Uniwersytet Jagielloński w Krakowe
Wydział Matematyki i Infromatyki
Instytut Matematyki

**Dmytro Karpus**

# Zastosowania miar Hausdorffa

Praca proseminaryjna napisana pod kierunkiem
Prof. Piotra Tworzewskiego

Kraków, 2022

# Spis treści

# Wstęp

W tej pracy będzie opisana miara Hausdorffa i jej zastosowanie do mierzania zbiorów na podrozmaitościach w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

W tym celu w pierwszym rozdziale wprowadzimy konstrukcę Caratheodory'ego. Potem zbudujemy na niej miary Hausdorffa i Lebesgue'a oraz zbadamy własności tych miar, które będą wykorzystywane w dalszych dowodach.

W następnym rozdziale wprowadzimy definicę miary Lebesgue'a na podrozmaitościach. Jednocześnie zdefinujemy Jacobian i udowodnimy równoważność tej definicji do definicji Federa [Fed]. Potem pokażemy ważne własności tej miary i jej $\sigma$-algebry. W końcu drugiegu rozdziału udowodnimy twierdzenie, które pokazauje jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach.

W trzecim rozdziale na wstępie udowodnimy ważne fakty przygotowawcze dotyczące funckji klasy $C^1$ dla dowodu głównego twierdzenia tej pracy proseminaryjnej. Potem udowodnimy twierdzenie dotyczące tego jak liczyć miarę Hausdorffa obrazu funckji klasy $C^1$. Na podstawie tego twierdzenia oraz twierdzenia z drugiego rozdziału o tym jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach dowiemy się, że miara Lebesgue'a na podrozmaitościach i miara Hausdorffa to jest to samo, co pozwala nam wykorzystywać wszelkie własności miary Hausdorffa dla liczenia miar zbiorów i całek na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$ .

# Rozdział 1
# Miara Lebesgue'a i Hausdorffa

## 1.1 Konstrukcja Caratheodory'ego

**Definicja 1.1.1 (Konstrukcja Caratheodory'ego)**
Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ i niech $\zeta : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ będzie odwozorowaniem takim, że $\zeta(\emptyset) = 0$. Funkcję $\zeta$ będziemy czasem nazywać funkcją tworzącą. Dla dowolnego $0 < \delta \leqslant +\infty$ niech $\phi_\delta, \phi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ będą zdefiniowane następująco:

$$\phi_\delta(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j) : A_j \in \mathcal{F}, diam(A_j) \leqslant \delta, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\}, \quad A \subset X$$
$$\phi := \sup_{\delta > 0} \phi_\delta$$

Powyższa konstrukcja nazywa się konstrukcją Carathedeorego.

**Twierdzenie 1.1.1 (o miarach z konstrukcji Carathedeory'ego)**
$\phi_\delta$ dla $\delta \in (0, +\infty]$ oraz $\phi$ są miarami zewnętrznymi na X.
**Dowód:** [Two, AM4, 2.16]

**Twierdzenie 1.1.2 (Algebra zupełna z konstrukcji Carathedeory'ego)**
Niech $X$ będzie zbiorem, $\alpha$ - miara zewnętrzna na X i $\mathfrak{M}$ - rodzina zbiorów miarzalnych w sensie Caretheodory'ego, to znaczy takich zbiorów $A$, że

$$\forall T \subset X : \alpha(T \cap A) + \alpha(T \backslash A) = \alpha(A)$$

Wtedy:

1. $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$-ciałem,
2. $(A \subset X \wedge \alpha(A) = 0) \Longrightarrow A \in \mathfrak{M}$ ,
3. $\alpha|_{\mathfrak{M}}$ jest miarą zupełną na $\mathfrak{M}$ .

**Dowód:** ([Two, AM4, 2.30])

## 1.2 Miara Hausdorffa

**Definicja 1.2.1 (Miara Hausdorffa)**
Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy $p \in [0, +\infty]$. Dla $Y \subset X$ przyjmujemy

$$h^p(Y) = \begin{cases} 0, & Y = \emptyset, \\ 2^{-p}\alpha(p)(diam Y)^p, & Y \neq \emptyset. \end{cases}$$

gdzie $\alpha(p) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^p}{\Gamma(\frac{1}{2}p+1)}$, wartości $diam(Y)^p$ dla dowolnych srednic z zakresu $[0, +\infty]$ otrzymujemy przedłużając funkcję $(0, +\infty) \ni x \to x^p \in (0, +\infty)$ do ciągłego przekształcenia przedziałów $[0, +\infty]$ przy ustalonym $p \in [0, +\infty)$.

**Definicja 1.2.2 ($\mathcal{B}$-regularity)**
Miara zewnętrzna $\mu$ jest $\mathcal{B}$-regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $A$ istnieje taki zbiór borelowski $A \subset B$, że $\mu(A) = \mu(B)$.

**Twierdzenie 1.2.1 (Własności miary Hausdorffa)**
Niech $(X, d)$ przestrzeń metryczna, $p \in [0, +\infty)$. Wtedy:

1. $\mathcal{H}^p$ jest miarą zewnętrzną metryczną na $X$,
2. $\mathcal{B}(X) \subset H_p$, gdzie $H_p$ to $\sigma$-algebra zbiorów mierzalnych w sensie Caretheodory'ego,
3. $\mathcal{H}^p$ na $H_p$ jest miarą zupełną,
4. $\forall Y \subset X \exists G_\delta \ni G \subset Y : \mathcal{H}^p(G) = \mathcal{H}^p(Y)$,
5. $\mathcal{H}^p$ jest miarą zewnętrzną $\mathcal{B}$-regularną na $X$.

**Dowód:** [Two, AM4, 2.51]

**Twierdzenie 1.2.2 (Borelowska regularność miary Hausdorffa)**
$(X, d)$ - przestrzeń metryczna, $p \in [0, +\infty), A \subset X.\mathcal{H}^p(A) < +\infty$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $A \in H_p$,
2. $\exists G$ typu $G_\delta \exists C \subset X : \mathcal{H}(C) = 0 \wedge A = G \backslash C$ ,
3. $\exists B \in \mathcal{B}(X) : \exists C \subset X : \mathcal{H}^p(C) = 0 \wedge A = B \cup C$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 2.52]

## 1.3 Miara Lebesgue'a

**Definicja 1.3.1 (Miara Lebesgue'a)**
Niech $\mathcal{F}$ będzie rodzina kostek zwartych w $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$ czyli zbiorów postaci

$$I = I_1 \times \cdots \times I_m$$

gdzie $I_j = [a_j, b_j]$ są zwarte przedziały $\mathbb{R}$ dla $j = 1, \ldots, m$. Określiamy objętość $I$ jako

$$vol(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

Dodatkowo przyjmijmy $vol(\emptyset) = 0$
W ten sposób otrzymujemy funkcję

$$\zeta : \mathcal{F} \ni I \to \zeta(I) = vol(I) \in [0, +\infty].$$

Wtedy korzystając z konstrukcji Carateodry'ego i funkcji $\zeta$ jako funckji tworzącej dostajemy m-wymiarową miarę Lebesgue'a $\mathcal{L}^m$ oraz jej $\sigma$-algebry $L_m$ .

**Twierdzenie 1.3.1 (Własności miary Lebesgue'a)**
Niech $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy:

1. $\mathcal{L}^m$ jest miarą zewnętrzną metrzyczną w $\mathbb{R}^m$,
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset L_m$,
3. $\mathcal{L}^m$ na $L_m$ jest miarą zupełną,
4. Jeśli $I$ kostka, to $\mathcal{L}^m(I) = vol(I)$,
5. Jeśli $Y$ ograniczony, to $\mathcal{L}^m(Y) < \infty$,
6. $\mathcal{L}^m$ jest $\sigma$-skończona,
7. $\forall Y \subset \mathbb{R}^m \exists G \subset \mathbb{R}^m : G$ - typu $G_\delta \wedge Y \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G) = \mathcal{L}^m(Y)$,
8. $\mathcal{L}^m$ jest miarą zewnętrzną regularną,
9. $(Y \subset \mathbb{R}^m \wedge a \in \mathbb{R}^m) \Longrightarrow (\mathcal{L}^m(a + Y) = \mathcal{L}^m(Y))$,
10. $(Y \subset \mathbb{R}^m, s \in [0, +\infty)) \Longrightarrow (\mathcal{L}^m(sY) = s^m \mathcal{L}^m(Y))$.

**Dowód:** [Two, AM4, 3.41]

**Twierdzenie 1.3.2 (Borelowska regularność miary Lebesgue'a)**
Niech $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $A \in L_m$,
2. $\forall \epsilon > 0 \exists G \in top(\mathbb{R}^m) : A \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G \setminus A) < \epsilon$,
3. $A = B \setminus C$, gdzie $B$ typu $G_\delta$, $\mathcal{L}^m(C) = 0$,
4. $\forall \epsilon \exists F \in cotop(\mathbb{R}^m) : F \subset A \wedge \mathcal{L}^m(A \setminus F) = 0$,
5. $A = B \cup C$, gdzie $B$ typu $F_\sigma$ i $\mathcal{L}^m(C) = 0$,
6. $A = B \cup C$, gdzie $B$ jest $\sigma$-zwarty i $\mathcal{L}^m(C) = 0$.

**Dowód:** [Two, AM4, 3.42]

## 1.4 Równość m-wymiarowych miar Lebesgue'a i Hausdorffa w $\mathbb{R}^m$

**Twierdzenie 1.4.1 (Równość miar Lebesug'a i Hausdorffa)**
Niech $Y \subset \mathbb{R}^m, m \geqslant 1$. Wtedy $\mathcal{H}^m(Y) = \mathcal{L}^m(Y)$.
**Dowód:** [Two, AM4, 3.37]

Dowód tego twierdzenia polega na wykorzystywaniu nierówności izodiametrycznej [Fed, 2.10.3] i twierdzeniu Vitallego [Fed, 2.8.18]. Spoczątku pokazujemy, że równość jakieś miary $\mu$ na $\mathbb{R}^n$ na kostkach symetrycznych do miary Lebesgue'a implikuje, że $\mu$ jest miarą Lebesgue'a, co było zrobione w lemacie [Two, 3.35]. Potem biorąc kostku i wykorzystując twierdzenie Vitallego, które mówi że możemy znalieźć takie pokrycie kulami domkniętymi rozłącznymi o średnice co najwyżej $\epsilon$ tej kostki, że miara Lebesgue'a ich różnicy będzie równa 0. To pozwala na pokazanie nierówności w pierwszą stronę:

$$\mathcal{H}_\epsilon^m(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(m)2^{-m}(diam(B_n))^m = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(B_n) = \mathcal{L}^m(C) = 1$$

gdzie $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to są te kule oraz 1 na końcu, to jest objętość tej kostki $C$ (możemy założyć, że jest symetryczna). Skąd mamy nierówność $\mathcal{H}^m(C) \leqslant 1$. Żeby pokazać nierówność w drugą stronę będziemy potrzebowali jedynie tylko nierówności izodiametrycznej, która mówi że

$$\mathcal{L}^m(A) \leqslant \alpha(m)2^{-m}diam(A) \qquad , A \subset \mathbb{R}^m$$

Oczywiście, biorąc dowolne pokrycie $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kostki $C$ o średnice co najwyżej $\epsilon > 0$ wynika

$$1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^m(Y_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(m)2^{-n}(diam(Y_n))^m$$

Co z samej konstrukcji miary Hausdorffa daje nam żądaną nierówność $1 \leqslant \mathcal{H}^m(C)$.

# Rozdział 2
# Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach

## 2.1 Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach

W tym rozdziale wprowadzimy tak zwaną miarę Lebesgue'a na podrozamitościach, która się pojawiła w wykładzie M. Jarnickiego [Jar] oraz pojawią się w większości wykładów analizy dotyczących omawianych tutaj obiektów.

**Definicja 2.1.1 (Zbiory mierzalne na podrozmaitościach)**
Niech $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$ , to znaczy $M$ jest $d$-wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $C^1$.

- Jeżeli $d = 0$, to przez miarę Lebesgue'a na $M$ rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy $L_M = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$
- W przypadku gdy $d = n$ podrozmaitość $M$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy przyjmujemy $\mathcal{L}^M := \mathcal{L}^n$
- Przypadek $1 \leqslant d < n$. Zdefinujemy $L_M$ jako rodzinę wszystkich $A \subset M$ takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \to U$ mamy $p^{-1}(A) \in L_d$.

**Twierdzenie 2.1.1**
$L_M$ jest $\sigma$-algebrą oraz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset L_M$.
**Dowód:**
Dla $d \in \{0, n\}$ to twierdzenie jest proste. Niech $0 < d < n$. Oczywiście $\emptyset \in L_M$ . Ustalmy $A \in L_M$. Pokażemy, że $A^C \in L_M$ . Ustalamy dowolną parametryzację $p : P \to U$ . Mamy $p^{-1}(A^C) = p^{-1}(M \backslash A) = p^{-1}(M) \backslash p^{-1}(A) = P \backslash p^{-1}(A)$ . Ponieważ $P$ jest otwarty oraz $p^{-1}(A) \in L_d$ to stąd wynika, że $p^{-1}(A^C) \in L_d$ . Teraz pokażemy, że przeliczalna suma $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_M$ jest w $L_M$ co kończy dowód. Ustaliamy dowolne $p : P \to U$.

$$p^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(A_i) \in L_d$$

Zostało pokazać, że zbiory borelowskie są w tej algebrze. Wystarczy pokazać, że zbioru otwarte są w $L_M$, ale widać, że tak jest z samej postaci tych parametryzacji. To kończy dowód.

**Twierdzenie 2.1.2**
Niech $(p_i : P_i \to U_i)_{i\in I}$ będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że $\cup_{i\in I} U_i = M$. Wtedy:

(a) Dla $A \subset M$ mamy: $A \in L_M \Leftrightarrow \forall i \in I : p_i^{-1}(A) \in L_d$ .

(b) Dla $f : M \to Y$. gdzie $Y$ jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:

(i) $f \in \mathcal{M}(M, Y, L_M)$,

(ii) $f \circ p \in \mathcal{M}(P, Y, L_d)$ dla dowolnej parametryzacji $p : P \to U$,

(iii) $\forall i \in I : f \circ p \in \mathcal{M}(P_i, Y, L_d)$.

**Dowód:**

(a) Niech $p : P \to U$ będzie dowolną parametryzacją i niech

$$\phi_i : p^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(U \cap U_i) \to p^{-1}(U \cap U_i) \quad , i \in I$$

Wtedy

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(A \cap \bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} p_i^{-1}(A \cap U_i) = \bigcup_{i\in I} \phi_i(p_i^{-1}(A) \cap p_i^{-1}(U)) \in L_d$$

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii): $(f \circ p)^{-1}(\Omega) = p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): oczywsite

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $p_i^{-1}(f^{-1}()\Omega) = (f \circ p_i)^{-1}(\Omega)$ i korzystamy z (a)

**Definicja 2.1.2 (Jakobian odwzorowania różniczkowalnego)**
Dla odwozorowania $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, gdzie $\Omega$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant d \leqslant n$, niech $J_d f : \Omega \to \mathbb{R}_+$

$$J_d f := \left( \sum_{I \in \bigwedge_d^n} \left| det \left[ \frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \right]_{j,k=1,\ldots,d} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\bigwedge_d^n := \{(i_1, \cdots, i_d) : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n\}$$

Odnotujmy również, że $J_d f(t_0) > 0 \Leftrightarrow rank(f'(t_o)) = d$.

**Lemat 2.1.1 (Równoważność z definicją Federera)**
Pokażemy, że ta definicja Jacobianu jest równoważna definicji przez iloczyn zewnętrzny zdefiniowany w książce Federera "Geometric Measure Thoery" w 3.2.1 [Fed]. Będzie wystaczająco pokazać równość dla odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad 1 \leqslant n \leqslant m$. Niech $e_1, \cdots, e_n$ i $e'_1, \cdots, e'_m$ bazy kanoniczne odwpoiednio dla $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ . Wtedy

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$$

Dalej chcemy pokazać, że definicja Federera i definicja w tu są równoważne. Oczywiście:

$$\|\bigwedge^n L\| = |(\bigwedge^n L)(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)| = |L(e_1)\wedge\cdots\wedge L(e_n)| = \left|(\sum_{j_1=1}^{m} a_{j_1,1}e'_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\sum_{j_n=1} a_{j_n,n}e'_{j_n})\right|$$

$$= \left|\sum_{\lambda\in\bigwedge_d^n;\sigma\in S_n} a_{\lambda(\sigma(1)),1}\cdots a_{\lambda(\sigma(1)),n}\cdot e'_{\lambda(\sigma(1))}\wedge\cdots\wedge e'_{\lambda(\sigma(n))}\right|$$

$$= \left|\sum_{\lambda\in\bigwedge_n^m}\left(\sum_{\sigma\in S_n}(sgn(\sigma))a_{\lambda(\sigma(1)),1}\cdots a_{\lambda(\sigma(n)),n}\right)e_\lambda\right|$$

$$= \left|\sum_{\lambda\in\bigwedge_n^m} M_\lambda e_\lambda\right| = \sqrt{\sum_{\lambda\in\bigwedge_n^m} M_\lambda^2}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że baza algebry zewnętrznej złożona z $\{e_\lambda : \lambda\in\bigwedge_n^m\}$ jest ortonormalna.
Pokazanie tej równoważności pozwala na wykorzystywanie wszelkich własności iloczynu zewnętrzego i jego normy, które znajdziemy w książce Federera [Fed].

**Lemat 2.1.2 (Jakobian zestawienia)**
Jeżeli $\phi : G\to\Omega,\ f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie $G,\Omega\in top(\mathbb{R}^d)$ oraz $\phi(G)\subset\Omega$ to

$$J_d(f\circ\phi) = ((J_d f)\circ\phi)\cdot|\phi'|$$

**Dowód:**
$\|\bigwedge^d f'(\phi)\circ\phi'\| = \|\bigwedge^d f'(\phi)\|\|\bigwedge^d \phi'\| = ((J_d f)\circ\phi)\cdot|\phi'|.$

Dalej pokażamy, że istnieje miara $\mathcal{L}^M$ na tych podrozmaitościach, która, jak w następnych rozdziałach się dowiemy, jest równy mierze Hausdorffa. Dla przypadku $d=0$, niech $\mathcal{L}^M$ będzie miarą liczącą oraz dla przypadku $d=n$ - miarą Lebesgue'a.

**Twierdzenie 2.1.3 (Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach)**
Istnieje dokładnie jedna miara $\mathcal{L}^M : L_M\to[0,+\infty]$ taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P\to U$ mamy:

$$\mathcal{L}^M(A\cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_d p\, d\mathcal{L}^d,\quad A\in L_M$$

Ponadto miara ta jest zupełna, $\mathcal{B}$-regularna oraz istnieje ciąg $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$ zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w $M$, dla którego $M=\bigcup_{j=1}^\infty\Omega_j$ i $\mathcal{L}^M(\Omega_j)<\infty, j\in\mathbb{N}$ . Miara $\mathcal{L}^M$ nosi nazwę miary Lebesgue'a na $M$.
**Dowód:**
Ustaliamy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_j : P_j\to U_j)_{j\in\mathcal{N}}$ taką, że $\bigcap_{j=1}^\infty U_j = M$. NIech $B_1 := U_1,\ B_j := U_j\setminus(U_1\cup\cdots\cup U_{j-1}),\ j\geqslant 2$. Oczywiście $B_j\in\mathcal{B}(M)\subset L_M,\ j\in\mathbb{N},$ oraz $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = M$. Teraz dla zbiory $A\in L_M$ kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^\infty\int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j\, d\mathcal{L}^d$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\mathcal{L}^M(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1} A_k)\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(A_k)$$

Teraz musimy pokazać, że zachodzi równość z tego twierdzenia. Ustalmy lokalną parametryzację $p : P \to U$ i niech $\phi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap U_j) \to p^{-1}(U \cap U_j)$, $\psi_j := \phi_j^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ . Wtedy dla $A \in L_M$ takiego, że $A \subset U$, korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych mamy:

$$\int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p^{-1}(A\cap B_j)} J_d p \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j(p_j^{-1}(A\cap B_j \cap U))} J_d(p_j \circ \psi_j) \, d\mathcal{L}^d$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} (J_d(p_j \circ \psi_j) \circ \phi_j)|\phi_j'| \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A)$$

NIech $\mu : L_M \to [0, +\infty]$ będzie inną miarą spełniającą tą równość. Wtedy dla $A \in L_M$ mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^m(A)$$

Stąd wynika, że $\mathcal{L}^M$ jest jedyna.

# Rozdział 3
# Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach jako miara Hausdorffa

## 3.1 Przygotowanie

**Lemat 3.1.1**
Niech $\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$ , $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ jest klasy $C^1$ , $1 \leqslant n \leqslant m$, $a \in \Omega$ oraz $T := f'(a)$ monomorfizm . Wtedy dla $\lambda > 1$ istnieje takie $r > 0$, że:

1. $K := B(a, r) \subset \Omega$ ,
2. $\forall h \in \mathbb{R}^m, x \in K : \ \lambda^{-1}|T(h)| \leqslant |f'(x)(h)| \leqslant \lambda|T(h)|$ ,
3. $\forall x_1, x_2 \in K : \ \lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$ ,
4. $f|_K : K \to f(K)$ jest bilipschitzowskie.

**Dowód:**
Wybieramy $\epsilon > 0$, tak aby

$$\epsilon(\frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{1 - \lambda^{-1}}) \leqslant inf\{|f'(a)(h)| : |h| = 1\} = \|f'(a)\|$$

Wtedy mamy:

$$\begin{cases} \epsilon|h| \leqslant (\lambda - 1)|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m, \\ \epsilon|h| \leqslant (1 - \lambda^{-1})|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Wybieramy następnie $r > 0$ tak aby:

(a) $K = B(a, r) \subset \Omega$

(b) $\forall x \in K : \ \|f'(x) - f'(a)\| \leqslant \epsilon$

Sprawdzamy 2.:

$$|f'(x)(h) - f'(a)(h)| \leqslant \epsilon|h| \quad \Longrightarrow \quad ||f'(x)(h)| - |f'(a)(h)|| \leqslant \epsilon|h|$$

$$\Longrightarrow \quad -\epsilon|h| \leqslant |f'(x)(h)| - |f'(a)(h)| \leqslant \epsilon|h| \quad \Longrightarrow$$
$$|f'(a)(h)| - \epsilon|h| \leqslant |f'(x)(h)| \leqslant |f'(a)(h)| + \epsilon|h|$$

Korzystając z tego jake dobieraliśmy $\epsilon$ dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(h)| = \lambda^{-1}|f'(a)(h)| \leqslant |f'(x)(h)| \leqslant \lambda|f'(a)(h)| = \lambda|T(h)|$$

Dla sprawdzenia 3. rozpatrzymy następujące dwzorowanie:

$$F : K \ni x \to f(x) - f'(a)(x) \in \mathbb{R}^m$$

Mamy $F'(x) = f'(x) - f'(a)$. Zatem $\forall x_1, x_2 \in K : \ |F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \epsilon|x_1 - x_2|$ skąd dalej dostajemy:

$$|(f(x_1) - f'(a)(x_1)) - (f(x_2) - f'(a)(x_2))| \leqslant \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|(f(x_1) - f(x_2)) - f'(a)(x_1 - x_2))| \leqslant \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$||f(x_1) - f(x_2)| - |f'(a)(x_1 - x_2))|| \leqslant \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|f'(a)(x_1 - x_2))| - \epsilon|x_1 - x_2| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f'(a)(x_1 - x_2))| + \epsilon|x_1 - x_2|$$

Ponownie korzystając z tego jakie dobieraliśmy $\epsilon$ i podstawiając $h = x_1 - x_2$ dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$$

Co kończy dowód 3. z którego natychmiast wynika 4.

**Lemat 3.1.2**
Niech $\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \to R^m$ będzie funckją klasy $C^1$, $1 \leqslant n \leqslant m$ oraz $f'(x)$ będize monomorfizmem dla $x \in \Omega$, $\lambda > 1$. Wtedy istnieje ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v\in\mathbb{N}}$ takich, że $B_v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniowe dla każdego $v \in \mathbb{N}$ oraz :

1. $B_v \cap B_\mu = \emptyset \ \Leftrightarrow \ \mu \neq v$ ,
2. $\bigcup_{v\in\mathbb{N}} B_v = \Omega$ ,
3. $\forall x \in B_v, h \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{N} : \ \lambda^{-1}|T_v(h)| \leqslant |f'(x)(h)| \leqslant \lambda|T_v(h)|$,
4. $\forall x_1, x_2 \in B_v, v \in \mathbb{N} : \ \lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda|T_v(x_1 - x_2)|$,
5. $f|_{B_v} : B_v \to f(B_v)$ jest odwzorowaniem bilipschitzowskim dla $v \in \mathbb{N}$ .

**Dowód:**
Korzystając z poprzedniego twierdzenia wiemy, że dla każdego $a \in \Omega$ możemy znaleźć $(K, T)$ które spełniają warunki 3.-5. . Korzystając z tego, że $\mathbb{R}^m$ jest ośrodkowa wiemy, że możemy znaleźć przeliczalną rodzinę $\{(K_v, T_v)\}_{v\in\mathbb{N}}$ taką, że ona spełnia 2.. Teraz definujemy indukcyjnie $B_0 = K_0$ oraz $B_v = K_v \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} K_j$ . Wtedy ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v\in\mathbb{N}}$ spełnia wszystkie wymagane warunki

**Lemat 3.1.3**
Niech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją lipschitzowską o stałej $C$, oraz $A \subset \mathbb{R}^m$ i $p \in [0, +\infty)$. Wtedy:

$$\mathcal{H}^p(f(A)) \leqslant (Lip(f))^p \mathcal{H}^p(A)$$

**Dowód:**
Dla $p = 0$ ta nierówność jest oczywista. Niech $p > 0$. Jeśli $Lip(f) = 0$ to $f$ jest stała, a więc obraz tej funkcji jest miary zero. Niech teraz $Lip(f) > 0$. Jeśli $\mathcal{H}^p(A) = +\infty$ to ta nierówność znowu jest oczywista. Pozostaje przypadek gdy $\mathcal{H}^p(A) < +\infty$ w którym korzystamy z nierówności

$$diam(f(Z)) \leqslant Lip(f)(diam(Z))$$

dla $Z \subset \mathbb{R}^m$

**Twierdzenie 3.1.1**
$\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ klasy $C^1$, $1 \leqslant n \leqslant m$, $f'(x)$ jest monomorfizmem dla $x \in \Omega$. Wtedy:

1. $(A \subset \Omega, A \in L_n) \implies f(A) \in H_n$ ,
2. $(B \subset \mathbb{R}^m, B \in H_n) \Longrightarrow f^{-1}(B) \in L_n$ .

**Dowód 1.:**
Dla początku musimy pokazać to, że obraz zbioru $A$ miary zero jest miary zero. Wiemy, że dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność $\mathcal{H}^p(f(A)) \leqslant (Lip(f))^p \mathcal{H}^p(A)$, gdize $p \in [0, +\infty)$. Ponieważ $A$ jest mairy zero to dostajemy, że $f(A)$ musi być miary zero. Teraz pokażemy, że 1. zahcodzi dla zbiorów typu $F_\sigma$ , to znaczy zbiory które są przeliczlną sumą zbiorów domkniętych. Niech $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$, gdzie $K_j$ to są zbiory domknięte. Ponieważ $f(A) = f(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(K_j)$ to wystarczy pokazać, że każdy $f(K_j)$ jest mierzalny. Możemy założyć, że $K_j$ jest zwarty. Ale wtedy obraz musi być zwarty, a więc domknięty, skąd wynika, że $f(A)$ jest typu $F_\sigma$ w $\mathbb{R}^m$, a więc borelowski, a więc mierzalny w sensie $\mathcal{H}^n$. Teraz wystarczy skorzystać z tego, że każdy $A \in L_n$ można przedstawić jako $C \backslash Z$, gdzie $C$ jest typu $F_\sigma$ oraz $Z$ jest miary zero, co kończy dowód.

**Dowód 2.:**
Będziemy stosować lemat 3.1.2 o tym, że możemy znalieźć ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v\in\mathbb{N}}$, takich, że $B_v$ pokrywają $\Omega$, oraz $T_v$ robią odpowiednie ograniczenia dla $f$ na $B_v$. Zauważmy, że możemy dobrać taki ciąg $B_v$, że $\mathcal{H}^n(B_v) < +\infty$ . Mamy

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{v=0}^{\infty} (f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$$

Ponieważ $B \cap f(B_v)$ ma miarę $\mathcal{H}^n$ skończoną to $B \cap f(B_v) = C_v \cup Z_v$, gdzie $C_v$ jest borelowski oraz $Z_v$ jest mary $\mathcal{H}^m$ zero. Wtedy

$$(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v)) = (f|_{B_v})^{-1}(C_v) \cap (f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$$

Korzystając z tego, że $f$ jest bilipschitzowska na $B_v$ dostajemy, że $(f|_{B_v})^{-1}(C_v)$ jest borelowska (bo przeciobraz zbioru borolewskiego przez funckju ciągłu) oraz $(f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$ ma miarę $\mathcal{H}^n$ zerową, gdzyć $(f|_{B_v})^{-1}$ jest lipschitzowska. Zatem z tego, że $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ na $\mathbb{R}^n$ wynika, że $(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$ są $L_n$ mierzalne dla $v \in \mathbb{N}$, a więc $f^{-1}(B) \in L_n$ co kończy dowód.

## 3.2 Miara Hausdorffa obrazu

**Twierdzenie 3.2.1**
$\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ klasy $C^1$, $1 \leqslant n \leqslant m$ . $\forall x \in \Omega : f'(x)$ jest monormifizmem. Niech $L_n \ni A \subset \Omega$ taki, że $f|_A$ - injekcja. Wtedy:

1. $f(A) \in H_n$,
2. $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$ .

**Dowód:**

Już wiemy, że $f(A) \in H_n$, więc musimy jedynie pokazać tą równość. Ustalmy $\lambda > 1$ i wybieramy rozbicie $\Omega$ oraz ciągi operatorów zgodnie z lematem 3.1.2 $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$. Korzystając z własności normy w algebrze zewnętrznej oraz tego, że $J_n f = \| \bigwedge_n f \|$, dostajemy dla $x \in B_v$ oraz $v \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\lambda^{-n}|T_v| \leqslant (J_n f)(x) \leqslant \lambda^n |T_v|$$

która wynika bezpośrednio z następującej nierówności z lematu 3.1.2

$$\lambda^{-1}|T_v(h)| \leqslant |f'(x)(h)| \leqslant \lambda |T_v(h)| \qquad \text{dla } x \in B_v, h \in \mathbb{R}^{\varkappa}, v \in \mathbb{N}$$

oraz wniosku [Two, AM3, 8.41] który mówi, że

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : |W_1(v)| \leqslant |W_2(v)| \quad \Longrightarrow \quad |W_1| \leqslant |W_2|$$

gdzie $W_1$ i $W_2$ to są dowolne odwzorowania liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujemy $A_v := A \cap B_v$. Wtedy całkując otrzymaną nierówność na $A_v$ dostajemy

$$\lambda^{-n}|T_v|\mathcal{L}^n(A_v) \leqslant \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leqslant \lambda^n |T_v| \mathcal{L}^n(A_v)$$

W tym samym lemacie 3.1.2 mamy następującą nierówność

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda |T_v(x_1, x_2)| \qquad \text{dla } x_1, x_2 \in B_v$$

Skąd już wynika, że

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1) - T_v(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda |T_v(x_1) - T_v(x_2)| \qquad \text{dla } x_1, x_2 \in A_v$$

Rozpatrzymy diagram

$$\begin{tikzcd}
T_v(A_v) & f(A_v) \arrow[l, "h_v"'] \arrow[r, "h_v"] & T_v(A_v) \\
& A_v \arrow[ul, "T_v|_{A_v}"] \arrow[u, "f|_{A_v}"] \arrow[ur, "T_v|_{A_v}"'] &
\end{tikzcd}$$

dla $h_v = (T_v|_{A_v}) \circ (f|_{A_v})^{-1}$ mamy $Lip(h_v) \leqslant \lambda$, $Liph_v^{-1} \leqslant \lambda$ dla $v \in \mathbb{N}$. Zatem dla $v \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\lambda^{-n}\mathcal{H}^n(T_v(A_v)) \leqslant \mathcal{H}^n(f(A_v)) \leqslant \lambda^n \mathcal{H}^n(T_v(A_v))$$

Skąd dostajemy

$$\lambda^{-2n}\mathcal{H}^n(f(A_v)) \leqslant \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leqslant \lambda^{2n}\mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Dalej sumując tą nierówność po $v \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\lambda^{-2n}\sum_{v=0}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(A_v)) \leqslant \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leqslant \lambda^{2n}\sum_{v=0}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Skąd na podstawie injektywności $f$ dostajemy

$$\lambda^{-2n}\mathcal{H}^n(f(A)) \leqslant \int_A J_n f d\mathcal{L}^n \leqslant \lambda^{2n}\mathcal{H}^n(f(A))$$

Teraz widzimy, że jeśli $\mathcal{H}^n(f(A)) = +\infty$ to równość z tezy zachodzi. Jeśli $\mathcal{H}^n(f(A)) < +\infty$ to przechodząc z $\lambda > 1$ do 1 dostajemy równość

$$\mathcal{H}^n f(A) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$$

**Lemat 3.2.1**
$\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ klasy $C^1$. $1 \leqslant n \leqslant m$, $A \subset \Omega$, $\forall x \in A : J_n f(x) = 0$ . Wtedy $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$.

**Dowód:**
Tezę wystarczy pokazać dla $A := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$. $A$ jest $\sigma$-zwarta, więc dalej możemy ograniczyć dowód do zbiorów $A$ zwartego. Przy ustalionym $A$ i $\epsilon > 0$ rozważmy odwzorowanie

$$g_\epsilon : \Omega \ni x \to (\epsilon x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

oraz rzutowanie $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dla którego $Lip(p) = 1$. Mamy $f(A) = p(g_\epsilon(A))$. $g_\epsilon$ jest injekcją oraz $\forall x \in \Omega : g'_\epsilon(x)$ - monomorfizm, więc dostajemy nierówność:

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leqslant \mathcal{H}^n(g_\epsilon(A)) = \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n$$

Macierz $g_\epsilon$ ma taką postać:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \epsilon \\ & & \\ & f'(x) & \\ & & \end{bmatrix}$$

Teraz zauważmy, że $(J_n g_\epsilon)^2(x) = \epsilon^{2n} + \epsilon^{2n-1}s_1(x) + \cdots + \epsilon^2 s_{2n-2}(x)$, gdzie $s_1, ..., s_{2n-2}$ są ciągłe , więc ograniczone na $A$. Istnieje więc stała $M > 0$, że $J_n g_\epsilon(x) \leqslant M\epsilon$ dla $x \in A$, $\epsilon \in (0, 1)$. Skąd dostajemy $\mathcal{H}^n(f(A)) \leqslant \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n \leqslant \epsilon M \mathcal{L}^n(A)$ dla $\epsilon \in (0, 1)$ skąd wynika już żądana równość $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$

**Twierdzenie 3.2.2 (Wzór na liczenie miary obrazu)**
Niech $\Omega \in top(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ klasy $C^1$, $1 \leqslant n \leqslant m$ , $A \subset \Omega$, $A \in L_n$, $f|_A$ injekcja. Wtedy $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$.

**Dowód:**
Niech $F := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$ oraz $\Omega' := \Omega \backslash F$ . Wiemy, że $\mathcal{H}^n(f(F)) = 0$ . Stąd już wynika, że

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega')) + \mathcal{H}^n(f(A \cap F)) = \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega'))$$

$$= \int_{A\cap\Omega'} J_n f d\mathcal{L}^n + \int_{A\cap F} 0 d\mathcal{L}^n = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$$

## 3.3 Równość miar na podrozmaitościach

**Twierdzenie 3.3.1 (Miary Lebesgue'a na podrozmaitościach to miara Hausdorffa)** Niech $M \in \mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$ . Wtedy $L_M \subset H_d$ oraz $\mathcal{L}^M = \mathcal{H}^d$ na $L_M$.

**Dowód:**
Dla $d \in \{0, n\}$ teza twierdzenia jest oczywista. Niech $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Ustalmy $A \in L_M$. Ustalmy dowolny atlas $\{p_v : P_v \to U_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ podrozmaitości $M$. Definujemy indukcyjnie $C_0 := p_0^{-1}(A)$ oraz $C_v := p_v^{-1}(A)\setminus\bigcup_{j=0}^{v-1} p_j^{-1}(A)$. Ponieważ $A \in L_M \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{N} : p_v^{-1}(A) \in L_d$ to stąd wynika, że $A$ jest $H^d$ mierzalny jako suma obrazów $p_v^{-1}(A)$ przez $p_v$ które są bijektywne klasy $C^1$. Definujemy indukcyjnie $B_0 := U_0$ oraz $\mathcal{B}_v := U_v\setminus\bigcup_{j=0}^{v-1} U_j$ , $C_0 := p_0^{-1}(B_0)$ oraz $C_v := p_v^{-1}(B_v)$ . Dalej korzystając z własności miary $\mathcal{L}^M$ dostajemy

$$\mathcal{L}^M(A) = \mathcal{L}^M(\bigcup_{v\in\mathbb{N}} A \cap B_v) = \sum_{v\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^M(A \cap B_v) = \sum_{v\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^M(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v)))$$

$$= \sum_{v\in\mathbb{N}} \int_{p_v^{-1}(A\cap B_v)} J_d p_v d\mathcal{L}^d = \sum_{v\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^d(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v))) = \sum_{v\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^d(A \cap B_v) = \mathcal{H}^d(A)$$

To kończy dowód.

# Bibliografia


[Fed] H. Federer. *Geometric Mesure Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[Jar] M. Jarnicki. *Notatki do wykładu z analizy matematycznej.* Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim.

[Two] P. Tworzewski. *Notatki do wykładu z analizy matematycznej.* Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim.