

UNIwersytet Jagielloński w Krakowie
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Dmytro Karpus
Zastosowania miar Hausdorffa

Praca proseminaryjna napisana pod kierunkiem
Prof. Piotra Tworzewskiego

Kraków, 2022

Spis treści

Wstęp	3
1 Miara Lebesgue’a i Hausdorffa	4
1.1 Konstrukcja Caratheodory’ego	4
1.2 Miara Hausdorffa	5
1.3 Miara Lebesgue’a	6
1.4 Równość miar Lebesgue’a i Hausdorffa	7
2 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach	8
2.1 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach	8
3 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach jako miara Hausdorffa	12
3.1 Przygotowanie	12
3.2 Miara Hausdorffa obrazu	14
3.3 Równość miar na podrozmiarowościach	17
Bibliografia	18

Wstęp

W tej pracy będzie opisana miara Hausdorffa i jej zastosowanie do mierzenia zbiorów na podrozmaitościach w przestrzeni \mathbb{R}^n .

W tym celu w pierwszym rozdziale wprowadzimy konstrukcję Caratheodory'ego. Potem zbudujemy na niej miary Hausdorffa i Lebesgue'a oraz zbadamy własności tych miar, które będą wykorzystywane w dalszych dowodach.

W następnym rozdziale wprowadzimy definicję miary Lebesgue'a na podrozmaitościach. Jednocześnie zdefiniujemy Jacobian i udowodnimy równoważność tej definicji do definicji Federa [Fed]. Potem pokażemy ważne własności tej miary i jej σ -algebry. W końcu drugiego rozdziału udowodnimy twierdzenie, które pokazuje jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach.

W trzecim rozdziale na wstępie udowodnimy ważne fakty przygotowawcze dotyczące funkcji klasy C^1 dla dowodu głównego twierdzenia tej pracy proseminaryjnej. Potem udowodnimy twierdzenie dotyczące tego jak liczyć miarę Hausdorffa obrazu funkcji klasy C^1 . Na podstawie tego twierdzenia oraz twierdzenia z drugiego rozdziału o tym jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach dowiemy się, że miara Lebesgue'a na podrozmaitościach i miara Hausdorffa to jest to samo, co pozwala nam wykorzystywać wszelkie własności miary Hausdorffa dla liczenia miar zbiorów i całek na podrozmaitościach w \mathbb{R}^n .

Rozdział 1

Miara Lebesgue’a i Hausdorffa

1.1 Konstrukcja Caratheodory’ego

Definicja 1.1.1 (Konstrukcja Caratheodory’ego)

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ i niech $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ będzie odwzorowaniem takim, że $\zeta(\emptyset) = 0$. Funkcję ζ będziemy czasem nazywać funkcją tworzącą. Dla dowolnego $0 < \delta \leq +\infty$ niech $\phi_\delta, \phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będą zdefiniowane następująco:

$$\phi_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j) : A_j \in \mathcal{F}, \text{diam}(A_j) \leq \delta, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X$$
$$\phi := \sup_{\delta > 0} \phi_\delta$$

Powyższa konstrukcja nazywa się konstrukcją Caratheodeorego.

Twierdzenie 1.1.1 (o miarach z konstrukcji Caratheodeory’ego)

ϕ_δ dla $\delta \in (0, +\infty]$ oraz ϕ są miarami zewnętrznymi na X .

Dowód: [Two, AM4, 2.16]

Twierdzenie 1.1.2 (Algebra zupełna z konstrukcji Caratheodeory’ego)

Niech X będzie zbiorem, α - miara zewnętrzna na X i \mathfrak{M} - rodzina zbiorów miaralnych w sensie Caratheodory’ego, to znaczy takich zbiorów A , że

$$\forall T \subset X : \alpha(T \cap A) + \alpha(T \setminus A) = \alpha(T)$$

Wtedy:

1. \mathfrak{M} jest σ -ciałem,
2. $(A \subset X \wedge \alpha(A) = 0) \implies A \in \mathfrak{M}$,
3. $\alpha|_{\mathfrak{M}}$ jest miarą zupełną na \mathfrak{M} .

Dowód: ([Two, AM4, 2.30])

1.2 Miara Hausdorffa

Definicja 1.2.1 (Miara Hausdorffa)

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy $p \in [0, +\infty]$. Dla $Y \subset X$ przyjmujemy

$$h^p(Y) = \begin{cases} 0, & Y = \emptyset, \\ 2^{-p} \alpha(p) (\text{diam} Y)^p, & Y \neq \emptyset. \end{cases}$$

gdzie $\alpha(p) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^p}{\Gamma(\frac{1}{2}p+1)}$, wartości $\text{diam}(Y)^p$ dla dowolnych średnic z zakresu $[0, +\infty]$ otrzymujemy przedłużając funkcję $(0, +\infty) \ni x \rightarrow x^p \in (0, +\infty)$ do ciągłego przekształcenia przedziałów $[0, +\infty]$ przy ustalonym $p \in [0, +\infty)$.

Definicja 1.2.2 (\mathcal{B} -regularity)

Miara zewnętrzna μ jest \mathcal{B} -regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru A istnieje taki zbiór borelowski $A \subset B$, że $\mu(A) = \mu(B)$.

Twierdzenie 1.2.1 (Własności miary Hausdorffa)

Niech (X, d) przestrzeń metryczna, $p \in [0, +\infty)$. Wtedy:

1. \mathcal{H}^p jest miarą zewnętrzną metryczną na X ,
2. $\mathcal{B}(X) \subset H_p$, gdzie H_p to σ -algebra zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego,
3. \mathcal{H}^p na H_p jest miarą zupełną,
4. $\forall Y \subset X \exists G_\delta \ni G \subset Y : \mathcal{H}^p(G) = \mathcal{H}^p(Y)$,
5. \mathcal{H}^p jest miarą zewnętrzną \mathcal{B} -regularną na X .

Dowód: [Two, AM4, 2.51]

Twierdzenie 1.2.2 (Borelowska regularność miary Hausdorffa)

(X, d) - przestrzeń metryczna, $p \in [0, +\infty)$, $A \subset X, \mathcal{H}^p(A) < +\infty$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $A \in H_p$,
2. $\exists G$ typu $G_\delta \exists C \subset X : \mathcal{H}^p(C) = 0 \wedge A = G \setminus C$,
3. $\exists B \in \mathcal{B}(X) : \exists C \subset X : \mathcal{H}^p(C) = 0 \wedge A = B \cup C$.

Dowód: [Two, AM4, 2.52]

1.3 Miara Lebesgue'a

Definicja 1.3.1 (Miara Lebesgue'a)

Niech \mathcal{F} będzie rodzina kostek zwartych w \mathbb{R}^m , $m \geq 1$ czyli zbiorów postaci

$$I = I_1 \times \cdots \times I_m$$

gdzie $I_j = [a_j, b_j]$ są zwarte przedziały \mathbb{R} dla $j = 1, \dots, m$. Określamy objętość I jako

$$vol(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

Dodatkowo przyjmijmy $vol(\emptyset) = 0$

W ten sposób otrzymujemy funkcję

$$\zeta : \mathcal{F} \ni I \rightarrow \zeta(I) = vol(I) \in [0, +\infty].$$

Wtedy korzystając z konstrukcji Caratheodory'ego i funkcji ζ jako funkcji tworzącej dostajemy m -wymiarową miarę Lebesgue'a \mathcal{L}^m oraz jej σ -algebry L_m .

Twierdzenie 1.3.1 (Własności miary Lebesgue'a)

Niech $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy:

1. \mathcal{L}^m jest miarą zewnętrzną metryczną w \mathbb{R}^m ,
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset L_m$,
3. \mathcal{L}^m na L_m jest miarą zupełną,
4. Jeśli I kostka, to $\mathcal{L}^m(I) = vol(I)$,
5. Jeśli Y ograniczony, to $\mathcal{L}^m(Y) < \infty$,
6. \mathcal{L}^m jest σ -skończona,
7. $\forall Y \subset \mathbb{R}^m \exists G \subset \mathbb{R}^m : G - \text{typu } G_\delta \wedge Y \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G) = \mathcal{L}^m(Y)$,
8. \mathcal{L}^m jest miarą zewnętrzną regularną,
9. $(Y \subset \mathbb{R}^m \wedge a \in \mathbb{R}^m) \implies (\mathcal{L}^m(a + Y) = \mathcal{L}^m(Y))$,
10. $(Y \subset \mathbb{R}^m, s \in [0, +\infty)) \implies (\mathcal{L}^m(sY) = s^m \mathcal{L}^m(Y))$.

Dowód: [Two, AM4, 3.41]

Twierdzenie 1.3.2 (Borelowska regularność miary Lebesgue'a)

Niech $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $A \in L_m$,
2. $\forall \epsilon > 0 \exists G \in \text{top}(\mathbb{R}^m) : A \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G \setminus A) < \epsilon$,
3. $A = B \setminus C$, gdzie B typu G_δ , $\mathcal{L}^m(C) = 0$,
4. $\forall \epsilon > 0 \exists F \in \text{cotoptop}(\mathbb{R}^m) : F \subset A \wedge \mathcal{L}^m(A \setminus F) = 0$,
5. $A = B \cup C$, gdzie B typu F_σ i $\mathcal{L}^m(C) = 0$,
6. $A = B \cup C$, gdzie B jest σ -zwarty i $\mathcal{L}^m(C) = 0$.

Dowód: [Two, AM4, 3.42]

1.4 Równość miar Lebesgue'a i Hausdorffa

Twierdzenie 1.4.1 (Równość m-wymiarowych miar Lebesgue'a i Hausdorffa)

Niech $Y \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Wtedy $\mathcal{H}^m(Y) = \mathcal{L}^m(Y)$.

Dowód: [Two, AM4, 3.37]

Dowód tego twierdzenia polega na wykorzystywaniu nierówności izodiametrycznej [Fed, 2.10.3] i na wstępie twierdzenia Vitaliego [Fed, 2.8.18].

Rozdział 2

Miara Lebesgue'a na podrozumnościach

2.1 Miara Lebesgue'a na podrozumnościach

W tym rozdziale wprowadzimy tak zwaną miarę Lebesgue'a na podrozumnościach, która się pojawiła w wykładzie M. Jarnickiego [Jar] oraz pojawia się w większości wykładów analizy dotyczących omawianych tutaj obiektów.

Definicja 2.1.1 (Zbiory mierzalne na podrozumnościach)

Niech $M \in \mathcal{M}_n^1(\mathbb{R}^m)$, to znaczy M jest n -wymiarową podrozumnością w \mathbb{R}^m klasy C^1 .

- Jeżeli $n = 0$, to przez miarę Lebesgue'a na M rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy $L_M = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$
- W przypadku gdy $n = m$ podrozumność M jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Wtedy przyjmujemy $\mathcal{L}^M := \mathcal{L}^m$
- Przypadek $1 \leq n < m$. Zdefiniujemy L_M jako rodzinę wszystkich $A \subset M$ takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ mamy $p^{-1}(A) \in L_n$.

Twierdzenie 2.1.1

L_M jest σ -algebrą oraz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset L_M$.

Dowód:

Dla $n \in \{0, m\}$ to twierdzenie jest proste. Niech $0 < n < m$. Oczywiście $\emptyset \in L_M$. Ustalmy $A \in L_M$. Pokażemy, że $A^C \in L_M$. Ustalmy dowolną parametryzację $p : P \rightarrow U$. Mamy $p^{-1}(A^C) = p^{-1}(M \setminus A) = p^{-1}(M) \setminus p^{-1}(A) = P \setminus p^{-1}(A)$. Ponieważ P jest otwarty oraz $p^{-1}(A) \in L_d$ to stąd wynika, że $p^{-1}(A^C) \in L_n$. Teraz pokażemy, że przeliczalna suma $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_M$ jest w L_M co kończy dowód. Ustalmy dowolne $p : P \rightarrow U$.

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(A_i) \in L_n$$

Zostało pokazać, że zbiory borelowskie są w tej algebrze. Wystarczy pokazać, że zbiory otwarte są w L_M , ale widać, że tak jest z samej postaci tych parametryzacji. To kończy dowód.

Definicja 2.1.2

Na potrzeby następnego twierdzenia zdefiniujemy następujące pojęcie. Niech \mathcal{A} będzie σ -algebrą na przestrzeni X oraz Y to przestrzeń topologiczna. Wtedy definiujemy $\mathcal{M}(X, Y, \mathcal{A})$ jako zbiór wszystkich funkcji \mathcal{A} -mierzalnych $f : X \rightarrow Y$, czyli spełniających warunek $\forall \Omega \in \text{top}(Y) : f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{A}$

Twierdzenie 2.1.2

Niech $(p_i : P_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że $\cup_{i \in I} U_i = M$. Wtedy:

- (a) Dla $A \subset M$ mamy: $A \in L_M \Leftrightarrow \forall i \in I : p_i^{-1}(A) \in L_n$.
- (b) Dla $f : M \rightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:
 - (i) $f \in \mathcal{M}(M, Y, L_M)$,
 - (ii) $f \circ p \in \mathcal{M}(P, Y, L_n)$ dla dowolnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$,
 - (iii) $\forall i \in I : f \circ p_i \in \mathcal{M}(P_i, Y, L_n)$.

Dowód:

- (a) Niech $p : P \rightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją i niech

$$\phi_i : p^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(U \cap U_i) \rightarrow p^{-1}(U \cap U_i) \quad , i \in I$$

Wtedy

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(A \cap \bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p_i^{-1}(A \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \phi_i(p_i^{-1}(A) \cap p_i^{-1}(U)) \in L_n$$

- (b) (i) \Rightarrow (ii): $(f \circ p)^{-1}(\Omega) = p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$
- (ii) \Rightarrow (iii): oczywiste
- (iii) \Rightarrow (i): $p_i^{-1}(f^{-1}(\Omega)) = (f \circ p_i)^{-1}(\Omega)$ i korzystamy z (a)

Definicja 2.1.3 (Jakobian odwzorowania różniczkowalnego)

Dla odwzorowania $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n , $1 \leq n \leq m$, niech $J_n f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$J_n f := \left(\sum_{I \in \bigwedge_n^m} \left| \det \left[\frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \right]_{j,k=1,\dots,n} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\bigwedge_n^m := \{(i_1, \dots, i_n) : 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m\}$$

Odnajmy również, że $J_n f(t_0) > 0 \Leftrightarrow \text{rank}(f'(t_0)) = n$.

Lemat 2.1.1 (Równoważność z definicją Federera)

Pokażemy, że ta definicja Jacobianu jest równoważna definicji przez iloczyn zewnętrzny zdefiniowany w książce Federera "Geometric Measure Theory" w 3.2.1 [Fed]. Będzie wystarczająco pokazać równość dla odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $1 \leq n \leq m$. Niech e_1, \dots, e_n i e'_1, \dots, e'_m bazy kanoniczne odpowiednio dla \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m . Wtedy

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e'_j$$

Dalej chcemy pokazać, że definicja Federera i definicja w tu są równoważne. Oczywiście:

$$\begin{aligned} \left\| \bigwedge^n L \right\| &= \left| \left(\bigwedge^n L \right) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \right| = |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)| = \left| \left(\sum_{j_1=1}^m a_{j_1,1} e'_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^m a_{j_n,n} e'_{j_n} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m; \sigma \in S_n} a_{\lambda(\sigma(1)),1} \dots a_{\lambda(\sigma(n)),n} \cdot e'_{\lambda(\sigma(1))} \wedge \dots \wedge e'_{\lambda(\sigma(n))} \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma)) a_{\lambda(\sigma(1)),1} \dots a_{\lambda(\sigma(n)),n} \right) e_\lambda \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} M_\lambda e_\lambda \right| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} M_\lambda^2} \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że baza algebry zewnętrznej złożona z $\{e_\lambda : \lambda \in \bigwedge_n^m\}$ jest ortonormalna.

Pokazanie tej równoważności pozwala na wykorzystywanie wszelkich własności iloczynu zewnętrznego i jego normy, które znajdziemy w książce Federera [Fed].

Lemat 2.1.2 (Jakobian złożenia)

Jeżeli $\phi : G \rightarrow \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie $G, \Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\phi(G) \subset \Omega$ to

$$J_n(f \circ \phi) = ((J_n f) \circ \phi) \cdot |\phi'|.$$

Dowód:

$$\| \bigwedge^n f'(\phi) \circ \phi' \| = \| \bigwedge^n f'(\phi) \| \| \bigwedge^n \phi' \| = ((J_n f) \circ \phi) \cdot |\phi'|.$$

Dalej pokażemy, że istnieje miara \mathcal{L}^M na tych podrozmaitościach, która, jak w następnych rozdziałach się dowiemy, jest równa mierze Hausdorffa. Dla przypadku $n = 0$, niech \mathcal{L}^M będzie miarą liczącą oraz dla przypadku $n = m$ - miarą Lebesgue'a.

Twierdzenie 2.1.3 (Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach)

Istnieje dokładnie jedna miara $\mathcal{L}^M : L_M \rightarrow [0, +\infty]$ taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ mamy:

$$\mathcal{L}^M(A \cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_n p d\mathcal{L}^n, \quad A \in L_M$$

Ponadto miara ta jest zupełna, \mathcal{B} -regularna oraz istnieje ciąg $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$ zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w M , dla którego $M = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{L}^M(\Omega_j) < +\infty, j \in \mathbb{N}$. Miara \mathcal{L}^M nosi nazwę miary Lebesgue'a na M .

Dowód:

Ustaliamy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_j : P_j \rightarrow U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ taką, że $\bigcap_{j=1}^\infty U_j = M$. Niech $B_1 := U_1$, $B_j := U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$, $j \geq 2$. Oczywiście $B_j \in \mathcal{B}(M) \subset L_M$, $j \in \mathbb{N}$, oraz $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = M$. Teraz dla zbioru $A \in L_M$ kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech $(A_k)_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^M(A_k) \end{aligned}$$

Teraz musimy pokazać, że zachodzi równość z tego twierdzenia. Ustalmy lokalną parametryzację $p : P \rightarrow U$ i niech $\phi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap U_j) \rightarrow p^{-1}(U \cap U_j)$, $\psi_j := \phi_j^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $A \in L_M$ takiego, że $A \subset U$, korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych mamy:

$$\begin{aligned} \int_{p^{-1}(A)} J_n p d\mathcal{L}^n &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p^{-1}(A \cap B_j)} J_n p d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \int_{\phi_j(p_j^{-1}(A \cap B_j \cap U))} J_n (p_j \circ \psi_j) d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} (J_n (p_j \circ \psi_j) \circ \phi_j) |\phi_j'| d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^M(A) \end{aligned}$$

Niech $\mu : L_M \rightarrow [0, +\infty]$ będzie inną miarą spełniającą tą równość. Wtedy dla $A \in L_M$ mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^M(A)$$

Stąd wynika, że \mathcal{L}^M jest jedyna.

Rozdział 3

Miara Lebesgue'a na podrozmaiwościach jako miara Hausdorffa

3.1 Przygotowanie

Lemat 3.1.1

Niech $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1 , $1 \leq n \leq m$, $a \in \Omega$ oraz $T := f'(a)$ monomorfizm. Wtedy dla $\lambda > 1$ istnieje takie $r > 0$, że:

1. $K := B(a, r) \subset \Omega$,
2. $\forall h \in \mathbb{R}^m, x \in K : \lambda^{-1}|T(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T(h)|$,
3. $\forall x_1, x_2 \in K : \lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$,
4. $f|_K : K \rightarrow f(K)$ jest bilipschitzowskie.

Dowód:

Wybieramy $\epsilon > 0$, tak aby

$$\epsilon\left(\frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\right) \leq \inf\{|f'(a)(h)| : |h| = 1\} = \|f'(a)\|$$

Wtedy mamy:

$$\begin{cases} \epsilon|h| \leq (\lambda-1)|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m, \\ \epsilon|h| \leq (1-\lambda^{-1})|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Wybieramy następnie $r > 0$ tak aby:

- (a) $K = B(a, r) \subset \Omega$
- (b) $\forall x \in K : \|f'(x) - f'(a)\| \leq \epsilon$

Sprawdzamy 2.:

$$\begin{aligned} |f'(x)(h) - f'(a)(h)| \leq \epsilon|h| & \implies ||f'(x)(h)| - |f'(a)(h)|| \leq \epsilon|h| \\ \implies -\epsilon|h| \leq |f'(x)(h)| - |f'(a)(h)| \leq \epsilon|h| & \implies \\ |f'(a)(h)| - \epsilon|h| \leq |f'(x)(h)| \leq |f'(a)(h)| + \epsilon|h| & \end{aligned}$$

Korzystając z tego jakiego dobieraliśmy ϵ dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(h)| = \lambda^{-1}|f'(a)(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|f'(a)(h)| = \lambda|T(h)|$$

Dla sprawdzenia 3. rozpatrzmy następujące odwzorowanie:

$$F : K \ni x \rightarrow f(x) - f'(a)(x) \in \mathbb{R}^m$$

Mamy $F'(x) = f'(x) - f'(a)$. Zatem $\forall x_1, x_2 \in K : |F(x_1) - F(x_2)| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$ skąd dalej dostajemy:

$$|(f(x_1) - f'(a)(x_1)) - (f(x_2) - f'(a)(x_2))| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|(f(x_1) - f(x_2)) - f'(a)(x_1 - x_2)| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$||f(x_1) - f(x_2)| - |f'(a)(x_1 - x_2)|| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|f'(a)(x_1 - x_2)| - \epsilon|x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f'(a)(x_1 - x_2)| + \epsilon|x_1 - x_2|$$

Ponownie korzystając z tego jakiego dobieraliśmy ϵ i podstawiając $h = x_1 - x_2$ dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$$

Co kończy dowód 3. z którego natychmiast wynika 4.

Lemat 3.1.2

Niech $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1 , $1 \leq n \leq m$ oraz $f'(x)$ będzie monomorfizmem dla $x \in \Omega$, $\lambda > 1$. Wtedy istnieje ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ takich, że $B_v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liniowe dla każdego $v \in \mathbb{N}$ oraz :

1. $B_v \cap B_\mu = \emptyset \Leftrightarrow \mu \neq v$,
2. $\bigcup_{v \in \mathbb{N}} B_v = \Omega$,
3. $\forall x \in B_v, h \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{N} : \lambda^{-1}|T_v(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T_v(h)|$,
4. $\forall x_1, x_2 \in B_v, v \in \mathbb{N} : \lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1 - x_2)|$,
5. $f|_{B_v} : B_v \rightarrow f(B_v)$ jest odwzorowaniem bilipschitzowskim dla $v \in \mathbb{N}$.

Dowód:

Korzystając z poprzedniego twierdzenia wiemy, że dla każdego $a \in \Omega$ możemy znaleźć (K, T) które spełniają warunki 3.-5. . Korzystając z tego, że \mathbb{R}^m jest ośrodkowa wiemy, że możemy znaleźć przeliczalną rodzinę $\{(K_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ taką, że spełnia 2.. Teraz definiujemy indukcyjnie $B_0 = K_0$ oraz $B_v = K_v \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} K_j$. Wtedy ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ spełnia wszystkie wymagane warunki

Lemat 3.1.3

Niech $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją lipschitzowską o stałej C , oraz $A \subset \mathbb{R}^m$ i $p \in [0, +\infty)$. Wtedy:

$$\mathcal{H}^p(f(A)) \leq (\text{Lip}(f))^p \mathcal{H}^p(A)$$

Dowód:

Dla $p = 0$ ta nierówność jest oczywista. Niech $p > 0$. Jeśli $\text{Lip}(f) = 0$ to f jest stała, a więc obraz tej funkcji jest miary zero. Niech teraz $\text{Lip}(f) > 0$. Jeśli $\mathcal{H}^p(A) = +\infty$ to ta nierówność znowu jest oczywista. Pozostaje przypadek gdy $\mathcal{H}^p(A) < +\infty$ w którym korzystamy z nierówności

$$\text{diam}(f(Z)) \leq \text{Lip}(f)(\text{diam}(Z))$$

dla $Z \subset \mathbb{R}^m$.

Twierdzenie 3.1.1

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 , $1 \leq n \leq m$, $f'(x)$ jest monomorfizmem dla $x \in \Omega$. Wtedy:

1. $(A \subset \Omega, A \in L_n) \implies f(A) \in H_n$,
2. $(B \subset \mathbb{R}^m, B \in H_n) \implies f^{-1}(B) \in L_n$.

Dowód 1.:

Dla początku musimy pokazać to, że obraz zbioru A miary zero jest miary zero. Wiemy, że dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność $\mathcal{H}^p(f(A)) \leq (\text{Lip}(f))^p \mathcal{H}^p(A)$, gdzie $p \in [0, +\infty)$. Ponieważ A jest miary zero to dostajemy, że $f(A)$ musi być miary zero. Teraz pokażemy, że 1. zachodzi dla zbiorów typu F_σ , to znaczy zbiorów które są przeliczalną sumą zbiorów domkniętych. Niech $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$, gdzie K_j to są zbiory domknięte. Ponieważ $f(A) = f(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(K_j)$ to wystarczy pokazać, że każdy $f(K_j)$ jest mierzalny. Możemy założyć, że K_j jest zwarty. Ale wtedy obraz musi być zwarty, a więc domknięty, skąd wynika, że $f(A)$ jest typu F_σ w \mathbb{R}^m , a więc borelowski, a więc mierzalny w sensie \mathcal{H}^n . Teraz wystarczy skorzystać z tego, że każdy $A \in L_n$ można przedstawić jako $C \setminus Z$, gdzie C jest typu F_σ oraz Z jest miary zero, co kończy dowód.

Dowód 2.:

Będziemy stosować lemat 3.1.2 o tym, że możemy znaleźć ciąg par $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$, takich, że B_v pokrywają Ω , oraz T_v robią odpowiednie ograniczenia dla f na B_v . Zauważmy, że możemy dobrać taki ciąg B_v , że $\mathcal{H}^n(B_v) < +\infty$. Mamy

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{v=0}^{\infty} (f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$$

Ponieważ $B \cap f(B_v)$ ma miarę \mathcal{H}^n skończoną to $B \cap f(B_v) = C_v \cup Z_v$, gdzie C_v jest borelowski oraz Z_v jest miary \mathcal{H}^m zero. Wtedy

$$(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v)) = (f|_{B_v})^{-1}(C_v) \cup (f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$$

Korzystając z tego, że f jest bilipschitzowska na B_v dostajemy, że $(f|_{B_v})^{-1}(C_v)$ jest borelowski (bo przeciobraz zbioru borelowskiego przez funkcję ciągłą) oraz $(f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$ ma miarę \mathcal{H}^n zerową, gdyż $(f|_{B_v})^{-1}$ jest lipschitzowska. Zatem z tego, że $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ na \mathbb{R}^n wynika, że $(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$ są L_n mierzalne dla $v \in \mathbb{N}$, a więc $f^{-1}(B) \in L_n$ co kończy dowód.

3.2 Miara Hausdorffa obrazu

Twierdzenie 3.2.1

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 , $1 \leq n \leq m$. $\forall x \in \Omega : f'(x)$ jest monomorfizmem. Niech $L_n \ni A \subset \Omega$ taki, że $f|_A$ - iniekcja. Wtedy:

1. $f(A) \in H_n$,
2. $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$.

Dowód:

Już wiemy, że $f(A) \in H_n$, więc musimy jedynie pokazać tę równość. Ustalmy $\lambda > 1$ i wybieramy rozbięcie Ω oraz ciągi operatorów zgodnie z lematem 3.1.2 $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$. Korzystając z własności normy w algebrze zewnętrznej oraz tego, że $J_n f = \|\wedge_n f\|$, dostajemy dla $x \in B_v$ oraz $v \in \mathbb{N}$ nierówność

$$\lambda^{-n}|T_v| \leq (J_n f)(x) \leq \lambda^n |T_v|$$

która wynika bezpośrednio z następującej nierówności z lematu 3.1.2

$$\lambda^{-1}|T_v(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T_v(h)| \quad \text{dla } x \in B_v, h \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{N}$$

oraz wniosku [Two, AM3, 8.41] który mówi, że

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : |W_1(v)| \leq |W_2(v)| \implies |W_1| \leq |W_2|$$

gdzie W_1 i W_2 to są dowolne odwzorowania liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definiujemy $A_v := A \cap B_v$. Wtedy całkując otrzymaną nierówność na A_v dostajemy

$$\lambda^{-n}|T_v|\mathcal{L}^n(A_v) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^n |T_v|\mathcal{L}^n(A_v)$$

W tym samym lemacie 3.1.2 mamy następującą nierówność

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1, x_2)| \quad \text{dla } x_1, x_2 \in B_v$$

Skąd już wynika, że

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1) - T_v(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1) - T_v(x_2)| \quad \text{dla } x_1, x_2 \in A_v$$

Rozpatrzmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} T_v(A_v) & \xleftarrow{h_v} & f(A_v) & \xrightarrow{h_v} & T_v(A_v) \\ & \nwarrow T_v|_{A_v} & \uparrow f|_{A_v} & \nearrow T_v|_{A_v} & \\ & & A_v & & \end{array}$$

dla $h_v = (T_v|_{A_v}) \circ (f|_{A_v})^{-1}$ mamy $Lip(h_v) \leq \lambda$, $Lip h_v^{-1} \leq \lambda$ dla $v \in \mathbb{N}$. Zatem dla $v \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\lambda^{-n}\mathcal{H}^n(T_v(A_v)) \leq \mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \lambda^n \mathcal{H}^n(T_v(A_v))$$

Skąd dostajemy

$$\lambda^{-2n}\mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n}\mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Sumując te nierówności po $v \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\lambda^{-2n} \sum_{v=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n} \sum_{v=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Skąd na podstawie injektywności f dostajemy

$$\lambda^{-2n} \mathcal{H}^n(f(A)) \leq \int_A J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n} \mathcal{H}^n(f(A))$$

Teraz widzimy, że jeśli $\mathcal{H}^n(f(A)) = +\infty$ to równość z tezy zachodzi. Jeśli $\mathcal{H}^n(f(A)) < +\infty$ to przechodząc z $\lambda > 1$ do 1 dostajemy równość

$$\mathcal{H}^n f(A) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$$

Lemat 3.2.1

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 . $1 \leq n \leq m$, $A \subset \Omega$, $\forall x \in A : J_n f(x) = 0$. Wtedy $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$.

Dowód:

Tezę wystarczy pokazać dla $A := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$. A jest σ -zwarta, więc dalej możemy ograniczyć dowód do zbiorów A zwartego. Przy ustalonym $\epsilon > 0$ rozważmy odwzorowanie

$$g_\epsilon : \Omega \ni x \rightarrow (\epsilon x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

oraz rzutowanie $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla którego $\text{Lip}(p) = 1$. Mamy $f(A) = p(g_\epsilon(A))$. g_ϵ jest injekcją oraz $\forall x \in \Omega : g'_\epsilon(x)$ - monomorfizm, więc dostajemy nierówność:

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \mathcal{H}^n(g_\epsilon(A)) = \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n$$

Macierz g_ϵ ma taką postać:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \epsilon \\ & & f'(x) \end{bmatrix}$$

Teraz zauważmy, że $(J_n g_\epsilon)^2(x) = \epsilon^{2n} + \epsilon^{2n-1} s_1(x) + \cdots + \epsilon^2 s_{2n-2}(x)$, gdzie s_1, \dots, s_{2n-2} są ciągłe, więc ograniczone na A . Istnieje więc stała $M > 0$, że $J_n g_\epsilon(x) \leq M\epsilon$ dla $x \in A$, $\epsilon \in (0, 1)$. Skąd dostajemy $\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n \leq \epsilon M \mathcal{L}^n(A)$ dla $\epsilon \in (0, 1)$ skąd wynika już żądana równość $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$

Twierdzenie 3.2.2 (Wzór na liczenie miary obrazu)

Niech $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 , $1 \leq n \leq m$, $A \subset \Omega$, $A \in L_n$, $f|_A$ injekcja. Wtedy $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$.

Dowód:

Niech $F := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$ oraz $\Omega' := \Omega \setminus F$. Wiemy, że $\mathcal{H}^n(f(F)) = 0$. Stąd już wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(f(A)) &= \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega')) + \mathcal{H}^n(f(A \cap F)) = \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega')) \\ &= \int_{A \cap \Omega'} J_n f d\mathcal{L}^n + \int_{A \cap F} 0 d\mathcal{L}^n = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n \end{aligned}$$

3.3 Równość miar na podrozmaiwościach

Twierdzenie 3.3.1 (Miary Lebesgue'a na podrozmaiwościach to miara Hausdorffa)

Niech $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$. Wtedy $L_M \subset H_d$ oraz $\mathcal{L}^M = \mathcal{H}^d$ na L_M .

Dowód:

Dla $d \in \{0, n\}$ teza twierdzenia jest oczywista. Niech $1 \leq d \leq n - 1$. Ustalmy $A \in L_M$. Ustalmy dowolny atlas $\{p_v : P_v \rightarrow U_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ podrozmaiwości M . Definiujemy indukcyjnie $C_0 := p_0^{-1}(A)$ oraz $C_v := p_v^{-1}(A) \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} p_j^{-1}(A)$. Ponieważ $A \in L_M \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{N} : p_v^{-1}(A) \in L_d$ to stąd wynika, że A jest H^d mierzalny jako suma obrazów $p_v^{-1}(A)$ przez p_v które są bijektywne klasy C^1 . Definiujemy indukcyjnie $B_0 := U_0$ oraz $B_v := U_v \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} U_j$, $C_0 := p_0^{-1}(B_0)$ oraz $C_v := p_v^{-1}(B_v)$. Dalej korzystając z własności miary \mathcal{L}^M dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M(A) &= \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{v \in \mathbb{N}} A \cap B_v\right) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^M(A \cap B_v) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^M(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v))) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{N}} \int_{p_v^{-1}(A \cap B_v)} J_d p_v d\mathcal{L}^d = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^d(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v))) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^d(A \cap B_v) = \mathcal{H}^d(A) \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Bibliografia

- [Fed] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [Jar] M. Jarnicki, *Notatki do wykładu z analizy matematycznej*. Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 2020-2021.
- [Two] P. Tworzewski, *Notatki do wykładu z analizy matematycznej*. Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 2021-2022.