# Билет №17

1. Дифф. операции теории поля их связь с внеш. дифф.-ем.

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$$

$$\omega^1_A = A_x dx + A_y dy + A_z dz = (\underline{A}; \underline{\xi})$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$$

$$\omega^2_B = B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy$$

$$\omega^2_B(\xi_1; \xi_2) = (B; \xi_1; \xi_2)$$

смешанное.

## Диф. операции теории поля

- $f$ - функция $\quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k}$$

- $$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \underline{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \underline{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \underline{k}$$

$$\operatorname{div} B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f; \quad \operatorname{rot} A = \nabla \times A$$

$$\operatorname{div} B = (\nabla, B)$$

- $d(d\omega) = 0$ в терминах векторных полей: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$

  $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$

- $$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \qquad (\nabla; \nabla) = \Delta$$

  оператор Лапласа.

- $$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla, A) - (\nabla, \nabla)A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$$

$\operatorname{rot} A = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(H_w A_w)}{\partial v} - \ldots\right)$ [illegible]

$+ \frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial(H_u A_u)}{\ldots} - \frac{\partial(H_v A_v)}{\ldots}\right)$ [illegible]

# Дифф. операции в кривол. коорд.

$$A = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$$

$$\exists\, \Phi : D \to G \quad : \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}$$

вводим. кривол. координаты.

операции дифф. форм. не завис. от системы коорд, поэтому запишем операции в криволинейной с.к.

∡ ед. векторы касат. к коорд линиям, криволин. с.к

$$e_u = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\|} \frac{\partial \Phi}{\partial u} ; \quad e_v = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\|} \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

$$e_w = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right\|} \frac{\partial \Phi}{\partial w}$$

Пример:

$$\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2}$$

коэф. Ламе кривол. с.к.

$$A = A_u e_u + A_v e_v + A_w e_w$$

→ в орт. кривол. ск.

$$\mathrm{rot}\, A = \frac{1}{H_v H_w} \left( \frac{\partial (H_w A_w)}{\dots} \right.$$

$$\omega_A^1(\xi) = (A;\xi) = a_u\,du + a_v\,dv + a_w\,dw$$

$$\omega_A^1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = a_u$$

$$\omega_A^1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = A_u H_u$$

Аналогично: $a_v = A_v H_v$

$a_w = A_w H_w$

$$\omega_A^2(\xi_1;\xi_2) = (A;\xi_1;\xi_2)$$

$$a_u = H_v H_w A_u$$

$$a_v = H_w H_u A_v$$

$$a_w = H_u H_v A_w$$

---

Перепишем наши векторные операции:

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}e_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}e_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}e_w$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(H_w A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v A_v)}{\partial w}\right)e_u + \frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial(H_u A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w A_w)}{\partial u}\right)e_v +$$

$$+\frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial(H_v A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u A_u)}{\partial v}\right) e_w$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial(H_v H_w A_u)}{\partial u} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(H_w H_u A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(H_u H_v A_w)}{\partial w}\right)$$

Можно переписать также и в других системах координат (сфер; цилиндр.)

## (2) Формула Фруллани

**Теорема:**

$$\left.\begin{array}{l}\exists f \text{ — непр на } [0;+\infty) \text{ и} \\ \forall \eta > 0 \ \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx \text{ — сход.}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln\frac{b}{a}$$

**Док-во:**

◄ $\forall \eta > 0 \quad \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx =$

$$= \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx =$$

$$= \int\limits_{a\eta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{b\eta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt =$$

$$= \int\limits_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}dt \overset{\exists \xi \in [a\eta; b\eta]}{=\!=\!=} f(\xi) \int\limits_{a\eta}^{b\eta} \frac{1}{t}dt =$$

$$= f(\xi)\ln\frac{b}{a} \xrightarrow[\eta\to 0]{} f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Теорема:

$\exists\, f$ — непр. на $[0;+\infty)$ и имеет конечный предел $f(+\infty)$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \left(f(0)-f(+\infty)\right)\cdot \ln\frac{b}{a}$$

Док-во:

$\forall \eta>0,\ A>0$

$$\int_\eta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\eta^A \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\eta^A \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{a\eta}^{aA} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{b\eta}^{aA} \frac{f(t)}{t}\,dt =$$

$$- \iint_{x^2+y^2\le a^2} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)$$

$$= \int_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}\,dt =$$

$$= f(\xi_1)\int_{a\eta}^{b\eta} \frac{1}{t}\,dt - f(\xi_2)\int_{aA}^{bA} \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \big(f(\xi_1) - f(\xi_2)\big)\ln\frac{b}{a} \xrightarrow[A \to +\infty]{\eta \to 0}$$

$$\longrightarrow \big(f(0) - f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}$$

## №4362

$$\iint\limits_S (x\,dy\,dx + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy) =$$

$S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$

Решение:

$$= \iint\limits_S x\,dy\,dx + \iint\limits_S y\,dx\,dz + \iint\limits_S z\,dx\,dy.$$

В силу некой симметрии ~~области уравнению~~ уравнений $S$ и дифф. формы в интегралах можно вычислить только 1 из 3ех интегралов. Другие аналогично:

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy -$$

$$- \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right) dx\,dy =$$

$$= 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\,dy =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\, dr =$$

$$= 4\pi \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\, dr = 4\pi \cdot \frac{a^3}{3}$$

Итого!

$$\iint\limits_S (x\,dy\,dx + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy) =$$

$$= 3 \iint\limits_S z\,dx\,dy = 3\,\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

Ответ! $4\pi a^3$