МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СОДЕРЖАНИЕ

1 Криволинейные и поверхностные интегралы

1.1 №4362

$$\iint\limits_S (xdydx + ydxdz + zdxdy),\, S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Решение:
Наш исходный интеграл разделим на три интеграла по аддитивности:

$$\iint\limits_S (xdydx + ydxdz + zdxdy) = \iint\limits_S xdydx + \iint\limits_S ydxdz + \iint\limits_S zdxdy$$

Эти три интеграла имеют одинаковое значение в силу симметрии. Вычислим один из них.
Выразим z в S:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Подставим:

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dxdy$$

$$= 2 \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}dr = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Итого:

$$\iint\limits_S (xdydx + ydxdz + zdxdy) = 3\iint\limits_S zdxdy = 3\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

Ответ: $4\pi a^3$.

1.2 №4365

$$\iint\limits_S \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}\right); \, S: \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1$$

Решение:
В силу симметрии выражений внутри интеграла и симметрии S достаточно посчитать 1 интеграл.

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{z} = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \frac{2}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr =$$

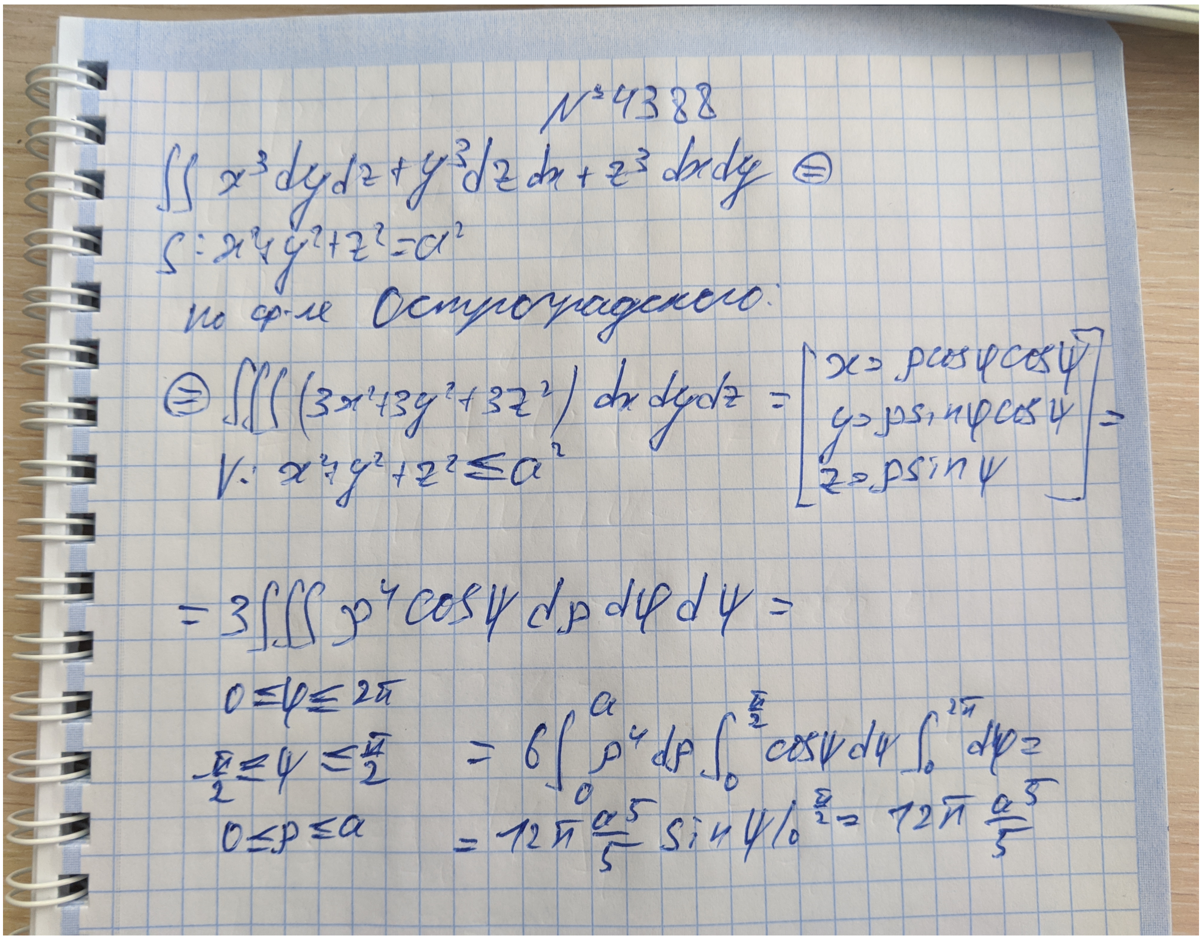
$$= \frac{4\pi ab}{c}(-\sqrt{1-r^2})\Bigg|_0^1 = \frac{4\pi ab}{c}$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}\right) = 4\pi\Big(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\Big)$$

Ответ:$4\pi\big(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\big)$

1.3 №4388

$$\iint\limits_S \Big(x^3dydz + y^3dzdzdx + z^3dxdy\Big);\ S : x^2+y^2+z^2 = a^2$$



№4388

$\iint x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy \;(=)$

$S: x^2+y^2+z^2=a^2$

по ф-ле Остроградского:

$(=) \iiint (3x^2+3y^2+3z^2)\,dxdydz = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi \\ z = \rho\sin\psi \end{bmatrix} =$

$V: x^2+y^2+z^2 \le a^2$

$= 3\iiint \rho^4\cos\psi\,d\rho\,d\varphi\,d\psi =$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$

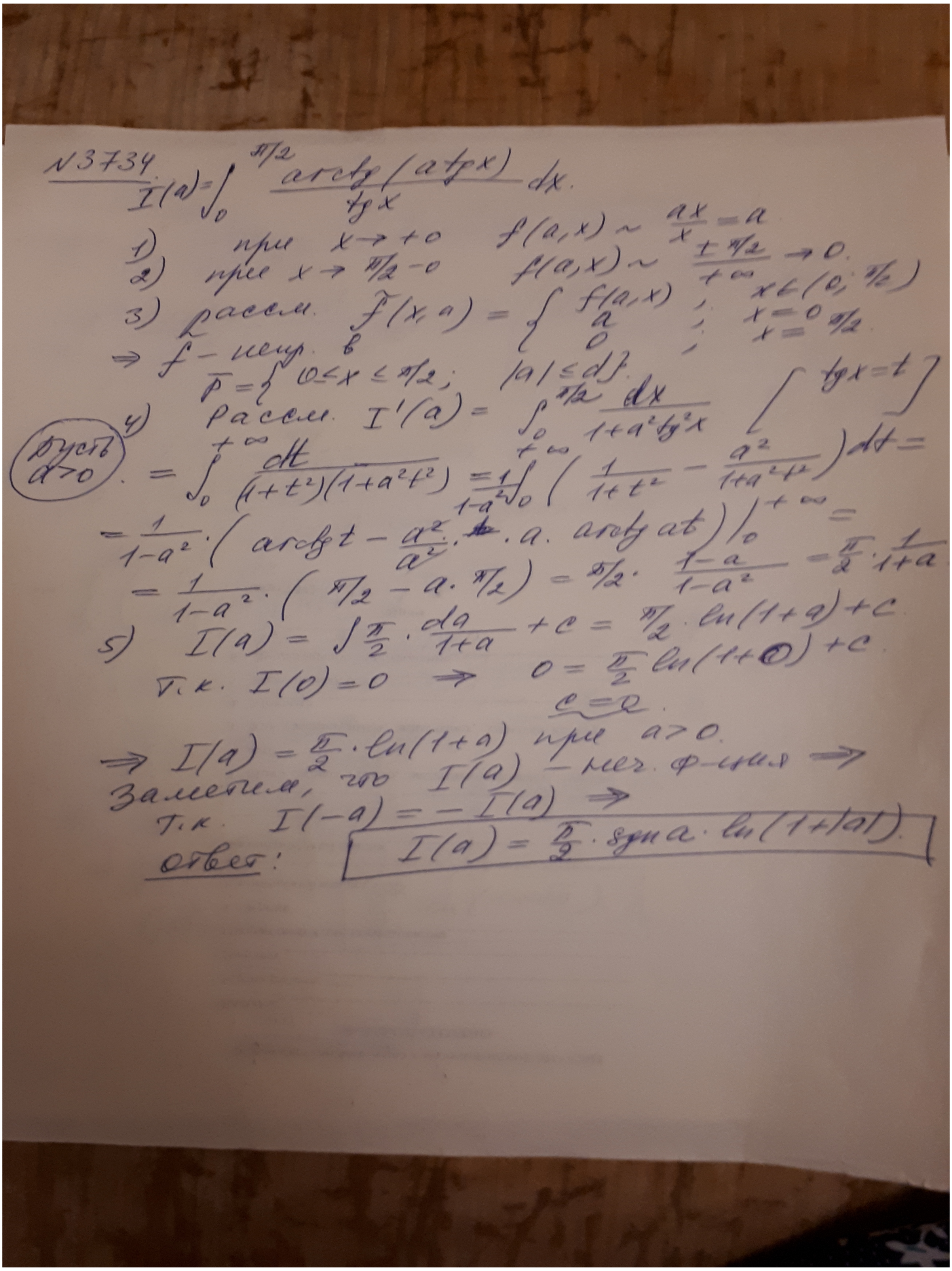
$0 \le \rho \le a$

$= 6\int_0^a \rho^4\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi =$

$= 12\pi\,\frac{a^5}{5}\,\sin\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi\,\frac{a^5}{5}$

1.4 №3734

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctg(\alpha tg(x))}{tg(x)} dx$$



№3734.

$I(a)=\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(a\,tg x)}{tg x}dx$.

1) при $x\to+0$ $f(a,x)\sim \frac{ax}{x}=a$

2) при $x\to \pi/2-0$ $f(a,x)\sim \frac{\pm\pi/2}{+\infty}\to 0$.

3) рассм. $\tilde f(x,a)=\begin{cases} f(a,x); & x\in(0;\pi/2)\\ a; & x=0\\ 0, & x=\pi/2\end{cases}$

$\Rightarrow \tilde f$ – непр. в $\bar P=\{0\le x\le \pi/2;\ |a|\le d\}$.

4) Рассм. $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2tg^2x}$ $\left[tg x=t\right]$

Пусть $a>0$.

$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{1+a^2t^2}\right)dt=$

$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\left(arctg\, t-\frac{a^2}{a^2}\cdot a\cdot arctg\, at\right)\Big|_0^{+\infty}=$

$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\left(\pi/2-a\cdot\pi/2\right)=\pi/2\cdot\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}$

5) $I(a)=\int\frac{\pi}{2}\cdot\frac{da}{1+a}+c=\pi/2\cdot ln(1+a)+c$

т.к. $I(0)=0 \Rightarrow 0=\frac{\pi}{2}ln(1+0)+c$

$c=0$.

$\Rightarrow I(a)=\frac{\pi}{2}\cdot ln(1+a)$ при $a>0$.

Заметим, что $I(a)$ – неч. ф-ция $\Rightarrow$

т.к. $I(-a)=-I(a)\Rightarrow$

Ответ: $\boxed{I(a)=\frac{\pi}{2}\cdot sgn\, a\cdot ln(1+|a|)}$

1.5 №3756

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} sin(x) dx$$

Исследовать на равномерную сходимость.

$$|e^{-\alpha x} sin(x)| \leq e^{-\alpha_0 x}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx = \frac{1}{\alpha_0}$$

Интеграл равномерно сходится по призанку Вейерштрасса.

1.6 №3760

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{sin(x)}{x}dx,\ \alpha \geq 0$$

Решение:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx \text{ - сходится!}$$

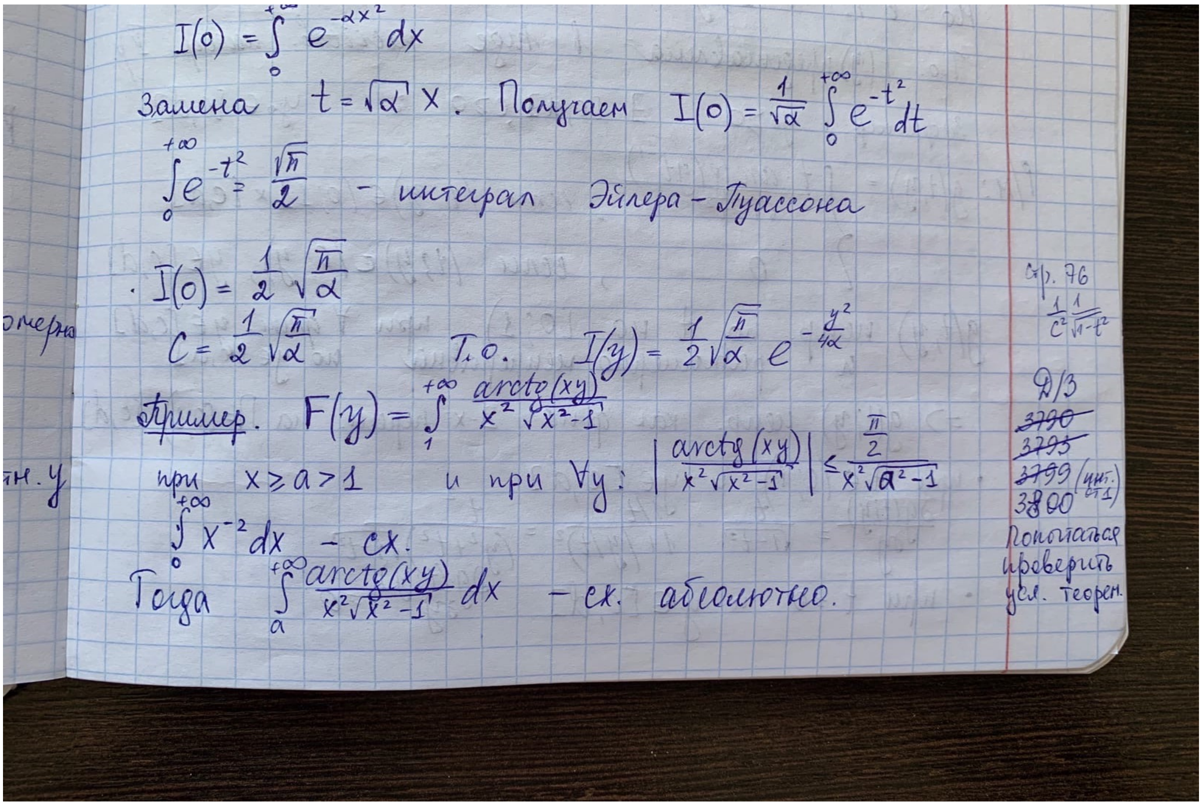
$$\forall \alpha > 0\ e^{-\alpha x} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} 0\text{-равномерно стремится к нулю.}$$

Из этих двух утверждений следует, что по признаку Абеля исходный интеграл сходится.

1.7 №3799

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctg(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

Первая страница:



$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$

Замена $t = \sqrt{\alpha}\, x$. Получаем $I(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ — интеграл Эйлера – Пуассона

$\cdot\ I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ Т.о. $I(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}$

Пример. $F(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{arctg(xy)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

при $x \geq a > 1$ и при $\forall y$: $\left|\frac{arctg(xy)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2\sqrt{a^2-1}}$

$\int\limits_0^{+\infty} x^{-2} dx$ — сх.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \frac{arctg(xy)}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ — сх. абсолютно.

Стр. 76

$\frac{1}{C^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Д/З

~~3790~~

~~3795~~

~~3799~~ (инт.)

3800 (инт.)

Попытаться проверить усл. теорем.

Вторая страница:

Т.о. $F(y)$ опр. для $\forall y$ — это нечётная ф-ия и $F(0)=0$.

Замена $x=t^{-1}$:

$$F(y)=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int_0^1\frac{t\cdot\operatorname{arctg}(yt^{-1})}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

при $\forall t\neq 0$ и $\forall y$: $|\operatorname{arctg}(yt^{-1})|\leq\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\frac{t\cdot\operatorname{arctg}(yt^{-1})}{\sqrt{1-t^2}}=0$$

Доопределив интегрируемую ф-ию $\frac{t\cdot\operatorname{arctg}(yt^{-1})}{\sqrt{1-t^2}}$ в т. ($t=0$, y-любое) знач. 0 $\Rightarrow$ получ. непр. в этих точках ф-ю.

Но в т. $t=1, y\neq 0$ она явл. беск. большой

Т.о. $F(y)$ представлена в виде несобств. интегр. II р.

Зафиксир. $y_0\geq 0$ $\exists\,[c,d], c>0$: $y_0\in[c,d]$

Р/м: $g(t,y)=\begin{cases}\frac{t\cdot\operatorname{arctg}(yt^{-1})}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{если } (t;y)\in(0;1]\times[c,d]\\ 0, & \text{если } (t;y)\in(0;y),\ y\in[c,d]\end{cases}$

$g(t,y)$ непр. по t на $[0;1)$ при $\forall$ фикс. $y\in[c,d]$ и равномерно непрерывна по $y\in[c,d]$

$\Rightarrow$ $g(t;y)$ непр. как ф-ия 2-х перем. на $\Pi=[0;1)\times[c,d]$

- при $t\in(0;1)$ и $y\in[c,d]$

$$\frac{\partial g(t;y)}{\partial y}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{1/t}{1+(y/t)^2}=\frac{t^2}{(y^2+t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

- при $t=0$ и $y\in[c,d]$ $\frac{\partial g(t;y)}{\partial y}=0$

Третья страница:

т.к. $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\partial g(t;y)}{\partial y} = 0$, то частн. произв. непр. по $t\in[0;1)$ при $\forall y\in[c,d]$

и равном. непр. по $y\in[c,d]$ при $\forall t\in[0;1)$

$\Rightarrow \frac{\partial g(t;y)}{\partial y}$ непр. как ф-ия 2-х перем. на $\Pi=[0;1)\times[c;d]$

Итак, $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{t\cdot \operatorname{arctg}(yt^{-1})}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^1 g(t;y)dt$ – несобств. параметр. интегр. II р. от непр. ф-ии $g(t;y)$

$\int\limits_0^1 \frac{\partial g(t;y)}{\partial y} dt = \int\limits_0^1 \frac{t^2}{(y^2+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ – равном. сх. по $y\in[c,d]$ по пр. Вейерштрасса, т.к.

на $\Pi=[0;1)\times[c;d]$

$$\left|\frac{t^2}{(y^2+t^2)\sqrt{1-t^2}}\right| \le \frac{1}{c^2\sqrt{1-t^2}}, \text{ а } \int\limits_0^1(1-t^2)^{-0,5}dt \text{ – сх.}$$

Т.о. выполняются все условия т. о дифференцируемости несобств. интеграла.

$\Rightarrow$ При $\forall y\in[c,d]$ после замены: $t=\cos\varphi$:

$$F'(y)=\int\limits_0^1 \frac{\partial g(t,y)}{\partial y}dt = \int\limits_0^1 \frac{t^2}{(y^2+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{y^2+\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$F'(0)=\frac{\pi}{2}$$

при $y\neq 0$ (после замены $\operatorname{tg}\varphi = z$)

$$F'(y)=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi - y^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{y^2+\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2} - y^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dz}{1+y^2+y^2z^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{+\infty}\frac{dz}{1+y^2+z^2}$$

Четвертая страница:

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}\, \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$

Т.о. при $\forall\ y\in[c,d]$, $y\geq 0$

$$F'(y) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}}\right) \Rightarrow \exists C: F(y) = \int \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(y-\sqrt{1+y^2}\right) + C$$

т.к. $F(0)=0 \Rightarrow F(y) = \frac{\pi}{2}\left(1+y-\sqrt{1+y^2}\right)$

Используя нечетность ф-ии, найдём для $y<0$

$$F(y) = -F(-y) = -\frac{\pi}{2}\left(1+(-y)-\sqrt{1+y^2}\right)$$

$$F(y) = \int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{sign} y\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+|y|-\sqrt{1+y^2}\right)$$

$\boxed{№3790}$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}$ $(a>0,\ b>0)$

$\cos x$ непр. на $[0;+\infty)$

$A>0$ $\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ – сх. равном. по Дирихле, т.к. $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ $|\cos x|\leq 1$.

…ле …ние: $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx = \cos(0)\cdot\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$

$\boxed{№3793}$ $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$

1.8 №3816

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin^3(\alpha x)}{x} dx$$

Решение:

$$\sin(3\alpha x) = 3\sin(\alpha x) - \sin^3(\alpha x)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin^3(\alpha x)}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{3\sin(\alpha x) - \sin(3\alpha x)}{4x} dx = \frac{\pi}{2} sign(a) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} sign(a)$$