

Разлет газового шара в вакууме в эйлеровых координатах

Дмитрий Гурьев, группа М03-201

1 Постановка задачи

Необходимо решить размерную систему уравнений, описывающую разлет газового шара в вакууме. Данный процесс можно описать с помощью уравнений Эйлера в сферических координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2)$$

дополненную уравнением состояния

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}. \quad (3)$$

Характерные значения физических величин:

$$\rho_x = \rho_0, \quad P_x = P_0, \quad u_x = \sqrt{\frac{P_x}{\rho_x}}, \quad R_x = R_0, \quad t_x = \frac{R_x}{u_x}, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_x}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_x}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_x}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_x}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_x},$$

Подставляя безразмерные величины в исходные уравнения (1)–(3), получаем безразмерную систему

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{\rho} \bar{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}}, \quad (5)$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^\gamma} = 1 \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\bar{\rho}(0, \bar{r}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{r} \leq 1 \\ 0, & \bar{r} \geq 1 \end{cases},$$

$$\bar{P}(0, \bar{r}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{r} \leq 1 \\ 0, & \bar{r} \geq 1 \end{cases},$$

$$\bar{u}(0, \bar{r}) = 0$$

и граничным условием на скорость

$$\bar{u}(\bar{t}, 0) = 0.$$

В дальнейшем все величины полагаются безразмерными и для удобства записываются без черты.

Расчеты необходимо проводить на равномерной сетке с шагом по пространству $h = 10^{-3}$ и количеством узлов $N_r = 10^4$.

2 Описание численных методов

2.1 Схема Лакса-Вендроффа

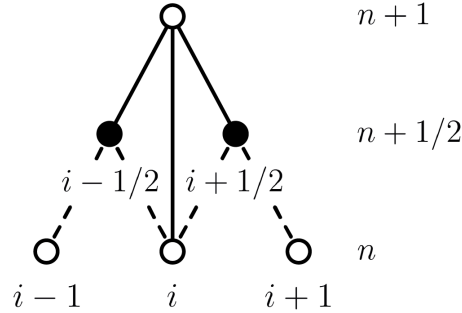


Рис. 1: Шаблон схемы Лакса-Вендроффа

Явная двухшаговая схема Лакса-Вендроффа принадлежит к классу консервативных схем и имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. При аппроксимации уравнений на первом шаге рассчитываются параметры на полушагах по времени и по пространству по схеме Лакса, и затем вычисляются значения искомых параметров на следующем временном шаге по схеме с перешагиванием. Шаблон схемы представлен на рис. 1.

Запишем конечно-разностные выражения для системы (4)–(6).

I этап:

$$\begin{aligned} \rho_{i-1/2}^{n+1/2} &= \frac{\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{(r_i - \frac{h}{2})^2} \frac{r_i^2 \rho_i^n u_i^n - (r_i - h)^2 \rho_{i-1}^n u_{i-1}^n}{h}, \\ \rho_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{(r_i + \frac{h}{2})^2} \frac{(r_i + h/2)^2 \rho_{i+1}^n u_{i+1}^n - r_i^2 \rho_i^n u_i^n}{h}, \\ u_{i-1/2}^{n+1/2} &= \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} - \frac{\tau}{2} \frac{2}{\rho_i^n + \rho_{i-1}^n} \frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h}, \\ u_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \frac{\tau}{2} \frac{2}{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n} \frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{h}, \\ P_{i-1/2}^{n+1/2} &= \left(\rho_{i-1/2}^{n+1/2} \right)^\gamma, \\ P_{i+1/2}^{n+1/2} &= \left(\rho_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^\gamma, \end{aligned}$$

где $r_i = ih$.

II этап:

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} &= \rho_i^n - \tau \frac{1}{r_i^2} \frac{(r_i + \frac{h}{2})^2 \rho_{i+1/2}^{n+1/2} u_{i+1/2}^{n+1/2} - (r_i - \frac{h}{2})^2 \rho_{i-1/2}^{n+1/2} u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \tau u_i^n \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} - \tau \frac{1}{\rho_i^n} \frac{P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}, \\ P_i^{n+1} &= (\rho_i^{n+1})^\gamma.\end{aligned}$$

На левой границе считаем

$$\begin{aligned}u_0^{n+1} &= 0, \\ \rho_0^{n+1} &= \rho_1^{n+1}.\end{aligned}$$

На правой границе, для простоты, задаем условия на бесконечности:

$$\begin{aligned}u_{N_r-1}^{n+1} &= 0, \\ \rho_{N_r-1}^{n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Поскольку схема Лакса-Вендроффа не является монотонной, в процессе расчета могут возникать нефизичные осцилляции. Для борьбы с численными возмущениями используется метод сглаживания решения. Смысл этого метода состоит в замене искомого значения в узле на его комбинацию со значениями в соседних узлах:

$$x_i^{n+1} \rightarrow (1 - 2\alpha)x_i^{n+1} + \alpha x_{i-1}^{n+1} + \alpha x_{i+1}^{n+1}$$

с параметром $\alpha \leq 0.5$. Параметр сглаживания α выбирается так, чтобы не исказить решение и при этом подавить возмущения.

2.2 Метод крупных частиц

Далее рассмотрим метод крупных частиц. В этом консервативном методе каждая итерация разбивается на три шага: Эйлера, Лагранжев и завершающий. Сначала рассматривается изменение внутреннего состояния подсистемы – "крупной частицы" (Эйлеров шаг), и затем движение подсистемы с фиксированным внутренним состоянием (Лагранжев и завершающий шаги).

1. **Эйлеров шаг:** Для описания эволюции внутреннего состояния подсистемы перепишем исходную систему (4)–(6) без слагаемых, отвечающих за конвективный перенос:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ P &= \rho^\gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}.\end{aligned}$$

Для решения этой системы воспользуемся простой разностной схемой:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_i &= \rho_i^n, \\ \tilde{P}_i &= (\rho_i^n)^\gamma, \\ \tilde{u}_i &= u_i^n - \tau \frac{1}{\rho_i^n} \frac{(\rho_{i+1}^n)^\gamma - (\rho_{i-1}^n)^\gamma}{2h}\end{aligned}$$

с граничными условиями $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_{N_r-1} = 0$.

2. **Лагранжев шаг:** На этом этапе необходимо вычислить поток массы через границы каждой ячейки за время τ :

$$\Delta M_{i-1/2}^n = \tau \langle \rho_{i-1/2}^n \rangle \langle u_{i-1/2}^n \rangle S_{i-1/2},$$

$$\Delta M_{i+1/2}^n = \tau \langle \rho_{i+1/2}^n \rangle \langle u_{i+1/2}^n \rangle S_{i+1/2},$$

где $S_{i\pm 1/2}$ – площади левой и правой поверхностей ячеек. Для данной задачи, $S_{i\pm 1/2} = 4\pi(r_i \pm h/2)^2$. Треугольными скобками обозначаются значения ρ и u на границах ячеек. В [1] предлагается следующая схема для вычисления потоков массы:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i-1/2}^n &= \begin{cases} \tau \rho_{i-1}^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{2} S_{i-1/2}, & \tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n > 0 \\ \tau \rho_i^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{2} S_{i-1/2}, & \tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n < 0 \end{cases} \\ \Delta M_{i+1/2}^n &= \begin{cases} \tau \rho_i^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n}{2} S_{i+1/2}, & \tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n > 0 \\ \tau \rho_{i+1}^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n}{2} S_{i+1/2}, & \tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

В силу центральной симметричности задачи, при $i = 0$ считаем $\Delta M_{-1/2}^n = -\Delta M_{1/2}^n$.

3. **Завершающий шаг:** Наконец мы вычисляем значения физических величин в ячейках в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau$. Новые значения ρ и u рассчитываются по формулам из [2], адаптированным под сферически симметричный случай:

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta M_{i-1/2}^n - \Delta M_{i+1/2}^n}{V_i}, \\ u_i^{n+1} &= \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} u_i^n + \frac{u_{i-1}^n \Delta M_{i-1/2}^n - u_i^n \Delta M_{i+1/2}^n}{\rho_i^{n+1} V_i}, \\ P_i^{n+1} &= (\rho_i^{n+1})^\gamma,\end{aligned}$$

где V_i – объем сферического слоя

$$V_i = \frac{4}{3}\pi \left(\left(r_i + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(r_i - \frac{h}{2} \right)^3 \right).$$

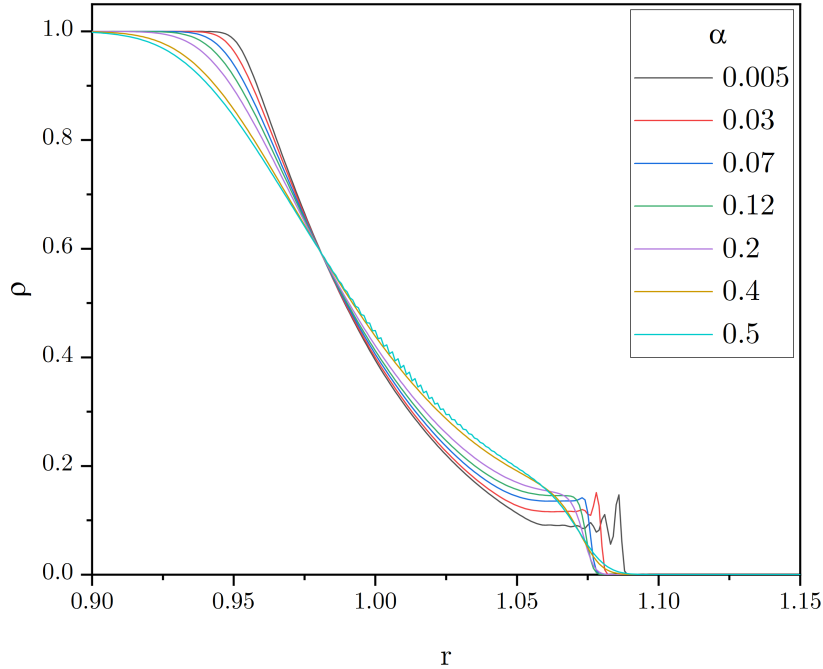


Рис. 2: Распределение безразмерной плотности ρ в момент времени $t = 0.1$ при различных параметрах сглаживания α .

3 Результаты расчетов

1. **Схема Лакса-Вендроффа.** Для начала необходимо подобрать параметр сглаживания α , достаточный для подавления нефизичных осцилляций решения. На рис. 2 показаны распределения безразмерной плотности ρ в момент времени $t = 0.1$ при различных параметрах сглаживания α . Можно видеть, что при $\alpha \approx 0.1$ сглаживание подавляет осцилляции. Поэтому для дальнейших расчетов принимаем $\alpha = 0.1$.

Результаты расчетов приведены на рис. 3–5. Расчеты проводились с шагом по времени $\tau = 10^{-4}$.

2. **Метод крупных частиц.** Результаты расчетов представлены на рис. 6–8. Временной шаг $\tau = 10^{-5}$.

Список литературы

- [1] Юрий Михайлович Белоцерковский, Олег Михайлович и Давыдов. Нестационарный метод “крупных частиц” для газодинамических расчетов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 11(1):182–207, 1971.
- [2] Юрий Михайлович Давыдов. Расчет обтекания тел произвольной формы методом “крупных частиц”. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 11(4):1056–1063, 1971.

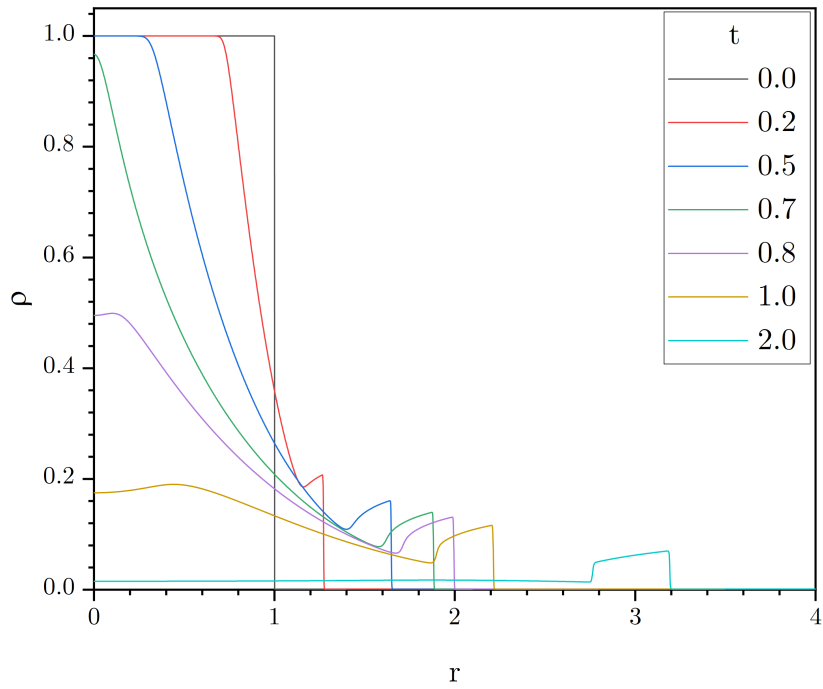


Рис. 3: Результаты расчета с помощью схемы Лакса-Вендроффа. Распределение безразмерной плотности ρ в различные моменты времени.

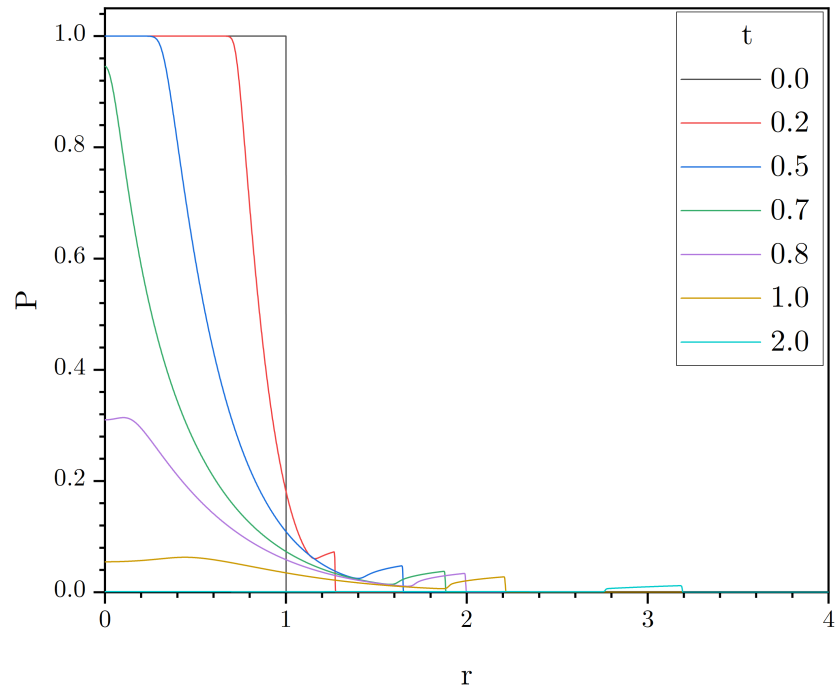


Рис. 4: Результаты расчета с помощью схемы Лакса-Вендроффа. Распределение безразмерного давления P в различные моменты времени.

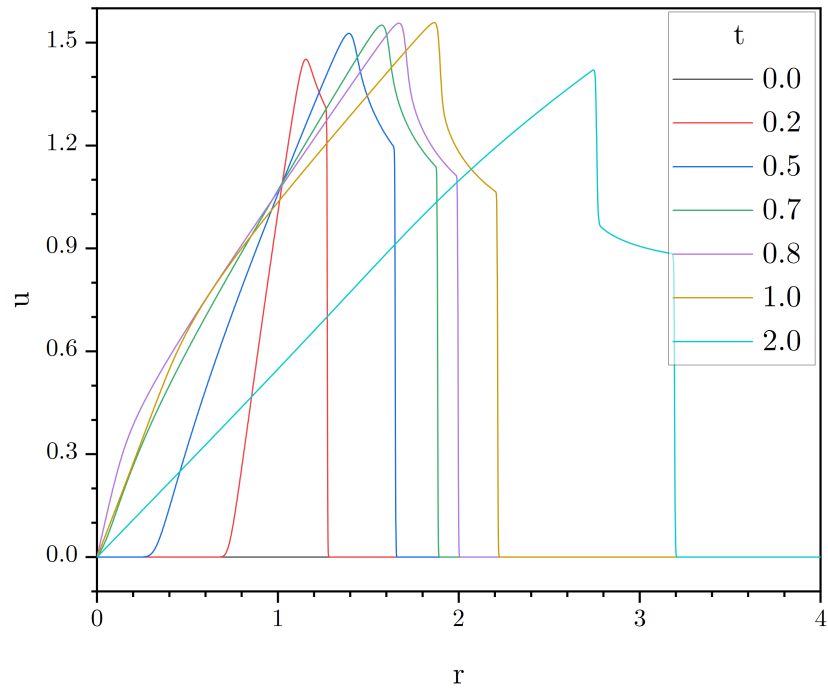


Рис. 5: Результаты расчета с помощью схемы Лакса-Вендроффа. Распределение безразмерной скорости u в различные моменты времени.

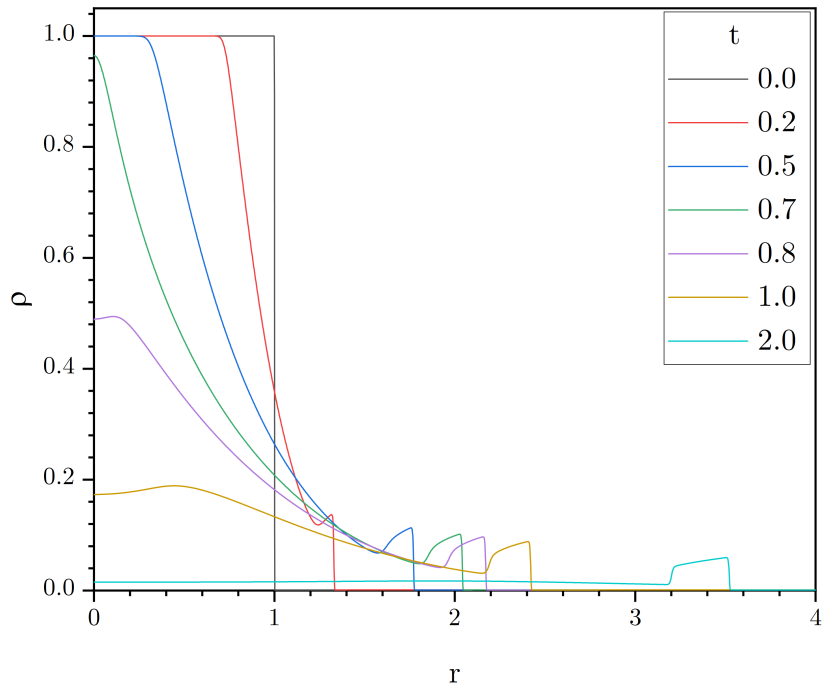


Рис. 6: Результаты расчета с помощью метода крупных частиц. Распределение безразмерной плотности ρ в различные моменты времени.

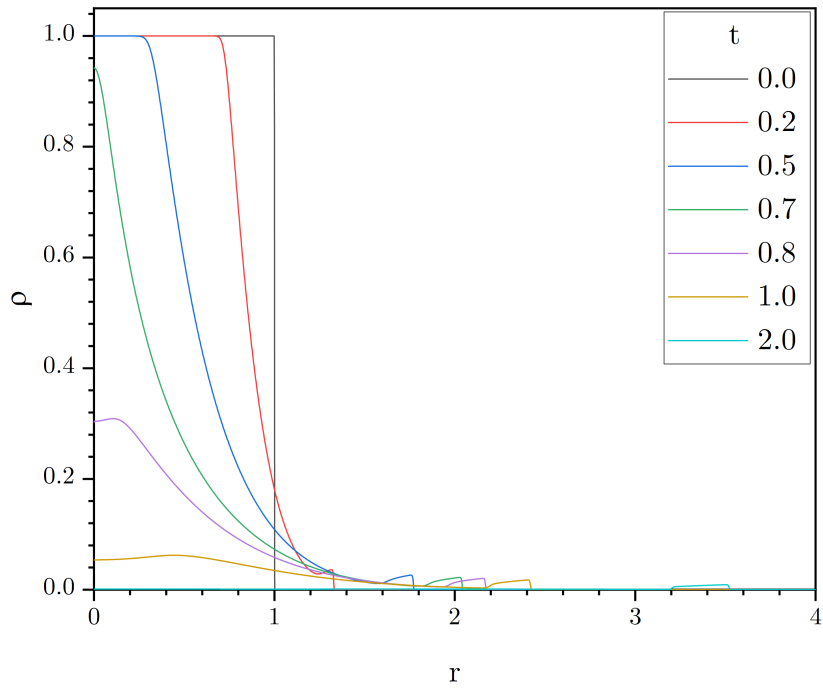


Рис. 7: Результаты расчета с помощью метода крупных частиц. Распределение безразмерного давления P в различные моменты времени.

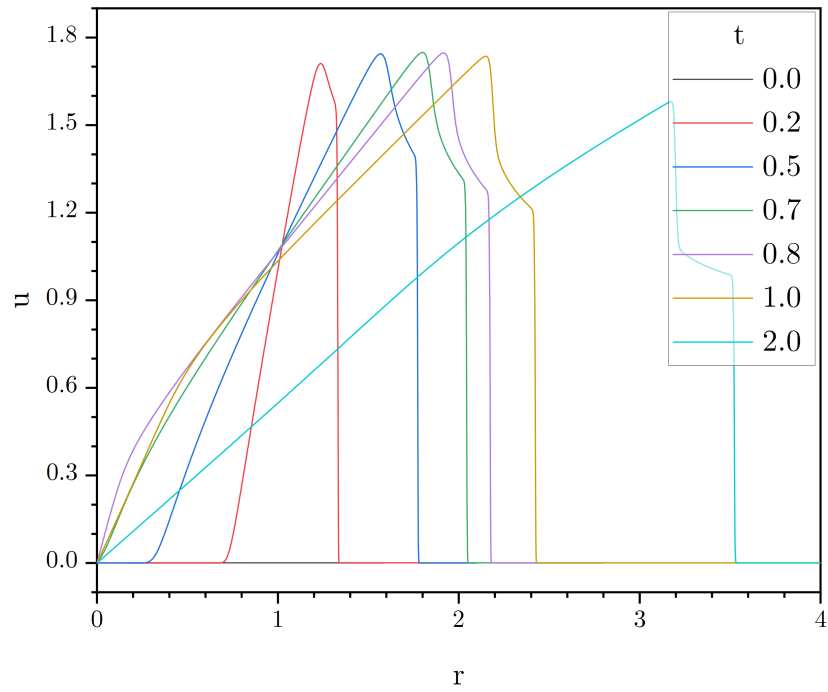


Рис. 8: Результаты расчета с помощью метода крупных частиц. Распределение безразмерной скорости u в различные моменты времени.