групп из уже имеющихся. В такой ситуации очень полезно иметь механизм для сравнения групп. Как понять, что мы построили уже знакомую нам группу? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны объяснить, что значит, что две группы одинаковые. То есть нам нужен способ сравнивать группы между собой. Тут на помощь нам приходят гомоморфизмы (способ сравнивать группы) и изоморфизмы (способ говорить, что две группы одинаковые). Давайте начнем с определений.

**Определение 36.** Пусть  $G$  и  $H$  – группы. Определим гомоморфизм  $\varphi: G \rightarrow H$ .

- **Данные** отображение  $\varphi: G \rightarrow H$ .
- **Аксиома**  $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$  для всех  $g_1, g_2 \in G$ .

В таком случае  $\varphi$  называется гомоморфизмом из  $G$  в  $H$ .

*Замечание 37.* Давайте я явно проговорю определение. Нам даны две группы  $(G, \circ)$  и  $(H, \cdot)$ . Гомоморфизм  $\varphi: G \rightarrow H$  – это отображение такое, что  $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ . В левой части равенства мы берем элементы  $g_1$  и  $g_2$  из группы  $G$  и перемножаем их с помощью операции из  $G$  и потом отправляем результат в  $H$ . В правой части, мы сначала отправляем элементы  $g_1$  и  $g_2$  в группу  $H$  и только потом перемножаем образы с помощью операции из  $H$ .

*Примеры 38.* 1. Пусть  $G = (\mathbb{Z}, +)$  и  $H = (\mathbb{Z}_n, +)$ , тогда отображение  $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  по правилу  $k \mapsto k \pmod{n}$  является гомоморфизмом.

2. Пусть  $G = S_n$  – группа перестановок и  $H = \mu_2 = \{\pm 1\}$  снабжено умножением. Тогда отображение  $\text{sgn}: S_n \rightarrow \mu_2$  сопоставляющее каждой перестановке ее знак (четные идут в 1, а нечетные в  $-1$ ) является гомоморфизмом.

3. Пусть  $G = (\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$  и  $H = (\mathbb{R}^*, \cdot)$  – множество ненулевых вещественных чисел с операцией умножения. Тогда отображение  $\det: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  по правилу  $A \mapsto \det(A)$  является гомоморфизмом.

4. Пусть  $G = (\mathbb{R}, +)$  и  $H = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ . Тогда отображение  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  по правилу  $x \mapsto e^x$  является гомоморфизмом.

5. Пусть  $G = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $H$  – произвольная группа и  $h \in H$  – произвольный элемент. Тогда отображение  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow H$  по правилу  $k \mapsto h^k$  является гомоморфизмом.

6. Пусть  $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ ,  $H$  – произвольная группа и  $h \in H$  – произвольный элемент такой, что  $h^n = 1$ . Тогда отображение  $\phi: \mathbb{Z}_n \rightarrow H$  по правилу  $k \mapsto h^k$  является гомоморфизмом групп.

Давайте докажем некоторые свойства гомоморфизмов.

**Утверждение 39.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  – некоторый гомоморфизм групп. Тогда

1.  $\varphi(1) = 1$ , то есть нейтральный элемент  $G$  идет в нейтральный элемент  $H$ .
2.  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$  для любого  $g \in G$ .

*Доказательство.* 1) Мы знаем, что  $1 = 1 \cdot 1$ . Давайте применим  $\varphi$  к этому равенству. Тогда мы получим

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1) \in H$$

Теперь умножим это равенство на  $\varphi(1)^{-1}$ , будет  $1 = \varphi(1)$ .

2) Пусть  $g \in G$  – некоторый элемент. Тогда  $gg^{-1} = 1$ . Теперь применим  $\varphi$  к этому равенству и получим

$$\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(1) = 1$$

Умножая полученное равенство слева на  $\varphi(g)^{-1}$ , мы получаем  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ . □

**Определение 40.** Пусть  $G$  и  $H$  – группы. Определим изоморфизм  $\varphi: G \rightarrow H$ .

- **Данные** гомоморфизм  $\varphi: G \rightarrow H$ .
- **Аксиома**  $\varphi$  является биекцией.

В этом случае  $\varphi$  называется изоморфизмом между  $G$  и  $H$ . Если найдется изоморфизм между  $G$  и  $H$ , то группы  $G$  и  $H$  называются изоморфными.

Давайте я поясню немного определение. В начале давайте разберемся, что значит, что у нас есть биекция множеств  $\varphi: X \rightarrow Y$ . Предположим  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$  и  $\varphi$  устроено так:  $1 \mapsto a$ ,  $2 \mapsto b$  и  $3 \mapsto c$ . Тогда можно думать про эту биекцию следующим образом. Множество  $X$  – это множество имен элементов, а множество  $Y$  – это множество других имен тех же самых элементов. Тогда на биекцию можно смотреть, как на процедуру переименования. То есть можно считать, что  $Y$  это то же самое множество элементов, что и  $X$ , только с другими названиями элементов.

Теперь пусть у нас задан изоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow H$ . Такой гомоморфизм как минимум биекция, а значит мы можем считать, что подлечение множества  $G$  и  $H$  на самом деле одинаковые. Кроме того, условие  $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$  означает, что при нашем отождествлении  $G$  и  $H$  операция на  $G$  превращается в операцию на  $H$ . То есть мы можем думать, что  $H$  – это то же самое множество, что и  $G$  с той же самой операцией, что на  $G$ . Или другими словами, мы считаем, что группа  $H$  – это та же самая группа, что и  $G$ , но только с другим множеством имен и другим обозначением операции. Однако, по существу это одна и та же группа. Как следствие, изоморфные группы имеют одинаковые свойства.

*Примеры 41.* 1. Пусть  $G = (\mathbb{Z}_n, +)$  и  $H = \mu_n \subseteq \mathbb{C}$  – множество комплексных корней из единицы степени  $n$  с операцией умножения. Давайте фиксируем примитивный корень  $\xi \in \mu_n$ . Тогда отображение  $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mu_n$  по правилу  $k \mapsto \xi^k$  является изоморфизмом.

2. Пусть  $G = (\mathbb{Z}, +)$  и

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

с операцией умножения. Тогда отображение  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow H$  по правилу  $k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  является изоморфизмом.

3. Пусть  $G = (\mathbb{C}, +)$  и  $H = (\mathbb{R}^2, +)$ . Тогда отображение  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  по правилу  $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$  является изоморфизмом.

4. Пусть  $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$  и

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ такие что } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

с операцией умножения. Тогда отображение  $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow H$  по правилу  $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  является изоморфизмом.

5. Claim 23 говорит, что циклическая группа  $G = \langle g \rangle$  изоморфна  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Z}_n$  в зависимости от порядка образующего. Если  $\operatorname{ord} g = \infty$ , тогда  $G \simeq \mathbb{Z}$ . Если  $\operatorname{ord} g = n$ , тогда  $G \simeq \mathbb{Z}_n$ .

С каждым гомоморфизмом мы можем ассоциировать специальные подгруппы: ядро и образ.

**Определение 42.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  – некоторый гомоморфизм групп. Тогда

1. ядро  $\varphi$  – это  $\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\} \subseteq G$ .
2. образ  $\varphi$  – это  $\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} = \varphi(G) \subseteq H$ .

Стоит отметить, что ядро является подмножеством в  $G$ , а образ – в  $H$ .

**Утверждение 43.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  – гомоморфизм групп. Тогда

1.  $\operatorname{Im} \varphi \subseteq H$  является подгруппой.
2.  $\ker \varphi \subseteq G$  является нормальной подгруппой.
3. Отображение  $\varphi$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Im} \varphi = H$ .
4. Отображение  $\varphi$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\ker \varphi = \{1\}$ .

*Доказательство.* 1) Давайте проверим, что все свойства подгруппы выполняются. Во-первых,  $1 = \varphi(1) \in \operatorname{Im} \varphi$ , значит нейтральный элемент лежит в образе. Во-вторых,  $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2) \in \operatorname{Im} \varphi$ , то есть образ замкнут относительно операции. В-третьих,  $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \operatorname{Im} \varphi$ , то есть с каждым элементом образа содержит его обратный.

2) В начале проверим, что ядро – подгруппа. Во-первых,  $\varphi(1) = 1$ , значит  $1 \in \ker \varphi$  по определению. Во-вторых, если  $x, y \in \ker \varphi$ , тогда  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 1 \cdot 1 = 1$ , то есть  $xy \in \ker \varphi$ . В-третьих, если  $x \in \ker \varphi$ , то  $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = 1^{-1} = 1$ . Значит  $x^{-1} \in \ker \varphi$ . Мы только что проверили, что  $\ker \varphi$  является подгруппой. Теперь надо показать, что  $g \ker \varphi = \ker \varphi g$  для всех  $g \in G$ . По утверждению 29, достаточно проверить, что  $g \ker \varphi g^{-1} \subseteq \ker \varphi$  для каждого  $g \in G$ . То есть мы должны показать, что  $\varphi(g \ker \varphi g^{-1}) = 1$  для каждого  $g \in G$ . Действительно, пусть  $h \in \ker \varphi$ , тогда

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \cdot 1 \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(1) = 1$$

3) Это условие тривиально по определению.

4) Предположим, что  $\varphi$  инъективно и  $x \in \ker \varphi$ . Это значит, что  $\varphi(x) = 1$ . С другой стороны, мы всегда имеем  $\varphi(1) = 1$ . Значит,  $x$  и  $1$  идут в один и тот же элемент  $1$ . По инъективности получаем  $x = 1$ .

Теперь предположим, что  $\ker \varphi = \{1\}$ . Рассмотрим два элемента  $x, y \in G$  таких, что  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Умножим это равенство на  $\varphi(x)^{-1}$  и получим

$$1 = \varphi(y)\varphi(x)^{-1} = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(yx^{-1})$$

Значит  $yx^{-1} \in \ker \varphi = \{1\}$ . Поэтому  $yx^{-1} = 1$ . Тогда  $y = x$ , что завершает доказательство.  $\square$



## 2.8 Произведение групп

Вообще говоря нам не очень хочется каждый раз строить группы с нуля. Хочется иметь механизм по построению новых групп из уже заданных. Существует много подобных процедур в алгебре. Мы собираемся изучить одну из таких.

**Определение 44.** Пусть  $G$  и  $H$  – некоторые группы. Определим новую группу  $G \times H$  следующим образом

1. Как множество это декартово произведение подлежащих множеств групп  $G$  и  $H$ :  $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ .
2. Операция

$$\cdot : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H$$

задана по правилу

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2), \quad g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$$

Группа  $G \times H$  называется произведением групп  $G$  и  $H$ .

По-хорошему нам надо бы показать, что  $G \times H$  действительно является группой. Мы только что определили все необходимые данные для группы, но осталось проверить аксиомы. Давайте я напомним их

- Операция ассоциативна

$$(g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3)) = ((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3)$$

- Существует нейтральный элемент,  $1 = (1, 1)$ .
- У каждого элемента есть обратный,  $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ .

Все свойства проверяются прямым вычислением. Если у нас есть несколько групп  $G_1, \dots, G_k$ , мы можем определить произведение  $G_1 \times \dots \times G_k$  аналогично тому, как мы определили произведение двух групп.

## 2.9 Конечные абелевы группы

Теперь я хочу сосредоточиться на очень важном классе групп, класс конечных абелевых групп.

**Определение 45.** Конечная абелева группа – это коммутативная (абелева) группа  $G$  с конечным числом элементов.

Само по себе определение – не большой сюрприз, название говорит само за себя. Однако обратите внимание на следующий результат.

**Утверждение 46.** Пусть  $G$  – конечная абелева группа, тогда  $G$  изоморфна группе вида  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ .

Я не буду доказывать этот результат. Доказательство не сложно, но требует некоторой технической работы, на которую у нас нет времени. Кроме того, само доказательство не проливает свет на какие-либо свойства конечных абелевых групп и потому не так интересно. На мой взгляд куда важнее научиться понимать как использовать этот результат. Давайте начнем с некоторых примеров.

**Примеры 47.** 1. Пусть  $G = \mathbb{Z}_8^*$  с операцией умножения. Очевидно, что это конечная абелева группа, а значит она должна представляться в виде произведения циклических групп. Действительно, давайте проверим, что

$$\mathbb{Z}_8^* \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Отображение задающее биекцию и уважающее операции можно задать так:

$$1 \leftrightarrow (0, 0), \quad 3 \leftrightarrow (1, 0), \quad 5 \leftrightarrow (0, 1), \quad 7 \leftrightarrow (1, 1)$$

Это не единственный способ отождествить эти две группы. Например, вот другой изоморфизм:

$$1 \leftrightarrow (0, 0), \quad 3 \leftrightarrow (1, 0), \quad 7 \leftrightarrow (0, 1), \quad 5 \leftrightarrow (1, 1)$$

Я не собираюсь описывать все изоморфизмы, самое главное, что мы видим, что таких изоморфизмов много. Так же обратите внимание, что группа не является циклической, так как в ней нет элемента порядка 4.

2. Пусть  $G = \mathbb{Z}_9^*$  с операцией умножения. Это так же конечная абелева группа. В этом случае мы имеем:

$$\mathbb{Z}_9^* \simeq \mathbb{Z}_6$$

вот пример двух разных изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_9^* & & \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_9^* \\ k \mapsto 2^k & \text{и} & k \mapsto 5^k \end{array}$$

Так же заметим, что в этом случае группа является циклической. Элементы 2 и 5 являются различными образующими группы. Изоморфизмы выше соответствуют одному из выбору образующего.

**Утверждение 48** (Китайская теорема об остатках). Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$  – два взаимно простых натуральных числа, то есть  $(m, n) = 1$ . Тогда отображение

$$\Phi: \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \quad k \mapsto (k \bmod m, k \bmod n)$$

является изоморфизмом групп.

*Доказательство.* В начале мы должны показать, что отображение является гомоморфизмом. Надо показать, что  $\Phi(k + d) = \Phi(k) + \Phi(d)$ , то есть

$$\begin{aligned} \Phi(k + d) &= ((k + d) \bmod m, (k + d) \bmod n) = ((k \bmod m) + (d \bmod m), (k \bmod n) + (d \bmod n)) = \\ &= (k \bmod m, k \bmod n) + (d \bmod m, d \bmod n) = \Phi(k) + \Phi(d) \end{aligned}$$

Теперь я утверждаю, что гомоморфизм инъективен. Утверждение 43 пункт (4) гласит, что достаточно проверить, что ядро гомоморфизма содержит только нейтральный элемент. По определению, имеем

$$\ker \Phi = \{k \in \mathbb{Z}_{mn} \mid k \equiv 0 \pmod{m}, k \equiv 0 \pmod{n}\}$$

Значит  $k \in \ker \Phi$  тогда и только тогда, когда  $m$  делит  $k$  и  $n$  делит  $k$ . Так как  $m$  и  $n$  взаимно просты, последнее означает, что  $mn$  делит  $k$ . А значит,  $k \equiv 0$  в  $\mathbb{Z}_{mn}$ .

Чтобы показать, что  $\Phi$  является изоморфизмом, нам надо показать сюръективность. Давайте посчитаем количество элементов в обеих группах. По определению  $|\mathbb{Z}_{mn}| = mn$ . С другой стороны,  $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_m| \cdot |\mathbb{Z}_n| = mn$ . Значит  $\Phi$  – это инъективное отображение между множествами одинакового размера. А отсюда получаем, что оно обязательно сюръективно.  $\square$

В предыдущем утверждении явно сказано, как отображать элементы из  $\mathbb{Z}_{mn}$  в элементы из  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ . Однако, стоит сказать, как строится обратное отображение. Так как  $m$  и  $n$  взаимно просты, мы имеем  $1 = um + vn$  для некоторых  $u, v \in \mathbb{Z}$  по расширенному алгоритму Евклида. Теперь рассмотрим элемент  $a_1 = um = 1 - vn$ . Ясно, что  $a_1 \mapsto (0, 1)$  под действием отображения  $\Phi$ . Аналогично, элемент  $a_2 = vn = 1 - um$  идет в  $(1, 0)$ . Значит, элемент  $(a, b)$  соответствует элементу  $aa_1 + ba_2 \pmod{mn}$  в группе  $\mathbb{Z}_{mn}$ .

**Примеры 49.** 1. В случае  $m = 3$  и  $n = 2$ , мы имеем  $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ . Здесь элемент 1 идет в  $(1, 1)$ . Значит  $(1, 1)$  является образующим циклической группы  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ . Так как  $1 = 3 - 2$ , мы видим, что 3 идет в  $(0, 1)$  и  $-2$  идет в  $(1, 0)$  (обратим внимание, что  $-2 \equiv 4 \pmod{6}$ ). Потому, обратное отображение задано по правилу  $(a, b) \mapsto -2a + 3b \equiv 4a + 3b \pmod{6}$ .

2. Группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  не является циклической. Значит, не существует изоморфизма между ней и группой  $\mathbb{Z}_4$ .

3. Еще один пример различного представления абелевой группы в виде произведения циклических

$$\mathbb{Z}_{30} \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

Так что, все пять конструкций дают одну и ту же циклическую группу.

4. В общем случае, если  $m = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ , где  $p_i$  – простые, имеем

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}$$

Как мы видели выше, одна и та же абелева группа может быть записана совершенно разными способами. Как же быстро понять, что два представления задают одну и ту же группу? Ответ содержится в следующем утверждении.

**Утверждение 50.** Пусть  $G$  – конечная абелева группа. Тогда

1.  $G$  единственным образом представляется в следующем виде

$$G = \mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_k}, \quad \text{где } 1 < d_1 | d_2 | \dots | d_k \text{ натуральные}$$

2. С точностью до перестановки множителей  $G$  единственным образом представляется в следующем виде

$$G = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}, \quad \text{где } p_i \text{ – не обязательно различные простые числа, } k_i \text{ – натуральные}$$

Важно упомянуть, что простые  $p_i$  могут повторяться во втором представлении, например  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  – один из возможных случаев.

*Примеры 51.* 1. Пусть  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$  и  $H = \mathbb{Z}_{12}$ . Обе эти группы представлены в первой форме. Так как такое представление единственно, то  $G$  и  $H$  не изоморфны.

2. Пусть  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$  и  $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Мы видим, что  $G$  представлено в первой форме, а  $H$  представлено во второй. Давайте пересчитаем  $G$  во второй форме, используя Китайскую теорему об остатках:

$$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = H$$

Значит группы изоморфны.

Теперь я хочу сформулировать вторую версию китайской теоремы об остатках.

**Утверждение 52.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$  – два взаимно простых целых числа, то есть  $(m, n) = 1$ . Тогда отображение

$$\Phi: \mathbb{Z}_{mn}^* \rightarrow \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*, \quad k \mapsto (k \bmod m, k \bmod n)$$

является корректно определенным изоморфизмом групп.

*Доказательство.* Так как  $m$  и  $n$  взаимно простые, мы уже знаем, что отображение  $\Phi: \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  является биекцией, по утверждению 48. Ясно, что число  $k$  взаимно просто с  $mn$  тогда и только тогда, когда оно взаимно просто с  $m$  и взаимно просто с  $n$  одновременно. Последнее означает, что  $\Phi$  индуцирует биекцию  $\Phi: \mathbb{Z}_{mn}^* \rightarrow \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$ .

Теперь надо показать, что  $\Phi$  уважает умножение. С одной стороны имеем

$$\Phi(k_1 k_2) = (k_1 k_2 \bmod m, k_1 k_2 \bmod n)$$

С другой стороны

$$\Phi(k_1)\Phi(k_2) = (k_1 \bmod m, k_1 \bmod n)(k_2 \bmod m, k_2 \bmod n) = (k_1 k_2 \bmod m, k_1 k_2 \bmod n)$$

А это доказывает, что  $\Phi(k_1 k_2) = \Phi(k_1)\Phi(k_2)$ , что и требовалось.  $\square$

Последний результат означает, что вычисление группы  $\mathbb{Z}_n^*$  можно свести к вычислению групп  $\mathbb{Z}_{p^k}^*$  где  $p$  простое. Действительно, если  $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ , то

$$\mathbb{Z}_n^* \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}^* \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}^*$$

Чтобы закончить вычисление, нам надо знать ответ для степеней простых. Давайте сформулируем необходимые результаты без доказательства.

**Утверждение 53.** Если  $p$  – нечетное простое и  $n$  – произвольное положительное целое, тогда

$$\mathbb{Z}_{p^n}^* \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-1}(p-1)}$$

является циклической группой. Кроме того, целое  $a \in \mathbb{Z}_{p^n}^*$  является образующим  $\mathbb{Z}_{p^n}^*$  тогда и только тогда, когда  $a$  является образующим в  $\mathbb{Z}_p^*$  и  $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ . Значит, любой элемент  $\mathbb{Z}_{p^n}^*$  однозначно представляется в виде  $a^k$ , где  $0 \leq k < p^{n-1}(p-1)$ .

В случае степени 2 ответ будет следующим

$$\mathbb{Z}_{2^n}^* \simeq \begin{cases} 0, & n \leq 1 \\ \mathbb{Z}_2, & n = 2 \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

В случае  $n = 2$  группа порождена элементом  $3 = -1$ . В случае  $n \geq 3$ , первый множитель  $\mathbb{Z}_2$  порожден элементом  $2^n - 1 = -1$ , а второй множитель  $\mathbb{Z}_{2^{n-2}}$  порожден элементом 5. Таким образом, любой элемент  $\mathbb{Z}_{2^n}^*$  однозначно представляется в виде  $\pm 5^k$ , где  $0 \leq k < 2^{n-2}$ .

В частности группа  $\mathbb{Z}_p^*$  циклическая порядка  $p-1$  для любого простого числа  $p$ . Мы позже докажем более общий результат используя абстрактный алгебраический аппарат.

**Утверждение 54.** Элемент  $m \in \mathbb{Z}_n$  является образующим тогда и только тогда, когда  $m$  и  $n$  взаимно просты.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ). Предположим, что  $(m, n) = d > 1$ . Тогда все элементы  $\langle m \rangle$  делятся на  $d$ . В частности, мы никогда не получим 1. Значит  $m$  – не образующий, противоречие. То есть  $m$  и  $n$  обязаны быть взаимно простыми.

( $\Leftarrow$ ). Мы хотим показать, что  $\langle m \rangle = \mathbb{Z}_n$ . Так как 1 – образующий  $\mathbb{Z}_n$ , достаточно показать, что  $1 \in \langle m \rangle$ . В силу взаимной простоты  $m$  и  $n$  существуют элементы  $a, b \in \mathbb{Z}$  такие, что  $1 = am + bn$ . Значит  $1 = am \pmod{n}$ . Последнее означает, что 1 является  $a$ -ой степенью  $m$ , а значит,  $1 \in \langle m \rangle$ .  $\square$

## 3 Криптография

### 3.1 Общие слова

Давайте предположим, что у вас есть жена и любовница<sup>5</sup> и вы очень хотите послать сообщение любовнице. Однако, вы опасаетесь это делать в открытую, так как кто-то в вашей семье недавно купил дробовик и вы точно уверены, что это не вы. В такой неловкой ситуации приходится прибегать к помощи криптографии.

Основная идея стоящая за криптографическими методами состоит в следующем. Оказывается, что есть процедуры, которые в одну сторону вычисляются быстро, а в обратную очень медленно, то есть посчитать прямое отображение легко, а обратное сложно. На основе таких отображений можно строить более хитрые процедуры. Например, процедуры, которые легко выполняются, когда вы знаете некоторую дополнительную секретную информацию и сложно, если вы такой информацией не владеете.

Прежде чем переходить к деталям, давайте я дам пример самых популярных процедур, которые в одну сторону считаются легко, а в другую сложно.

- Очень легко считать произведение целых чисел, даже очень больших.<sup>6</sup> Однако, процедура разложения целого числа на множители очень сложная, в том смысле, что принципиально лучше чем прямой перебор множителей, мы ничего не знаем.
- Предположим, нам задана некоторая абелева группа  $G$  и ее элемент  $g \in G$ . Тогда очень легко считается  $g^n$  для любого  $n$ . А именно у нас есть алгоритм быстрого возведения в степень, который работает приблизительно за  $O(\log n)$  операций. С другой стороны, если группа  $G$  подобрана правильно, то обратная операция будет медленной. То есть для  $h \in \langle g \rangle$  найти такое  $n \in \mathbb{Z}$ , что  $h = g^n$  будет сложной операцией.

Первая процедура активно используется в алгоритме шифрования RSA, а вторая в процедуре шифрования Диффи-Хеллмана.

### 3.2 Быстрое возведение в степень

В начале я хочу напомнить алгоритм быстрого возведения в степень. Пусть  $G$  – группа и  $g \in G$  – некоторый элемент и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда в мультипликативной и аддитивной нотации имеем

$$g^n = \begin{cases} g(g^2)^k, & n = 2k + 1 \\ (g^2)^k, & n = 2k \end{cases} \quad \text{or} \quad ng = \begin{cases} g + k(2g), & n = 2k + 1 \\ k(2g), & n = 2k \end{cases}$$

<sup>5</sup>Или муж и любовник, если угодно.

<sup>6</sup>На сегодняшний день существует множество хитрых алгоритмов для перемножения очень больших чисел.

Обратите внимание, что левая часть от правой отличается лишь нотацией, то есть в обоих случаях мы умеем лишь применять операцию в группе к двум элементам, а надо быстро найти  $n$  кратное применение операции к одному элементу. Давайте для определенности сосредоточимся на мультипликативной нотации.

**Дано:**  $g \in G, n \in \mathbb{N}$ .

**Вывод:**  $g^n \in G$ .

Мы используем три временные переменные  $r, d \in G$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Будем поддерживать инвариант  $rd^k = g^n$ . Алгоритм останавливается, когда  $k = 0$ , при этом результат будет записан в  $r$ .

**Алгоритм:**

1. Инициализация  $r = 1 \in G, d = g \in G, k = n \in \mathbb{N}$ .
2. В цикле проверяем является ли  $k$  четным или нечетным. Останавливаем цикл, если  $k = 0$ .
  - (а) Если  $k$  четное, то делаем присваивания  $r = r, d = d^2, k = k/2$ .
  - (б) Если  $k$  нечетно, то делаем присваивания  $r = r \cdot d, d = d^2, k = (k - 1)/2$ .

**Замечания** Давайте разберемся, как работает алгоритм. В процессе вычисления, мы имеем  $rd^k = g^n$ . В самом начале  $r = 1, d = g, k = n$ . Теперь посмотрим, что происходит на каждом шаге в обоих случаях:

- $k = 2m$ . Тогда,  $rd^{2m} = r(d^2)^m$ . И мы обновляем данные  $r = r, d = d^2$ , и  $k = m = k/2$ .
- $k = 2m + 1$ . Тогда,  $rd^{2m+1} = (rd)(d^2)^m$ . И мы обновляем данные  $r = rd, d = d^2$ , и  $k = m = (k - 1)/2$ .

Таким образом наш инвариант поддерживается на протяжении всего алгоритма и при  $k = 0$  в  $r$  будет содержаться ответ.

Я хочу обратить внимание на еще одну похожую процедуру. Пусть для определенности  $n = 11$ . Тогда в двоичной записи  $11 = 1 + 2 + 2^3 = 1 + 2(1 + 2(0 + 2))$ . Теперь можно вот как расписать возведение в степень

$$g^{11} = g^{1+2(1+2(0+2))} = g(g^{1+2(0+2)})^2 = g(g(g^{0+2})^2)^2 = g(g(g^2)^2)^2$$

Если  $n = 2^k$ , то вам потребуется в точности  $k$  операций. Например, если  $n = 8 = 2^3$ , то  $g^8 = ((g^2)^2)^2$ . Таким образом у нас  $\log_2 n$  операций. В общем случае количество операций будет пропорционально  $\log_2 n$ . Но я не хочу считать его аккуратно.

### 3.3 Сложность проблемы дискретного логарифмирования

Пусть  $G$  – группа,  $g \in G$  и  $h \in \langle g \rangle$ . Напомню, что поиск такого  $n \in \mathbb{N}$ , что  $g^n = h$  называется проблемой дискретного логарифмирования. Важно понимать, что эта процедура может выполняться как быстро, так и медленно. Давайте приведем соответствующие примеры.

- Примеры 55.*
1. Пусть  $G = \mathbb{Z}$  со сложением,  $g = 1$  и  $h = k$ . Тогда ясно, что требуемое  $n$  равно  $k$ . Действительно,  $ng = h$ . В этом случае проблема дискретного логарифмирования тривиальна и не требует никаких вычислений.<sup>7</sup>
  2. Пусть  $G = \mathbb{Z}_m$  со сложением,  $g = a \in \mathbb{Z}_m$ , и  $h = b \in \mathbb{Z}_m$ . Тогда нам надо найти такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $na = b \pmod{m}$ . Эта проблема эффективно решается с помощью расширенного алгоритма Евклида.
  3. Пусть  $p$  – простое число,  $G = \mathbb{Z}_p^*$  с умножением и  $g = a \in \mathbb{Z}_p^*$  – некоторый порождающий группы и  $h = b \in \mathbb{Z}_p^*$ . Тогда проблема заключается в поиске  $n \in \mathbb{N}$  такого, что  $a^n = b \pmod{p}$ . Весь опыт человечества подсказывает нам, что эта проблема по видимому действительно сложная и быстро не решается.

<sup>7</sup> Даже изменение  $g$  на другой элемент группы, не делает проблему сложнее.

### 3.4 Диффи-Хеллман

В начале нам надо фиксировать некоторую группу  $G$ , ее элемент  $g \in G$  и посчитать его порядок  $n = \text{ord } g$ . Возможный выбор группы будет такой:  $G = \mathbb{Z}_p^*$ , где  $p$  простое, а  $g$  – произвольный образующий. Порядок в этом случае будет равен  $p-1$ . Поиск образующего – неприятная задача, но ее достаточно проделать единожды.

Давайте я напомним контекст  $\mathcal{U}$  нас есть три участника: вы, жена и любовница. Процесс обмена сообщениями состоит из следующих общих шагов.

1. Перевести текстовое сообщение (или его часть) в элемент группы  $t \in G$ .
2. Зашифровать элемент  $t$  и получить зашифрованный элемент  $t' \in G$ .
3. Элемент  $t'$  передается по сети и становится известен всем.
4. Расшифровать элемент  $t'$  и получить исходное сообщение в виде элемента  $t$ .
5. Перевести элемент  $t$  обратно в текстовое сообщение (или его часть).

Шаги (1) и (5) обычно делаются с помощью некоей обще известной таблицы, которая известна всем участникам. То есть нет никакого секрета в том, как именно вы преобразуете сообщения из текста в элементы группы и обратно. Не волнуйтесь, ваша жена с этим справится. Все шифрование ведется только на уровне элементов групп.

**Обмен ключами** Прежде чем передавать зашифрованные сообщения, вы с любовницей должны подготовить специальный приватный ключ, с помощью которого и будет вестись шифровка и расшифровка. До создания такого ключа, коммуникация не возможна.

Давайте изобразим весь процесс на следующей диаграмме. Она показывает, что кому известно.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$	$G, g, n$	$G, g, n$

Вы генерируете случайное число  $a \in \mathbb{Z}_n^*$  и считаете открытый ключ  $r = g^a \in G$ . Ваша любовница генерирует случайное число  $b \in \mathbb{Z}_n^*$  и считает свой открытый ключ  $s = g^b \in G$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r = g^a$	$G, g, n$	$G, g, n$ $s = g^b$

Вы и любовница передаете всем свои открытые ключи  $r$  и  $s$ . Поэтому эти элементы становятся известны всем в том числе и жене. Но никто не знает элементов  $a$  и  $b$ , так как для их поиска надо решить задачу дискретного логарифмирования в группе  $G$ , а мы выбрали ее и элемент  $g \in G$  так, чтобы эта проблема была сложной.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r = g^a, s$	$G, g, n$ $r, s$	$G, g, n$ $s = g^b, r$

Теперь можно построить приватный ключ. Делается это так. Вы возводите элемент  $s$  в степень  $a$  и получаете  $s^a = (g^b)^a = g^{ab}$ . Любовница возводит элемент  $r$  в степень  $b$  и получает  $r^b = (g^a)^b = g^{ab}$ . Теперь у вас у обоих есть секретный ключ  $k = g^{ab}$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r = g^a, s$ $k = s^a$	$G, g, n$ $r, s$	$G, g, n$ $s = g^b, r$ $k = r^b$

В результате описанной выше процедуры у вас и любовницы есть общий приватный ключ  $k \in G$  и никто, даже ваша жена, не способны его найти. Однако, чтобы эта процедура была надежная, надо аккуратно выбрать группу  $G$  и элемент  $g \in G$ .

**Передача сообщений** Теперь самое время слать сладкие сообщения друг другу. Как я уже описал, мы должны перевести текстовые сообщения в элементы группы  $G$ . Предположим, что мы используем русский алфавит с 33 буквами. Еще можно использовать точку, запятую, восклицательный знак и знак пробела. Итого в общей сложности 37 символов. Всего существует  $37^m$  текстовых строк длины  $m$ . Если  $37^m \leq n$ , мы можем отобразить все такие последовательности в элементы группы  $G$  инъективно. Таким образом у нас есть механизм перевода сообщения в элементы группы  $G$ .

Теперь я собираюсь игнорировать стадию перевода. Наша цель – послать элемент группы  $G$ . Предположим, у нас есть элемент  $h \in G$ , который является сообщением, которое нужно послать любовнице.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r=g^a, s$ $k=s^a$ $h$	$G, g, n$ $r, s$	$G, g, n$ $s=g^b, r$ $k=r^b$

В начале надо зашифровать сообщение  $h$ . Зашифровка представляет из себя умножение  $h$  на приватный ключ  $k$ . Полученное сообщение  $m = hk$  мы пересылаем любовнице.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r=g^a, s$ $k=s^a$ $h, m = hk$	$G, g, n$ $r, s$ $m$	$G, g, n$ $s=g^b, r$ $k=r^b$ $m$

Любовнице, чтобы раскодировать сообщение надо поделить его на секретный ключ, то есть вычислить  $h = mk^{-1}$ . Если в группе операция взятия обратного отдельно не известна, то по следствию 3 из теоремы Лагранжа это выражение можно посчитать так:  $h = mk^{-1} = mk^{n-1}$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r=g^a, s$ $k=s^a$ $h, m = hk$	$G, g, n$ $r, s$ $m$	$G, g, n$ $s=g^b, r$ $k=r^b$ $m, h = mk^{n-1}$

И вуаля, никто не пострадал, сообщение благополучно доставлено.

**Модификация передачи** В описанной выше схеме передачи информации приватный ключ остается одним и тем же на протяжении всего сеанса связи. Это делает систему более уязвимой. Существует следующая модификация с односторонней передачей информации. Глобально она устроена так: вы создаете и публикуете свой открытый ключ. Этот этап рассматривается как приглашение передавать вам информацию. Далее любовница начинает транслировать вам сообщение с переменным ключом. Давайте опишем этот процесс более аккуратно.

Для приглашения транслировать вам сообщения, вы должны придумать секретное  $a \in \mathbb{Z}_n^*$  и передать всем открытый ключ  $r = g^a$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r=g^a$	$G, g, n$ $r$	$G, g, n$ $r$

Теперь предположим, что у любовницы есть последовательность сообщений  $h_1, \dots, h_k$ . Тогда она выбирает для каждого сообщения  $h_i$  свое секретное  $b_i \in \mathbb{Z}_n^*$ . После создает открытый и приватный ключи по правилу  $s_i = g^{b_i}$  и  $k_i = r^{b_i}$ . Каждое сообщение кодируется своим приватным ключом  $m_i = h_i k_i$ . После этого любовница транслирует в сеть пары  $(m_1, s_1), \dots, (m_k, s_k)$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r=g^a$  $(m_i, s_i)$	$G, g, n$ $r$  $(m_i, s_i)$	$G, g, n$ $r$ $h_1, \dots, h_k \in G$ $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}_n^*$ $s_i = g^{b_i}, k_i = r^{b_i}$ $m_i = h_i k_i$

Чтобы расшифровать сообщение надо построить приватный ключ  $k_i = s_i^a$ . Это можете сделать только вы, так как только вы знаете  $a$ . Далее надо найти  $h_i = m_i k_i^{-1}$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$G, g, n$ $r = g^a$  $(m_i, s_i)$ $k_i = s_i^a, h_i = m_i k_i^{-1}$	$G, g, n$ $r$  $(m_i, s_i)$	$G, g, n$ $r$ $h_1, \dots, h_k \in G$ $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}_n^*$ $s_i = g^{b_i}, k_i = r^{b_i}$ $m_i = h_i k_i$

Если мы хотим передавать сообщения в обратную сторону, то надо повторить всю схему с начала но симметрично. То есть любовница публикует свой открытый ключ, а вы уже генерируете серию зашифрованных сообщений.

### 3.5 RSA

Давайте я кратко расскажу, как работает схема шифрования RSA. Это схема односторонней передачи. Давайте я опишу ее по шагам.

**Установка связи** Если вы хотите, чтобы любовница передала вам сообщение вы должны проделать подготовительную работу. В начале вы придумываете два простых числа  $p$  и  $q$  и вычисляете  $n = pq$ . Число  $n$  публикуется для всех. И в качестве сообщений рассматриваются элементы  $\mathbb{Z}_n^*$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$p, q, n = pq$	$n, \mathbb{Z}_n^*$	$n, \mathbb{Z}_n^*$

Теперь мы хотим построить открытый ключ, который позволит слать нам сообщения. Делается это так. В начале вычисляем  $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ .<sup>8</sup> Теперь мы берем произвольное число  $e \in \mathbb{Z}_{\varphi(n)}^*$ . Открытым ключом считается пара  $(e, n)$ .

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$p, q, n = pq$ $e$	$n, \mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$	$\mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$

Теперь мы должны построить приватный ключ, для расшифровки сообщений. Для этого мы находим число  $d \in \mathbb{Z}_{\varphi(n)}^*$  такое, что  $de = 1$  в  $\mathbb{Z}_{\varphi(n)}^*$ . Это делается по расширенному алгоритму Евклида применяя его для поиска наибольшего общего делителя  $e$  и  $\varphi(n)$ . Приватным ключом считается пара  $(d, n)$ . Обратите внимание, что никто не может получить  $d$ , так как для его вычисления надо знать  $\varphi(n)$ . А для ее вычисления надо знать разложение  $n$  на множители, что сложно.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$p, q, n = pq$ $e$ $de = 1 \pmod{\varphi(n)}$	$n, \mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$	$\mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$

**Передача сообщения** Теперь предположим у любовницы есть для вас сообщение  $h \in \mathbb{Z}_n^*$ . Она должна вычислить зашифрованное сообщение по правилу  $m = h^e \pmod{n}$ . И сообщение  $m$  рассылается всем.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$p, q, n = pq$ $e$ $de = 1 \pmod{\varphi(n)}$ $m$	$n, \mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$  $m$	$\mathbb{Z}_n^*$ $(e, n)$ $h \in \mathbb{Z}_n^*$ $m = h^e \pmod{n}$

<sup>8</sup>Здесь  $\varphi(n)$  – функция Эйлера, по определению  $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$ . С помощью результатов про структуру  $\mathbb{Z}_n^*$  мы можем ее явно вычислить.



Чтобы расшифровать сообщение вы используете следующую функцию  $h = m^d \pmod{n}$ . Этот метод действительно работает, вот почему. Мы знаем, что  $de = 1 \pmod{\varphi(n)}$ . Это значит, что  $de = 1 + \varphi(n)k = 1 + |\mathbb{Z}_n^*|k$ . Теперь

$$m^d = h^{ed} = h^{1+|\mathbb{Z}_n^*|k} = h \left( h^{|\mathbb{Z}_n^*|} \right)^k = h \text{ в группе } \mathbb{Z}_n^*$$

Последнее равенство выполнено по следствию 3 из теоремы Лагранжа.

Участники	Вы	Жена	Любовница
Знания	$p, q, n = pq$	$n, \mathbb{Z}_n^*$	$\mathbb{Z}_n^*$
	$e$	$(e, n)$	$(e, n)$
	$de = 1 \pmod{\varphi(n)}$		$h \in \mathbb{Z}_n^*$
	$h = m^d \pmod{n}$	$m$	$m = h^e \pmod{n}$

## 4 Кольца и поля

### 4.1 Определения

До этого мы с вами изучали множество с одной операцией. Оказывается, что для многих приложений этого не достаточно и надо рассмотреть множество с двумя операциями. Это ведет нас к понятию кольца.

**Определение 56.** Я собираюсь определить кольцо  $(R, +, \cdot)$  или более кратко  $R$ .

- **Данные:**

1. Множество элементов  $R$ .
2. Операция  $+: R \times R \rightarrow R$  называемая сложением.
3. Операция  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  называемая умножением.

- **Аксиомы:**

1.  $(R, +)$  является абелевой группой.
2. Умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{and} \quad (a + b)c = ac + bc \quad \text{для всех } a, b, c \in R$$

3. Умножение ассоциативно:  $(ab)c = a(bc)$  для всех  $a, b, c \in R$ .
4. Умножение имеет нейтральный элемент обозначаемый 1.

В случае выполнения аксиом выше говорят, что  $(R, +, \cdot)$  – ассоциативное кольцо с единицей. Мы же будем называть такие объекты просто кольцами, так как не будем рассматривать неассоциативные кольца или кольца в которых нет единицы. Как и раньше, мы будем опускать обозначения операций и говорить, что  $R$  является кольцом, подразумевая, что на  $R$  имеются нужные операции. Нейтральный элемент по сложению будет обозначаться 0 и называется нулем в кольце. Если  $a \in R$  – произвольный элемент, то обратный по сложению обозначается  $-a$ . Для любых элементов  $a, b \in R$ , выражение  $a + (-b)$  будет для краткости записываться так  $a - b$ .

Если в дополнение а аксиомам выше выполняется

5. Умножение коммутативно:  $ab = ba$  для всех  $a, b \in R$ .

То кольцо называется коммутативным. А если мы добавим еще две аксиомы

6. Всякий ненулевой элемент обратим по умножению: для любого  $a \in R \setminus \{0\}$ , существует элемент  $b \in R$  такой, что  $ab = ba = 1$ .<sup>9</sup>
7.  $1 \neq 0$ .

То кольцо называется полем. В этом случае обратный элемент к  $a$  обозначается  $a^{-1}$ .

<sup>9</sup>Стоит обратить внимание, что не достаточно проверять только одно из условий  $ab = 1$  или  $ba = 1$  в случае если кольцо не коммутативно.

*Примеры 57.* 1. Пусть  $R = \{*\}$  – множество состоящее из одного элемента. Тогда существует только одна бинарная операция на таком множестве. Мы будем использовать эту операцию как сложение и как умножение на множестве  $R$ :  $+: R \times R \rightarrow R$  задано по правилу  $* + * = *$  и  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  задано по правилу  $* \cdot * = *$ . Тогда  $R$  – коммутативное кольцо. Его единственный элемент  $*$  является одновременно и нулем (нейтральным по сложению) и единицей (нейтральным по умножению). Любой ненулевой элемент является обратимым, потому что в кольце нет ненулевых элементов, а значит аксиома (6) выполнена. Но при этом  $1 = 0$  в кольце. Такое кольцо называется нулевым.

Давайте покажем, что если в кольце  $1 = 0$ , то все элементы равны нулю. То есть кольцо является нулевым. Действительно, пусть  $S$  – кольцо в котором  $1 = 0$ . Возьмем произвольный  $x \in S$ , тогда  $x = x \cdot 1 = x \cdot 0$ . Теперь надо показать, что  $x \cdot 0 = 0$  в любом кольце. Это делается следующим образом. По определению нуля имеем  $0 + 0 = 0$ . Теперь умножим это равенство на  $x$  и получим  $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$ . Раскроем левую часть по дистрибутивности  $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$ . А теперь прибавим обратный к  $x \cdot 0$  к обеим частям и получим, что  $x \cdot 0 = 0$ .

Еще обратите внимание, что для нулевого кольца выполняются все аксиомы поля, кроме последней седьмой. По сути эта аксиома нужна для того, чтобы исключить из списка полей нулевое кольцо.

2. Целые числа с обычными сложением и умножением  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  являются коммутативным кольцом.
3. Кольцо матриц с матричными сложением и умножением  $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  является кольцом.
4. Вещественные числа с обычными сложением и умножением  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  являются полем.
5. Множество остатков по модулю натурального числа  $n$  с операциями сложения и умножения по модулю  $n$   $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  является коммутативным кольцом.
6. Если в предыдущем примере модуль  $p$  является простым, то кольцо  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  является полем. Давайте поясним это. Ясно, что  $\mathbb{Z}_p$  коммутативное кольцо, в котором  $1 \neq 0$ . Потому надо лишь проверить аксиому (6). Для этого возьмем  $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ , то есть  $1 \leq a < p$ . Так как число  $p$  простое, последнее означает, что  $a$  и  $p$  взаимно просты. А значит по расширенному алгоритму Евклида найдутся такие  $u, v \in \mathbb{Z}$ , что  $ua + vp = 1$ . Теперь рассмотрим последнее равенство по модулю  $p$  и получим  $ua = 1 \pmod{p}$ . Что и означает обратимость элемента  $a$ .
7. Пусть  $A$  – некоторое коммутативное кольцо и  $x$  – переменная. Тогда,  $A[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in A\}$  – множество всех многочленов с коэффициентами из  $A$ . Множество  $A[x]$  с обычными операциями сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом.

*Замечание 58.* Если нам дано кольцо  $R$ , то в нем выполняются некоторые естественные свойства, которые не включены в список аксиом, но которые полезно знать. Я хочу здесь привести небольшой список тех свойств, которые полезно иметь в виду:

1. Для любого элемента  $x \in R$  выполнено  $0x = x0 = 0$ .
2. Для любых элементов  $x, y \in R$  выполнено  $x - (-y) = x + y$ .
3. Для любого элемента  $x \in R$  выполнено  $(-1)x = -x$ .
4. Для любых обратимых элементов  $x, y \in R$  выполнено  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .

**Определение 59.** Пусть  $R$  – кольцо. Я собираюсь определить понятие подкольца  $T \subseteq R$ .

• **Данные:**

1. Подмножество  $T \subseteq R$ .

• **Аксиомы:**

1.  $(T, +) \subseteq (R, +)$  является подгруппой.
2.  $T$  замкнуто относительно умножения.
3.  $T$  содержит 1.

*Примеры 60.* 1. Множество целых чисел  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  является подкольцом в поле вещественных чисел.

2. Верхнетреугольные матрицы являются подкольцом в кольце квадратных матриц.
3. Скалярные матрицы являются подкольцом кольца квадратных матриц.

## 4.2 Элементы кольца

Существуют разные подходы к изучению колец. Самый простой – поэлементный, то есть мы смотрим на то какого сорта элементы присутствуют в кольце. Давайте разберем, какие интересные классы элементов имеются.

**Определение 61.** Пусть  $R$  – некоторое кольцо и  $x \in R$ .

- Элемент  $x$  называется обратимым, если он обратим относительно операции умножения, то есть  $y \in R$  такой, что  $xy = yx = 1$ . В этом случае  $y$  обозначается  $x^{-1}$ . Множество всех обратимых элементов в кольце  $R$  обозначается  $R^*$ .
- Элемент  $x$  называется левым делителем нуля, если найдется ненулевой элемент  $y \in R$  такой, что  $xy = 0$ . Аналогично,  $x$  называется правым делителем нуля, если найдется ненулевой  $y \in R$  такой, что  $yx = 0$ . Множество левых и правых делителей нуля обозначается  $D_l(R)$  и  $D_r(R)$  соответственно. Множество всех делителей нуля это  $D(R) = D_l(R) \cup D_r(R)$ .
- Элемент  $x$  называется нильпотентом, если  $x^n = 0$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Множество всех нильпотентов кольца  $R$  будем обозначать  $\text{nil}(R)$ .
- Элемент  $x$  называется идемпотентом если  $x^2 = x$ . Множество всех идемпотентов кольца  $R$  обозначается  $E(R)$ .

*Примеры 62.* 1. Пусть  $R = \mathbb{Z}$  – кольцо целых чисел. Тогда,  $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ ,  $D(\mathbb{Z}) = 0$ ,  $\text{nil}(\mathbb{Z}) = 0$ ,  $E(\mathbb{Z}) = \{1, 0\}$ .  
2. Пусть  $R = \mathbb{R}$  – поле вещественных чисел. Тогда,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $D(\mathbb{R}) = 0$ ,  $\text{nil}(\mathbb{R}) = 0$ ,  $E(\mathbb{R}) = \{1, 0\}$ .  
3. Пусть  $R = M_n(\mathbb{R})$  – кольцо квадратных матриц. Тогда,  $M_n(\mathbb{R})^* = GL_n(\mathbb{R})$ ,  $D(M_n(\mathbb{R}))$  – множество вырожденных матриц,  $\text{nil}(M_n(\mathbb{R}))$  является множеством матриц с нулевыми комплексными собственными значениями,  $E(M_n(\mathbb{R}))$  – множество проекторов, оно описывается как множество матриц вида  $C^{-1}DC$ , где  $D$  диагональная с элементами 1 и 0 на диагонали.  
4. Пусть  $R = \mathbb{Z}_n$  и  $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ , где  $p_i$  – различные простые числа и  $k_i > 0$ . Тогда,  $\mathbb{Z}_n^* = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$ ,  $D(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) \neq 1\}$ ,  $\text{nil}(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid p_1 | k, \dots, p_r | k\}$ . По Китайской теореме об остатках, существуют числа  $e_i \in \mathbb{Z}_n$  такие, что  $e_i = 1 \pmod{p_i^{k_i}}$  и  $e_i = 0 \pmod{p_j^{k_j}}$  если  $j \neq i$ . Тогда,  $E(\mathbb{Z}_n)$  состоит из всех сумм вид  $\sum_t e_{i_t}$ . Пустая сумма соответствует нулю, а сумма всех – единице.

## 4.3 Идеалы

Другой подход к изучению колец заключается в изучении специальных подмножеств кольца. К таким подмножествам относятся подкольца, которые мы уже определили, и идеалы. Давайте разберемся с понятием идеала.

**Определение 63.** Пусть  $(R, +, \cdot)$  – кольцо. Я собираюсь определить идеал  $I$  в кольце  $R$ .

- **Данные:**

1. Подмножество  $I \subseteq R$ .

- **Аксиомы:**

1.  $(I, +) \subseteq (R, +)$  – подгруппа.
2. для любого  $r \in R$  выполнено

$$rI = \{rx \mid x \in I\} \subseteq I \quad \text{и} \quad Ir = \{xr \mid x \in I\} \subseteq I$$

В этом случае говорят, что  $I$  – идеал в  $R$ . Подмножества 0 и  $R$  всегда являются идеалами и называются тривиальными идеалами кольца  $R$ .

Если выполняется первая аксиома и условие  $rI = \{rx \mid x \in I\}$  для любого  $r \in R$ , то говорят, что  $I$  левый идеал. Аналогично, если выполняется первая аксиома и условие  $Ir = \{xr \mid x \in I\}$ , то говорят, что  $I$  – правый идеал. В коммутативных кольцах нет разницы между левыми и правыми идеалами.

Стоит отметить, что в некоммутативном кольце не достаточно проверять только одно включение из двух  $rI \subseteq I$  и  $Ir \subseteq I$ .

**Утверждение 64.** Пусть  $R = \mathbb{Z}$ , тогда все идеалы имеют вид  $n\mathbb{Z}$  для некоторого неотрицательного  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Пусть  $I \subseteq \mathbb{Z}$  – некоторый идеал. Тогда  $(I, +)$  как минимум является подгруппой в  $(\mathbb{Z}, +)$ . По утверждению 24, мы уже знаем, что  $I = n\mathbb{Z}$  для некоторого неотрицательного  $n \in \mathbb{Z}$ . С другой стороны, возьмем произвольную подгруппу  $I = n\mathbb{Z}$  и число  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда,

$$kI = \{kx \mid x \in n\mathbb{Z}\} = \{knt \mid t \in \mathbb{Z}\} = kn\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$$

То есть любая подгруппа по сложению является идеалом. □

**Утверждение 65.** Пусть  $R = \mathbb{Z}_n$ , тогда любой идеал единственным образом представляется в виде  $k\mathbb{Z}_n$  для некоторого  $k|n$ .

*Доказательство.* Прежде всего давайте покажем, что множество  $k\mathbb{Z}_n$  является идеалом. По утверждению 25,  $k\mathbb{Z}_n$  – подгруппа по сложению в  $\mathbb{Z}_n$ . Потому мы только должны показать, что для любого  $a \in \mathbb{Z}_n$  и любого  $x \in k\mathbb{Z}_n$  их произведение  $ax \pmod n$  тоже в  $k\mathbb{Z}_n$ . Положим  $ax = r \pmod n$ . Тогда  $ax = qn + r$ . Так как  $k|x$  и  $k|n$ , то  $r$  делит  $k$ . Последнее означает, что  $r$  принадлежит  $k\mathbb{Z}_n$  и все доказано.

В обратную сторону, пусть  $I \subseteq \mathbb{Z}_n$  – некоторый идеал. Тогда как минимум он является подгруппой в  $\mathbb{Z}_n$  по сложению. По утверждению 25, любая подгруппа по сложению в  $\mathbb{Z}_n$  имеет вид  $k\mathbb{Z}_n$  для некоторого  $k|n$ , и все доказано. □

## 4.4 Гомоморфизмы и кольца

Мы использовали понятие гомоморфизма групп чтобы «сравнивать» разные группы, а понятие изоморфизма позволяло нам сказать, что две группы одинаковые. Давайте распространим эти определения на случай колец.

**Определение 66.** Пусть  $(R, +, \cdot)$  и  $(S, +, \cdot)$  – кольца. Я собираюсь определить гомоморфизм колец  $\phi: R \rightarrow S$ .

- **Данные:**

1. Отображение  $\phi: R \rightarrow S$ .

- **Аксиомы:**

1.  $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$  для всех  $a, b \in R$ .
2.  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  для всех  $a, b \in R$ .
3.  $\phi(1) = 1$ .

В этом случае будем говорить, что  $\phi$  – гомоморфизм из кольца  $R$  в кольцо  $S$ . Если дополнительно мы имеем

4.  $\phi$  биективно

тогда  $\phi$  называется изоморфизмом. В этом случае кольца  $R$  и  $S$  называются изоморфными.

Хочу сделать замечание, что это не самое общее определение гомоморфизма колец, но именно оно подходит для наших нужд больше всего.

*Замечания 67.* 1. Отметим, что если  $\phi: R \rightarrow S$  – гомоморфизм колец, то как минимум  $\phi: (R, +) \rightarrow (S, +)$  является гомоморфизмом абелевых групп. В частности,  $\phi(0) = 0$  и  $\phi(-a) = -\phi(a)$  по утверждению 39.

2. Если  $R$  и  $S$  – изоморфные кольца, то это по сути означает, что кольца  $R$  и  $S$  одинаковые. Мы уже обсуждали как понимать изоморфизм в случае групп (см. обсуждение после определения 40). Кратко изоморфизм можно рассматривать как правило переименования элементов  $R$  в имена элементов  $S$  и при этом переименовании сложение и умножение на  $R$  превращается в сложение и умножение на  $S$ . Изоморфные кольца имеют одинаковые свойства.

*Примеры 68.* 1. Отображение  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  по правилу  $k \mapsto k \pmod n$  является гомоморфизмом колец.

2. Отображение  $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  по правилу  $\lambda \mapsto \lambda E$ , где  $E$  – единичная матрица, является гомоморфизмом колец.

3. Отображение  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  по правилу  $f(x) \mapsto f(i)$ , где  $i^2 = -1$ , является гомоморфизмом колец.
4. Отображение  $\mathbb{C} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  по правилу  $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  является гомоморфизмом колец.

**Утверждение 69** (Китайская теорема об остатках). Пусть  $n$  и  $m$  – взаимно простые натуральные числа, то есть  $(n, m) = 1$ . Тогда отображение

$$\Phi: \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \quad k \mapsto (k \bmod m, k \bmod n)$$

является изоморфизмом колец.

*Доказательство.* По сути мы это уже с вами доказали, только не осознали этого. Мы уже знаем, что  $\Phi: (\mathbb{Z}_{mn}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$  является изоморфизмом абелевых групп по утверждению 48. Кроме того, мы уже проверили, что  $\Phi$  сохраняет умножение и единицу при доказательстве утверждения 52. А это ровно то, что надо было сделать для доказательства этого утверждения.  $\square$

**Определение 70.** Пусть  $\phi: R \rightarrow S$  – гомоморфизм колец. Тогда

- Ядро  $\phi$  – это  $\ker \phi = \{r \in R \mid \phi(r) = 0\} \subseteq R$ .
- Образ  $\phi$  – это  $\operatorname{Im} \phi = \{\phi(r) \mid r \in R\} = \phi(R) \subseteq S$ .

**Утверждение 71.** Пусть  $\phi: R \rightarrow S$  – гомоморфизм колец. Тогда

1.  $\operatorname{Im} \phi \subseteq S$  – подкольцо.
2.  $\ker \phi \subseteq R$  – идеал.
3. Отображение  $\phi$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Im} \phi = S$ .
4. Отображение  $\phi$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\ker \phi = \{0\}$ .

*Доказательство.* 1) Мы уже знаем, что  $\operatorname{Im} \phi$  является аддитивной подгруппой в  $(S, +)$  по утверждению 43. По определению гомоморфизма  $1 = \phi(1) \in \operatorname{Im} \phi$ . Значит осталось лишь показать, что образ замкнут относительно умножения. Действительно, если  $x, y \in \operatorname{Im} \phi$ , тогда  $x = \phi(a)$  и  $y = \phi(b)$  для некоторых  $a, b \in R$ . Тогда,

$$xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \in \operatorname{Im} \phi$$

2) Мы уже знаем, что  $\ker \phi$  является подгруппой в  $(R, +)$  по утверждению 43. Значит нам лишь надо показать, что она устойчива по умножению на любой элемент кольца  $R$ . Пусть  $x \in \ker \phi$  и  $r \in R$ , мы должны показать, что  $rx, xr \in \ker \phi$ , то есть  $\phi(rx) = 0$  и  $\phi(xr) = 0$ . Действительно,  $\phi(rx) = \phi(r)\phi(x) = \phi(r)0 = 0$  и аналогично  $\phi(xr) = 0$ .

3) Этот пункт выполнен по определению.

4) Так как  $\phi: (R, +) \rightarrow (S, +)$  – гомоморфизм групп, то результат следует из утверждения 43.  $\square$

## 5 Многочлены от одной переменной

### 5.1 Определение

Пусть  $F$  – поле. Многочлен  $f$  от переменной  $x$  – это картинка следующего вида

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad \text{где } a_i \in F$$

Здесь операции  $+$  и  $\cdot$  – это просто символы. Таким образом мы берем какие-то элементы  $a_i$  из поля  $F$  и составляем строку символов на листе бумаги как выше. Формально многочлен – это просто последовательность его коэффициентов  $(a_0, \dots, a_n)$ . Мы так же можем считать, что у такого многочлена есть коэффициенты  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  и они все равны нулю. То есть можно считать, что у многочлена счетное число коэффициентов, но только конечное число из этих коэффициентов не равно нулю. Эта точка зрения очень удобна, особенно когда надо писать какие-то формулы в общем виде.

Пусть у нас заданы два многочлена

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ и } g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

мы скажем, что многочлены  $f$  и  $g$  равны, если  $a_k = b_k$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .<sup>10</sup> Мы можем складывать и умножать многочлены используя следующие правила

$$f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{и} \quad g = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

$$f + g = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k \quad fg = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{u+v=k} a_u b_v \right) x^k$$

Множество всех многочленов с коэффициентами в  $F$  от переменной  $x$  обозначается через  $F[x]$ . Прямая проверка показывает, что  $F[x]$  с операциями сложения и умножения образуют коммутативное кольцо.

**Замечание 72.** Давайте сделаем одно важное замечание. Каждый многочлен  $f \in F[x]$  определяет функцию  $\hat{f}: F \rightarrow F$  по правилу  $a \mapsto f(a)$ . А именно, если  $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , то  $f(a) = a_0 + a_1 a + \dots + a_n a^n$ . Однако, в общем случае  $f$  не определяется однозначно полученной функцией  $\hat{f}$ . Действительно, предположим  $F = \mathbb{Z}_2$ . Тогда многочлены  $f_n = x^n$  определяют одну и ту же функцию  $\hat{f}_n: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  отправляющую  $0 \mapsto 0$  и  $1 \mapsto 1$ . Так что все полиномы  $f_n$  различны, но определяют одну и ту же функцию. Этот пример объясняет почему мы дали такое странное определение многочленам. Мы хотим, чтобы многочлен однозначно определялся именно своими коэффициентами, а для этого на них надо смотреть как на формальные картинки, а не как на функции. Такой формальный подход не мешает при этом по каждому многочлену построить функцию.

Если  $f \in F[x]$  представлен в виде  $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , где  $a_n \neq 0$ , то есть  $n$  – старший индекс с ненулевым коэффициентом в  $f$ . Тогда  $n$  называется степенью многочлена  $f$  и обозначается  $\deg f$ . Коэффициент  $a_n$  называется старшим коэффициентом многочлена. Степень нулевого многочлена надо определить отдельно, так как в нем нет ненулевых коэффициентов. Мы будем предполагать, что  $\deg(0) = -\infty$ . Многочлен  $f \in F[x]$  принадлежит полю  $F$  тогда и только тогда, когда  $\deg(f) \leq 0$ , при этом  $f$  ненулевая константа тогда и только тогда, когда  $\deg f = 0$ .<sup>11</sup>

**Утверждение 73.** Пусть  $F$  – поле. Тогда для любых  $f, g \in F[x]$ , имеем  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ .<sup>12</sup>

*Доказательство.* Если хотя бы один из многочленов нулевой, обе части равенства содержат  $-\infty$  и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что  $f$  и  $g$  ненулевые. Пусть

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

такие, что  $a_n \neq 0$  и  $b_m \neq 0$ . Тогда

$$fg = a_n b_m x^{m+n} + h(x)$$

где  $\deg h < m + n$ . Так как  $F$  – поле,  $a_n b_m \neq 0$ . Значит  $\deg fg = n + m = \deg f + \deg g$ . □

**Утверждение 74.** Пусть  $F$  – поле. Единственный делитель нуля в  $F[x]$  – нулевой многочлен.

*Доказательство.* Если  $f, g \in F[x]$ ,  $f \neq 0$ , и  $g \neq 0$ , тогда  $\deg(f) \geq 0$  и  $\deg(g) \geq 0$ . Значит  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq 0$ . В частности  $fg \neq 0$ . □

**Утверждение 75.** Пусть  $F$  – поле. Многочлен  $f \in F[x]$  обратим тогда и только тогда, когда  $f \in F^*$ .

*Доказательство.* Если  $f$  обратим, то  $fg = 1$  для некоторого  $g \in F[x]$ . Тогда,  $0 = \deg(1) = \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ . Так как степени ненулевых многочленов неотрицательны, отсюда следует, что  $\deg(f) = \deg(g) = 0$ . Последнее означает, что  $f$  и  $g$  ненулевые константы. □

## 5.2 Алгоритм Евклида

Если  $F$  – некоторое поле, то в кольце  $F[x]$  определено деление с остатком. Если  $f, g \in F[x]$  и  $g \neq 0$ , то мы можем разделить  $f$  на  $g$  с остатком. Последнее означает, что существуют единственные  $q, r \in F[x]$  такие, что  $f = qg + r$  и  $\deg(r) < \deg(g)$ . Многочлен  $q$  называется частным, а  $r$  остатком.

Предположим  $f, g \in F[x]$ , будем говорить, что  $f$  делит  $g$ , если  $g = fh$  для некоторого  $h \in F[x]$ . Стоит отметить, что любой многочлен делит 0. Так же, если  $a \in F^*$ , то  $f$  делит  $af$  и наоборот, так как  $F$  – поле.

<sup>10</sup>Здесь я использую замечание про степени многочленов, то есть предполагаю что  $a_k = 0$  для  $k > n$  и аналогично  $b_k = 0$  для  $k > m$ .

<sup>11</sup>Здесь под константой понимается элемент поля  $F$ .

<sup>12</sup>Тут мы придерживаемся правила, что  $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$ .

**Определение 76.** Пусть  $F$  – поле. Многочлен  $f \in F[x]$  называется унитарным, если его старший коэффициент равен единице 1.

**Определение 77.** Пусть  $F$  – поле и  $f, g \in F[x]$  – некоторые многочлены. Многочлен  $d \in F[x]$  называется наибольшим общим делителем  $f$  и  $g$ , если

1.  $d$  делит и  $f$  и  $g$ .
2. если  $h$  делит одновременно  $f$  и  $g$ , то  $h$  делит  $d$ .
3.  $d$  унитарный если не равен нулю.

**Утверждение 78.** Пусть  $F$  – поле и  $I \subseteq F[x]$  – некоторый идеал. Тогда  $I = fF[x] = \{fh \mid h \in F[x]\}$  для некоторого  $f \in F[x]$ .

*Доказательство.* Если  $I$  состоит только из нулевого многочлена, то  $I = 0F[x]$ . Пусть теперь  $f \in I$  – ненулевой многочлен минимальной степени в  $I$ . Возьмем произвольный  $h \in I$  и разделим  $h$  с остатком на  $f$ , получим  $h = qf + r$ , где  $\deg r < \deg f$ . Тогда,  $r = h - qf \in I$  и имеет меньшую степень, чем  $f$ . Так как  $f$  ненулевой многочлен минимальной степени в  $I$ , то  $r$  обязан быть нулевым. А это означает, что все многочлены из  $I$  делятся на  $f$ , что и требовалось.  $\square$

Небольшое замечание по поводу обозначений. Идеал  $fF[x]$  обычно обозначается  $(f)$  для краткости.

**Утверждение 79.** Пусть  $F$  – некоторое поле и  $f, g \in F[x]$ . Тогда

1. Существует наибольший общий делитель  $d$  многочленов  $f$  и  $g$ . Кроме того, существуют такие многочлены  $u, v \in F[x]$ , что  $d = uf + vg$ .
2. Наибольший общий делитель  $f$  и  $g$  единственный.

*Доказательство.* (1) Рассмотрим следующее множество многочленов

$$I = \{af + bg \mid a, b \in F[x]\} \subseteq F[x]$$

Это подмножество является идеалом в  $F[x]$ . По утверждению 78, найдется унитарный многочлен  $r \in I$  такой, что  $I = rF[x]$ . Так как  $r \in I$ , то  $r = uf + vg$  для некоторых  $u, v \in F[x]$ . Из того, что  $f, g \in I = rF[x]$  следует, что  $f = sr$  и  $g = tr$  для некоторых  $s, t \in F[x]$ .

Теперь давайте докажем, что  $r$  является наибольшим общим делителем. Равенства  $f = sr$  и  $g = tr$  означают, что  $r$  делит  $f$  и  $g$ , то есть  $r$  – общий делитель. Пусть теперь  $h$  делит  $f$  и  $g$ , тогда  $h$  делит оба слагаемых в правой части следующего равенства  $r = uf + vg$ . Значит  $h$  делит  $r$ . Мы проверили, что все свойства наибольшего общего делителя выполнены для  $r$ .

(2) Предположим, что у нас есть два наибольших общих делителя  $d_1$  и  $d_2$ . Тогда  $d_1$  делит  $d_2$  потому что  $d_2$  – наибольший общий делитель. И наоборот,  $d_2$  делит  $d_1$ , потому что  $d_1$  – наибольший общий делитель. Значит

$$d_1 = ad_2 \quad d_2 = bd_1$$

В частности,  $d_1 = abd_1$ . Значит,  $d_1(1 - ab) = 0$  в кольце  $F[x]$ . Но в кольце  $F[x]$  нет ненулевых делителей нуля по утверждению 74. Значит  $1 - ab = 0$  и потому  $1 = ab$ . Следовательно  $a$  и  $b$  – обратимые элементы поля  $F$ .  $\square$

*Замечания 80.* • я хочу явно проговорить некоторые крайние случаи в определении наибольшего общего делителя. Например, если  $f = g = 0$ , то наибольший общий делитель будет 0. Действительно, в этом случае любой многочлен делит  $f$  и  $g$ . А 0 – это делитель  $f$  и  $g$  делимый всеми многочленами.

- Если  $f \neq 0$  и  $g = 0$ , тогда наибольший общий делитель – это  $f$  с нормализованным старшим коэффициентом, потому что в этом случае  $f$  делит  $g$ .

**Утверждение 81.** Пусть  $F$  – поле и  $f, g, h \in F[x]$  – некоторые многочлены. Тогда  $(f, g) = (f, g - hf)$ .

*Доказательство.* Действительно, множество делителей у пары  $\{f, g\}$  такое же, как и у пары  $\{f, g - hf\}$ . В частности максимальные элементы (относительно порядка делимости) тоже совпадают, то есть совпадают наибольшие общие делители.  $\square$

Последнее утверждение позволяет нам считать наибольший общий делитель эффективно с помощью алгоритма Евклида.

**Дано:** Два многочлена  $f, g \in F[x]$ . Здесь  $F$  – поле.

**Результат:** Наибольший общий делитель  $d \in F[x]$  многочленов  $f$  и  $g$ .

**Алгоритм** Используются две временные переменные  $u, v \in F[x]$ .

1. Инициализируем  $u = f, v = g$  в случае  $\deg f \geq \deg g$  и  $u = g, v = f$  в противном случае.
2. Пока  $v \neq 0$  выполняем следующее:
  - (a) Делим  $u$  на  $v$  с остатком  $u = qv + r$ .
  - (b) делаем замену  $u = v, v = r$ .
3. Когда  $v = 0$ ,  $u$  становится наибольшим общим делителем  $f$  и  $g$ .

### 5.3 Однозначное разложение на множители

**Определение 82.** • Многочлен  $f \in F[x] \setminus F$  называется приводимым если существуют многочлены  $g, h \in F[x]$  такие, что  $f = gh$ ,  $0 < \deg(g) < \deg(f)$  и  $0 < \deg(h) < \deg(f)$ .

- Многочлен  $f \in F[x] \setminus F$  называется неприводимым, если для любых  $g, h \in F[x]$  таких, что  $f = gh$ , либо  $g$  либо  $h$  является ненулевой константой.

Надо отметить, что все ненулевые многочлены быются на три класса: 1) обратимые многочлены, то есть  $F^*$ , 2) приводимые многочлены, 3) неприводимые многочлены.

**Утверждение 83 (UFD).** Пусть  $F$  – поле. Тогда каждый элемент  $f \in F[x] \setminus F$  представляется в форме  $f = ap_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ , где  $a \in F$  – ненулевая константа,  $k_i$  – положительные целые числа, и  $p_i$  – различные унитарные неприводимые многочлены. При этом такое представление единственное с точностью до перестановки множителей.

Я не очень хочу доказывать это утверждение, доказательство для многочленов полностью повторяет доказательство для целых чисел. Ключевым техническим утверждением является утверждение 79, а именно нам важно, что наибольший общий делитель можно представить в виде линейной комбинации исходных многочленов. Тем не менее, я хочу доказать следующий частный случай общего результата.

**Утверждение 84.** Пусть  $F$  – поле,  $f, g \in F[x]$  – два взаимно простых многочлена и  $h \in F[x]$  делится на  $f$  и на  $g$ . Тогда,  $h$  делится на  $fg$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  и  $g$  взаимно просты, то  $1 = uf + vg$  для некоторых  $u, v \in F[x]$  по утверждению 79 пункт (1). Умножая это равенство на  $h$  получим  $h = uhf + vhg$ . Так как  $g$  делит  $h$ ,  $gf$  делит  $uhf$ . Так как  $f$  делит  $h$ ,  $fg$  делит  $vhg$ . Значит,  $fg$  делит  $h$ .  $\square$

### 5.4 Кольцо остатков

Теперь мы готовы познакомиться с очень важной конструкцией в алгебре – кольцо полиномиальных остатков.

Пусть  $F$  – поле и  $f \in F[x]$  – некоторый многочлен. Я собираюсь определить кольцо  $F[x]/(f)$ . Чтобы определить кольцо, я должен определить множество и две операции на нем – сложение и умножение. А после этого надо проверить все необходимые аксиомы кольца. Начнем с тривиального случая. Пусть  $f = 0$ , тогда по определению  $F[x]/(f)$  – это кольцо многочленов  $F[x]$  с обычными операциями. Теперь интересный случай, когда  $f \neq 0$ :

- $F[x]/(f) = \{g \in F[x] \mid \deg g < \deg f\}$  – множество остатков от деления на многочлен  $f$ .
- $+: F[x]/(f) \times F[x]/(f) \rightarrow F[x]/(f)$  – обычное сложение многочленов.
- $\cdot: F[x]/(f) \times F[x]/(f) \rightarrow F[x]/(f)$  – умножение по модулю многочлена  $f$ , а именно: для любых  $g, h \in F[x]/(f)$ , мы определяем умножение, как  $gh \pmod{f}$ . Последнее означает, что мы должны в начале посчитать обычное произведение многочленов  $gh$ , а потом найти остаток от деления на  $f$ , то есть  $gh = qf + r$ . В этом случае произведением  $g$  и  $h$  является  $r$ .



**Утверждение 85.** Если  $F$  – поле и  $f \in F[x]$  – некоторый многочлен, тогда множество  $F[x]/(f)$  с введенными на нем операциями является коммутативным кольцом.

*Доказательство.* Если  $f = 0$ , это ясно, так как  $F[x]/(f) = F[x]$  по определению. Предположим, что  $f \neq 0$ . Множество  $F[x]/(f) = \{g \in F[x] \mid \deg g < \deg f\}$  с операцией сложения является абелевой группой, так как это подгруппа в  $(F[x], +)$ .

Теперь мы должны показать: 1) дистрибутивный закон, 2) ассоциативность умножения, 3) существование нейтрального элемента по умножению, 4) коммутативность умножения.

1) Если  $g, h, p \in F[x]/(f)$ , нам надо показать, что

$$(g + h)p \bmod f = gp \bmod f + hp \bmod f \quad \text{and} \quad g(h + p) \bmod f = gh \bmod f + gp \bmod f$$

Мы покажем первое равенство. Второе будет следовать из коммутативности. Давайте разделим  $gp$  и  $hp$  на  $f$  с остатком и получим

$$gp = q_1f + r_1, \deg r_1 < \deg f, \text{ и } hp = q_2f + r_2, \deg r_2 < \deg f$$

Теперь, правая часть по определению совпадает с  $r_1 + r_2$ . С другой стороны, выражение

$$(g + h)p = (q_1 + q_2)f + r_1 + r_2$$

является делением  $(g + h)p$  на  $f$  с остатком равным  $r_1 + r_2$ . Следовательно, левая часть равна тому же самому.

2) Если  $g, h, p \in F[x]/(f)$ , тогда

$$(g \cdot (h \cdot p \bmod f)) \bmod f = (g \cdot h \cdot p) \bmod f = ((g \cdot h \bmod f) \cdot p) \bmod f$$

Я позволю себе оставить эту проверку читателю, как упражнение в абстрактной чепухе.

3) Многочлен 1 является нейтральным элементом по умножению.

4) Коммутативность произведения по модулю  $f$  следует из его определения.  $\square$

*Замечания 86.* • Обратите внимание, хотя мы можем рассматривать  $F[x]/(f)$  как подмножество в  $F[x]$  (даже как абелеву подгруппу по сложению), однако, так делать не следует. Основная причина в том, что это вложение не согласовано с умножением (когда  $f \neq 0$ ). Последнее означает, что  $F[x]/(f)$  НЕ является подкольцом в  $F[x]$ .

• Отображение  $F[x] \rightarrow F[x]/(f)$  по правилу  $g \mapsto g \bmod f$  является сюръективным гомоморфизмом.

А вот еще одна версия Китайской теоремы об остатках, только теперь для кольца полиномиальных остатков.

**Утверждение 87** (Китайская теорема об остатках). Пусть  $f, g \in F[x]$  – два взаимно простых многочлена, то есть  $(f, g) = 1$ . Тогда отображение

$$\Phi: F[x]/(fg) \rightarrow F[x]/(f) \times F[x]/(g) \quad h \mapsto (h \bmod f, h \bmod g)$$

является изоморфизмом колец.

*Доказательство.* В начале проверим, что отображение является гомоморфизмом колец. Мы должны показать, что оно сохраняет сложение, умножение и единицу кольца. Это делается прямым вычислением и я позволю себе пропустить это вычисление.

Теперь покажем, что отображение инъективно. По утверждению 71 достаточно проверить, что ядро  $\Phi$  состоит только из нуля. Предположим  $h \in \ker \Phi$ . Это значит, что  $h = 0 \pmod{f}$  и  $h = 0 \pmod{g}$ , то есть  $h$  делится на  $f$  и  $g$ . Так как  $f$  и  $g$  взаимно просто, последнее означает, что  $h$  делится на  $fg$ . Но  $\deg h < \deg fg$ . Значит такое может быть только если  $h = 0$ .

Теперь мы хотим показать сюръективность. Так как  $F$  – поле, мы можем рассматривать  $F[x]/(fg)$  и  $F[x]/(f) \times F[x]/(g)$  как векторные пространства над  $F$ . Кроме того,  $\Phi$  является линейным отображением потому что по определению  $\Phi(\lambda) = \lambda$  и значит  $\Phi(\lambda f) = \Phi(\lambda)\Phi(f) = \lambda\Phi(f)$ . Так как  $\Phi$  инъективно, то для доказательства сюръективности достаточно показать, что оба пространства имеют одинаковую размерность. Ясно, что размерность  $\dim_F F[x]/(fg) = \deg(fg)$ . С другой стороны, с точки зрения векторных пространств  $F[x]/(f) \times F[x]/(g)$  является прямой суммой  $F[x]/(f)$  и  $F[x]/(g)$ . А значит размерность  $F[x]/(f) \times F[x]/(g)$  совпадает с  $\deg f + \deg g$ . Теперь результат следует из утверждения 73.  $\square$

**Утверждение 88.** Пусть  $F$  – поле,  $f \in F[x]$  – многочлен и  $I \subseteq F[x]/(f)$  – некоторый идеал. Тогда существует многочлен  $g \in F[x]$  делящий  $f$  такой, что  $I = (g) = \{gh \bmod f \mid h \in F[x]\}$ .

*Доказательство.* Случай  $f = 0$  разобран в утверждении 78. Теперь мы предположим, что  $f \neq 0$ . Если  $I$  состоит только из нулей, то  $I = (f)$  и все доказано.

Пусть  $h \in I$  – ненулевой многочлен минимально возможной степени в  $I$ . Тогда для любого  $g \in I$ , разделим  $g$  на  $h$  с остатком и получим  $g = qh + r$  где  $\deg r < \deg h$ . Также  $r = g - qh \in I$ . Так как  $h$  был ненулевым многочленом минимально возможной степени в  $I$ , такое может быть только если  $r = 0$ . Значит  $h$  делит любой  $g \in I$ . последнее означает, что  $I = (h)$ .

Теперь мы должны показать, что  $h$  делит  $f$ . Давайте разделим  $f$  на  $h$  с остатком, получим  $f = qh + r$ , где  $\deg r < \deg h$ . Это означает, что  $r = -qh$  в кольце  $F[x]/(f)$ . В частности  $r \in I$  и имеет степень меньше, чем  $h$ . Такое возможно только если  $r = 0$ , что завершает доказательство.  $\square$

## 6 Поля

### 6.1 Характеристика

**Определение 89.** Пусть  $F$  – поле. Характеристика поля  $F$  – это такое минимальное натуральное число  $p$ , что

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$$

Если такого числа  $p$  нет, то говорят, что характеристика равна нулю. Характеристика поля  $F$  обозначается через  $\text{char } F$ .

Давайте я введу удобное обозначение, если мы хотим сложить элемент  $x \in F$   $n$  раз сам с собой, где  $n \in \mathbb{N}$ , то мы можем обозначить эту сумму следующим образом

$$nx = \underbrace{x + \dots + x}_n$$

То есть мы можем говорить об умножении на натуральное число в поле. В частности, характеристика поля  $F$  – это такое наименьшее положительное число  $p$ , что  $p \cdot 1 = 0$  если оно существует, и равна нулю если такого числа нет.

*Примеры 90.* 1. Если  $F = \mathbb{Q}$ , тогда сумма  $1 + \dots + 1$  никогда не равна нулю. Значит,  $\text{char } \mathbb{Q} = 0$ .

2. Если  $F = \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  – простое число, то  $p$  является наименьшим положительным числом таким, что  $1 + \dots + 1 = p \cdot 1 = 0$  в  $\mathbb{Z}_p$ . Значит,  $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$ .

**Утверждение 91.** Если  $F$  – поле, то  $\text{char } F$  либо равна нулю, либо простое число.

*Доказательство.* Предположим характеристика не ноль. Пусть  $\text{char } F = p = nm$  не простое. Тогда

$$0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{nm} = (\underbrace{1 + \dots + 1}_n)(\underbrace{1 + \dots + 1}_m) = (n \cdot 1)(m \cdot 1)$$

Кроме того, числа  $n \cdot 1$  и  $m \cdot 1$  не равны нулю, так как  $p = nm$  было минимальным зануляющим единицу по определению. С другой стороны, мы получили, что произведение  $n \cdot 1$  и  $m \cdot 1$  – ноль. Это противоречит отсутствию ненулевых делителей нуля в поле  $F$ .  $\square$

*Замечание 92.* Пусть  $F$  – поле. У нас есть единственный гомоморфизм колец  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow F$ , который действует по правилу  $n \mapsto n \cdot 1$ . Ядро этого гомоморфизма является идеалом в  $\mathbb{Z}$ . Каждый идеал в кольце целых чисел имеет вид  $(p)$  для некоторого неотрицательного числа  $p$  (см. утверждение 64). В этом случае  $p$  есть ни что иное как характеристика поля  $F$ . Это объясняет связь характеристики с идеалами в кольце целых чисел.

**Утверждение 93.** Пусть  $R$  – коммутативное кольцо. Тогда  $R$  является полем тогда и только тогда, когда в нем только два идеала  $0$  и  $R$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $R$  является полем и  $I \subseteq R$  – некоторый идеал. Если  $I = 0$ , то доказывать нечего. Мы можем предположить, что  $I$  содержит ненулевой элемент и должны доказать, что в этом случае  $I = R$ . Пусть  $x \in I$  – ненулевой элемент. Так как  $R$  – поле, то существует  $x^{-1} \in R$ . Так как  $I$  идеал, то  $1 = x^{-1}x \in I$ . А значит, для любого  $y \in R$ , элемент  $y = y1 \in I$ .

Теперь предположим, что  $R$  содержит только два идеала  $0$  и  $R$ . Пусть  $x \in R$  – ненулевой элемент. Тогда множество  $I = \{rx \mid r \in R\}$  является идеалом в  $R$ .<sup>13</sup> Так как у нас только два идеала  $0$  и  $R$ , то  $I$  должен быть одним из них. Так как  $I$  содержит ненулевой элемент, то он обязан совпасть с  $R$ . В частности  $1 \in I$ , то есть  $1 = rx$  для некоторого  $r \in R$ . А так как  $R$  коммутативно, то  $x$  обратим и все доказано.  $\square$

Предыдущее утверждение показывает, что мы должны изучать поля в терминах элементов, так как идеалы не дают о полях никакой информации. С другой стороны, идеалы как бы измеряют разницу между произвольным кольцом и полем. Чем меньше идеалов в кольце, тем ближе оно к полю.

**Утверждение 94.** *Кольцо  $\mathbb{Z}_n$  является полем тогда и только тогда, когда  $n$  является простым.*

*Доказательство.* Мы уже обсуждали это утверждение и показывали напрямую, что любой ненулевой элемент такого кольца обратим. Давайте теперь обсудим, как это можно показать через идеалы. В силу утверждения 65 мы знаем, что в  $\mathbb{Z}_n$  только два идеала лишь в случае, когда  $n$  простое. А значит по предыдущему утверждению 93 это равносильно тому, что  $\mathbb{Z}_n$  – поле.  $\square$

**Утверждение 95.** *Предположим  $F$  – поле простой характеристики  $p$ . Тогда  $F$  содержит  $\mathbb{Z}_p$  как подполе.*

*Доказательство.* Поле  $F$  содержит единицу  $1 \in F$ . Давайте рассмотрим множество элементов  $\{0, 1, 2 \cdot 1, \dots, (p-1) \cdot 1\} \subseteq F$ . Тогда есть очевидная биекция между этим множеством и полем  $\mathbb{Z}_p$ . Мы должны показать, что эта биекция является изоморфизмом. Для этого нам достаточно показать

$$n \cdot 1 + m \cdot 1 = (n + m \bmod p) \cdot 1 \quad \text{и} \quad (n \cdot 1)(m \cdot 1) = (nm \bmod p) \cdot 1$$

Действительно, если  $m + n = qp + r$ , тогда

$$n \cdot 1 + m \cdot 1 = (m + n) \cdot 1 = (qp) \cdot 1 + r \cdot 1 = q(p \cdot 1) + r \cdot 1 = r \cdot 1$$

Второе утверждение показывается аналогично.  $\square$

## 6.2 Расширения полей

Предположим  $F$  – некоторое поле и  $K$  – другое поле содержащее  $F$  в качестве подполя. В этом случае мы будем говорить, что  $K$  – расширение поля  $F$ . В этом случае  $K$  можно рассматривать как векторное пространство над полем  $F$ . А значит, можно говорить о размерности  $K$  над  $F$ . Размерность поля  $K$  над полем  $F$  называется степенью поля  $K$  над  $F$  и обозначается  $[K : F] = \dim_F K$ .

Я хочу обсудить методы по построению новых полей. Следующее утверждение объясняет один из наиболее удобных способов.

**Утверждение 96.** *Пусть  $F$  – поле,  $f \in F[x] \setminus F$  – некоторый многочлен. Тогда кольцо  $F[x]/(f)$  является полем тогда и только тогда, когда  $f$  неприводимый многочлен.*

*Доказательство.* Давайте дадим прямой доказательство через элементы. В начале предположим, что  $f$  приводим. Тогда  $f = gh$ , где  $\deg g < \deg f$  и  $\deg h < \deg f$ . Тогда  $h \neq 0$  в  $F[x]/(f)$  так же как  $g \neq 0$  в  $F[x]/(f)$ . Но  $gh = f = 0$  в  $F[x]/(f)$ . Значит,  $g$  и  $h$  являются ненулевыми делителями нуля. Так как делители нуля необратимы, то это противоречит определению поля.

Если  $f$  неприводим, мы должны показать, что любой ненулевой многочлен  $g \in F[x]/(f)$  обратим. Так как  $\deg g < \deg f$  и  $g \neq 0$ ,  $f$  и  $g$  взаимно просты. Значит,  $1 = (g, f)$ . По утверждению 79 пункт (1) следует, что  $1 = ug + vf$  для некоторых  $u, v \in F[x]$ . Но последнее означает, что  $1 = ug \pmod{f}$  а значит,  $u = g^{-1}$  в  $F[x]/(f)$ .<sup>14</sup>  $\square$

*Замечания 97.* • Давайте подчеркнем, что элемент  $x \in F[x]/(p)$  является корнем многочлена  $p$  в поле  $F[x]/(p)$ . Действительно,  $p(x) = 0$  в  $F[x]/(p)$  по определению.

<sup>13</sup>Здесь важно, что  $R$  коммутативно.

<sup>14</sup>Мы могли бы дать другое доказательство с помощью идеалов. По утверждению 88 мы знаем, что в кольце остатков только два идеала лишь в случае неприводимого многочлена. Что по утверждению 93 равносильно тому, что кольцо остатков является полем.

- Давайте рассмотрим поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Тогда многочлен  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$  неприводим. Значит  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  является полем и элемент  $x$  становится корнем многочлена  $x^2 + 1$ . Явно элементы поля  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  имеют вид  $a + bx$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  и мы знаем, что  $x^2 = -1$ . Значит это привычная нам модель комплексных чисел, где мы  $i$  обозначили за  $x$ .
- Если  $\deg f = n$ , тогда элементы  $1, x, \dots, x^{n-1}$  образуют базис поля  $F[x]/(f)$  над полем  $F$ . Другими словами,  $\dim_F F[x]/(f) = \deg f$ .

**Расширение с помощью корня** Давайте обсудим, что нам дает доказанное утверждение в плане построения полей. Предположим  $F$  – поле и  $f \in F[x]$  – некоторый многочлен. Теперь я хочу построить поле  $L$  содержащее  $F$  и некоторый элемент  $\alpha \in L$  такой, что  $f(\alpha) = 0$ . То есть по простому, я хочу добавить к полю  $F$  корень многочлена  $f$ . Если нам повезло и  $F$  уже содержит корень, то нам нечего делать. Теперь обсудим, что делать, если желаемого корня в поле  $F$  нет. Мы знаем (см. утверждение 83), что  $f$  раскладывается в произведение неприводимых многочленов, то есть  $f = p_1 \dots p_n$  ( $p_i$  – необязательно различные неприводимые многочлены). Нам достаточно научиться присоединять корень хотя бы одного  $p_i$  к полю  $F$ , так как корень  $p_i$  автоматически корень  $f$ .

А теперь мы просто берем поле остатков по модулю неприводимого многочлена  $p_i$ , то есть  $L = F[x]/(p_i)$ . Утверждение 96, гарантирует, что  $L$  является полем. Как мы уже отмечали элемент  $x \in F[x]/(p_i)$  будет корнем  $p_i$ , а значит и корнем  $f$ . Таким образом мы можем выбрать его за  $\alpha$ . Обратим еще внимание на то, что степень  $L$  над  $F$  совпадает в точности со степенью многочлена  $f$ .

### 6.3 Конечные поля

Давайте обсудим как устроены поля состоящие только из конечного числа элементов. Такие поля будут самыми полезными в приложениях.

**Утверждение 98.** Если  $F$  – конечное поле, то его характеристика не ноль. В частности,  $F$  содержит  $\mathbb{Z}_p$ , где  $p = \text{char } F$ .

*Доказательство.* Так как поле  $F$  конечно, то в частности это значит, что  $(F, +)$  – конечная абелева группа. А значит любой элемент в ней имеет конечный порядок. В частности 1 имеет конечный порядок по сложению, а это и есть характеристика поля. Второе утверждение следует из утверждения 95.  $\square$

**Утверждение 99.** Предположим  $F$  – конечное поле и  $\text{char } F = p$ . Тогда,  $|F| = p^n$  для некоторого  $n$ . Более того, можно уточнить, что  $n = [F : \mathbb{Z}_p]$ .

*Доказательство.* По утверждению 95,  $F$  содержит  $\mathbb{Z}_p$  как подполе. Теперь мы рассмотрим  $F$  как векторное пространство над  $\mathbb{Z}_p$ . Так как  $F$  конечно, то оно имеет и конечную размерность. Поэтому  $F$  изоморфно  $\mathbb{Z}_p^n$  как векторное пространство. Но,  $\mathbb{Z}_p^n$  имеет в точности  $p^n$  элементов. Более того, мы видим, что  $n$  равно размерности  $F$  над  $\mathbb{Z}_p$ .  $\square$

**Утверждение 100.** Пусть  $F$  – конечное поле. Тогда группа  $F^*$  является циклической порядка  $|F| - 1$ .

*Доказательство.* Группа  $F^*$  является конечной абелевой группой. А значит, она изоморфна группе вида  $\mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_k}$ , где  $d_1 | \dots | d_k$  (см. утверждение 50). В частности для любого элемента группы  $F^*$  выполнено  $x^{d_k} = 1$ . Потому все элементы группы  $F^*$  являются корнями многочлена  $x^{d_k} - 1$ . В силу единственного разложения на множители, каждый многочлен  $f$  имеет не более  $\deg f$  корней. Значит,  $|F^*| \leq d_k$ . С другой стороны  $|F^*| = d_1 \dots d_k$ . Единственное, когда такое возможно – у нас был один циклический множитель  $\mathbb{Z}_{d_k}$ . Но это и значит, что  $F^*$  изоморфно  $\mathbb{Z}_{d_k}$  и все доказано.  $\square$

А вот очень важный классификационный результат для конечных полей (я не собираюсь его доказывать).

**Утверждение 101.** Для любого простого числа  $p$  и любого натурального  $n$  существует единственное с точностью до изоморфизма поле  $F$  содержащее  $p^n$  элементов.

Так как поле из  $p^n$  элементов единственно, то оно имеет специальное название  $\mathbb{F}_{p^n}$ . Обратите внимание, что  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ . Однако, надо отметить, что для  $n > 1$  такая конструкция не работает, то есть  $\mathbb{F}_{p^n} \not\cong \mathbb{Z}_{p^n}$ , хотя бы потому что кольцо  $\mathbb{Z}_{p^n}$  содержит делители нуля.

Хороший вопрос – как построить все конечные поля размера  $p^n$ . Прежде всего у нас есть хорошее начало  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ . Теперь мы должны найти неприводимый многочлен  $f \in \mathbb{Z}_p[x]$  степени  $n$ . И искомое поле строится

так  $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{Z}_p[x]/(f)$ . Надо отметить, что количество неприводимых многочленов степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$  может быть большим. Однако, все такие многочлены дают изоморфные поля. В частности это означает, что вы можете выбрать любой многочлен  $f$  или тот, который вам удобен.

*Пример 102.* Давайте построим поле  $\mathbb{F}_4$ . Базовое поле будет  $\mathbb{Z}_2$ . Существует только один неприводимый многочлен степени 2 над полем  $\mathbb{Z}_2$  – это  $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ . Тогда требуемое поле будет

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1) = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$$

Сложение задается обычным покомпонентным сложением. Чтобы посчитать произведение элементов в  $\mathbb{F}_4$  нам достаточно уметь перемножать все степени  $x$  между собой. Произведения  $1 \cdot 1 = 1$  и  $1 \cdot x = x$  считаются легко. И нам лишь надо научиться считать  $x \cdot x$ . По определению  $x^2 = 1 + x \pmod{x^2 + x + 1}$ . Тогда в общем виде произведение выглядит так

$$(a + bx)(c + dx) = ac + adx + bcx + bdx^2 = ac + adx + bcx + bd(1 + x) = ac + bd + (ad + bc + bd)x$$

*Замечания 103.* • Так как поле  $\mathbb{Z}_p$  содержится в  $\mathbb{F}_{p^n}$ , то и группа  $\mathbb{Z}_p^*$  содержится в группе  $\mathbb{F}_{p^n}^*$ . Мы уже отмечали в разделе 3.3, что проблема дискретного логарифмирования является сложной в группе  $\mathbb{Z}_p^*$ . Это означает, что и проблема дискретного логарифмирования является сложной в  $\mathbb{F}_{p^n}^*$ . Действительно, если бы мы могли быстро решать уравнения  $g^x = h$  по  $x$  для всех  $g, h \in \mathbb{F}_{p^n}^*$ , мы могли бы решать такое и для  $g, h \in \mathbb{Z}_p^* \subseteq \mathbb{F}_{p^n}^*$ . Это делает привлекательной идею использовать группу  $\mathbb{F}_{p^n}^*$  в криптографии. Однако, порядок этой группы достаточно далек от простого числа и это делает ее криптографически менее стойкой. Тем не менее, с помощью конечных полей можно построить другой класс интересных групп, которые будут криптографически более стойкими, чем  $\mathbb{Z}_p^*$ .

- Для различных вопросов бывает полезно знать образующий группы  $\mathbb{F}_{p^n}^*$ . Если мы строим поле как кольцо остатков вида  $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ , где  $f \in \mathbb{Z}_p[x]$  – неприводимый многочлен степени  $n$ , то хорошим кандидатом в качестве образующего  $\mathbb{F}_{p^n}^*$  кажется элемент  $x$ . Однако,  $x$  не обязан быть образующим  $\mathbb{F}_{p^n}^*$ . Является ли он образующим группы  $\mathbb{F}_{p^n}^*$  зависит от выбора неприводимого многочлена  $f$ . Для одних многочленов он образующий, для других – нет.

Давайте рассмотрим следующий пример. Над полем  $\mathbb{Z}_3$  существует три неприводимых унитарных многочлена степени 2:  $f_1 = x^2 + 1$ ,  $f_2 = x^2 + x - 1$ ,  $f_3 = x^2 - x - 1$ . Если мы используем первый многочлен, мы получим  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ . Группа  $\mathbb{F}_9^* \simeq \mathbb{Z}_8$ , значит образующий должен быть порядка 8. Однако,  $x^4 = (x^2)^2 = (-1)^2 = 1$  в этом случае. А значит, порядок  $x$  равен 4 и он не образующий. С другой стороны, если мы возьмем  $f_2$ , то получим  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x - 1)$  или  $f_3$ , то получим  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 - x - 1)$ . В обоих случаях прямой подсчет показывает, что  $x$  оказывается образующим группы  $\mathbb{F}_9^*$ .

## 6.4 Случайный генератор Галуа

Существует понятие регистра сдвига с линейной обратной связью. Это специальный вид регистра производящий последовательность бит. На его основе можно строить генераторы псевдослучайных чисел. Существует две основные конструкции называемые в честь Фибоначчи и Галуа. Оказывается эти понятия можно обсуждать в терминах теории конечных полей. Я сделаю это на примере генератора Галуа.

Предположим у нас есть конечный алфавит  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  и мы хотим создать случайную последовательность элементов из этого алфавита. Существует много разных способов сделать это, но вот как выглядит подход на основе конечных полей. Давайте зафиксируем конечное поле  $\mathbb{F}_{p^n}$ . Тогда нам надо научиться производить случайную последовательность элементов  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{F}_{p^n}$ , а потом по каждому такому элементу надо научиться строить элемент  $\phi(a_1), \phi(a_2), \dots \in \mathbb{Z}_p$ . Оказывается, что хорошую последовательность из  $a_i$  можно построить с помощью возведения в степень в конечном поле. А чтобы научиться вычислять элементы  $\mathbb{Z}_p$  по последовательности  $a_i$ , надо вспомнить, что  $\mathbb{F}_{p^n}$  является векторным пространством над  $\mathbb{Z}_p$ . В этом случае в качестве  $\phi$  годится любая процедура по вычислению какой-нибудь координаты. Давайте я теперь расскажу, как устроен весь процесс более детально.

Предположим  $p$  – простое число и мы фиксируем некоторое натуральное  $n$ . Возьмем неприводимый многочлен  $f \in \mathbb{Z}_p[x]$  степени  $n$  и построим с помощью него поле  $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{Z}_p[x]/(f)$ . По определению

$$\mathbb{F}_{p^n} = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}_p\}$$

То есть каждый элемент поля определяется последовательностью  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ . Теперь мы выберем образующий  $g \in \mathbb{F}_{p^n}^*$ . Это неприятная процедура, но это надо сделать единожды. Обычно, мы выбираем  $f$  так,

чтобы  $x$  оказался образующим. Теперь мы производим последовательность  $g, g^2, g^3, g^4, \dots$ . Каждая степень элемента  $g$  соответствует последовательности коэффициентов  $a_i$  как выше. Тогда в качестве случайного элемента из  $\mathbb{Z}_p$  можно выбрать  $a_0$ . Кроме того, мы можем начать нашу последовательность не обязательно с нулевой степени. Мы можем начать с произвольной степени  $k$ :  $g^k, g^{k+1}, g^{k+2}, \dots$ . С практической точки зрения, это значит, что мы выбрали элемент  $h \in \mathbb{F}_{p^n}^*$  и строим последовательность  $hg, hg^2, hg^3, hg^4, \dots$ . Так как  $h = g^k$  для некоторого  $k$ , это эквивалентный подход.

**Матричная форма** Теперь давайте перепишем конструкцию выше в координатах. Как и раньше, мы предполагаем, что

$$\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{Z}_p[x]/(f) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}_p\}$$

В этом случае  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  является базисом  $\mathbb{F}_{p^n}$  над  $\mathbb{Z}_p$ . Предположим, что многочлен  $f = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$  выбран так, что  $x$  является образующим  $\mathbb{F}_{p^n}^*$ . Отображение  $\phi: \mathbb{F}_{p^n} \rightarrow \mathbb{F}_{p^n}$  по правилу  $h \mapsto xh$  является линейным. Давайте напомним матрицу этого отображения в базисе из степеней  $x$ :

$$\phi(1, x, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}) = (1, x, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

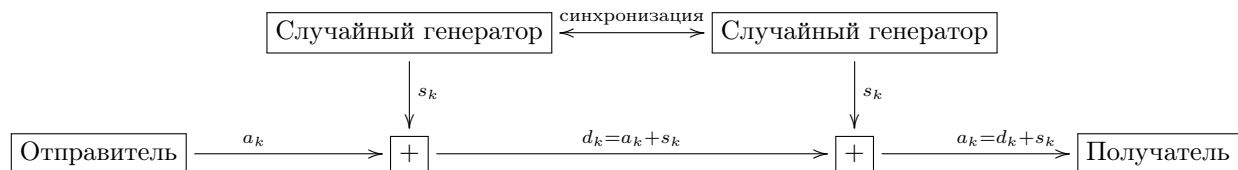
Обозначим матрицу отображения  $\phi$  за  $A$ . Элемент  $h = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  в координатах описывается столбцом  $v = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$ . Тогда элемент  $xh$  описывается произведением  $Av$ . Потому случайный генератор работает следующим образом. Мы фиксируем некоторый начальный вектор  $v = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$  и строим последовательность векторов  $v, Av, A^2v, A^3v, \dots$ . Далее у каждого вектора мы вычисляем первую координату и получаем требуемую случайную последовательность. Существует аналогичный подход под названием Фибоначчи. В этом случае используется матрица  $A^t$  вместо матрицы  $A$ . Существует так же концептуальный подход к генератору Фибоначчи, описывающий его в терминах поля  $\mathbb{F}_{p^n}$ , но я не буду на этом заострять внимание.

## 6.5 Потокое шифрование

Существует применение случайных генераторов в шифровании. Давайте обсудим потоковое шифрование. Обратите внимание, что когда вы передаете данные, то шифрование накладывает дополнительные расходы. Потому передавать данные по зашифрованному каналу может оказаться дорого, в том смысле, что мы не можем себе этого позволить делать часто. Тем не менее, мы все же не хотим передавать по незащищенному каналу открытые данные. Вот что можно сделать в этом случае.

Предположим, что у нас алфавит состоит из двух символов  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Наше сообщение – это последовательность бит  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ . Предположим, что у нас есть некоторый случайный генератор  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Тогда мы можем построить последовательность случайных бит с помощью него  $s_0 = S(0), s_1 = S(1), s_2 = S(2), \dots$ . Теперь каждый бит исходного сообщения можно зашифровать с помощью случайного бита следующим образом  $d_k = a_k + s_k \pmod{2}$  и передать  $d_k$  вместо  $a_k$ . Чтобы восстановить сообщение, нам надо посчитать  $a_k = d_k + s_k \pmod{2}$ . А для этого нам надо знать в точности последовательность случайных бит  $s_k$ . Вместо того, чтобы передавать последовательность  $s_k$  по зашифрованному каналу, мы передадим по нему «копию» нашего случайного генератора, а точнее мы передадим информацию для инициализации точно такого же случайного генератора. Тогда при наличии двух синхронизированных случайных генераторов, мы можем свободно шифровать и расшифровывать сообщения по озвученной схеме.

Давайте продемонстрирую описанную схему на диаграмме

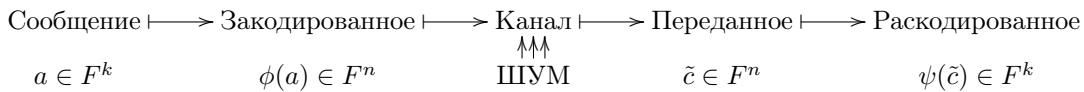


Примером использования потокового шифрования является стандарт GSM. Современный стандарт GSM использует более сложную схему шифрования, однако в основе ее лежит идея описанная выше.

## 7 Коды исправляющие ошибки

Предположим, что у нас есть конечный алфавит  $F$  из  $q$  символов и мы представляем информацию в виде последовательностей символов из  $F$ . Теперь представим себе, что мы хотим передавать последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in F$  по каналу связи, но при этом канал связи имеет некоторые помехи. В результате воздействия этих помех получателю приходит не оригинальная последовательность, а испорченная. Мы будем предполагать, что канал связи может лишь испортить какие-то отдельные символы нашей последовательности. В результате возникает задача – как восстановить исходную последовательность символов, зная испорченную.

Давайте я опишу общую концепцию, в рамках которой решается подобная задача. Прежде всего, пусть у нас передаваемая информация хранится порциями по  $k$  символов. То есть хранимая информация – это элементы  $F^k$ . Теперь нам нужно придумать некоторое инъективное отображение  $\phi: F^k \rightarrow F^n$ , которое и называется кодированием. Смысл этого отображения в том, что мы как-бы добавляем к исходной последовательности дополнительную контрольную информацию. После этого полученное слово длины  $n$  мы уже будем передавать по сети и именно это более длинное слово может как-то испортиться. После получения испорченного слова, нам нужна некоторая процедура  $\psi: F^n \rightarrow F^k$ , которая называется декодированием и которая должна восстановить исходное сообщение если это возможно. На картинке процесс можно изобразить так



Самая важная задача – сделать так, чтобы  $\psi(\tilde{c})$  совпало с исходным сообщением  $a \in F^k$ . Конечно же, если канал может как угодно портить сообщение, то мы ничего не можем гарантировать. Однако, можно добиться некоторых гарантий, если мы знаем, что шум в канале не абы какой. Частым предположением является предположение о том, что шум может испортить не более  $e$  символов в передаваемой последовательности. То есть процент ошибок в канале равен  $e/n$ .

**Пример** Давайте начнем с очень простого, но понятного примера. Пусть мы хотим передавать последовательности  $F^k$  по каналу, который может максимум испортить один элемент. Тогда давайте рассмотрим следующую процедуру кодирования  $\phi: F^k \rightarrow F^{3k}$  по правилу  $w \mapsto w, w, w$ , то есть мы просто повторяем слово три раза. Тогда понятно как восстановить одну ошибку. Если нам пришла последовательность  $w_1, w_2, w_3$ , то два слова из трех должны быть одинаковыми, вот это слово мы и берем. Главным недостатком такого подхода является увеличение количества передаваемой информации. Во-первых, это не эффективно в плане скорости. Во-вторых, это не эффективно, так как количество ошибок в канале может расти в зависимости от размера передаваемого сообщения и одна ошибка на слове длины  $k$  может легко превратиться в три ошибки на слове длины  $3k$ , а значит и кодирование может оказаться бесполезным. Тем не менее, это хороший концепт, показывающий как именно может происходить процедура кодирования и декодирования. В дальнейшем мы постараемся построить более экономные процедуры кодирования и декодирования.

### 7.1 Общие замечания

**Определение 104.** Пусть  $F$  – конечный алфавит и  $a, b \in F^n$  – два слова длины  $n$  в этом алфавите. Тогда расстояние Хэмминга между словами  $a$  и  $b$  это:

$$\rho(a, b) = |\{i \mid a_i \neq b_i\}| \quad \text{количество отличающихся символов}$$

Обратите внимание, если мы передавали по сети строчку  $a \in F^n$ , а нам пришла на вход строчка  $b \in F^n$ , то  $\rho(a, b)$  – это в точности количество произошедших ошибок.

**Определение 105.** Пусть  $F$  – конечный алфавит. Тогда при  $k < n$  инъективное отображение  $\phi: F^k \rightarrow F^n$  называется кодированием, а образ  $C = \text{Im } \phi$  называется кодом.

Как мы увидим ниже, многие свойства кодирования зависят именно от свойств кода  $C$ . Вопросы нахождения функции кодирования и декодирования больше сопряжены с эффективностью их вычисления, просто потому что при наличии множества  $C$  кодирование может осуществляться любым вложением  $\phi: F^k \rightarrow C$ , а декодирование в худшем случае можно делать полным перебором, если оно возможно.

**Определение 106.** Пусть  $F$  – конечный алфавит и  $C \subseteq F^n$  – некоторое подмножество. Тогда код  $C$  исправляет  $t$  ошибок, если для любого  $x \in F^n$  существует не более одного  $c \in C$  такого, что  $\rho(x, c) \leq t$ .



Давайте обсудим последнее определение.

- Оно говорит, что если у вас есть произвольное слово  $x \in F^n$ , то меня в нем не более  $t$  символов, мы максимум найдем одно слово из  $C$ . Потому, если у нас слово  $x$  возникло в результате не более  $t$  изменений в слове  $c \in C$ , то слово  $c$  будет единственным словом из  $C$  таким, что  $\rho(x, c) \leq t$ . А значит, мы точно можем восстановить слово  $c$ .
- Кроме того, может случиться такая ситуация, что  $\rho(x, c) \leq t$  не выполняется ни для какого слова  $c$ . Это означает, что при передаче по каналу произошло больше  $t$  ошибок. Таким образом, по-хорошему процедура декодирования  $\psi$  должна не просто выплевывать раскодированную последовательность, а еще иногда сообщать, что мы получили недопустимое слово.
- Если нам дана процедура кодирования  $\phi: F^k \rightarrow F^n$ , то мы можем говорить, что  $\phi$  допускает исправление  $t$  ошибок, если код  $\text{Im } \phi$  допускает исправление  $t$  ошибок.

Теперь я хочу получить численные характеристики кода, которые бы описывали его возможности по восстановлению ошибок.

**Определение 107.** Пусть  $F$  – конечный алфавит и  $C \subseteq F^n$  – некоторое подмножество. Тогда минимальное расстояние кода  $C$  это

$$d_C = \min_{c \neq c' \in C} \rho(c, c')$$

**Определение 108.** Пусть  $F$  – конечный алфавит. Тогда шаром радиуса  $r \in \mathbb{Z}$  с центром в  $x \in F^n$  называется множество

$$B_r(x) = \{y \in F^n \mid \rho(x, y) \leq r\}$$

**Утверждение 109.** Пусть  $F$  – конечный алфавит и  $C \subseteq F^n$  – некоторое подмножество. Тогда эквивалентно

1. Код  $C$  исправляет  $t$  ошибок.
2. Для любых  $x \neq y \in C$  верно  $B_t(x) \cap B_t(y) = \emptyset$ .
3.  $d_C \geq 2t + 1$ .

*Доказательство.* (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим противное, что существует  $z \in B_t(x) \cap B_t(y)$  для некоторых  $x, y \in C$ . Но тогда для слова  $z$  найдутся два слова  $x, y \in C$  на расстоянии не более  $t$ , что противоречит тому, что код исправляет  $t$  ошибок.

(2) $\Rightarrow$ (3). Предположим противное, то есть  $d_C \leq 2t$ . Тогда найдутся два слова  $x, y \in C$  такие, что  $\rho(x, y) \leq 2t$ . Это значит, что слово  $y$  отличается от слова  $x$  в  $s \leq 2t$  позициях. Давайте изменим в  $y$   $s/2$  позиций на значения из  $x$ . Тогда получим слово  $z$ , которое отличается от  $x$  и от  $y$  не более чем на  $s/2 \leq t$  позиций. А это значит, что мы нашли слово в пересечении  $B_t(x) \cap B_t(y)$ , противоречие.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, тогда для какого-то слова  $z$  найдутся два слова  $x, y \in C$  такие, что  $\rho(x, z) \leq t$  и  $\rho(y, z) \leq t$ . Но тогда по неравенству треугольника для  $\rho$  имеем  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq 2t$ , противоречие.  $\square$

**Пример** Давайте рассмотрим следующий код  $C = \{(a, a, \dots, a) \mid a \in F\} \subseteq F^n$ . Очевидно, что минимальное расстояние кода  $d_C = n$ . А значит, код исправляет  $t = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$  ошибок.

## 7.2 Линейная алгебра

Хороший вопрос – как эффективно задавать множество  $C \subseteq F^n$ , чтобы не работать с ним перебором. Оказывается один из подходов – воспользоваться достижениями линейной алгебры над конечными полями. Такой подход приводит к так называемым линейным кодам. Давайте поговорим о них.

**Определение 110.** Пусть  $F = \mathbb{F}_q$  – конечное поле из  $q = p^n$  элементов. Тогда подмножество  $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$  называется линейным кодом, если  $C$  является подпространством над полем  $\mathbb{F}_q$ . Если при этом размерность подпространства равна  $k$ , то говорят, что  $C$  – это  $(n, k)$ -код.

Если у нас есть линейный код  $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ , то легко построить кодирующую функцию. Пусть размер кода  $C$  равен  $k$ , тогда мы можем найти в  $C$  базис  $c_1, \dots, c_k$ . Тогда кодирующее отображение  $\phi: \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q^n$  задано по правилу  $x \mapsto Ax$ , где у матрицы  $A$  по столбцам поставлены векторы  $c_1, \dots, c_k$ .



**Определение 111.** Пусть  $x \in \mathbb{F}_q^n$ , тогда нормой вектора  $x$  будет называться его расстояние до нулевого вектора в норме Хэмминга, то есть

$$\|x\| = \rho(x, 0) = |\{i \mid x_i \neq 0\}|$$

**Утверждение 112.** Пусть  $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$  – линейный код. Тогда  $d_C = \min_{0 \neq c \in C} \|c\|$ .

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in \mathbb{F}_q^n$  два произвольных слова, обратим внимание, что  $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0) = \|x - y\|$ , потому что количество разных координат у  $x$  и  $y$  – это в точности количество ненулевых координат у разности  $x - y$ . А тогда

$$d_C = \min_{c \neq c' \in C} \rho(c, c') = \min_{c \neq c' \in C} \|c - c'\| = \min_{0 \neq c \in C} \|c\|$$

Последнее равенство выполнено в силу того, что  $C$  является подпространством, потому что если  $c, c'$  пробегает все  $C$ , то и их разность  $c - c'$  пробегает все  $C$ .  $\square$

**Определение 113.** Пусть  $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$  – некоторый линейный код размерности  $k$  и пусть  $H \in M_{n-k, n}(\mathbb{F}_q)$  такая, что  $\text{rk } H = n - k$  и  $C = \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid Hy = 0\}$ . Тогда матрица  $H$  называется проверочной матрицей для кода  $C$ .

**Пример** Если взять код  $C = \{(a, \dots, a) \mid a \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ , то это  $(n, 1)$ -код с проверочной матрицей (все незаполненные места – нулевые)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Утверждение 114.** Пусть  $C = \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid Hy = 0\}$ . Тогда эквивалентно

1.  $d_C \geq s + 1$
2. Любые  $s$  столбцов матрицы  $H$  линейно независимы.

*Доказательство.* Давайте рассмотрим  $y \in \mathbb{F}_q^n$  у которого не более  $s$  ненулевых координат. Тогда  $Hy$  равно линейной комбинации не более  $s$  столбцов матрицы  $H$ . Таким образом условие, что любые  $s$  столбцов  $H$  линейно независимы означает, что системе  $Hy = 0$  не удовлетворяет ни один вектор  $y$  которого не более  $s$  ненулевых координат. Или другими словами, условие (2) эквивалентно тому, что в  $C$  лежат векторы  $y$  которых хотя бы  $s + 1$  ненулевая координата. А это условие в точности равносильно тому, что  $d_C \leq s + 1$ .  $\square$

## 7.3 Коды Хэмминга

Давайте рассмотрим случай бинарного алфавита  $F = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ . Фиксируем число  $k$  и составим матрицу  $H$  следующим образом. По столбцам матрицы  $H_k$  поставим все ненулевые векторы из  $\mathbb{F}_2^k$ . Тогда получится матрица размера  $k$  на  $2^k - 1$ . Пусть  $n = 2^k - 1$ . Тогда можно определить код с такой проверочной матрицей

$$C_k = \{y \in \mathbb{F}_2^n \mid H_k y = 0\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$$

Полученный код называется бинарным кодом Хэмминга. Это  $(2^k - 1, 2^k - k - 1)$ -код. Обратите внимание, что закодированное слово имеет длину  $n = 2^k - 1$ , при этом количество проверочной информации равно  $k \approx \log_2 n$ . Чтобы построить кодирующее отображение  $\phi: \mathbb{F}_2^{2^k - k - 1} \rightarrow \mathbb{F}_2^{2^k - 1}$  нам надо найти ФСР для системы  $H_k y = 0$  и составить их по столбцам в матрицу  $A_k$ . Тогда  $\phi(x) = A_k x$ .

Если мы хотим раскодировать кодовые слова, то для начала давайте посчитаем минимальное расстояние кода. Мы видим, что в матрице  $H_k$  любые 2 вектора линейно независимы и существует 3 линейно зависимых вектора. Значит  $d_{C_k} = 3$ . То есть количество исправляемых ошибок будет  $e = \lfloor (d_{C_k} - 1)/2 \rfloor = 1$ . Если ошибка произошла в  $i$ -ом символе, это значит, что кодовое слово  $y$  изменилось на  $y + e_i$ . А тогда  $H_k(y + e_i) = H_k e_i$  –  $i$ -ый столбец матрицы  $H_k$ . Так как все столбцы уникальны это дает возможность однозначно узнать номер  $i$ . Более того, давайте смотреть на столбцы в  $H_k$  как на представление целых чисел в двоичной системе, то есть вектору  $(a_1, \dots, a_k)$  ставим в соответствие число  $a_1 + a_2 2 + \dots + a_k 2^{k-1}$ . Расставим столбцы в порядке увеличения чисел. Тогда  $H_k e_i$  будет двоичным разложением числа  $i$ .

Двоичные коды Хэмминга интересны тем, что они дают плотную упаковку шаров радиуса 1 в пространстве  $\mathbb{F}_2^{2^k - 1}$ , то есть шары радиуса 1 с центрами в кодовых словах кода Хэмминга покрывают все пространство без пустот и пересечений. У этого кода очень простая функция кодирования и декодирования. Единственным его недостатком является малое число исправляемых ошибок.

## 7.4 Коды Рида-Соломона

Оказывается, что для линейных кодов можно оценить сверху минимальное кодовое расстояние, через размерность пространства. Это утверждение носит название «Неравенство Синглтона».

**Утверждение 115** (Неравенство Синглтона). Пусть  $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$  – некоторый линейный  $(n, k)$ -код. Тогда  $d_C \leq n - k + 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $q_1, \dots, q_{k-1} \in \mathbb{F}_q$  – фиксированные числа. Рассмотрим подмножество

$$D_{q_1, \dots, q_{k-1}} = \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid y = (q_1, \dots, q_{k-1}, *, \dots, *)\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$$

То есть мы зафиксировали первые  $k - 1$  координату в последовательности, а остальные координаты могут быть какие угодно. Всего таких подмножеств  $q^{k-1}$  по количеству последовательностей  $q_1, \dots, q_{k-1}$ . Более того, подмножества  $D_{q_1, \dots, q_{k-1}}$  образуют разбиение  $\mathbb{F}_q^n$  на непересекающиеся множества. Теперь посмотрим на подпространство  $C$  в нем  $q^k$  элементов, так как размерность равна  $k$ . А значит по принципу Дирихле найдется хотя бы одна «клетка»  $D_{q_1, \dots, q_{k-1}}$  содержащая хотя бы два «кролика» – точки из  $C$ . То есть хотя бы два элемента из  $C$  совпадают в первых  $k - 1$  позиции. А это значит, что расстояние между этими точками не больше  $n - k + 1$ . А значит и минимальное расстояние между точками  $C$  не больше  $n - k + 1$ .  $\square$

Следующий пример кодов – коды Рида-Соломона. На этих кодах достигается равенство в неравенстве Синглтона. Пусть у нас  $F = \mathbb{F}_q$  и число  $n$  выбрано так, что  $n \leq q$ . Теперь для любого  $k < n$  построим кодирующую функцию  $\phi: \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ . Обратите внимание, что для построения такого кода нам требуется достаточно большой алфавит (условие  $n \leq q$ ).

Мы можем отождествить  $\mathbb{F}_q^k$  с многочленами степени меньше  $k$ , а именно

$$a = (a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{F}_q^k \mapsto f_a = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$$

Выберем  $n$  различных точек  $x_1, \dots, x_n$  поля  $\mathbb{F}_q$ .<sup>15</sup> Теперь построим отображение  $\phi: \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q^n$  по правилу  $a \mapsto f_a \mapsto (f_a(x_1), \dots, f_a(x_n))$ . Давайте оценим минимальное кодовое расстояние. Если у нас есть два разных многочлена степени меньше  $k$ , то они могут иметь не более  $k - 1$  общего значения. Значит разные последовательности  $\phi(a)$  и  $\phi(b)$  для разных  $a, b \in \mathbb{F}_q^k$  могут иметь не более  $k - 1$  одинаковых координат. То есть расстояние между ними будет не меньше  $n - k + 1$ . С другой стороны, по неравенству Синглтона минимальное расстояние кода не больше  $n - k + 1$ . Значит  $d_C = n - k + 1$ . А значит, количество исправляемых кодом ошибок равно  $e = \lfloor (n - k)/2 \rfloor$ .

Важно, что коды Рида-Соломона допускают эффективную процедуру декодирования. Предположим, что нам на вход пришла последовательность  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}_q$  и мы хотим восстановить многочлен  $f_a$  степени меньше  $k$ . Давайте я в начале опишу процедуру, как восстановить соответствующий многочлен, а уже потом обсудим, почему эта процедура корректная. Рассмотрим два многочлена  $D, Q \in \mathbb{F}_q[x]$  следующего вида

$$D = x^e + d_{e-1}x + \dots + d_0 \quad \text{и} \quad Q = q_{e+k-1}x^{e+k-1} + \dots + q_0$$

то есть многочлен  $D$  имеет степень  $e$  и старший коэффициент 1, а многочлен  $Q$  имеет степень меньше  $e + k$ . Оба многочлена берутся с неопределенными коэффициентами. Теперь надо составить систему уравнений

$$Q(x_1) = b_1 D(x_1), \dots, Q(x_n) = b_n D(x_n)$$

Это неоднородная система линейных уравнений на коэффициенты  $Q$  и  $D$ . Если последовательность  $b_1, \dots, b_n$  получена из последовательности кода Рида-Соломона в результате не более  $e$  ошибок, то оказывается, что такая система всегда имеет хотя бы одно решение. Пусть  $Q$  и  $D$  – какое-то решение. Оказывается, что в этом случае  $D$  делит  $Q$  и при этом  $Q/D$  – это искомым многочлен  $f_a$ . Таким образом мы получаем алгоритм декодирования последовательности  $b$  в последовательность  $a$ . Надо лишь объяснить, почему эта процедура действительно работает и дает, что надо.

Пусть  $a \in \mathbb{F}_q^k$  – некоторое слово,  $c = \phi(a) = (f_a(x_1), \dots, f_a(x_n))$  – соответствующее кодовое слово и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  – испорченное кодовое слово, где произошло не более  $e$  ошибок. Пусть ошибки произошли в позициях  $i_1, \dots, i_e$ . Тогда мы можем рассмотреть многочлен  $D = (x - x_{i_1}) \dots (x - x_{i_e})$ . Тогда последовательность  $d = (D(x_1), \dots, D(x_n))$  имеет нули ровно в тех позициях, где произошли ошибки. Тогда последовательность

<sup>15</sup>В этом месте мы пользуемся неравенством  $n \leq q$ .

$bd$  совпадает с последовательностью  $cd$ , потому что  $b$  и  $c$  отличаются в позициях  $i_1, \dots, i_e$ , где  $d$  равна нулю. Но что означает равенство  $bd = cd$ . Давайте его распишем.

$$f_a(x_1)D(x_1) = b_1D(x_1), \dots, f_a(x_n)D(x_n) = b_nD(x_n)$$

Но тогда обозначим  $f_aD$  через  $Q$ . Мы получим многочлен степени строго меньше  $k + e$ . Последнее означает, что если последовательность  $b_1, \dots, b_n$  получена из кодового слова  $c$  не более чем  $e$  ошибками, то система на многочлены  $Q$  и  $D$  имеет решение.

Теперь пусть

$$Q(x_1) = b_1D(x_1), \dots, Q(x_n) = b_nD(x_n)$$

и  $Q$  и  $D$  – произвольное решение. При этом отметим, что степень  $Q$  меньше  $k + e$ , а степень  $D$  равна  $e$  и его старший коэффициент – 1. Пусть  $a$  – кодовое слово, из которого получилась последовательность  $b$ . Рассмотрим последовательность

$$f_a(x_1)D(x_1), \dots, f_a(x_n)D(x_n)$$

Эта последовательность имеет не менее  $n - e \geq k + e$  общих элементов с последовательностью

$$b_1D(x_1), \dots, b_nD(x_n)$$

А значит не менее  $k + e$  общих элементов с последовательностью

$$Q(x_1), \dots, Q(x_n)$$

То есть многочлены  $f_aD$  и  $Q$  имеющие степень меньше  $k + e$  имеют хотя бы  $k + e$  общих точек. А это значит, что они обязаны совпадать. Отсюда  $f_aD = Q$  и мы доказали, что требовалось.

## 8 Базисы Грёбнера

Сейчас я хочу поговорить о многочленах от нескольких переменных. Одна из причин почему мы так любим многочлены от одной переменной – Евклидов алгоритм деления с остатком. Оказывается, что многие задачи эффективно решаются с помощью деления с остатком. Однако, когда мы переходим к многочленам от нескольких переменных у нас уже не существует Евклидова алгоритма деления (если дать строгие определения, то можно даже доказать, что в многочленах от нескольких переменных не может быть деления с остатком). Что же делать в такой тяжелой и грустной ситуации? Предлагается вместо честного деления с остатком ввести очень похожую процедуру называемую редукцией. Более того с помощью такой процедуры можно будет редуцировать многочлен относительно целого семейства многочленов и получать в результате аналогии остатков. Основная проблема будет заключаться в том, что если редуцировать по «плохому» множеству, то остатки будут получаться не единственными. В результате среди всех семейств выделяют только «хорошие», которые дают корректно определенные остатки. Такие хорошие множества и называются базисами Грёбнера.

### 8.1 Многочлены от нескольких переменных

Пусть  $F$  – некоторое поле. Многочлен  $f$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентами в  $F$  – это картинка следующего вида

$$f = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad a_{k_1 \dots k_n} \in F$$

здесь только конечное число коэффициентов отлично от нуля. Сложение и умножение многочленов заданы обычными формулами. Множество всех многочленов от переменных  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентами в поле  $F$  будет обозначаться  $F[x_1, \dots, x_n]$ . Множество  $F[x_1, \dots, x_n]$  с операциями сложения и умножения является коммутативным кольцом.

Выражение  $m = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  называется мономом. Степень монома –  $\deg m = k_1 + \dots + k_n$ . Степень многочлена  $f$  – это максимум степеней всех мономов в него входящих с ненулевыми коэффициентами. Степень нулевого многочлена считается равной  $-\infty$  так же как и в случае одной переменной. Прямое вычисление показывает, что если  $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ , то  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ . Моном умноженный на коэффициент из поля  $F$  называется термом. Таким образом любой многочлен всегда является какой-то конечной суммой термов.

## 8.2 Мономиальные порядки

Прежде всего нам нужен способ упорядочить мономы. В случае многочленов от одной переменной, мы могли эффективно сравнивать мономы по степени единственной переменной. В случае нескольких переменных требуется какая-то новая процедура, позволяющая сказать, какой моном в многочлене старший, а какой младший. Существует огромное количество «хороших» порядков на мономах. Однако, чтобы упростить изложение, я собираюсь обсудить лишь самый полезный для наших целей – лексикографический порядок.

**Определение 116.** Мы хотим определить лексикографический порядок на мономах.

1. Прежде всего надо зафиксировать порядок переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть для определенности порядок будет  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ . Тем не менее, мы можем взять любой порядок на переменных.
2. Теперь мы предполагаем порядок  $x_1 > \dots > x_n$  зафиксированным. Определим лексикографический порядок  $\text{Lex}(x_1, \dots, x_n)$  следующим образом.

Пусть  $m = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  и  $m' = x_1^{k'_1} \dots x_n^{k'_n}$  – два монома. В начале сравниваем  $k_1$  и  $k'_1$ . Если  $k_1 > k'_1$ , то  $m > m'$ . Если  $k_1 < k'_1$ , то  $m < m'$ . Если  $k_1 = k'_1$ , то мы переходим к сравнению  $k_2$  и  $k'_2$  и повторяем алгоритм как и выше. В частности,  $m > m'$  тогда и только тогда, когда существует  $1 \leq j \leq n$  такой, что  $k_1 = k'_1, \dots, k_{j-1} = k'_{j-1}$  и  $k_j > k'_j$ .

*Примеры 117.* Рассмотрим кольцо  $F[x, y, z]$  и мономы  $m_1 = x^2 y z^4$ ,  $m_2 = x y^3 z$  и  $m_3 = x y z^5$ . Всего существует 6 способов упорядочить переменные  $x, y, z$ . Для каждого упорядочивания будет свой лексикографический порядок. Ниже написано как мономы будут сравниваться относительно всех шести порядков.

1. If  $x > y > z$ , then  $m_1 > m_2 > m_3$ .
2. If  $x > z > y$ , then  $m_1 > m_3 > m_2$ .
3. If  $y > x > z$ , then  $m_2 > m_1 > m_3$ .
4. If  $y > z > x$ , then  $m_2 > m_3 > m_1$ .
5. If  $z > x > y$ , then  $m_3 > m_1 > m_2$ .
6. If  $z > y > x$ , then  $m_3 > m_1 > m_2$ .

*Замечания 118.* Здесь я хочу перечислить некоторые свойства лексикографического порядка. Все мономы ниже от  $n$  переменных и мы используем какой-то лексикографический порядок.

1. Для любого монома  $m \neq 1$ , имеем  $1 < m$ .
2. Если  $m$  и  $m'$  – мономы такие, что  $m'$  делит  $m$ , то есть  $m = m't$  для некоторого монома  $t$ , то  $m' \leq m$ . Если при этом  $t \neq 1$ , последнее неравенство является строгим.
3. Если  $m, t, s$  – некоторые мономы такие, что  $m \leq t$ , тогда  $ms \leq ts$ . Если при этом  $m < t$ , то  $ms < ts$ .

**Утверждение 119.** *Предположим у нас зафиксирован какой-то лексикографический порядок на мономах от  $n$  переменных и  $m_1 > m_2 > \dots > m_k > \dots$  – строго убывающая цепочка мономов. Тогда эта цепочка конечная.*

*Доказательство.* Прежде всего мы можем переименовать переменные в  $x_1, \dots, x_n$  так, что они идут в порядке убывания  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ . Теперь предположим, что существует бесконечная цепочка убывающих мономов. Давайте напомним явно степени всех мономов на картинке ниже

Этап I	$x_1^{k_1(1)}$	$x_2^{k_2(1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(1)}$	Этап II	$x_1^{k_1}$	$x_2^{k_2(r_1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_1)}$
	$\vee$					$\parallel$	$\vee$		
	$x_1^{k_1(2)}$	$x_2^{k_2(2)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(2)}$		$x_1^{k_1}$	$x_2^{k_2(r_1+1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_1+1)}$
	$\vee$					$\parallel$	$\vee$		
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\vee$					$\parallel$	$\vee$		
	$x_1^{k_1(r_1)}$	$x_2^{k_2(r_1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_1)}$		$x_1^{k_1}$	$x_2^{k_2(r_2)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_2)}$
	$\parallel$					$\parallel$	$\parallel$		
	$x_1^{k_1(r_1+1)}$	$x_2^{k_2(r_1+1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_1+1)}$		$x_1^{k_1}$	$x_2^{k_2(r_2+1)}$	$\dots$	$x_n^{k_n(r_2+1)}$

В начале мы смотрим на степени по переменной  $x_1$ . По определению лексикографического порядка эти степени должны идти в невозрастающем порядке (возможно в нестрогом), то есть  $k_1(1) \geq k_1(2) \geq \dots$ . Однако, это последовательность натуральных чисел, она не может быть строго убывающей бесконечно и рано или поздно стабилизируется на некотором числе  $r_1$ , а именно  $k_1(r_1) = k_1(r_1 + 1) = \dots$ . Начиная с этого момента все степени у переменной  $x_1$  будут одинаковыми и равными, скажем,  $k_1$ .

Теперь посмотрим на степени по переменной  $x_2$  начиная с  $r_1$  монома:  $m_{r_1} > m_{r_1+1} > \dots$ . Так как степени при  $x_1$  уже не меняются и равны, то мы должны иметь  $k_2(r_1) \geq k_2(r_1 + 1) \geq \dots$ . Опять, это невозрастающая цепочка натуральных чисел, а потому она когда-нибудь стабилизируется. То есть найдется номер  $r_2 > r_1$  такой, что  $k_2(r_2) = k_2(r_2 + 1) = \dots$ . Обозначим эту общую степень по переменной  $x_2$  через  $k_2$ . Значит для всех мономов  $m_i$  с условием  $i \geq r_2$ , степени при  $x_1$  и  $x_2$  будут равны  $k_1$  и  $k_2$  соответственно.

Повторяя этот процесс, мы найдем номер  $r_3 > r_2$ , начиная с которого перестают меняться степени  $x_3$ . Потом находим  $r_4 > r_3$  начиная с которого перестают меняться степени  $x_4$  и так далее. В итоге мы найдем номер  $r_n$  такой, что начиная с него все степени всех переменных должны быть одинаковыми. Но тогда начиная с этого номера цепочка мономов  $m_i$  не может быть строго убывающей. Полученное противоречие завершает доказательство.  $\square$

*Замечание 120.* Существует популярная ошибка, о которой я хочу поговорить. Мы только что доказали, что не существует бесконечной строго убывающей цепочки мономов. Однако, это не значит, что меньше данного монома у нас лишь конечное число мономов. Действительно, давайте рассмотрим  $\mathbb{Q}[x, y]$  с порядком  $x > y$  и соответствующим лексикографическим упорядочиванием. Тогда существует бесконечно много мономов меньше, чем  $x^2$ . Действительно, любой моном  $xy^n$  строго меньше, чем  $x^2$ . Однако, когда мы пытаемся построить убывающую цепочку, нам надо выбрать конкретный  $xy^n$ , тогда мы получаем цепочку

$$x^2 > xy^n > xy^{n-1} > \dots > xy > x > y^m > y^{m-1} > \dots > y > 1$$

Обратите внимание, что в ней мы пропустили бесконечное число членов между  $x^2$  и  $xy^n$ , а так же бесконечное число членов между  $x$  и  $y^m$ . Таким образом убывающие цепочки начинающиеся с  $x^2$  могут быть сколь угодно большой длины, но обязательно конечны.

### 8.3 Редукция

Теперь после разговора о порядках, давайте определим процедуру редукции. Мы это сделаем в два шага: в начале определим элементарную редукцию, а потом уже и общий случай. Давайте напомним контекст. У нас зафиксировано некоторое поле  $F$ , кольцо многочленов  $F[x_1, \dots, x_n]$ , и произвольный лексикографический порядок на мономах от  $n$  переменных.

**Определение 121.** Предположим  $F$  – поле, мы фиксировали лексикографический порядок на мономах в  $F[x_1, \dots, x_n]$  и  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  – произвольный ненулевой многочлен. Тогда многочлен  $f$  может быть записан в виде

$$f = c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_k m_k, \quad c_i \in F, \quad m_i \text{ – мономы такие, что } m_1 > m_2 > \dots > m_k$$

Терм  $c_1 m_1$  называется старшим термом многочлена  $f$  и будет обозначаться  $T(f)$ . Моном  $m_1$  называется старшим мономом  $f$  и обозначается  $M(f)$ . Коэффициент  $c_1$  называется старшим коэффициентом многочлена  $f$  и будет обозначаться  $C(f)$ . По определению  $T(f) = C(f)M(f)$ . Часть  $c_2 m_2 + \dots + c_k m_k$  называется хвостом  $f$  и будет обозначаться  $f_0$ . Таким образом, любой многочлен  $f$  может быть записан как  $f = T(f) + f_0$ .

**Определение 122.** Предположим  $g \in F[x_1, \dots, x_n]$  – ненулевой многочлен и  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  – произвольный многочлен. Предположим

$$f = c_1 m_1 + \dots + c_i m_i + \dots + c_k m_k, \quad c_i \in F, \quad m_i \text{ – мономы такие, что выполнено } m_1 > m_2 > \dots > m_k$$

и

$$g = C(g)M(g) + g_0 = T(g) + g_0$$

Фиксируем моном  $m = m_i$  в многочлене  $f$  и предположим, что  $m$  делится на старший моном  $g$ , то есть  $m = tM(g)$ . Мы определим элементарную редукцию  $f$  относительно  $g$  следующим образом

$$f \xrightarrow{g} f' = f - \frac{c_i}{C(g)} tg$$

Многочлен  $f'$  – это результат элементарной редукции.

Если описать редукцию по простому, то она действует следующим образом: мы находим в  $f$  моном  $m_i$ , который делится на  $M(g)$  и заменяем его на хвост  $g$  умноженный на  $-c_i m_i / T(g)$ .

*Пример 123.* Рассмотрим кольцо  $\mathbb{Q}[x, y, z]$ ,  $f = xyz$ ,  $g_1 = xy - z$ , и  $g_2 = yz - 1$ . Порядок будет произвольным лексикографическим. Тогда

$$f \xrightarrow{g_1} xyz - z(xy - z) = z^2, \quad \text{или} \quad f \xrightarrow{g_2} xyz - x(yz - 1) = x$$

**Определение 124.** Предположим  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  – некоторое множество многочленов и  $f, f' \in F[x_1, \dots, x_n]$  – многочлены. Мы скажем, что  $f$  редуцируется к  $f'$  с помощью  $G$ , если существует конечная последовательность элементарных редукций как ниже<sup>16</sup>

$$f \xrightarrow{g_1} f_1 \xrightarrow{g_2} f_2 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_k} f_k = f' \quad \text{где } g_i \in G$$

Будем писать в этом случае  $f \xrightarrow{G} f'$ .

Если многочлен  $f'$  уже не редуцируем никаким  $g \in G$ , будем говорить, что  $f'$  является остатком  $f$  относительно  $G$ .

*Замечания 125.* 1. Многочлен  $f'$  не редуцируем никаким  $g \in G$  тогда и только тогда, когда каждый моном  $f'$  не делится ни на какой  $M(g)$  для  $g \in G$ .

- Важно отметить, что вообще говоря остаток не определен однозначно. Элементарные редукции  $f$  относительно членов  $G$  в разном порядке могут привести к разным остаткам. Вот пример подобного. Пусть  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  и фиксирован лексикографический порядок для  $x > y > z$ . Положим  $f = xyz$ ,  $g_1 = xy - 1$ ,  $g_2 = yz - 1$ , и  $G = \{g_1, g_2\}$ . Тогда,

$$f \xrightarrow{g_1} xyz - z(xy - 1) = z \quad \text{и} \quad f \xrightarrow{g_2} xyz - x(yz - 1) = x$$

Тогда по определению  $f \xrightarrow{G} z$  и  $f \xrightarrow{G} x$ . Более того, многочлены  $z$  и  $x$  не редуцируемы с помощью  $G$ . Значит, это два разных остатка  $f$  относительно  $G$ .

Как мы увидели в общем случае остаток многочлена  $f$  относительно  $G$  не единственный. Грубо говоря, такое происходит потому что множество  $G$  было выбрано не удачно. Таким образом можно выделить «хорошие» множества, для которых остаток будет получаться однозначным. Такая процедура ведет к понятию базиса Грёбнера.

**Определение 126** (Базис Грёбнера). Предположим  $F$  – некоторое поле,  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ , и у нас зафиксирован какой-то лексикографический порядок.<sup>17</sup> Будем говорить, что  $G$  является базисом Грёбнера если для любого  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  все его остатки совпадают.

Давайте поговорим о еще одном важном вопросе связанном с редукцией. Предположим нам дали многочлен  $f$  и множество  $G$ . Если  $f$  редуцируем относительно  $G$ , то мы можем сделать элементарную редукцию и получить  $f_1$ . Теперь если  $f_1$  тоже редуцируем, то мы можем провести элементарную редукцию и получить многочлен  $f_2$  и так далее. Вопрос в том остановится ли этот процесс когда-либо. Оказывается, что ответ на этот вопрос положительный, как показывает утверждение 130.

*Примеры 127.* Мы с вами познакомимся со способами проверки является ли множество  $G$  базисом Грёбнера. Сейчас же я хочу привести пару примеров без доказательства, просто потому что мы пока не готовы это объяснить.

- Для любого кольца многочленов  $F[x_1, \dots, x_n]$  с произвольным лексикографическим порядком множество  $G = \{g\}$  состоящее из одного ненулевого многочлена всегда является базисом Грёбнера.
- Пусть  $F[x, y, z, w]$  и мы используем какой-нибудь лексикографический порядок. Тогда множество  $G = \{xy - 1, zw + 1\}$  является базисом Грёбнера. Это происходит в силу того, что старшие мономы элементов  $G$  взаимно просты.

<sup>16</sup>Многочлены  $g_1, \dots, g_k$  не обязаны быть различными.

<sup>17</sup>Я хочу отметить, что понятие базиса Грёбнера сильно зависит от выбранного порядка. Если мы изменим порядок на переменных, то множество  $G$  может стать базисом Грёбнера или наоборот перестанет им быть.

**Определение 128.** Пусть  $F$  – некоторое поле и фиксирован некоторый лексикографический порядок на мономах от  $n$  переменных. Как и раньше, каждый многочлен  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  может быть представлен в виде

$$f = c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_k m_k, \quad c_i \in F, \quad m_i \text{ – мономы такие, что } m_1 > m_2 > \dots > m_k$$

Мы обозначим  $i$ -ый по старшинству моном  $m_i$  через  $M_i(f)$ . В частности  $M_1(f)$  – это старший моном  $f$ ,  $M_2(f)$  – это второй по старшинству моном в  $f$  и так далее. Обратите внимание, что  $i$ -ый по старшинству моном не обязан существовать в  $f$ , это происходит если  $f$  содержит меньше  $i$  мономов.

**Утверждение 129.** Пусть  $F$  – некоторое поле, мы работаем с многочленами  $F[x_1, \dots, x_n]$ , и некоторый лексикографический порядок задан. Пусть  $f, f', g \in F[x_1, \dots, x_n]$  такие, что  $f \xrightarrow{g} f'$  и  $M_1(f) = M_1(f'), \dots, M_{k-1}(f) = M_{k-1}(f')$ , и пусть мономы  $M_k(f)$  и  $M_k(f')$  существуют. Тогда,  $M_k(f) \geq M_k(f')$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f = c_1 m_1 + \dots + c_{k-1} m_{k-1} + c_k m_k + \dots + c_s m_s$ , где  $c_i \in F$  и  $m_i$  – мономы расположенные в убывающем порядке. Многочлен  $f'$  получен из  $f$  с помощью одной элементарной редукции. Это означает, что есть какой-то моном  $m_i$  делящийся на  $M(g)$ , который мы заменили на линейную комбинацию более младших мономов в  $f'$ . По предположению первые  $k-1$  моном в  $f$  и  $f'$  совпадают. А это значит, что ни один из них не был редуцирован. То есть  $i \geq k$ . Если  $i > k$  то,  $k$ -ый моном в  $f'$  такой же как и  $k$ -ый моном в  $f$ . Это значит, что в этом случае  $M_k(f) = M_k(f')$ . Если  $i = k$ , то мы заменили  $m_k$  на линейную комбинацию более младших мономов. Например результат может выглядеть так

$$\begin{array}{ccccccccccc} f & \longleftrightarrow & m_1 & \dots & m_{k-1} & m_k & & m_{k+1} & \dots & m_s \\ f' & \longleftrightarrow & m_1 & \dots & m_{k-1} & m'_k & m'_{k+1} & m'_{k_2} & \dots & m'_{s'} \end{array}$$

Но тогда моном  $m'_k = M_k(f')$  строго младше монома  $m_k = M_k(f)$ , а это означает что надо.  $\square$

**Утверждение 130.** Пусть  $F$  – некоторое поле, мы работаем с кольцом  $F[x_1, \dots, x_n]$ , на котором зафиксирован какой-то лексикографический порядок. Тогда для любого многочлена  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  и любого подмножества  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ , любая последовательность элементарных редукций  $f$  с помощью  $G$  конечна.

*Доказательство.* Предположим, что верно противное и найдется бесконечная последовательность элементарных редукций.

$$f \xrightarrow{g_1} f_1 \xrightarrow{g_2} f_2 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_k} f_k \xrightarrow{g_{k+1}} \dots$$

Давайте построим бесконечную убывающую цепочку мономов, что и даст нужное противоречие. Посмотрим на цепочку старших мономов  $M_1(f), M_1(f_1), M_1(f_2), \dots$ . Применяя утверждение 129 в случае  $k = 1$ , мы видим, что  $M_1(f) \geq M_1(f_1) \geq M_1(f_2) \geq \dots$ . По утверждению 119, эта цепочка обязана стабилизироваться, то есть найдется  $r_1$  такое, что  $M_1(f_{r_1}) = M_1(f_{r_1+1}) = \dots$ . Значит начиная с номера  $r_1$  все редукции имеют одинаковый старший моном, обозначим его через  $m_1$ . Так как последовательность редукций бесконечно, у нас должен существовать второй по старшинству моном во всех редукциях с момента  $r_1$ . Опять воспользуемся утверждением 129 но теперь для случая  $k = 2$ . Мы получим  $m_1 > M_2(f_{r_1}) \geq M_2(f_{r_1+1}) \geq \dots$ . Эта убывающая цепочка мономов должна стабилизироваться по утверждению 119. Значит найдется номер  $r_2 > r_1$  такой, что  $m_1 > M_2(f_{r_2}) = M_2(f_{r_2+1}) = \dots$ . То есть начиная с номера  $r_2$  все редукции имеют одинаковый старший моном  $m_1$  и одинаковый второй по старшинству моном, который обозначим через  $m_2$ . В итоге у нас получилась цепочка мономов  $m_1 > m_2$ . Так как цепочка бесконечная, то у нас обязательно существует третий моном во всех редукциях с номера  $r_2$ .

Значит мы как и выше можем повторить это рассуждение для третьего по величине монома. Потом для четвертого и так далее. В результате мы построим цепочку мономов  $m_1 > m_2 > m_3 > \dots > m_s > \dots$ . Построенная цепочка противоречит утверждению 119, что заканчивает доказательство.  $\square$

## 8.4 Критерий Бухбергера

Смотрите какая у нас есть скрытая проблема. А существуют ли базисы Грёбнера вообще? Или по-другому, как проверить является ли множество  $G$  базисом Грёбнера? Подобные вопросы решаются с помощью критерия Бухбергера. Я отложу доказательства критерия до следующей лекции, а сейчас хочу обсудить его формулировку и приложения.

**Определение 131.** Пусть  $F$  – поле,  $f_1, f_2 \in F[x_1, \dots, x_n]$  – некоторые ненулевые многочлен, и мы зафиксировали лексикографический порядок на мономах. Предположим, что  $f_1 = c_1 m_1 + f'_1$ , где  $c_1 m_1$  – старший член, и  $f_2 = c_2 m_2 + f'_2$ , где  $c_2 m_2$  – старший член. Пусть  $m$  – наименьшее общее кратное двух мономов  $m_1$  и  $m_2$ , тогда  $m = m_1 t_1 = m_2 t_2$ . В этом случае многочлен

$$S_{f_1 f_2} = c_2 t_1 f_1 - c_1 t_2 f_2 = c_2 t_1 f'_1 - c_1 t_2 f'_2$$

называется S-многочленом  $f_1$  и  $f_2$ .

Идея S-многочлена состоит в том, что мы хотим сократить старшие члены  $f_1$  и  $f_2$  наиболее экономным способом.

*Пример 132.* Рассмотрим  $\mathbb{Q}[x, y, z]$ ,  $f_1 = xy - 1$ ,  $f_2 = yz - 1$ , и  $\text{Lex}(x, y, z)$  как порядок. Тогда старшие члены будут  $m_1 = xy$  и  $m_2 = yz$ , и НОК старших членов будет  $xyz = m_1 z = m_2 x$ . Тогда

$$S_{f_1 f_2} = z f_1 - x f_2 = z(xy - 1) - x(yz - 1) = x - z$$

**Утверждение 133** (Критерий Бухбергера). *Предположим  $F$  – некоторое поле, мы зафиксировали лексикографический порядок на мономах от  $n$  переменных и  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  – некоторое множество ненулевых многочленов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1.  $G$  является базисом Грёбнера.
2. Для любых  $g_1, g_2 \in G$ ,  $S_{g_1 g_2}$  редуцируется к нулю с помощью любой редукции по множеству  $G$ .
3. Для любых  $g_1, g_2 \in G$ ,  $S_{g_1 g_2}$  редуцируется к нулю с помощью какой-то редукции по множеству  $G$ .

*Замечание 134.* В примере 132, мы видим, что S-полином от  $f_1$  и  $f_2$  не редуцируется к нулю относительно множества  $\{f_1, f_2\}$ . Значит это множество не является базисом Грёбнера.

Существует специальный случай, когда мы можем гарантировать, что S-полином автоматически редуцируется к нулю.<sup>18</sup>

**Утверждение 135.** *Пусть  $F$  – поле,  $g_1, g_2 \in F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ , и мы фиксировали какой-то лексикографический порядок. Предположим, что старшие мономы  $g_1$  и  $g_2$  взаимно просты. Тогда,  $S_{g_1 g_2}$  редуцируется к нулю с помощью множества  $\{g_1, g_2\}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $g_1 = c_1 m_1 + g'_1$  и  $g_2 = c_2 m_2 + g'_2$ , где  $m_i$  – старший моном в  $g_i$ ,  $c_i$  – старший коэффициент в  $g_i$  и  $g'_i$  – хвост  $g_i$ . Так как  $m_1$  и  $m_2$  взаимно просты, то S-многочлен от  $g_1$  и  $g_2$  имеет вид

$$S_{g_1 g_2} = c_2 m_2 g_1 - c_1 m_1 g_2 = c_2 m_2 (c_1 m_1 + g'_1) - c_1 m_1 (c_2 m_2 + g'_2) = c_2 m_2 g'_1 - c_1 m_1 g'_2$$

Теперь используем равенство  $c_i m_i = g_i - g'_i$  и перепишем S-полином в следующем виде

$$S_{g_1 g_2} = c_2 m_2 g'_1 - c_1 m_1 g'_2 = (g_2 - g'_2) g'_1 - (g_1 - g'_1) g'_2 = g'_2 g_1 - g'_1 g_2$$

То есть мы выразили S-полином в виде  $ag_1 + bg_2$ , при этом все мономы в  $a$  строго младше, чем  $m_2$ , а все мономы в  $b$  строго младше, чем  $m_1$ .

Теперь наша цель показать, что многочлен представленный в виде  $ag_1 + bg_2$  либо является нулевым, либо мы можем сделать хотя бы один шаг редукции с помощью множества  $\{g_1, g_2\}$ . Чтобы доказать это, мы покажем, что старший моном  $M(ag_1 + bg_2)$  либо совпадает с  $M(ag_1)$  либо с  $M(bg_2)$ , то есть старший моном суммы будет старшим мономом одного из слагаемых и не сократится. Если  $M(ag_1) > M(bg_2)$ , то  $M(ag_1)$  будет старшим мономом  $ag_1 + bg_2$ . Если  $M(ag_1) < M(bg_2)$ , то  $M(bg_2)$  является старшим мономом  $ag_1 + bg_2$ . Теперь нам осталось рассмотреть случай  $M(ag_1) = M(bg_2)$ . Однако, в этом случае  $m_1 = M(g_1)$  делит  $M(ag_1)$  и  $m_2 = M(g_2)$  делит  $M(bg_2)$ . Так как  $m_1$  и  $m_2$  являются взаимно простыми, то  $m_1 m_2$  делит  $M(ag_1) = M(a)M(g_1) = M(a)m_1$ . Значит  $m_2$  делит  $M(a)$ . Но это противоречит тому, что все мономы в  $a$  строго меньше, чем  $m_2$ . Значит такого не может быть, что старшие члены обоих слагаемых совпадут и все доказано.

Теперь предположим, что  $S_{g_1, g_2} = ag_1 + bg_2$  не является нулем. Тогда старший моном будет либо  $M(a)m_1$  либо  $M(b)m_2$ . В любом случае мы можем сделать редукцию относительно  $g_1$  или  $g_2$ . Без потери общности

<sup>18</sup>На самом деле есть еще один хитрый трюк, но я его упоминать не буду.



давайте считать, что старший моном будет  $M(a)m_1$ . Давайте явно отредуцируем старший моном с помощью  $g_1$ .

$$S_{g_1, g_2} \xrightarrow{g_1} ag_1 + bg_2 - C(a)M(a)g_1 = (a - C(a)M(a))g_1 + bg_2$$

Как мы видим в результате редукции мы уничтожили старший член в  $a$ , а значит мы получили многочлен такого же вида  $ag_1 + bg_2$  с условиями, что все мономы  $a$  строго младше  $m_2$  и все мономы  $b$  строго младше  $m_1$ . А значит мы можем продолжать этот процесс редукции. Так как по утверждению 130 редукция должна остановиться, то мы придем к нулевому многочлену (иначе можно было бы продолжить редукцию).  $\square$

*Пример 136.* Пусть  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  с порядком  $\text{Lex}(x, y, z)$ ,  $g_1 = x^2y - z$ , и  $g_2 = z^2 + 1$ . Тогда старшие мономы  $M(g_1) = x^2y$  и  $M(g_2) = z^2$  будут взаимно простыми. Значит их S-полином редуцируется к нулю с помощью  $\{g_1, g_2\}$ . Мы можем проверить этот факт руками, это не сложно. Но куда проще воспользоваться утверждением и полностью избежать вычисления.

## 8.5 Идеалы в кольце многочленов

Так оказывается, что большинство проблем связанных с многочленами можно решить используя идеалы. Потому очень важно уметь эффективно решать задачи связанные с идеалами. Давайте немного обсудим как устроены идеалы в кольце многочленов от нескольких переменных.

**Определение 137.** Пусть  $F$  – поле и у нас задано конечное множество многочленов  $g_1, \dots, g_k \in F[x_1, \dots, x_n]$ . тогда множество

$$(g_1, \dots, g_k) = \{g_1h_1 + \dots + g_kh_k \mid h_1, \dots, h_k \in F[x_1, \dots, x_n]\}$$

является идеалом в  $F[x_1, \dots, x_n]$  и называется идеалом порожденным многочленами  $g_1, \dots, g_k$ . Если  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ , то идеал  $(g_1, \dots, g_k)$  так же обозначается  $(G)$  для краткости.

Оказывается, что в кольце многочленов от нескольких переменных любой идеал в кольце  $F[x_1, \dots, x_n]$  порожден конечным множеством. Этот результат был получен Гильбертом и известен как Теорема Гильберта о базисе.

**Утверждение 138** (Теорема Гильберта о базисе). Пусть  $F$  – поле и  $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$  – некоторый идеал. Тогда существуют многочлены  $g_1, \dots, g_k \in F[x_1, \dots, x_n]$  такие, что  $I = (g_1, \dots, g_k)$ .

Оказывается, что если мы хотим эффективно решать задачи связанные с идеалами, то мы хотим уметь порождать эти идеалы с помощью базиса Грёбнера. Потому нам надо уметь решать следующую проблему: Пусть идеал  $I$  порожден многочленами  $g_1, \dots, g_k$  и нам задан лексикографический порядок. Так может оказаться, что множество  $\{g_1, \dots, g_k\}$  вообще говоря не базис Грёбнера. Потому мы хотим заменить множество порождающих на новое множество  $G$  такое, что оно так же порождает идеал  $I$ , то есть  $I = (G)$  и при этом  $G$  является базисом Грёбнера. В таком случае будем говорить, что  $G$  – это базис Грёбнера идеала  $I$ . Кроме того, мы хотим чтобы множество  $G$  было конечно для того, чтобы можно было эффективно что-то посчитать. Последняя проблема решается алгоритмом Бухбергера.

**Алгоритм Бухбергера** Как обычно, нам дано поле  $F$ , кольцо многочленов  $F[x_1, \dots, x_n]$ , и зафиксирован некоторый лексикографический порядок на мономах.

**Вход** Конечное множество многочленов  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ .

**Выход** Конечное множество многочленов  $G_0 \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$  таких, что

1.  $G_0$  является базисом Грёбнера.
2.  $(G) = (G_0)$ .

## Алгоритм

1. В начале инициализируем  $G_0 = G$ .
2. Для каждой пары  $g_i, g_j \in G_0$  мы считаем  $S_{g_i g_j}$  и редуцируем его с помощью  $G_0$  к остатку:  $S_{g_i g_j} \xrightarrow{G_0} r_{ij}$ .
3. Если все  $r_{ij}$  нули, то  $G_0$  является базисом Грёбнера по критерию Бухбергера. Если же есть ненулевые остатки, то мы обновляем  $G_0$  следующим образом  $G_0 \cup \{r_{ij} \mid r_{ij} \neq 0\}$  и повторяем алгоритм с шага (2).

Если мы хотим показать, что алгоритм работает, мы должны показать несколько вещей: 1) алгоритм останавливается за конечное число шагов, 2) множество  $G_0$  конечное, 3) полученное множество  $G_0$  является базисом Грёбнера, 4) множества  $G$  и  $G_0$  порождают один и тот же идеал. Самое сложное – доказать остановку алгоритма. Я отложу этот вопрос на будущее. Давайте объясним остальные пункты.

2) Мы изначально инициализируем  $G_0$  конечным множеством. После этого на каждом шаге алгоритма мы добавляем лишь конечное число элементов к  $G_0$ . Значит после конечного числа шагов  $G_0$  будет конечным.

3) Заметим, что алгоритм останавливается тогда и только тогда, когда все S-полиномы для  $G_0$  редуцируются к нулю. Что по критерию Бухбергера означает, что  $G_0$  является базисом Грёбнера.

4) Надо показать, что  $(G) = (G_n)$ . Достаточно показать, что на каждом шаге  $G_0$  и  $G_0 \cup \{r_{ij}\}$  порождают один и тот же идеал. Так как второе множество включает первое, то достаточно показать, что  $(G_0 \cup \{r_{ij}\}) \subseteq (G_0)$ . А для этого достаточно показать, что каждый остаток  $r_{ij} \in (G_0)$ . Действительно, для каждой пары  $g_i, g_j \in G_0$  S-полином  $S_{g_i g_j}$  имеет вид  $c_2 t_1 g_i - c_1 t_2 g_j \in (G_0)$  по определению. Теперь рассмотрим процесс редукции,  $S_{g_i g_j} \xrightarrow{G_0} r_{ij}$ . Это значит, что существует цепочка элементарных редукций:  $S_{g_i g_j} \xrightarrow{g'_1} f_1 \xrightarrow{g'_2} f_2 \xrightarrow{g'_3} \dots \xrightarrow{g'_k} f_k = r_{ij}$ . Потому нам лишь надо показать, что если  $f \in (G_0)$ ,  $g \in G_0$ , и  $f \xrightarrow{g} f'$ , то  $f' \in (G_0)$ . Но это ясно по определению, так как  $f' = f - \lambda t g$  для некоторого  $\lambda \in F$  и некоторого монома  $t$ .

## 8.6 Задача принадлежности идеалу и исключение переменных

Давайте обсудим парочку задач, которые можно решать с помощью базисов Грёбнера.

**Принадлежность идеалу** Пусть у нас дано поле  $F$ , кольцо многочленов  $F[x_1, \dots, x_n]$ , идеал  $I = (g_1, \dots, g_k)$  в кольце многочленов и некоторый многочлен  $f$ . Вопрос в том, как проверить принадлежит ли многочлен  $f$  идеалу  $I$ . Вот как можно решать эту задачу:

1. Зафиксируем какой-нибудь лексикографический порядок Lex.
2. Найдем базис Грёбнера  $G$  для идеала  $I$ .
3. Посчитаем остаток  $f$  относительно  $G$ , то есть  $f \xrightarrow{G} r$ .
4. Многочлен  $f$  лежит в  $I$  тогда и только тогда, когда  $r = 0$ .

Надо отметить, что если  $G$  не является базисом Грёбнера, то алгоритм выше «работает только наполовину». А именно, если мы получили, что остаток  $r = 0$ , то это гарантирует, что  $f$  лежит в идеале  $I$ . Однако, если  $r \neq 0$  и  $G$  – не базис Грёбнера, то отсюда еще не следует, что  $f$  не лежит в идеале. Действительно, в примере 132 S-полином  $S_{f_1 f_2}$  принадлежит идеалу  $(f_1, f_2)$ . Однако,  $S_{f_1 f_2}$  вообще не редуцируется с помощью множества  $\{f_1, f_2\}$ .

**Исключение переменных** Пусть нам дано поле  $F$ , кольцо многочленов  $F[x_1, \dots, x_n, x_{k+1}, \dots, x_n]$ , и идеал  $I = (g_1, \dots, g_k)$  в кольце многочленов. Теперь вопрос: как посчитать  $I \cap F[x_1, \dots, x_k]$ . Это значит, что мы хотим исключить все многочлены из  $I$ , которые зависят от переменных  $x_{k+1}, \dots, x_n$ . Прежде чем решать задачу, отметим, что множество  $I \cap F[x_1, \dots, x_k]$  является идеалом в кольце  $F[x_1, \dots, x_k]$ . Потому в ответе мы бы хотели задать этот идеал с помощью образующих. Оказывается можно сразу найти базис Грёбнера этого идеала. Вот как можно это сделать.

1. Зафиксируем такой лексикографический порядок, чтобы  $x_1, \dots, x_k < x_{k+1}, \dots, x_n$ . порядок между  $x_1, \dots, x_k$  или между  $x_{k+1}, \dots, x_n$  не имеет значения, главное, чтобы переменные, которые мы хотим оставить были младше тех, которые мы хотим исключить.
2. Вычислим базис Грёбнера  $G_0$  для идеала  $I$  относительно этого порядка.

3. Положим  $G = \{g \in G_0 \mid g \text{ не зависит от } x_{k+1}, \dots, x_n\}$ .

4. Тогда  $G$  является базисом Грёбнера для  $I \cap F[x_1, \dots, x_k]$  относительно ограничения выбранного лексикографического порядка на переменные  $x_1, \dots, x_k$ .

Теперь я хочу обсудить некоторую полезную вспомогательную лемму.

**Утверждение 139.** Пусть  $F$  – поле, рассмотрим кольцо многочленов  $F[x_1, \dots, x_n]$  и фиксируем лексикографический порядок на мономах.

1. Если  $f \xrightarrow{G} f'$  и  $m$  – некоторый моном, то  $mf \xrightarrow{G} mf'$ .
2. Если  $f_1 - f_2 \xrightarrow{G} 0$ , тогда  $f_1$  и  $f_2$  можно редуцировать к одному и тому же остатку с помощью  $G$ , то есть существует нередуцируемый с помощью  $G$  многочлен  $r$  такой, что  $f_1 \xrightarrow{G} r$  и  $f_2 \xrightarrow{G} r$ .

*Доказательство.* 1) Если  $f \xrightarrow{G} f'$ , то это значит, что у нас есть цепочка элементарных редукций вида

$$f \xrightarrow{g_1} f_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_k} f_k = f'$$

В частности  $f_{i+1} = f_i - c_i t_i g_{i+1}$ . Если умножить все эти равенства на  $m$  мы получим цепочку редукций

$$mf \xrightarrow{g_1} mf_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_k} mf_k = mf'$$

что и требовалось.

2) Пусть  $f_1 - f_2 \xrightarrow{g_1} \varphi_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_k} \varphi_k = 0$ . Мы покажем результат индукцией по  $k$ .

База индукции  $k = 0$ . В этом случае  $f_1 - f_2 = 0$ , значит  $f_1 = f_2$  и они точно редуцируются к одному и тому же остатку. Пусть теперь  $k > 0$ . Посмотрим на первый шаг редукции  $f_1 - f_2 \xrightarrow{g} \varphi_1$ . Пусть в этом шаге мы редуцировали моном  $m$  из разности  $f_1 - f_2$ . Этот моном взялся либо из  $f_1$  либо из  $f_2$  либо из обоих многочленов и не сократился. В любом случае можно выделить этот моном в  $f_1$  и в  $f_2$ :  $f_1 = at + h_1$  и  $f_2 = bt + h_2$ , где  $a, b \in F$  моном  $t$  не присутствует в  $h_1$  и  $h_2$  и при этом  $a \neq b$ . Обратим внимание кто-то один из  $a$  или  $b$  может оказаться нулем. Пусть  $g = c_g m_g + g_0$ , где  $c_g$  – старший коэффициент и  $m_g$  – старший моном и пусть  $t = tm_g$ . Тогда редукция разности выполняется по следующей формуле

$$f_1 - f_2 \xrightarrow{g} (a - b)t + h_1 - h_2 - \frac{a - b}{c_g} tg = \varphi_1$$

Давайте перепишем это следующим образом

$$\varphi_1 = f_1 - \frac{a}{c_g} tg - \left( f_2 - \frac{b}{c_g} tg \right)$$

Если  $a$  не равно нулю, то есть если моном  $t$  присутствует в  $f_1$ , тогда выражение  $f_1 - \frac{a}{c_g} tg$  будет редукцией монома  $t$  в  $f_1$  с помощью  $g$ . А если  $a = 0$ , то это выражение просто равно  $f_1$ . Аналогично для  $f_2$ . Теперь зададим

$$f'_1 = f_1 - \frac{a}{c_g} tg, \quad f'_2 = f_2 - \frac{b}{c_g} tg$$

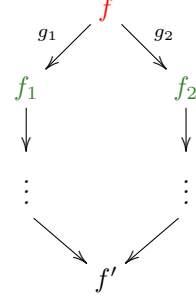
Мы видим, что либо  $f_i = f'_i$  либо  $f_i$  редуцируется элементарной редукцией к  $f'_i$ . При этом по построению  $\varphi_1 = f'_1 - f'_2$ . А значит по индукции  $f'_1$  и  $f'_2$  можно отредуцировать к одному и тому же остатку. Так как  $f_i$  можно отредуцировать к  $f'_i$ , то результат доказан.  $\square$

## 8.7 Доказательство критерия Бухбергера

Теперь я хочу расплатиться с долгами за предыдущую лекцию и доказать много чего недоказанного. Начать я хочу с критерия Бухбергера. Его доказательство основано на вспомогательном утверждении, которое называется Diamond Lemma.

**Утверждение 140** (The Diamond Lemma). Пусть  $F$  – поле, мы фиксировали лексикографический порядок на мономах от  $n$  переменных и  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  – некоторое множество. Тогда следующие условия эквивалентны

1.  $G$  является базисом Грёбнера.
2. Для любого многочлена  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  и любых элементарных редукций  $f \xrightarrow{g_1} f_1$  и  $f \xrightarrow{g_2} f_2$  (где  $g_1, g_2 \in G$ ) найдется  $f' \in F[x_1, \dots, x_n]$  такой, что  $f_1 \xrightarrow{G} f'$  и  $f_2 \xrightarrow{G} f'$ .<sup>19</sup>



*Доказательство.* (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть  $r_1$  – остаток  $f_1$  относительно  $G$  и  $r_2$  – остаток  $f_2$  относительно  $G$ . В частности  $f_1 \xrightarrow{G} r_1$  и  $f_2 \xrightarrow{G} r_2$ . По определению  $r_1$  и  $r_2$  так же являются остатками  $f$ . Так как  $G$  является базисом Грёбнера все остатки  $f$  равны между собой. Значит  $r_1 = r_2$ . А потому  $f' = r_1 = r_2$  удовлетворяет всем требованиям.

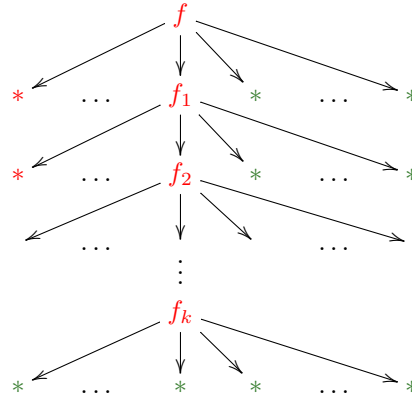
(2) $\Rightarrow$ (1). Нам надо показать, что любой многочлен  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  имеет только один остаток относительно  $G$ . Предположим противное, что найдется многочлен  $f$ , который имеет хотя бы два разных остатка. Давайте рассмотрим все элементарные редукции  $f$  относительно всех элементов  $G$ . Тогда возможно два случая:

1. Все элементарные редукции имеют единственный остаток относительно  $G$ .
2. Существует хотя бы одна редукция, у которой есть хотя бы два разных остатка.

Я хочу показать, что мы можем выбрать многочлен  $f$  имеющий хотя бы два разных остатка, но при этом все его элементарные редукции имеют по одному остатку. Если  $f$  уже такой, то ничего доказывать не надо. Потому можно предположить, что хотя бы одна элементарная редукция  $f_1$  многочлена  $f$  имеет несколько разных остатков. Если  $f_1$  удовлетворяет свойству (1), то мы нашли нужный многочлен. Иначе у него есть элементарная редукция  $f_2$ , которая имеет несколько разных остатков. То есть мы имеем цепочку редукций

$$f \xrightarrow{g_1} f_1 \xrightarrow{g_2} f_2 \xrightarrow{g_3} f_3 \xrightarrow{g_4} \dots$$

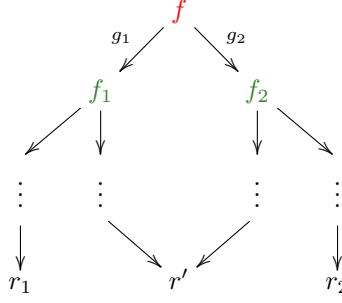
По утверждению 130, такая цепочка ограничена. Причина, по которой мы не можем продолжить эту цепочку – все редукции какого-то многочлена  $f_k$  имеют ровно один остаток. Давайте для наглядности изобразим этот процесс на картинке ниже. Красным цветом отмечены многочлены имеющие несколько разных остатков. Зеленым цветом отмечены многочлены имеющие единственный остаток.



Теперь мы можем предположить, что  $f$  имеет хотя бы два разных остатка, но при этом все его элементарные редукции имеют один единственный остаток. Предположим, что  $f \xrightarrow{G} r_1$  и  $f \xrightarrow{G} r_2$  – два разных остатка. По определению каждая цепочка редукции начинается с какой-то элементарной редукции. Потому найдутся многочлены  $g_1, g_2 \in G$  и многочлены  $f_1, f_2 \in F[x_1, \dots, x_n]$  такие, что

$$f \xrightarrow{g_1} f_1 \xrightarrow{G} r_1 \quad \text{and} \quad f \xrightarrow{g_2} f_2 \xrightarrow{G} r_2$$

С другой стороны, по нашему предположению, существует многочлен  $f'$  такой, что  $f_1$  и  $f_2$  редуцируются к нему с помощью  $G$ . Давайте доредуцируем  $f'$  до остатка  $r'$ . Подытожим, что произошло на следующей картинке:



По выбору  $f$ ,  $r_1 \neq r_2$  – два разных остатка. С другой стороны, многочлены  $f_1$  и  $f_2$  имеют единственный остаток. Потому, каждый остаток  $f_1$  одинаковый. Но  $r_1$  и  $r'$  являются остатками  $f_1$ . Потому,  $r_1 = r'$ . Аналогичный аргумент показывает, что  $r_2 = r'$ . Значит  $r_1 = r' = r_2$  – противоречие. Это противоречие возникло из нашего предположения, что найдется многочлен  $f$  имеющий хотя бы два разных остатка. Значит это предположение было не верно, что и доказывает требуемое.  $\square$

**Утверждение 141** (Критерий Бухбергера). Пусть  $F$  – поле, мы фиксировали лексикографический порядок на мономов от  $n$  переменных, и  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  – некоторое множество. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  является базисом Грёбнера.
2. Для любых  $g_1, g_2 \in G$ , любая редукция  $S_{g_1 g_2}$  относительно  $G$  ведет к нулевому остатку.
3. Для любых  $g_1, g_2 \in G$ , существует редукция  $S_{g_1 g_2}$  относительно  $G$  ведущая к нулевому остатку.

**Доказательство.** (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим  $g_1, g_2 \in G$ ,  $g_1 = c_1 m_1 + g'_1$ ,  $g_2 = c_2 m_2 + g'_2$ , и наименьшее общее кратное старших мономов  $m_1$  и  $m_2$  является  $m = t_1 m_1 = t_2 m_2$ . Положим  $f = c_2 t_1 g_1$ . Тогда  $f$  редуцируется к нулю с помощью  $g_1$ . С другой стороны,  $f$  редуцируется к  $S_{g_1 g_2}$  с помощью  $g_2$ . Действительно,

$$f \xrightarrow{g_2} f' = c_2 t_1 g_1 - c_1 t_2 g_2 = S_{g_1 g_2}$$

Значит остатки  $f'$  относительно  $G$  являются остатками  $f$ . Но  $f$  редуцируется к нулю и  $G$  является базисом Грёбнера. Значит  $f'$  имеет только нулевые остатки, что и означает, что любая редукция  $f'$  приводит к нулю.

(2) $\Rightarrow$ (3). Эта импликация ясна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Нам надо показать, что  $G$  является базисом Грёбнера. Для этого нам достаточно проверить, что выполняется второе условие из Diamond Lemma. Предположим, что нам задан произвольный многочлен  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  и две редукции  $f \xrightarrow{g_1} f_1$  и  $f \xrightarrow{g_2} f_2$ , где  $g_1, g_2 \in G$ . Нам надо показать, что  $f_1$  и  $f_2$  редуцируются к одному и тому же многочлену  $f'$  с помощью  $G$ . Предположим  $g_1 = c_1 m_1 + g'_1$  и  $g_2 = c_2 m_2 + g'_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  являются старшими мономами в  $g_1$  и  $g_2$  соответственно. Предположим, что редукции имеют вид  $f_1 = f - a_1 t_1 g_1$  и  $f_2 = f - a_2 t_2 g_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  – некоторые коэффициенты, а  $t_1$  и  $t_2$  – мономы. Утверждение 139 говорит, что нам достаточно показать, что  $f_1 - f_2$  редуцируется к нулю относительно  $G$ , то есть надо показать, что  $a_2 t_2 g_2 - a_1 t_1 g_1 \xrightarrow{G} 0$ .

Давайте посмотрим на старшие мономы многочленов  $t_1 g_1$  и  $t_2 g_2$ . Возможны два случая: либо мономы различны, либо они равны. Рассмотрим эти случаи по порядку.

**случай 1** Не теряя общности, можно предположить, что  $M(t_2 g_2) > M(t_1 g_1)$ . Тогда многочлен  $a_2 t_2 g_2 - a_1 t_1 g_1$  зависит от монома  $M(t_2 g_2)$ , точнее он будет его старшим мономом. А раз этот моном явно присутствует и делится на  $M(g_2)$ , то мы можем проделать редукцию относительно  $g_2$ , а именно

$$a_2 t_2 g_2 - a_1 t_1 g_1 \xrightarrow{g_2} a_2 t_2 g_2 - a_1 t_1 g_1 - a_2 t_2 g_2 = -a_1 t_1 g_1 \xrightarrow{g_1} 0$$

**случай 2** Теперь рассмотрим случай  $m = M(t_1 g_1) = M(t_2 g_2)$ . Посмотрим дополнительно на старшие коэффициенты многочленов  $a_1 t_1 g_1$  и  $a_2 t_2 g_2$ . Коэффициенты будут  $a_1 c_1$  и  $a_2 c_2$  соответственно. Теперь у нас есть два подслучая: старшие коэффициенты либо равны, либо нет.

**случай 2а** Предположим  $a_2c_2 = a_1c_1$ . Тогда  $\lambda = a_2/c_1 = a_1/c_2$ . Давайте покажем, что многочлен  $a_2t_2g_2 - a_1t_1g_1$  пропорционален S-многочлену от  $g_1$  и  $g_2$ . Пусть  $d$  – наибольший общий делитель  $t_1$  и  $t_2$ . Тогда,  $t_1 = dt'_1$  и  $t_2 = dt'_2$ . Значит,

$$a_2t_2g_2 - a_1t_1g_1 = \lambda d(c_1t'_2g_2 - c_2t'_1g_1) = \lambda dS_{g_2g_1}$$

По предположению  $S_{g_2g_1}$  как-то редуцируется к нулю. Тогда утверждение 139 пункт (1), гласит, что  $\lambda dS_{g_2g_1}$  так же редуцируется к нулю.

**случай 2б** Теперь рассмотрим случай  $a_2c_2 \neq a_1c_1$ . В этот раз оно  $m = M(t_2g_2) = M(t_1g_1)$  не сокращается в разности  $a_2t_2g_2 - a_1t_1g_1$ . Давайте редуцируем его с помощью  $g_1$ , получим

$$a_2t_2g_2 - a_1t_1g_1 \xrightarrow{g_1} a_2t_2g_2 - a_1t_1g_1 - \frac{a_2c_2 - a_1c_1}{c_1}t_1g_1 = a_2t_2g_2 - \frac{a_2c_2}{c_1}t_1g_1$$

Но теперь, мы оказались в **случае 2а** потому что  $a_2c_2 = \frac{a_2c_2}{c_1}c_1$ . Значит последний многочлен редуцируется к нулю по предыдущему случаю и все доказано.  $\square$

## 8.8 Остановка алгоритма Бухбергера

Начать я хочу со вспомогательной леммы про мономы.

**Утверждение 142.** Пусть у нас дана последовательность мономов от  $n$  переменных:  $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ . Предположим, что для любого  $i$  моном  $m_i$  не делится на более ранние мономы  $m_j$  при  $j < i$ . Тогда данная последовательность мономов конечна.

*Доказательство.* Сделаем одно общее замечание. Если мы перейдем от последовательности  $m_i$  к любой подпоследовательности, то условие, что каждый элемент не делится на все предыдущие сохраняется. Теперь предположим, что последовательность  $m_i$  бесконечная и попытаемся прийти к противоречию. Далее доказательство будем вести по индукции по количеству переменных. Если у нас всего одна переменная и  $m_1 = x_1^m$ , то чтобы  $m_i$  не делилось на  $m_1$  в них степень по  $x_1$  должна быть меньше  $m$ . А значит у нас не может быть бесконечной последовательности (противоречие с нашим предположением).

Теперь рассмотрим случай  $n$  переменных. Так как  $m_i$  не делится на  $m_1$ , то найдется переменная (зависящая от  $i$ ) по которой степень в  $m_i$  меньше, чем степень в  $m_1$ . Так как последовательность мономов бесконечная, а переменных конечное число, то для какой-то переменной найдется бесконечное число мономов. Будем считать что это переменная  $x_n$ . Перейдем к этой подпоследовательности, тогда получим, что для любого монома  $m_i$  его степень по  $x_n$  меньше, чем степень  $m_1$  по  $x_n$ . Значит у нас всего встречается конечное число степеней по  $x_n$ . Опять переходя к подпоследовательности можно считать, что степени всех мономов по  $x_n$  одинаковая и равна  $d$ . Значит все мономы выглядят так  $m_i = x_1^{k_1(i)} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}(i)} x_n^d$ . При этом вспомним, что  $m_i$  не делится на более ранние мономы  $m_j$  при  $j < i$ . Построим последовательность  $m'_i = x_1^{k_1(i)} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}(i)}$ . Тогда ясно, что в этой последовательности никакой моном не делится на более ранние мономы и эта последовательность от меньшего числа переменных. Тогда по индукции она должна быть конечной, но мы построили бесконечную последовательность. Полученное противоречие завершает доказательство.  $\square$

**Утверждение 143.** Алгоритм Бухбергера останавливается.

*Доказательство.* Давайте вспомним как работает алгоритм Бухбергера. Мы стартуем с конечного множества  $G \subseteq F[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ , мы фиксируем лексикографический порядок на мономах. Теперь алгоритм действует следующим образом

1. Инициализация  $G_0 = G$ .
2. Для всех  $g_i, g_j \in G_0$  найдем  $S_{g_i, g_j}$  и отредуцируем его к остатку  $r_{ij}$  с помощью  $G_0$ .
3. Если все  $r_{ij} = 0$ , то  $G_0$  ответ. Иначе положим  $G_0 = G_0 \cup \{r_{ij} \mid r_{ij} \neq 0\}$  и перейдем к шагу 2.

Давайте предположим, что алгоритм не останавливается. Тогда после первого цикла мы добавили хотя бы один остаток в  $G_0$ , обозначим его  $r_1$ . И после второго цикла мы добавили хотя бы один остаток, назовем его  $r_2$ . И так далее. В итоге мы получим бесконечную последовательность многочленов  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ . Посмотрим на их старшие мономы  $M(r_1), M(r_2), \dots, M(r_n), \dots$ . Если мы покажем, что никакой моном в этой последовательности не делится на предыдущий, мы получим противоречие с предыдущей леммой, что докажет наше

утверждение. Рассмотрим какой-нибудь многочлен  $r_i$ . Тогда на  $i$ -ом шаге алгоритма многочлены  $r_1, \dots, r_{i-1}$  уже лежат в  $G_0$  и мы добавляем к ним  $r_i$ . При этом  $r_i$  является остатком относительно  $G_0$ . В частности он не редуцируется относительно  $r_1, \dots, r_{i-1}$ . Но тогда старший моном  $r_i$  не может делиться на старшие мономы  $r_1, \dots, r_{i-1}$ . Действительно, в противном случае мы могли бы отредуцировать старший моном в  $r_i$ , что невозможно.  $\square$

## 9 Факторы

В этом разделе я хочу поговорить о некоторых важных абстракциях, которые используются в алгебре и которые я успешно обходил все это время. Начать я хочу с конструкции фактора. Эта конструкция очень простая, но требует некоторых психологических усилий по привыканию к ней и потому основная сложность в ее освоении будет не техническая, а идейно-психологическая.

### 9.1 Фактор множества

Обычно изложение начинают с фактор групп. Однако, для лучшего понимания, я предлагаю начать с еще более простого объекта – фактор множества. Концепция в этом случае следующая. Предположим у нас есть некоторое множество  $X$  и мы хотим «склеить» какие-то его элементы между собой. По сути, чтобы «склеить» элементы, надо ввести новое равенство на множестве  $X$ , которое бы перестало различать склеенные элементы. В математике для такого нового равенства есть более приличное название – отношение эквивалентности. Напомню, что бинарное отношение  $\sim$  на  $X$  является отношением эквивалентности, если выполнены следующие три свойства

1.  $x \sim x$  для любого  $x \in X$ .
2.  $x \sim y$  влечет  $y \sim x$  для любых  $x, y \in X$ .
3. Если  $x \sim y$  и  $y \sim z$ , то  $x \sim z$  для любых  $x, y, z \in X$ .

В этом случае множество  $X$  разбивается в непересекающееся объединение классов эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается  $X/\sim$ . То есть можно считать так, что мы для каждого класса эквивалентности заводим точку, на которой пишем имя этого класса, а потом все эти точки сваливаем в одну кучу под названием  $X/\sim$ .

Если у нас есть множество  $X$  с отношением эквивалентности  $\sim$ , то мы можем построить естественным образом отображение  $\pi: X \rightarrow X/\sim$ , где каждый элемент  $x$  идет в его класс эквивалентности.<sup>20</sup> Это отображение будет сюръективно, так как каждый класс состоит из точек  $X$ . Более того, по этому отображению можно восстановить исходное отображение эквивалентности по следующему правилу. Заметим, что  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $\pi(x) = \pi(y)$ . Пусть теперь наоборот у нас есть какое-то сюръективное отображение  $\phi: X \rightarrow Y$ . Тогда введем отношение эквивалентности  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $\phi(x) = \phi(y)$ . Легко видеть, что мы действительно получили отношение эквивалентности.<sup>21</sup> По определению отношения эквивалентности каждый класс эквивалентности однозначно соответствует точкам  $Y$ , а именно для  $y \in Y$  множество  $\phi^{-1}(y)$  будет классом эквивалентности. Таким образом можно считать, что  $Y$  – это и есть множество классов эквивалентности, а отображение  $\phi$  есть не что иное, как сопоставление каждому элементу из  $X$  его класса эквивалентности. Таким образом нет разницы между изучением сюръективных отображений из  $X$  или отношений эквивалентности на  $X$ .

### Примеры

1. Пусть  $\mathbb{Z}$  выбрано в качестве множества и отношение эквивалентности будет  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  имеют одинаковую четность. Тогда у нас только два класса эквивалентности: четные числа и нечетные числа. Назовем эти классы «0» и «1», для четных и нечетных соответственно. Тогда  $\mathbb{Z}/\sim = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$ . Отображение  $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim$  отображает четные числа в «0», а нечетные в «1».
2. Пусть теперь  $\mathbb{R}$  выбрано в качестве множества. Зададим отношение эквивалентности следующим образом:  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Тогда классом эквивалентности точки  $x$  является множество чисел на прямой отличающееся от  $x$  на целое число, то есть  $x + \mathbb{Z}$ . Ясно, что каждый

<sup>20</sup> Существует много обозначений для класса эквивалентности  $x$ , например:  $[x]$ ,  $\bar{x}$  или  $\text{cl}(x)$  и т.д.

<sup>21</sup> Я все же рекомендую проверить три свойства тем, кто хочет разобраться во всех деталях.



класс эквивалентности имеет только одну точку пересечения с полуинтервалом  $[0, 1)$ . Но такой полуинтервал можно отождествить с окружностью радиуса 1 по правилу  $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . Тогда множество  $\mathbb{R}/\sim$  можно описать как полуинтервал  $[0, 1)$ . Но можно получить еще более красивое описание в виде окружности радиуса 1 на плоскости. Тогда отображение  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$  задается по правилу  $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ .

## 9.2 Фактор группы

Теперь давайте посмотрим, что получится, если мы постараемся склеить элементы группы  $(G, \cdot)$ . Если мы будем склеивать просто так, не думая про операцию, то можно считать, что у нас вообще нет никакой операции и мы просто работаем с множеством  $G$ . Чтобы почувствовать влияние операции надо, чтобы отношение эквивалентности было согласовано с операцией.

**Определение 144.** Пусть  $G$  – группа и  $\sim$  – отношение эквивалентности на  $G$ . Отношение  $\sim$  называется конгруэнцией, если для любых  $x, y, u, v \in G$  таких, что  $x \sim y$  и  $u \sim v$  следует, что  $x \cdot u \sim y \cdot v$ .

**Операция на классах эквивалентности** Если у нас есть конгруэнция на группе  $G$ , то мы можем естественным образом снабдить множество классов эквивалентности  $G/\sim$  операцией, которая превращает это множество в группу, а отображение  $\pi: G \rightarrow G/\sim$  в гомоморфизм групп. Действительно, пусть у нас есть два класса эквивалентности  $\alpha, \beta \in G/\sim$ , тогда выберем из каждого из них по точке, скажем  $x \in \alpha$  и  $y \in \beta$ , где  $x, y \in G$ . Теперь перемножим  $xy \in G$ . Это произведение попадает в какой-то класс  $\gamma$ . Тогда надо положить  $\alpha \cdot \beta = \gamma$ . Единственная проблема этого определения – надо проверить, что оно не зависит от выбора элементов  $x$  и  $y$ . Давайте предположим, что мы выбрали другие элементы  $x' \in \alpha$  и  $y' \in \beta$ . Но в этом случае  $x \sim x'$  и  $y \sim y'$  по определению классов эквивалентности. Тогда в силу того, что  $\sim$  конгруэнция,  $x \cdot y \sim x' \cdot y'$ . А значит, элементы  $xy$  и  $x'y'$  лежат в одном и том же классе эквивалентности  $\gamma$ . А это и означает, что определение не зависит от выбора точек в классах эквивалентности. По-другому про это можно думать так: давайте перемножим все точки  $\alpha$  на все точки  $\beta$ , то есть рассмотрим множество  $\alpha \cdot \beta$ . Тогда это множество целиком попадает внутрь  $\gamma$ , то есть  $\alpha \cdot \beta \subseteq \gamma$ . Пусть  $x, y \in G$  – какие-то элементы. Давайте обозначим их классы эквивалентности через  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  соответственно. Тогда правило умножения определенное выше в этих обозначениях выглядит так:  $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ .

**Утверждение 145.** Пусть  $G$  – некоторая группа и  $\sim$  – конгруэнция на  $G$ . Тогда множество  $G/\sim$  с введенной выше операцией является группой.

*Доказательство.* Нам надо проверить три аксиомы группы.

1) **Ассоциативность.** Нам надо выбрать произвольные три класса из  $G/\sim$ . Для этого можно выбрать три элемента  $x, y, z \in G$  и рассмотреть их классы  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in G/\sim$ . В этом случае нам надо проверить, что

$$(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \bar{x}(\bar{y}\bar{z})$$

Вычислим обе части пользуясь нашим определением. Видим, что  $(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \overline{xy} \bar{z} = \overline{(xy)z}$ . Аналогично  $\bar{x}(\bar{y}\bar{z}) = \bar{x} \overline{yz} = \overline{x(yz)}$ . Но так как элементы  $(xy)z$  и  $x(yz)$  равны в силу ассоциативности, то и их классы тоже равны. Что доказывает ассоциативность умножения в  $G/\sim$ .

2) **Наличие нейтрального элемента.** Пусть  $e \in G$  – нейтральный элемент. Давайте покажем, что класс  $\bar{e}$  будет выполнять роль единичного элемента в  $G/\sim$ . Действительно для любого  $x \in G$  выполнено

$$\bar{x}\bar{e} = \overline{xe} = \bar{x} \text{ и } \bar{e}\bar{x} = \overline{ex} = \bar{x}$$

3) **Обратимость каждого элемента.** Нам надо проверить, что для каждого элемента  $x \in G$  его класс  $\bar{x}$  обратим в  $G/\sim$ . Для этого достаточно предъявить обратный. Давайте проверим, что элемент  $x^{-1}$  будет обратным. Действительно,

$$\overline{\bar{x}x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \bar{e} \text{ и } \overline{\bar{x}^{-1}\bar{x}} = \overline{x^{-1}x} = \bar{e}$$

□

Теперь переключимся на вот какой вопрос. Не задавались ли вы вопросом: а почему мы задали произведение классов эквивалентности именно по такому правилу? Оказывается, что ни по какому другому правилу его задать нельзя. Это следует из следующего наблюдения.

**Утверждение 146.** Пусть  $G$  – группа,  $X$  – множество и  $\pi: G \rightarrow X$  – сюръективное отображение. Тогда существует не более одной операции на  $X$  такой, что  $X$  превращается в группу, а  $\pi$  в гомоморфизм групп.



*Доказательство.* Если таких операций нет, то победа. Пусть есть две такие операции, скажем  $\cdot$  и  $\circ$ . Покажем, что они обязаны совпадать. Рассмотрим две точки  $x, y \in X$ . Так как  $\pi$  сюръективно, то у них существуют прообразы в  $G$ , то есть найдутся такие  $g, h \in G$ , что  $\pi(g)x$  и  $\pi(h)y$ . Тогда

$$x \cdot y = \pi(g) \cdot \pi(h) = \pi(gh)$$

где  $gh$  – произведение в  $G$ . С другой стороны

$$x \circ y = \pi(g) \circ \pi(h) = \pi(gh)$$

То есть обе операции вычисляются по одному и тому же правилу. Значит они совпадают.  $\square$

**Замечание** Давайте я обсужу причину, почему операция в предыдущем утверждении может не существовать. В обозначениях доказательства для перемножения элементов  $x, y \in X$  мы должны положить  $x \cdot y = \pi(gh)$ , где  $\pi(g) = x$  и  $\pi(h) = y$ . Но предположим, что у нас есть несколько прообразов у  $x$  и несколько прообразов у  $y$ . Например есть  $g', h' \in G$  такие, что  $\pi(g') = x$  и  $\pi(h') = y$ . Тогда у нас должно быть  $x \cdot y = \pi(g'h')$ . Но отображение  $\pi$  может быть задано так, что  $\pi(gh) \neq \pi(g'h')$ . Именно в этом случае мы получим противоречие с существованием операции  $\cdot$ . На самом деле, эта причина является единственной для несуществования операции на  $X$ .

Чтобы эффект выше был более понятным, я продемонстрирую его на примере. Пусть у нас  $G = (\mathbb{Z}, +)$ . Отношение эквивалентности на  $G$  зададим так, что  $0 \sim 1$ , а все остальные элементы эквивалентны только самим себе. В качестве отображения возьмем  $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim$  – отображение в классы эквивалентности. Пусть класс  $\{0, 1\}$  называется  $A$ , класс  $\{2\}$  называется  $B$ , а класс  $\{3\}$  называется  $C$ . Тогда если мы хотим перемножить  $A$  и  $B$ , то с одной стороны

$$A \cdot B = \pi(0) \cdot \pi(2) = \pi(0 + 2) = \pi(2) = B$$

$A$  с другой

$$A \cdot B = \pi(1) \cdot \pi(2) = \pi(1 + 2) = \pi(3) = C$$

Что приводит к противоречию, произведение не может равняться одновременно двум разным элементам.

### 9.3 Конгруэнции и нормальные подгруппы

Оказывается, что в случае группы существует биекция между конгруэнциями и нормальными подгруппами. То есть любую конгруэнцию можно описать с помощью нормальной подгруппы. Давайте я объясню, как это соответствие работает.

Пусть  $G$  – некоторая группа и  $\sim$  – конгруэнция на  $G$ . Тогда построим подмножество  $N_\sim = \{g \in G \mid g \sim e\}$ . Я утверждаю, что получится обязательно нормальная подгруппа в  $G$  (я пока отложу доказательство). Наоборот, пусть  $N \subseteq G$  – нормальная подгруппа, тогда определим отношение  $\overset{N}{\sim}$  следующим образом  $x \overset{N}{\sim} y$  тогда и только тогда, когда  $xy^{-1} \in N$ . Я утверждаю, что получится конгруэнтность на  $G$  (пока откладываем доказательство). Более того, эти операции взаимно обратные, то есть они дают биекцию между множеством всех конгруэнций на  $G$  и множеством всех нормальных подгрупп в  $G$ .

**Проверка** 1) В начале проверим, что подмножество  $N_\sim$  действительно дает нормальную подгруппу. Для этого надо проверить три аксиомы группы и условие нормальности. Идем по-порядку

1. По условию  $N_\sim = \{g \in G \mid g \sim e\}$ . Надо проверить, что  $e$  лежит в  $N_\sim$ . Но по определению  $e \sim e$ , значит лежит.
2. Пусть  $x \in N_\sim$ , то есть  $x \sim e$ . Надо проверить, что  $x^{-1} \sim e$ . По определению выполнено  $x^{-1} \sim x^{-1}$ . Тогда по определению конгруэнции  $xx^{-1} \sim ex^{-1}$ . То есть  $e \sim x^{-1}$ , а значит и  $x^{-1} \sim e$ , что и требовалось.
3. Пусть теперь  $x, y \in N_\sim$  и надо показать, что  $xy \in N_\sim$ . То есть  $x \sim e$  и  $y \sim e$ . Но тогда  $xy \sim ee = e$ , что и требовалось.
4. Теперь надо взять любой  $x \in N_\sim$  и  $y \in G$  и проверить, что  $xyx^{-1} \in N_\sim$ . Так как  $x \sim e$  и  $\sim$  конгруэнция получаем, что  $xyx^{-1} \sim yex^{-1} = e$ , что и требовалось.

2) Теперь проверим, что  $\overset{N}{\sim}$  является конгруэнцией. Для этого надо проверить три аксиомы отношения эквивалентности и еще одну аксиому согласованности с операцией. Пойдем по-порядку

1. Надо проверить, что  $x \stackrel{N}{\sim} x$ . Действительно  $xx^{-1} = e \in N$ .
2. Надо проверить, что  $x \stackrel{N}{\sim} y$  влечет  $y \stackrel{N}{\sim} x$ . Нам дано, что  $xy^{-1} \in N$ . А надо показать, что  $yx^{-1} \in N$ . В этом случае обратный элемент тоже лежит в  $N$ , то есть  $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in N$ , что и требовалось.
3. Теперь пусть  $x \stackrel{N}{\sim} y$  и  $y \stackrel{N}{\sim} z$ . Надо показать, что  $x \stackrel{N}{\sim} z$ . Нам дано  $xy^{-1} \in N$  и  $yz^{-1} \in N$ , тогда и произведение лежит в  $N$ . То есть  $xz^{-1} = xy^{-1}yz^{-1} \in N$ , что и требовалось.
4. До этого мы не пользовались нормальностью  $N$ , нам было достаточно, что  $N$  является подгруппой. Для доказательства, что  $\stackrel{N}{\sim}$  согласована с операцией в группе, нам понадобится нормальность. Пусть  $x \stackrel{N}{\sim} y$  и  $u \stackrel{N}{\sim} v$ , нам надо показать, что  $xu \stackrel{N}{\sim} yv$ . Нам дано, что  $xy^{-1} \in N$  и  $uv^{-1} \in N$ , надо показать, что  $xu(yv)^{-1} \in N$ . Рассмотрим требуемое выражение

$$xu(yv)^{-1} = xuv^{-1}y^{-1} = x(y^{-1}y)uv^{-1}y^{-1} = (xy^{-1})y(uv^{-1})y^{-1}$$

Тогда  $xy^{-1}$  лежит в  $N$  по условию,  $uv^{-1}$  лежит в  $N$ . Так как  $y \in G$  и  $N$  нормальна, то  $y(uv^{-1})y^{-1}$  тоже лежит в  $N$ . А значит и все выражение лежит в  $N$ .

- 3) Теперь проверим, что эти операции взаимно обратные. Для этого надо проверить следующие равенства

$$\sim \mapsto N_{\sim} \mapsto \stackrel{N_{\sim}}{\sim} = \sim \quad \text{и} \quad N \mapsto \stackrel{N}{\sim} \mapsto N_{\stackrel{N}{\sim}} = N$$

Проверим первое равенство. Как проверить, что два отношения равны, надо показать, что два элемента эквивалентны в смысле  $\stackrel{N_{\sim}}{\sim}$  тогда и только тогда, когда они эквивалентны в смысле  $\sim$ . Пусть  $x \stackrel{N_{\sim}}{\sim} y$ . Это равносильно тому, что  $xy^{-1} \in N_{\sim}$ , что по определению означает, что  $xy^{-1} \sim e$ . Но так как  $\sim$  конгруэнтность, мы можем рассмотреть  $y \sim y$  и умножить на предыдущее равенство. Тогда  $xyy^{-1} \sim ey$ , то есть  $x \sim y$ . Обратно, если  $x \sim y$ , то рассмотрим  $y^{-1} \sim y^{-1}$  и перемножим. Получим  $xy^{-1} \sim yy^{-1} = e$ . Значит действительно  $x \stackrel{N_{\sim}}{\sim} y$  равносильно  $x \sim y$ . Теперь второе равенство. По определению

$$N_{\stackrel{N}{\sim}} = \{g \in G \mid g \stackrel{N}{\sim} e\} = \{g \in G \mid ge^{-1} \in N\} = N$$

**Описание фактора в терминах нормальной подгруппы** Пусть теперь  $G$  – некоторая группа и  $N \subseteq G$  – нормальная подгруппа. Возьмем отношение  $\stackrel{N}{\sim}$  и покажем, что классы эквивалентности совпадают в точности со смежными классами группы  $N$ . Фиксируем  $x \in G$  и рассмотрим  $\{y \in G \mid y \stackrel{N}{\sim} x\}$ . Тогда

$$\{y \in G \mid y \stackrel{N}{\sim} x\} = \{y \in G \mid yx^{-1} \in N\} = \{y \in G \mid y \in Nx\} = Nx = xN$$

То есть класс эквивалентности элемента  $x$  совпадает с его смежным классом (не важно левым или правым, так как  $N$  нормальная).

Множество смежных классов  $G$  по  $N$  обозначается через  $G/N$ . Таким образом  $G/N = G/\stackrel{N}{\sim}$ . Потому в случае групп фактор группу по нормальной подгруппе определяют с помощью нормальной подгруппы и обозначаются  $G/N$ . Давайте я резюмирую, что произошло. Мы определяем  $G/N$  как множество смежных классов  $N$ . На этом множестве определена операция  $gN \cdot hN = ghN$ . Нейтральным элементом является  $N$ . А обратный вычисляется по правилу  $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ . При этом отображение  $\pi: G \rightarrow G/N$  по правилу  $g \mapsto gN$  является сюръективным гомоморфизмом групп.

**Пример** В качестве группы возьмем  $\mathbb{Z}$ , а в качестве нормальной подгруппы  $n\mathbb{Z}$ . Тогда множество смежных классов имеет вид

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, n-1 + n\mathbb{Z}\}$$

Таким образом мы можем отождествить множество смежных классов с остатками  $\mathbb{Z}_n$  по модулю  $n$ . Более того, можно проверить, что операция на остатках совпадает с операцией на смежных классах, то есть  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$  – изоморфизм групп.

## 9.4 Теоремы о гомоморфизме

В этом разделе я хочу обсудить две теоремы, позволяющие эффективно работать с факторами.

**Утверждение 147** (Первая теорема о гомоморфизме). Пусть  $\phi: G \rightarrow H$  – гомоморфизм групп. Тогда существует канонический изоморфизм  $\bar{\phi}: G/\ker \phi \rightarrow \text{Im } \phi$  по правилу  $g \ker \phi \mapsto \phi(g)$ .

*Доказательство.* Давайте я поясню формулу, по которой работает отображение  $\bar{\phi}$ . Оно говорит. Возьмем какой-нибудь класс эквивалентности из  $x \in G/\ker \phi$  и выберем в нем представителя  $g$ . После чего рассмотрим  $\phi(g) \in H$  и положим его в качестве образа класса эквивалентности  $x$ . В чем проблема этого определения? Проблема в том, что если мы выберем другого представителя, то образ может оказаться другим элементом из  $H$ , а значит не определен корректно. Потому в начале нам надо доказать, что  $\bar{\phi}$  действительно корректное отображение.

Возьмем произвольный смежный класс  $x \in G/\ker \phi$ . Выберем в нем представителя  $g \in x$ . Тогда мы знаем, что  $x = g \ker \phi$ . Значит любой другой элемент из этого класса имеет вид  $gh$ , где  $h \in \ker \phi$ . Давайте рассмотрим его образ  $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(g)$ . Таким образом мы видим, что все представители смежного класса идут в один и тот же элемент  $\phi(g)$  для выбранного в самом начале элемента  $g \in x$ . Значит отображение корректно. Кроме того, по определению ясно, что это отображение сюръективно, потому что мы любой элемент вида  $\phi(g)$  получим как образ смежного класса  $g \ker \phi$ .

Теперь давайте покажем, что  $\bar{\phi}$  является гомоморфизмом групп. Для этого нам надо выбрать два произвольных смежных класса в  $G/\ker \phi$ , скажем  $g_1 \ker \phi$  и  $g_2 \ker \phi$ , и проверить, что

$$\bar{\phi}(g_1 \ker \phi g_2 \ker \phi) \stackrel{?}{=} \bar{\phi}(g_1 \ker \phi) \bar{\phi}(g_2 \ker \phi)$$

Давайте посчитаем левую часть

$$\bar{\phi}(g_1 \ker \phi g_2 \ker \phi) = \bar{\phi}(g_1 g_2 \ker \phi) = \phi(g_1 g_2)$$

С другой стороны правая часть будет

$$\bar{\phi}(g_1 \ker \phi) \bar{\phi}(g_2 \ker \phi) = \phi(g_1) \phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)$$

Получили одно и то же, значит  $\bar{\phi}$  действительно гомоморфизм.

Теперь проверим, что это инъективный гомоморфизм. Для этого достаточно проверить, что  $\ker \bar{\phi}$  состоит только из нейтрального элемента (по утверждению 43 пункт (4)). Возьмем  $g \ker \phi \in \ker \bar{\phi}$ . Тогда по определению  $\bar{\phi}(g \ker \phi) = \phi(g) = e \in H$ . Значит  $g \in \ker \phi$ . Но тогда  $g \ker \phi = \ker \phi$ . Но этот смежный класс является нейтральным элементом в фактор группе. То есть инъективность доказана.  $\square$

По сути относиться к первой теореме надо так. Она позволяет описать любую фактор группу. А именно. Мы знаем, что подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она является ядром некоторого гомоморфизма. Для ядер гомоморфизма нормальность мы доказывали в утверждении 43 пункт (2). А для нормальных подгрупп нужный гомоморфизм доставляется отображением факторизации, как показывала конструкция прошлой лекции. Потому, чтобы описать фактор  $G/N$  надо подобрать гомоморфизм  $f: G \rightarrow H$  так, чтобы  $\ker f = N$ . Тогда  $G/N$  просто совпадает с  $\text{Im } f$  с точностью до изоморфизма.

### Примеры

1. Рассмотрим группы  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_n$  и отображение  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  по правилу  $k \mapsto k \pmod{n}$ . Тогда легко видеть, что это отображение является гомоморфизмом групп. Этот гомоморфизм сюръективен, так как в любой остаток переходит число равное этому остатку. А ядро гомоморфизма есть  $n\mathbb{Z}$ . Значит по теореме о гомоморфизме имеем  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$  при этом  $k + n\mathbb{Z} \mapsto k \pmod{n}$ .
2. Рассмотрим отображение  $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$ , которое каждой перестановке сопоставляет ее знак. Мы знаем, что это отображение уважает умножение, то есть гомоморфизм групп. Более того образом будет вся правая группа, а ядро – четные перестановки  $A_n$ . Значит по теореме о гомоморфизме  $S_n / A_n = \mathbb{Z}_2$ .
3. Рассмотрим отображение  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  по правилу  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ . Тогда образом будет  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$  – окружность радиуса один с центром в нуле на комплексной прямой. А ядром будет множество положительных вещественных чисел  $\mathbb{R}_{>0}$ . Действительно,  $z$  идет в  $z/|z| = 1$  равносильно тому, что  $z = |z| \in \mathbb{R}$ . То есть  $z$  положительное вещественное число. Таким образом по теореме о гомоморфизме имеем  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_{>0} = S^1$ .

4. Рассмотрим отображение  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  по правилу  $z \mapsto |z|$ . Тогда образом является множество положительных вещественных чисел  $\mathbb{R}_{>0}$ . А ядро –  $S^1$  комплексные числа по модулю равные 1. То есть  $\mathbb{C}^*/S^1 = \mathbb{R}_{>0}$ .

Теперь я хочу обсудить еще одну версию теоремы о гомоморфизме, которая позволяет строить гомоморфизмы факторгрупп.

**Утверждение 148** (Вторая теорема о гомоморфизме). Пусть  $G$  – некоторая группа,  $N \subseteq G$  – нормальная подгруппа и  $\phi: G \rightarrow H$  – некоторый гомоморфизм. Тогда существует гомоморфизм  $\gamma: G/N \rightarrow H$  такой, что  $\phi = \gamma \circ \pi$  тогда и только тогда, когда  $N \subseteq \ker \phi$ . Изобразим все на диаграмме ниже

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \gamma & \\ G/N & & \end{array}$$

Более того в случае существования  $\gamma$  обязательно единственное и задано по правилу  $\gamma(gN) = \phi(g)$ , а ядро  $\gamma$  равно  $\ker \phi/N$ .

*Доказательство.* В начале покажем, что если  $\gamma$  существует, то  $N \subseteq \ker \gamma$ . Действительно, пусть  $h \in N$ , и мы знаем, что  $\phi = \gamma \circ \pi$ . Применим к  $h$  последнее равенство, получим  $\phi(h) = \gamma(\pi(h)) = \gamma(e) = e$ . То есть действительно любой элемент  $N$  должен идти в нейтральный элемент  $H$  под действием  $\phi$ .

В обратную сторону. Пусть  $N \subseteq \ker \phi$ . Давайте покажем, что существует требуемое  $\gamma$ . Прежде всего определим  $\gamma$  по следующему правилу  $\gamma(gN) = \phi(g)$ . Нам надо показать, что это правило корректно, то есть что оно не зависит от выбора представителя смежного класса. Давайте возьмем другой элемент из смежного класса, он имеет вид  $gh$ , где  $h \in N$ . Тогда  $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(g)$ , так как  $N$  лежит в ядре  $\phi$ . Значит действительно образ не зависит от выбора представителя.

Теперь проверим, что это отображение является гомоморфизмом групп. Для этого нам надо выбрать два произвольных смежных класса в  $G/N$ , скажем  $g_1N$  и  $g_2N$ , и проверить, что

$$\gamma(g_1N g_2N) \stackrel{?}{=} \gamma(g_1N) \gamma(g_2N)$$

Давайте посчитаем левую часть

$$\gamma(g_1N g_2N) = \gamma(g_1 g_2 N) = \phi(g_1 g_2)$$

С другой стороны правая часть будет

$$\gamma(g_1N) \gamma(g_2N) = \phi(g_1) \phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)$$

Получили одно и то же, значит  $\gamma$  действительно гомоморфизм.

Теперь надо проверить, что ядро этого гомоморфизма будет  $\ker \phi/N$ . Это значит, что ядро должно состоять из смежных классов  $gN$  таких, что  $g \in \ker \phi$ . Давайте проверим это, пусть  $gN$  лежит в  $\ker \gamma$ . Тогда  $\gamma(gN) = e$ , то есть  $\phi(g) = e$ . Значит  $g \in \ker \phi$ , что требовалось.

Осталось показать, что такое  $\gamma$  единственное. Но это простое следствие сюръективности  $\pi$ . Действительно, если мы возьмем  $g \in G$  и хотим обеспечить равенство  $\phi(g) = \gamma(\pi(g))$ , то это значит, что элемент  $\pi(g)$  должен перейти в элемент  $\phi(g)$ . Но  $\pi(g) = gN$  по определению. Значит мы обязаны положить образом  $gN$  элемент  $\phi(g)$ .  $\square$

## 9.5 Свободные абелевы группы и их факторы

Оказывается к абелевым группам можно попытаться применить понятия из линейной алгебры такие как базис. Однако выясняется, что не всякая абелева группа обладает базисом. Тем не менее, те группы, что обладают базисом устроены очень просто и их можно изучать напрямую. А все остальные группы – это их факторы. В этом смысле мы можем подобраться к изучению произвольных абелевых групп, причем этот подход очень даже конструктивный. Напомню, что для абелевых групп я буду использовать аддитивную нотацию, то есть операция будет обозначаться в виде сложения  $+$ , а возведение в степень является умножением на целое число.

**Определение 149.** Пусть  $G$  – абелева группа и  $g_1, \dots, g_n \in G$  – некоторые элементы.

1. Будем говорить, что элементы  $g_1, \dots, g_n$  линейно независимы, если для любого набора целых чисел  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  из условия  $k_1g_1 + \dots + k_ng_n = 0$  в  $G$  следует, что все коэффициенты  $k_i$  равны нулю в  $\mathbb{Z}$ .
2. Будем говорить, что элементы  $g_1, \dots, g_n$  являются порождающими  $G$ , если для любого элемента  $g \in G$  найдется набор целых чисел  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  такой, что  $g = k_1g_1 + \dots + k_ng_n$ .
3. Будем говорить, что набор  $g_1, \dots, g_n$  является базисом  $G$ , если этот набор одновременно линейно независим и порождающий.

**Определение 150.** Пусть  $G$  – абелева группа и  $g_1, \dots, g_n$  – некоторые ее элементы. Введем следующее обозначение

$$\langle g_1, \dots, g_n \rangle = \{k_1g_1 + \dots + k_ng_n \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$$

То есть мы определили множество всех линейных комбинаций элементов  $g_1, \dots, g_n$  с целочисленными коэффициентами. Это множество является подгруппой в  $G$  и называется подгруппой порожденной  $g_1, \dots, g_n$ . Это наименьшая подгруппа содержащая все элементы  $g_i$ . Кроме того,  $g_1, \dots, g_n$  являются порождающими для этой подгруппы.

### Примеры

1. Пусть  $G = \mathbb{Z}^n$  и  $g_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -ом месте. Тогда набор элементов  $g_1, \dots, g_n$  является базисом.
2. Пусть  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , где  $n \neq 0$ . Тогда любой элемент  $G$  линейно зависим. Действительно, для любого  $g \in G$  верно, что  $ng = 0$ , при этом  $n \neq 0$ . Элемент  $1 + n\mathbb{Z}$  является порождающим. Таким образом в абелевых группах в отличие от векторных пространств бывает так, что в группе нет линейно независимых порождающих.
3. Пусть  $G = (\mathbb{Q}, +)$ . Тогда любой ненулевой элемент  $G$  будет линейно независим. Действительно, если  $0 \neq q \in \mathbb{Q}$  и  $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ , то  $nq \neq 0$  в  $\mathbb{Q}$ . Однако, любые два элемента из  $G$  уже линейно зависимы. Действительно, пусть  $q_1 = \frac{a}{b}$  и  $q_2 = \frac{c}{d}$ . Тогда  $cdq_1 - adq_2 = 0$  и при этом набор  $(cd, -ad)$  не нулевой. То есть максимальное линейно независимое множество содержит один элемент. И этот элемент не может быть порождающим. Потому что если вы рассмотрите  $\langle q \rangle = \{n\frac{a}{b} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } q = \frac{a}{b}\}$ , то в знаменателях этих элементов вы получите только те простые числа, которые входят в знаменатель  $q$ . То есть это еще один пример абелевой группы без базиса, но содержащей линейно независимые множества.

**Утверждение 151.** Пусть  $G$  – абелева группа и  $g_1, \dots, g_n$  – базис  $G$ . Тогда  $G$  изоморфна  $\mathbb{Z}^n$ .

*Доказательство.* Давайте рассмотрим отображение  $\phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  по правилу  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1g_1 + \dots + a_ng_n$ . Так как  $g_1, \dots, g_n$  порождающие, то отображение  $\phi$  по определению сюръективно. Теперь покажем инъективность. Пусть так получилось, что для двух наборов  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_n)$  их образы совпали, то есть

$$a_1g_1 + \dots + a_ng_n = b_1g_1 + \dots + b_ng_n$$

Перенесем все в одну сторону, получим

$$(a_1 - b_1)g_1 + \dots + (a_n - b_n)g_n = 0$$

Так как  $g_1, \dots, g_n$  линейно независимы, то все коэффициенты должны быть нулевыми. А это значит, что наборы  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_n)$  одинаковые. Теперь надо показать, что  $\phi$  уважает операцию сложения. Для этого надо показать тождество

$$\phi \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Но это делается прямым вычислением. Левая и правая части по определению вычисляются в выражение  $(a_1 + b_1)g_1 + \dots + (a_n + b_n)g_n$ .  $\square$

**Замечание** Пусть  $G$  – абелева группа с конечным числом порождающих  $g_1, \dots, g_n$ . Тогда отображение  $\pi: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  по правилу  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1g_1 + \dots + a_ng_n$  является сюръективным. Тогда по первой теореме о гомоморфизме  $G$  изоморфно  $\mathbb{Z}^n / \ker \pi$ . При этом  $\ker \pi$  – это некоторая подгруппа в  $\mathbb{Z}^n$ . Таким образом мы можем описать любую абелеву группу с конечным числом порождающих, как фактор свободной группы  $\mathbb{Z}^n$ .

## 9.6 Конечные абелевы группы

Ранее мы с вами использовали факт (см. утверждение 46), что любая конечная абелева группа  $G$  изоморфна прямому произведению циклических групп. Здесь я хочу объяснить, как доказывается этот факт с помощью свободных групп и их факторов.

Пусть  $G$  – конечная абелева группа. Тогда в ней конечное число элементов, а значит конечное число порождающих (можно в качестве порождающих взять все элементы группы  $G$ , этого заведомо хватит). Но тогда, в силу замечания выше, мы можем представить группу  $G$  в виде  $\mathbb{Z}^n/N$ , где  $N \subseteq \mathbb{Z}^n$  – некоторая подгруппа. Так как  $N$  так же конечная, то в ней тоже найдется конечное число порождающих, пусть это будут  $h_1, \dots, h_m \in N$ . Тогда  $N = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ . То есть мы представили

$$G = \mathbb{Z}^n / \langle h_1, \dots, h_m \rangle$$

Давайте представим на секунду, что нам так повезло, что у группы  $N$  нашлись следующие порождающие

$$h_1 = (d_1, 0, \dots, 0), h_2 = (0, d_2, 0, \dots, 0), \dots, h_n = (0, \dots, 0, d_n)$$

Давайте покажем, что в этом случае  $G$  изоморфна  $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ . Действительно, рассмотрим гомоморфизм

$$\phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 \pmod{d_1}, \dots, a_n \pmod{d_n})$$

Ясно, что это сюръективный гомоморфизм. Но что будет его ядром? Его ядро будет состоять из последовательностей  $(k_1 d_1, \dots, k_n d_n)$  для произвольных  $k_i \in \mathbb{Z}$ . То есть это в точности подгруппа порожденная  $h_1, \dots, h_n$ . Значит по теореме о гомоморфизме в этом случае  $G = \mathbb{Z}^n / \ker \phi$  изоморфна прямому произведению циклических групп.

Теперь давайте посмотрим на общую ситуацию, когда  $h_i$  выглядят произвольным образом и наша группа имеет вид

$$G = \mathbb{Z}^n / \langle h_1, \dots, h_m \rangle$$

Что можно сделать в этом случае? Обратите внимание на две вещи: мы можем по-разному выбрать порождающие в группе  $\langle h_1, \dots, h_m \rangle$  и мы можем по-разному выбрать базис в группе  $\mathbb{Z}^n$ . Если мы выбираем порождающие или базис по-другому, то мы не меняем самих групп, а значит мы не изменим фактор, но при этом получим более удобное представление для фактора.

Давайте поймем, какие манипуляции с базисом и порождающими нам доступны. Сначала порождающие:

1. Заменяем один из образующих  $h_i$  на  $h_i + m h_j$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $i \neq j$ , а остальные образующие оставим те же самые.
2. Поменяем местами два образующих.
3. Умножим один из образующих на  $-1$ .

Можно увидеть методом пристального взгляда, что это не меняет порождаемую подгруппу. А теперь базис

1. Заменяем один из базисных векторов  $e_i$  на  $e_i + m e_j$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $i \neq j$ , а остальные базисные векторы оставим те же самые.
2. Поменяем местами два базисных вектора.
3. Умножим один из базисных векторов на  $-1$ .

Опять же, призывая на помощь метод пристального взгляда, можно увидеть, что после этих преобразований базис остается базисом. Теперь посмотрим, как это все выглядит в координатах. Если мы сложим все порождающие  $h_1, \dots, h_m$  по строкам в целочисленную матрицу, то преобразования над образующими дают нам целочисленные элементарные преобразования строк этой матрицы, а преобразования базиса дают нам целочисленные элементарные преобразования столбцов этой матрицы. Но можно проверить, что любую целочисленную матрицу можно диагонализировать с помощью таких преобразований. Это значит что общий случай сводится к разобранному частному случаю. Что завершает доказательство.