

UNIwersytet Jagielloński w Krakowie  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyki

**Dmytro Karpus**  
**Zastosowania miar Hausdorffa**

Praca proseminaryjna napisana pod kierunkiem  
Prof. Piotra Tworzewskiego

Kraków, 2022

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>1 Miara Lebesgue’a i Hausdorffa</b>	<b>4</b>
1.1 Konstrukcja Caratheodory’ego . . . . .	4
1.2 Miara Hausdorffa . . . . .	5
1.3 Miara Lebesgue’a . . . . .	6
1.4 Równość miar Lebesgue’a i Hausdorffa . . . . .	7
<b>2 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach</b>	<b>8</b>
2.1 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach . . . . .	8
<b>3 Miara Lebesgue’a na podrozmiarowościach jako miara Hausdorffa</b>	<b>12</b>
3.1 Przygotowanie . . . . .	12
3.2 Miara Hausdorffa obrazu . . . . .	14
3.3 Równość miar na podrozmiarowościach . . . . .	17
<b>Bibliografia</b>	<b>18</b>

# Wstęp

W tej pracy będzie opisana miara Hausdorffa i jej zastosowanie do mierzenia zbiorów na podrozmaitościach w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

W tym celu w pierwszym rozdziale wprowadzimy konstrukcję Caratheodory'ego. Potem zbudujemy na niej miary Hausdorffa i Lebesgue'a oraz zbadamy własności tych miar, które będą wykorzystywane w dalszych dowodach.

W następnym rozdziale wprowadzimy definicję miary Lebesgue'a na podrozmaitościach. Jednocześnie zdefiniujemy Jacobian i udowodnimy równoważność tej definicji do definicji Federa [Fed]. Potem pokażemy ważne własności tej miary i jej  $\sigma$ -algebry. W końcu drugiego rozdziału udowodnimy twierdzenie, które pokazuje jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach.

W trzecim rozdziale na wstępie udowodnimy ważne fakty przygotowawcze dotyczące funkcji klasy  $C^1$  dla dowodu głównego twierdzenia tej pracy proseminaryjnej. Potem udowodnimy twierdzenie dotyczące tego jak liczyć miarę Hausdorffa obrazu funkcji klasy  $C^1$ . Na podstawie tego twierdzenia oraz twierdzenia z drugiego rozdziału o tym jak liczyć miarę Lebesgue'a na podrozmaitościach dowiemy się, że miara Lebesgue'a na podrozmaitościach i miara Hausdorffa to jest to samo, co pozwala nam wykorzystywać wszelkie własności miary Hausdorffa dla liczenia miar zbiorów i całek na podrozmaitościach w  $\mathbb{R}^n$ .

# Rozdział 1

## Miara Lebesgue’a i Hausdorffa

### 1.1 Konstrukcja Caratheodory’ego

#### Definicja 1.1.1 (Konstrukcja Caratheodory’ego)

Niech  $(X, \varrho)$  będzie przestrzenią metryczną, niech  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\emptyset \in \mathcal{F}$  i niech  $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  będzie odwzorowaniem takim, że  $\zeta(\emptyset) = 0$ . Funkcję  $\zeta$  będziemy czasem nazywać funkcją tworzącą. Dla dowolnego  $0 < \delta \leq +\infty$  niech  $\phi_\delta, \phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  będą zdefiniowane następująco:

$$\phi_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j) : A_j \in \mathcal{F}, \text{diam}(A_j) \leq \delta, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X$$
$$\phi := \sup_{\delta > 0} \phi_\delta$$

Powyższa konstrukcja nazywa się konstrukcją Caratheodeorego.

#### Twierdzenie 1.1.1 (o miarach z konstrukcji Caratheodeory’ego)

$\phi_\delta$  dla  $\delta \in (0, +\infty]$  oraz  $\phi$  są miarami zewnętrznymi na  $X$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 2.16]

#### Twierdzenie 1.1.2 (Algebra zupełna z konstrukcji Caratheodeory’ego)

Niech  $X$  będzie zbiorem,  $\alpha$  - miara zewnętrzna na  $X$  i  $\mathfrak{M}$  - rodzina zbiorów miarzalnych w sensie Caratheodory’ego, to znaczy takich zbiorów  $A$ , że

$$\forall T \subset X : \alpha(T \cap A) + \alpha(T \setminus A) = \alpha(T)$$

Wtedy:

1.  $\mathfrak{M}$  jest  $\sigma$ -ciałem,
2.  $(A \subset X \wedge \alpha(A) = 0) \implies A \in \mathfrak{M}$ ,
3.  $\alpha|_{\mathfrak{M}}$  jest miarą zupełną na  $\mathfrak{M}$ .

**Dowód:** ([Two, AM4, 2.30])

## 1.2 Miara Hausdorffa

### Definicja 1.2.1 (Miara Hausdorffa)

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy  $p \in [0, +\infty]$ . Dla  $Y \subset X$  przyjmujemy

$$h^p(Y) = \begin{cases} 0, & Y = \emptyset, \\ 2^{-p}\alpha(p)(\text{diam}Y)^p, & Y \neq \emptyset. \end{cases}$$

gdzie  $\alpha(p) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^p}{\Gamma(\frac{1}{2}p+1)}$ , wartości  $\text{diam}(Y)^p$  dla dowolnych średnic z zakresu  $[0, +\infty]$  otrzymujemy przedłużając funkcję  $(0, +\infty) \ni x \rightarrow x^p \in (0, +\infty)$  do ciągłego przekształcenia przedziałów  $[0, +\infty]$  przy ustalonym  $p \in [0, +\infty)$ .

### Definicja 1.2.2 ( $\mathcal{B}$ -regularity)

Miara zewnętrzna  $\mu$  jest  $\mathcal{B}$ -regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru  $A$  istnieje taki zbiór borelowski  $A \subset B$ , że  $\mu(A) = \mu(B)$ .

### Twierdzenie 1.2.1 (Własności miary Hausdorffa)

Niech  $(X, d)$  przestrzeń metryczna,  $p \in [0, +\infty)$ . Wtedy:

1.  $\mathcal{H}^p$  jest miarą zewnętrzną metryczną na  $X$ ,
2.  $\mathcal{B}(X) \subset H_p$ , gdzie  $H_p$  to  $\sigma$ -algebra zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego,
3.  $\mathcal{H}^p$  na  $H_p$  jest miarą zupełną,
4.  $\forall Y \subset X \exists G_\delta \ni G \subset Y : \mathcal{H}^p(G) = \mathcal{H}^p(Y)$ ,
5.  $\mathcal{H}^p$  jest miarą zewnętrzną  $\mathcal{B}$ -regularną na  $X$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 2.51]

### Twierdzenie 1.2.2 (Borelowska regularność miary Hausdorffa)

$(X, d)$  - przestrzeń metryczna,  $p \in [0, +\infty)$ ,  $A \subset X, \mathcal{H}^p(A) < +\infty$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.  $A \in H_p$ ,
2.  $\exists G$  typu  $G_\delta \exists C \subset X : \mathcal{H}^p(C) = 0 \wedge A = G \setminus C$ ,
3.  $\exists B \in \mathcal{B}(X) : \exists C \subset X : \mathcal{H}^p(C) = 0 \wedge A = B \cup C$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 2.52]

## 1.3 Miara Lebesgue'a

### Definicja 1.3.1 (Miara Lebesgue'a)

Niech  $\mathcal{F}$  będzie rodzina kostek zwartych w  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  czyli zbiorów postaci

$$I = I_1 \times \cdots \times I_m$$

gdzie  $I_j = [a_j, b_j]$  są zwarte przedziały  $\mathbb{R}$  dla  $j = 1, \dots, m$ . Określamy objętość  $I$  jako

$$vol(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

Dodatkowo przyjmijmy  $vol(\emptyset) = 0$

W ten sposób otrzymujemy funkcję

$$\zeta : \mathcal{F} \ni I \rightarrow \zeta(I) = vol(I) \in [0, +\infty].$$

Wtedy korzystając z konstrukcji Carateodry'ego i funkcji  $\zeta$  jako funkcji tworzącej dostajemy  $m$ -wymiarową miarę Lebesgue'a  $\mathcal{L}^m$  oraz jej  $\sigma$ -algebry  $L_m$ .

### Twierdzenie 1.3.1 (Własności miary Lebesgue'a)

Niech  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Wtedy:

1.  $\mathcal{L}^m$  jest miarą zewnętrzną metryczną w  $\mathbb{R}^m$ ,
2.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset L_m$ ,
3.  $\mathcal{L}^m$  na  $L_m$  jest miarą zupełną,
4. Jeśli  $I$  kostka, to  $\mathcal{L}^m(I) = vol(I)$ ,
5. Jeśli  $Y$  ograniczony, to  $\mathcal{L}^m(Y) < \infty$ ,
6.  $\mathcal{L}^m$  jest  $\sigma$ -skończona,
7.  $\forall Y \subset \mathbb{R}^m \exists G \subset \mathbb{R}^m : G - \text{typu } G_\delta \wedge Y \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G) = \mathcal{L}^m(Y)$ ,
8.  $\mathcal{L}^m$  jest miarą zewnętrzną regularną,
9.  $(Y \subset \mathbb{R}^m \wedge a \in \mathbb{R}^m) \implies (\mathcal{L}^m(a + Y) = \mathcal{L}^m(Y))$ ,
10.  $(Y \subset \mathbb{R}^m, s \in [0, +\infty)) \implies (\mathcal{L}^m(sY) = s^m \mathcal{L}^m(Y))$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 3.41]

### Twierdzenie 1.3.2 (Borelowska regularność miary Lebesgue'a)

Niech  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.  $A \in L_m$ ,
2.  $\forall \epsilon > 0 \exists G \in \text{top}(\mathbb{R}^m) : A \subset G \wedge \mathcal{L}^m(G \setminus A) < \epsilon$ ,
3.  $A = B \setminus C$ , gdzie  $B$  typu  $G_\delta$ ,  $\mathcal{L}^m(C) = 0$ ,
4.  $\forall \epsilon \exists F \in \text{cotop}(\mathbb{R}^m) : F \subset A \wedge \mathcal{L}^m(A \setminus F) = 0$ ,
5.  $A = B \cup C$ , gdzie  $B$  typu  $F_\sigma$  i  $\mathcal{L}^m(C) = 0$ ,
6.  $A = B \cup C$ , gdzie  $B$  jest  $\sigma$ -zwarty i  $\mathcal{L}^m(C) = 0$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 3.42]

## 1.4 Równość miar Lebesgue'a i Hausdorffa

### Twierdzenie 1.4.1 (Równość m-wymiarowych miar Lebesgue'a i Hausdorffa)

Niech  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ . Wtedy  $\mathcal{H}^m(Y) = \mathcal{L}^m(Y)$ .

**Dowód:** [Two, AM4, 3.37]

Dowód tego twierdzenia polega na wykorzystywaniu nierówności izodiametrycznej [Fed, 2.10.3] i na wstępie twierdzenia Vitallego [Fed, 2.8.18].

# Rozdział 2

## Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach

### 2.1 Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach

W tym rozdziale wprowadzimy tak zwaną miarę Lebesgue'a na podrozamitościach, która się pojawiła w wykładzie M. Jarnickiego [Jar] oraz pojawia się w większości wykładów analizy dotyczących omawianych tutaj obiektów.

#### Definicja 2.1.1 (Zbiory mierzalne na podrozmaitościach)

Niech  $M \in \mathcal{M}_n^1(\mathbb{R}^m)$ , to znaczy  $M$  jest  $n$ -wymiarową podrozmaitością w  $\mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ .

- Jeżeli  $n = 0$ , to przez miarę Lebesgue'a na  $M$  rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy  $L_M = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$
- W przypadku gdy  $n = m$  podrozmaitość  $M$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Wtedy przyjmujemy  $\mathcal{L}^M := \mathcal{L}^m$
- Przypadek  $1 \leq n < m$ . Zdefiniujemy  $L_M$  jako rodzinę wszystkich  $A \subset M$  takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji  $p : P \rightarrow U$  mamy  $p^{-1}(A) \in L_n$ .

#### Twierdzenie 2.1.1

$L_M$  jest  $\sigma$ -algebrą oraz  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset L_M$ .

#### Dowód:

Dla  $n \in \{0, m\}$  to twierdzenie jest proste. Niech  $0 < n < m$ . Oczywiście  $\emptyset \in L_M$ . Ustalmy  $A \in L_M$ . Pokażemy, że  $A^C \in L_M$ . Ustalmy dowolną parametryzację  $p : P \rightarrow U$ . Mamy  $p^{-1}(A^C) = p^{-1}(M \setminus A) = p^{-1}(M) \setminus p^{-1}(A) = P \setminus p^{-1}(A)$ . Poniważ  $P$  jest otwarty oraz  $p^{-1}(A) \in L_d$  to stąd wynika, że  $p^{-1}(A^C) \in L_n$ . Teraz pokażemy, że przeliczalna suma  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_M$  jest w  $L_M$  co kończy dowód. Ustaliamy dowolne  $p : P \rightarrow U$ .

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(A_i) \in L_n$$

Zostało pokazać, że zbiory borelowskie są w tej algebrze. Wystarczy pokazać, że zbioru otwarte są w  $L_M$ , ale widać, że tak jest z samej postaci tych parametryzacji. To kończy dowód.



**Definicja 2.1.2**

Na potrzeby następnego twierdzenia zdefiniujemy następujące pojęcie. Niech  $\mathcal{A}$  będzie  $\sigma$ -algebrą na przestrzeni  $X$  oraz  $Y$  to przestrzeń topologiczna. Wtedy definiujemy  $\mathcal{M}(X, Y, \mathcal{A})$  jako zbiór wszystkich funkcji  $\mathcal{A}$ -mierzalnych  $f : X \rightarrow Y$

**Twierdzenie 2.1.2**

Niech  $(p_i : P_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$  będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że  $\cup_{i \in I} U_i = M$ . Wtedy:

- (a) Dla  $A \subset M$  mamy:  $A \in L_M \Leftrightarrow \forall i \in I : p_i^{-1}(A) \in L_n$ .
- (b) Dla  $f : M \rightarrow Y$ , gdzie  $Y$  jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:
  - (i)  $f \in \mathcal{M}(M, Y, L_M)$ ,
  - (ii)  $f \circ p \in \mathcal{M}(P, Y, L_n)$  dla dowolnej parametryzacji  $p : P \rightarrow U$ ,
  - (iii)  $\forall i \in I : f \circ p_i \in \mathcal{M}(P_i, Y, L_n)$ .

**Dowód:**

- (a) Niech  $p : P \rightarrow U$  będzie dowolną parametryzacją i niech

$$\phi_i : p^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(U \cap U_i) \rightarrow p^{-1}(U \cap U_i) \quad , i \in I$$

Wtedy

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(A \cap \bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p_i^{-1}(A \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \phi_i(p_i^{-1}(A) \cap p_i^{-1}(U)) \in L_n$$

- (b) (i)  $\Rightarrow$  (ii):  $(f \circ p)^{-1}(\Omega) = p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii): oczywiste
- (iii)  $\Rightarrow$  (i):  $p_i^{-1}(f^{-1}(\Omega)) = (f \circ p_i)^{-1}(\Omega)$  i korzystamy z (a)

**Definicja 2.1.3 (Jakobian odwzorowania różniczkowalnego)**

Dla odwzorowania  $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq n \leq m$ , niech  $J_n f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$J_n f := \left( \sum_{I \in \bigwedge_n^m} \left| \det \left[ \frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \right]_{j,k=1,\dots,n} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\bigwedge_n^m := \{(i_1, \dots, i_n) : 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m\}$$

Odnajdujemy również, że  $J_n f(t_0) > 0 \Leftrightarrow \text{rank}(f'(t_0)) = n$ .

**Lemat 2.1.1 (Równoważność z definicją Federera)**

Pokażemy, że ta definicja Jacobianu jest równoważna definicji przez iloczyn zewnętrzny zdefiniowany w książce Federera "Geometric Measure Theory" w 3.2.1 [Fed]. Będzie wystarczająco pokazać równość dla odwzorowania liniowego  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq n \leq m$ . Niech  $e_1, \dots, e_n$  i  $e'_1, \dots, e'_m$  bazy kanoniczne odpowiednio dla  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$ . Wtedy

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e'_j$$

Dalej chcemy pokazać, że definicja Federera i definicja w tu są równoważne. Oczywiście:

$$\begin{aligned} \left\| \bigwedge^n L \right\| &= \left| \left( \bigwedge^n L \right) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \right| = |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)| = \left| \left( \sum_{j_1=1}^m a_{j_1,1} e'_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_n=1}^m a_{j_n,n} e'_{j_n} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m; \sigma \in S_n} a_{\lambda(\sigma(1)),1} \dots a_{\lambda(\sigma(n)),n} \cdot e'_{\lambda(\sigma(1))} \wedge \dots \wedge e'_{\lambda(\sigma(n))} \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} \left( \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma)) a_{\lambda(\sigma(1)),1} \dots a_{\lambda(\sigma(n)),n} \right) e_\lambda \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} M_\lambda e_\lambda \right| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \bigwedge_n^m} M_\lambda^2} \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że baza algebry zewnętrznej złożona z  $\{e_\lambda : \lambda \in \bigwedge_n^m\}$  jest ortonormalna.

Pokazanie tej równoważności pozwala na wykorzystywanie wszelkich własności iloczynu zewnętrznego i jego normy, które znajdziemy w książce Federera [Fed].

**Lemat 2.1.2 (Jakobian zestawienia)**

Jeżeli  $\phi : G \rightarrow \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie  $G, \Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$  oraz  $\phi(G) \subset \Omega$  to

$$J_n(f \circ \phi) = ((J_n f) \circ \phi) \cdot |\phi'|$$

**Dowód:**

$$\| \bigwedge^n f'(\phi) \circ \phi' \| = \| \bigwedge^n f'(\phi) \| \| \bigwedge^n \phi' \| = ((J_n f) \circ \phi) \cdot |\phi'|.$$

Dalej pokażemy, że istnieje miara  $\mathcal{L}^M$  na tych podrozmaitościach, która, jak w następnych rozdziałach się dowiemy, jest równy mierze Hausdorffa. Dla przypadku  $n = 0$ , niech  $\mathcal{L}^M$  będzie miarą liczącą oraz dla przypadku  $n = m$  - miarą Lebesgue'a.

**Twierdzenie 2.1.3 (Miara Lebesgue'a na podrozmaitościach)**

Istnieje dokładnie jedna miara  $\mathcal{L}^M : L_M \rightarrow [0, +\infty]$  taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji  $p : P \rightarrow U$  mamy:

$$\mathcal{L}^M(A \cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_n p d\mathcal{L}^n, \quad A \in L_M$$

Ponadto miara ta jest zupełna,  $\mathcal{B}$ -regularna oraz istnieje ciąg  $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$  zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w  $M$ , dla którego  $M = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$  i  $\mathcal{L}^M(\Omega_j) < \infty, j \in \mathbb{N}$ . Miara  $\mathcal{L}^M$  nosi nazwę miary Lebesgue'a na  $M$ .

**Dowód:**

Ustaliamy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji  $(p_j : P_j \rightarrow U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  taką, że  $\bigcap_{j=1}^\infty U_j = M$ . Niech  $B_1 := U_1$ ,  $B_j := U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$ ,  $j \geq 2$ . Oczywiście  $B_j \in \mathcal{B}(M) \subset L_M$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , oraz  $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = M$ . Teraz dla zbioru  $A \in L_M$  kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech  $(A_k)_{k=1}^\infty$  będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^M(A_k) \end{aligned}$$

Teraz musimy pokazać, że zachodzi równość z tego twierdzenia. Ustalmy lokalną parametryzację  $p : P \rightarrow U$  i niech  $\phi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap U_j) \rightarrow p^{-1}(U \cap U_j)$ ,  $\psi_j := \phi_j^{-1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Wtedy dla  $A \in L_M$  takiego, że  $A \subset U$ , korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych mamy:

$$\begin{aligned} \int_{p^{-1}(A)} J_n p d\mathcal{L}^n &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p^{-1}(A \cap B_j)} J_n p d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \int_{\phi_j(p_j^{-1}(A \cap B_j \cap U))} J_n(p_j \circ \psi_j) d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} (J_n(p_j \circ \psi_j) \circ \phi_j) |\phi_j'| d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^M(A) \end{aligned}$$

Niech  $\mu : L_M \rightarrow [0, +\infty]$  będzie inną miarą spełniającą tą równość. Wtedy dla  $A \in L_M$  mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_n p_j d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^M(A)$$

Stąd wynika, że  $\mathcal{L}^M$  jest jedyna.

# Rozdział 3

## Miara Lebesgue'a na podrozmaiwościach jako miara Hausdorffa

### 3.1 Przygotowanie

#### Lemat 3.1.1

Niech  $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest klasy  $C^1$ ,  $1 \leq n \leq m$ ,  $a \in \Omega$  oraz  $T := f'(a)$  monomorfizm. Wtedy dla  $\lambda > 1$  istnieje takie  $r > 0$ , że:

1.  $K := B(a, r) \subset \Omega$ ,
2.  $\forall h \in \mathbb{R}^m, x \in K : \lambda^{-1}|T(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T(h)|$ ,
3.  $\forall x_1, x_2 \in K : \lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$ ,
4.  $f|_K : K \rightarrow f(K)$  jest bilipschitzowskie.

#### Dowód:

Wybieramy  $\epsilon > 0$ , tak aby

$$\epsilon\left(\frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\right) \leq \inf\{|f'(a)(h)| : |h| = 1\} = \|f'(a)\|$$

Wtedy mamy:

$$\begin{cases} \epsilon|h| \leq (\lambda-1)|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m, \\ \epsilon|h| \leq (1-\lambda^{-1})|f'(a)(h)| & , h \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Wybieramy następnie  $r > 0$  tak aby:

- (a)  $K = B(a, r) \subset \Omega$
- (b)  $\forall x \in K : \|f'(x) - f'(a)\| \leq \epsilon$

Sprawdzamy 2.:

$$\begin{aligned} |f'(x)(h) - f'(a)(h)| \leq \epsilon|h| & \implies ||f'(x)(h)| - |f'(a)(h)|| \leq \epsilon|h| \\ \implies -\epsilon|h| \leq |f'(x)(h)| - |f'(a)(h)| \leq \epsilon|h| & \implies \\ |f'(a)(h)| - \epsilon|h| \leq |f'(x)(h)| \leq |f'(a)(h)| + \epsilon|h| & \end{aligned}$$

Korzystając z tego jakiego dobieraliśmy  $\epsilon$  dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(h)| = \lambda^{-1}|f'(a)(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|f'(a)(h)| = \lambda|T(h)|$$

Dla sprawdzenia 3. rozpatrzmy następujące odwzorowanie:

$$F : K \ni x \rightarrow f(x) - f'(a)(x) \in \mathbb{R}^m$$

Mamy  $F'(x) = f'(x) - f'(a)$ . Zatem  $\forall x_1, x_2 \in K : |F(x_1) - F(x_2)| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$  skąd dalej dostajemy:

$$|(f(x_1) - f'(a)(x_1)) - (f(x_2) - f'(a)(x_2))| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|(f(x_1) - f(x_2)) - f'(a)(x_1 - x_2)| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$||f(x_1) - f(x_2)| - |f'(a)(x_1 - x_2)|| \leq \epsilon|x_1 - x_2|$$

$$|f'(a)(x_1 - x_2)| - \epsilon|x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f'(a)(x_1 - x_2)| + \epsilon|x_1 - x_2|$$

Ponownie korzystając z tego jakiego dobieraliśmy  $\epsilon$  i podstawiając  $h = x_1 - x_2$  dostajemy:

$$\lambda^{-1}|T(x_1) - T(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T(x_1) - T(x_2)|$$

Co kończy dowód 3. z którego natychmiast wynika 4.

### Lemat 3.1.2

Niech  $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie funkcją klasy  $C^1$ ,  $1 \leq n \leq m$  oraz  $f'(x)$  będzie monomorfizmem dla  $x \in \Omega$ ,  $\lambda > 1$ . Wtedy istnieje ciąg par  $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$  takich, że  $B_v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  liniowe dla każdego  $v \in \mathbb{N}$  oraz :

1.  $B_v \cap B_\mu = \emptyset \Leftrightarrow \mu \neq v$ ,
2.  $\bigcup_{v \in \mathbb{N}} B_v = \Omega$ ,
3.  $\forall x \in B_v, h \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{N} : \lambda^{-1}|T_v(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T_v(h)|$ ,
4.  $\forall x_1, x_2 \in B_v, v \in \mathbb{N} : \lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1 - x_2)|$ ,
5.  $f|_{B_v} : B_v \rightarrow f(B_v)$  jest odwzorowaniem bilipschitzowskim dla  $v \in \mathbb{N}$ .

#### Dowód:

Korzystając z poprzedniego twierdzenia wiemy, że dla każdego  $a \in \Omega$  możemy znaleźć  $(K, T)$  które spełniają warunki 3.-5. . Korzystając z tego, że  $\mathbb{R}^m$  jest ośrodkowa wiemy, że możemy znaleźć przeliczalną rodzinę  $\{(K_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$  taką, że ona spełnia 2.. Teraz definiujemy indukcyjnie  $B_0 = K_0$  oraz  $B_v = K_v \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} K_j$ . Wtedy ciąg par  $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$  spełnia wszystkie wymagane warunki

### Lemat 3.1.3

Niech  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest funkcją lipschitzowską o stałej  $C$ , oraz  $A \subset \mathbb{R}^m$  i  $p \in [0, +\infty)$ . Wtedy:

$$\mathcal{H}^p(f(A)) \leq (\text{Lip}(f))^p \mathcal{H}^p(A)$$

#### Dowód:

Dla  $p = 0$  ta nierówność jest oczywista. Niech  $p > 0$ . Jeśli  $\text{Lip}(f) = 0$  to  $f$  jest stała, a więc obraz tej funkcji jest miary zero. Niech teraz  $\text{Lip}(f) > 0$ . Jeśli  $\mathcal{H}^p(A) = +\infty$  to ta nierówność znowu jest oczywista. Pozostaje przypadek gdy  $\mathcal{H}^p(A) < +\infty$  w którym korzystamy z nierówności

$$\text{diam}(f(Z)) \leq \text{Lip}(f)(\text{diam}(Z))$$

dla  $Z \subset \mathbb{R}^m$

**Twierdzenie 3.1.1**

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ ,  $1 \leq n \leq m$ ,  $f'(x)$  jest monomorfizmem dla  $x \in \Omega$ . Wtedy:

1.  $(A \subset \Omega, A \in L_n) \implies f(A) \in H_n$ ,
2.  $(B \subset \mathbb{R}^m, B \in H_n) \implies f^{-1}(B) \in L_n$ .

**Dowód 1.:**

Dla początku musimy pokazać to, że obraz zbioru  $A$  miary zero jest miary zero. Wiemy, że dla każdego zbioru  $A \subset \mathbb{R}^n$  zachodzi nierówność  $\mathcal{H}^p(f(A)) \leq (\text{Lip}(f))^p \mathcal{H}^p(A)$ , gdzie  $p \in [0, +\infty)$ . Ponieważ  $A$  jest miary zero to dostajemy, że  $f(A)$  musi być miary zero. Teraz pokażemy, że 1. zachodzi dla zbiorów typu  $F_\sigma$ , to znaczy zbiorów które są przeliczalną sumą zbiorów domkniętych. Niech  $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ , gdzie  $K_j$  to są zbiory domknięte. Ponieważ  $f(A) = f(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(K_j)$  to wystarczy pokazać, że każdy  $f(K_j)$  jest mierzalny. Możemy założyć, że  $K_j$  jest zwarty. Ale wtedy obraz musi być zwarty, a więc domknięty, skąd wynika, że  $f(A)$  jest typu  $F_\sigma$  w  $\mathbb{R}^m$ , a więc borelowski, a więc mierzalny w sensie  $\mathcal{H}^n$ . Teraz wystarczy skorzystać z tego, że każdy  $A \in L_n$  można przedstawić jako  $C \setminus Z$ , gdzie  $C$  jest typu  $F_\sigma$  oraz  $Z$  jest miary zero, co kończy dowód.

**Dowód 2.:**

Będziemy stosować lemat 3.1.2 o tym, że możemy znaleźć ciąg par  $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ , takich, że  $B_v$  pokrywają  $\Omega$ , oraz  $T_v$  robią odpowiednie ograniczenia dla  $f$  na  $B_v$ . Zauważmy, że możemy dobrać taki ciąg  $B_v$ , że  $\mathcal{H}^n(B_v) < +\infty$ . Mamy

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{v=0}^{\infty} (f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$$

Ponieważ  $B \cap f(B_v)$  ma miarę  $\mathcal{H}^n$  skończoną to  $B \cap f(B_v) = C_v \cup Z_v$ , gdzie  $C_v$  jest borelowski oraz  $Z_v$  jest miary  $\mathcal{H}^m$  zero. Wtedy

$$(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v)) = (f|_{B_v})^{-1}(C_v) \cup (f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$$

Korzystając z tego, że  $f$  jest bilipschitzowska na  $B_v$  dostajemy, że  $(f|_{B_v})^{-1}(C_v)$  jest borelowski (bo przeciobraz zbioru borelowskiego przez funkcję ciągłą) oraz  $(f|_{B_v})^{-1}(Z_v)$  ma miarę  $\mathcal{H}^n$  zerową, gdyż  $(f|_{B_v})^{-1}$  jest lipschitzowska. Zatem z tego, że  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  na  $\mathbb{R}^n$  wynika, że  $(f|_{B_v})^{-1}(B \cap f(B_v))$  są  $L_n$  mierzalne dla  $v \in \mathbb{N}$ , a więc  $f^{-1}(B) \in L_n$  co kończy dowód.

## 3.2 Miara Hausdorffa obrazu

**Twierdzenie 3.2.1**

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ ,  $1 \leq n \leq m$ .  $\forall x \in \Omega : f'(x)$  jest monomorfizmem. Niech  $L_n \ni A \subset \Omega$  taki, że  $f|_A$  - iniekcja. Wtedy:

1.  $f(A) \in H_n$ ,
2.  $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$ .

**Dowód:**

Już wiemy, że  $f(A) \in H_n$ , więc musimy jedynie pokazać tę równość. Ustalmy  $\lambda > 1$  i wybieramy rozbięcie  $\Omega$  oraz ciągi operatorów zgodnie z lematem 3.1.2  $\{(B_v, T_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ . Korzystając z własności normy w algebrze zewnętrznej oraz tego, że  $J_n f = \|\wedge_n f\|$ , dostajemy dla  $x \in B_v$  oraz  $v \in \mathbb{N}$  nierówność

$$\lambda^{-n}|T_v| \leq (J_n f)(x) \leq \lambda^n |T_v|$$

która wynika bezpośrednio z następującej nierówności z lematu 3.1.2

$$\lambda^{-1}|T_v(h)| \leq |f'(x)(h)| \leq \lambda|T_v(h)| \quad \text{dla } x \in B_v, h \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{N}$$

oraz wniosku [Two, AM3, 8.41] który mówi, że

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : |W_1(v)| \leq |W_2(v)| \implies |W_1| \leq |W_2|$$

gdzie  $W_1$  i  $W_2$  to są dowolne odwzorowania liniowe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Definiujemy  $A_v := A \cap B_v$ . Wtedy całkując otrzymaną nierówność na  $A_v$  dostajemy

$$\lambda^{-n}|T_v|\mathcal{L}^n(A_v) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^n |T_v|\mathcal{L}^n(A_v)$$

W tym samym lemacie 3.1.2 mamy następującą nierówność

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1 - x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1, x_2)| \quad \text{dla } x_1, x_2 \in B_v$$

Skąd już wynika, że

$$\lambda^{-1}|T_v(x_1) - T_v(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda|T_v(x_1) - T_v(x_2)| \quad \text{dla } x_1, x_2 \in A_v$$

Rozpatrzmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} T_v(A_v) & \xleftarrow{h_v} & f(A_v) & \xrightarrow{h_v} & T_v(A_v) \\ & \nwarrow T_v|_{A_v} & \uparrow f|_{A_v} & \nearrow T_v|_{A_v} & \\ & & A_v & & \end{array}$$

dla  $h_v = (T_v|_{A_v}) \circ (f|_{A_v})^{-1}$  mamy  $Lip(h_v) \leq \lambda$ ,  $Lip h_v^{-1} \leq \lambda$  dla  $v \in \mathbb{N}$ . Zatem dla  $v \in \mathbb{N}$  otrzymujemy

$$\lambda^{-n}\mathcal{H}^n(T_v(A_v)) \leq \mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \lambda^n \mathcal{H}^n(T_v(A_v))$$

Skąd dostajemy

$$\lambda^{-2n}\mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n}\mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Dalej sumując tę nierówność po  $v \in \mathbb{N}$  dostajemy

$$\lambda^{-2n} \sum_{v=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(A_v)) \leq \int_{A_v} J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n} \sum_{v=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(A_v))$$

Skąd na podstawie injektywności  $f$  dostajemy

$$\lambda^{-2n} \mathcal{H}^n(f(A)) \leq \int_A J_n f d\mathcal{L}^n \leq \lambda^{2n} \mathcal{H}^n(f(A))$$

Teraz widzimy, że jeśli  $\mathcal{H}^n(f(A)) = +\infty$  to równość z tezy zachodzi. Jeśli  $\mathcal{H}^n(f(A)) < +\infty$  to przechodząc z  $\lambda > 1$  do 1 dostajemy równość

$$\mathcal{H}^n f(A) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$$

### Lemat 3.2.1

$\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ .  $1 \leq n \leq m$ ,  $A \subset \Omega$ ,  $\forall x \in A : J_n f(x) = 0$ . Wtedy  $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$ .

### Dowód:

Tezę wystarczy pokazać dla  $A := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$ .  $A$  jest  $\sigma$ -zwarta, więc dalej możemy ograniczyć dowód do zbiorów  $A$  zwartego. Przy ustalonym  $A$  i  $\epsilon > 0$  rozważmy odwzorowanie

$$g_\epsilon : \Omega \ni x \rightarrow (\epsilon x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

oraz rzutowanie  $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dla którego  $\text{Lip}(p) = 1$ . Mamy  $f(A) = p(g_\epsilon(A))$ .  $g_\epsilon$  jest injekcją oraz  $\forall x \in \Omega : g'_\epsilon(x)$  - monomorfizm, więc dostajemy nierówność:

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \mathcal{H}^n(g_\epsilon(A)) = \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n$$

Macierz  $g_\epsilon$  ma taką postać:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \epsilon \\ & & f'(x) \end{bmatrix}$$

Teraz zauważmy, że  $(J_n g_\epsilon)^2(x) = \epsilon^{2n} + \epsilon^{2n-1} s_1(x) + \cdots + \epsilon^2 s_{2n-2}(x)$ , gdzie  $s_1, \dots, s_{2n-2}$  są ciągłe, więc ograniczone na  $A$ . Istnieje więc stała  $M > 0$ , że  $J_n g_\epsilon(x) \leq M\epsilon$  dla  $x \in A$ ,  $\epsilon \in (0, 1)$ . Skąd dostajemy  $\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \int_A J_n g_\epsilon d\mathcal{L}^n \leq \epsilon M \mathcal{L}^n(A)$  dla  $\epsilon \in (0, 1)$  skąd wynika już żądana równość  $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$

### Twierdzenie 3.2.2 (Wzór na liczenie miary obrazu)

Niech  $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ ,  $1 \leq n \leq m$ ,  $A \subset \Omega$ ,  $A \in L_n$ ,  $f|_A$  injekcja. Wtedy  $\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n$ .

### Dowód:

Niech  $F := \{x \in \Omega : J_n f(x) = 0\}$  oraz  $\Omega' := \Omega \setminus F$ . Wiemy, że  $\mathcal{H}^n(f(F)) = 0$ . Stąd już wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(f(A)) &= \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega')) + \mathcal{H}^n(f(A \cap F)) = \mathcal{H}^n(f(A \cap \Omega')) \\ &= \int_{A \cap \Omega'} J_n f d\mathcal{L}^n + \int_{A \cap F} 0 d\mathcal{L}^n = \int_A J_n f d\mathcal{L}^n \end{aligned}$$



### 3.3 Równość miar na podrozmaiwościach

#### Twierdzenie 3.3.1 (Miary Lebesgue'a na podrozmaiwościach to miara Hausdorffa)

Niech  $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$ . Wtedy  $L_M \subset H_d$  oraz  $\mathcal{L}^M = \mathcal{H}^d$  na  $L_M$ .

#### Dowód:

Dla  $d \in \{0, n\}$  teza twierdzenia jest oczywista. Niech  $1 \leq d \leq n - 1$ . Ustalmy  $A \in L_M$ . Ustalmy dowolny atlas  $\{p_v : P_v \rightarrow U_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  podrozmaiwości  $M$ . Definiujemy indukcyjnie  $C_0 := p_0^{-1}(A)$  oraz  $C_v := p_v^{-1}(A) \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} p_j^{-1}(A)$ . Ponieważ  $A \in L_M \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{N} : p_v^{-1}(A) \in L_d$  to stąd wynika, że  $A$  jest  $H^d$  mierzalny jako suma obrazów  $p_v^{-1}(A)$  przez  $p_v$  które są bijektywne klasy  $C^1$ . Definiujemy indukcyjnie  $B_0 := U_0$  oraz  $B_v := U_v \setminus \bigcup_{j=0}^{v-1} U_j$ ,  $C_0 := p_0^{-1}(B_0)$  oraz  $C_v := p_v^{-1}(B_v)$ . Dalej korzystając z własności miary  $\mathcal{L}^M$  dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M(A) &= \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{v \in \mathbb{N}} A \cap B_v\right) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^M(A \cap B_v) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^M(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v))) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{N}} \int_{p_v^{-1}(A \cap B_v)} J_d p_v d\mathcal{L}^d = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^d(p_v(p_v^{-1}(A \cap B_v))) = \sum_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^d(A \cap B_v) = \mathcal{H}^d(A) \end{aligned}$$

To kończy dowód.

# Bibliografia

- [Fed] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [Jar] M. Jarnicki. *Notatki do wykładu z analizy matematycznej*. Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 2020-2021.
- [Two] P. Tworzewski. *Notatki do wykładu z analizy matematycznej*. Wykład prowadzony na Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 2021-2022.