$$\psi_p^{\sigma'}(\vec{x}) = \underbrace{D^{(1/2)}(R)^{\sigma'}{}_{\lambda}}_{} \psi^{\lambda}(R^{-1}\vec{x})$$

Una diferencia crucial ~~[illegible]~~ respecto del caso sin spin

Tb se pueden hacer otras barbaridades por la vida, como ver cómo rotan los operadores...

$$U(R)\, X_k\, U(R)^{-1} = X_j\, R^j{}_k$$

$\boxed{12/06/2012}$

- ¿Cambio de horario?

- tareas semanales

- sites.google.com/site/ocastillofelisola/home/academic/methods

(PPT : GR00.pdf
tarea : hw01.pdf)
lecture notes → book.pdf

(manifolds → variedades)

Esta parte → Geometría en $\mathbb{R}^n$ (~2 semanas)
→ Manifolds y bundles (~3 semanas)
→ formas diferenciales (bonus track)

Un escalar (de un grupo) es la cantidad que permanece invariante bajo trafos de grupo → los que están asociados a la representación trivial.

Un vector está asociado a la representación fundamental del grupo (la que es de $n\times n$ para el grupo $G(n)$, con G un grupo genérico ($SO(n)$, $SU(n)$, $GL(n)$ ...))
Es la cantidad que transforma bajo la representación fundamental del grupo.

$\mathbb{R}^n$ es lo simple que no sirve para generalizar.

Los vectores pueden definirse de 2 notas: covariante y contravariante.

Notación: vector: $\{\vec{e}_i\}$; $\vec{V} = \sum V^i \vec{e}_i$

$$= V^i$$

QM: $\{|i\rangle\}$; $|V\rangle = \sum_i V^i |i\rangle$

Covector: $\{\tilde{e}^i\}$; $\tilde{V} = \sum V_i \tilde{e}^i$

$$= V_i$$

QM: $\{\langle i|\}$; $\langle V| = \sum V_i \langle i|$

La suma de Einstein:

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i$$

$$\tilde{V} = V_i \tilde{e}^i$$

coordenadas: x^i

$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i$ $\left(\text{cuidado de } \frac{A/B}{C/D} = \frac{AD}{CB}\right)$

La métrica es el objeto que permite definir distancias.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} \quad \text{(en espacios generales)}$$

x_a covariante → transforma como vector base

x^a contravariante → " " " "
del espacio dual (covector así)

El rango del tensor es nº total de índices
(En pág 17 de diapos, el tensor $\binom{p}{q}$ es de rango $(p+q)$)

Levi-Civita → tiene índices igual a la dimensión del espacio.

↳ 1 para permutación par
↳ -1 " " impar
↳ 0 en otro caso

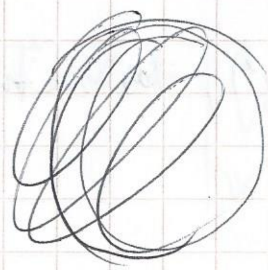
En los casos básicos de la vida...

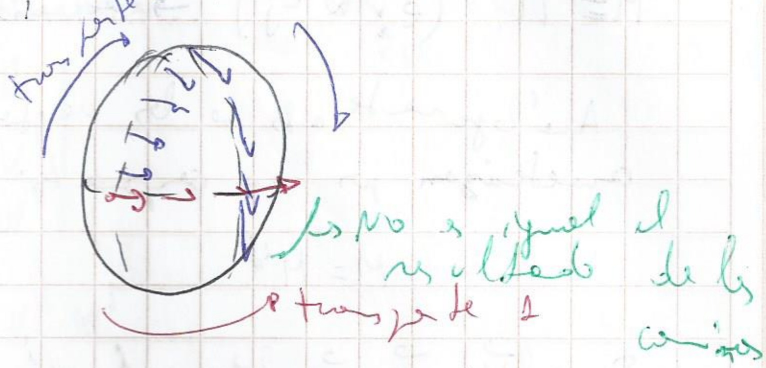
$$\vec{V} \times \vec{W} = \epsilon_{ijk}\, \tilde{e}^i\, V^j\, W^k$$ → Sólo definido en 3-d

vectores   covectores

Ejemplo de Manifold: la Tierra: en la superficie, parece un plano.

Ejemplo de curvatura:





Un libraco interesante % bueno...

Relativity Demystified (o algo así)

NUEVO HORARIO

Martes : 10:00 → 12:30
Jueves : 11:30 → 13:00

14/06/2012

Objetos geométricos:

→ Escalares (magnitud)

$$\phi \in \mathbb{K} \quad (\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

→ Vectores (magnitud - dirección - sentido)

$$\vec{V} = V^i \underbrace{\vec{e}_i}_{\text{vectores base}} \quad : \text{alias} : \; V^i$$

(notación caracterizada x componentes)

→ Matrices ...

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{n1} & \dots & & M_{nn} \end{pmatrix}$$

$(n \times n)$

tensores de diferente rango

$$M = M^{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \rightarrow \text{expresión de base.}$$

Análogamente a lo de los vectores (V^i), las matrices se caracterizan por sus componentes:

$$M = M^{ij}$$

Sean $\vec{V}, \vec{W}, \vec{U} \iff V^i, W^i, U^i$ y λ un escalar.

1) Adición:

$$V^i + W^i \quad \text{(mismo índice)}$$

$$\left(\vec{V} + \vec{W} = (V^i + W^i)\,\vec{e}_i\right)$$

2) Producto por escalar...

$$\lambda \vec{V} = (\lambda V^i)\,\vec{e}_i$$

Definiciones varias (tensores especiales)

δ de Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

ε de Levi-Civita (tantos elementos como el espacio)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \; ; & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ es par} \\ -1 \; ; & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ es impar} \\ 0 \; ; & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

3) Producto escalar de vectores:

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \delta_{ij} V^i W^j \quad \text{(sin índices libres} \Rightarrow \text{escalar)}$$

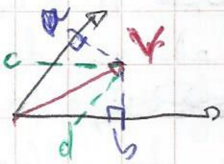
4) Producto vectorial de vectores... → Sólo definible en 3D

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V^1 & V^2 & V^3 \\ W^1 & W^2 & W^3 \end{vmatrix}$$

$$= \epsilon_{ijk} \, \underbrace{\tilde{e}^i}_{\text{vectores base del espacio dual.}} V^j W^j$$

El producto vectorial no da como resultado un vector, sino que un vector dual.

Dos formas de obtener las coordenadas de un vector:
(ejes no perpendiculares)



ab: donde cortan las perpendiculares por el punto al eje.

cd: donde cortan las paralelas al eje.

$V_i = (a, b)$
$V^i = (c, d)$

Cada una de las dos formas corresponde a un espacio vectorial diferente, pero relacionado. En ejes cartesianos, ocurre la magia de que ambos modos de medir coinciden.

(Hay varias interpretaciones geométricas de esta observación)

Base de V^i : $\{\vec{e}_i\}$
Base de V_i : $\{\tilde{e}^i\}$

Para ~~dos~~ matrices de la misma dimensión M_{ij}, T_{kl}:

- $M_{ij} + T_{ij}$
- λM_{ij} (cada entrada se escala por λ)

- $M_{ij} T^j{}_l = (MT)_{il}$: Multiplicación de matrices

Esa operación se llama contracción: reduce los índices a 2. Si se tienen p y q índices, la contracción da $(p+q-2)$ índices.

Todos los ~~o~~ objetos geométricos se definen por su transformación. ¿Qué transformación? la ~~...~~ de cierto grupo.

Para escalares ... $\phi'(p) = \phi(p)$ $\quad p \in \mathbb{M}^n$

Las coordenadas de p pueden diferir en ϕ' y ϕ.

Para vectores $V'(p) = \Lambda V(p)$, donde Λ es una matriz de ~~...~~ transformación

$V'^i(p) = \Lambda^i{}_j V^j(p)$ ← vector. Cualquier objeto que transforme así es un vector

Un tensor es la generalización de esta última idea, para más índices:

$$T'^{i_1, \dots, i_n}(p) = \Lambda^{i_1}{}_{j_1} \dots \Lambda^{i_n}{}_{j_n} T^{j_1, \dots, j_n}(p)$$

Notación: $\partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ (en espacio directo)

~~o~~ Si se tiene un objeto $\partial_i V^j$, ~~o~~ se transforma en

$$\underbrace{(\Lambda^{-1})_i{}^l \partial_l}_{\text{covariante}} \underbrace{(\Lambda)^j{}_k V^k}_{\text{contravariante.}}$$

Esto da:

$$(\Lambda^{-1})_i^{\ l}\,\partial_l\,(\Lambda)^j_{\ k}\,V^k = \Lambda^{-1}\Lambda\,\partial V + (\Lambda^{-1})(\partial\Lambda)V$$

$\Rightarrow$ No es un tensor, por que no transforma como tal.

El rango del tensor se define (de forma de ~~~~ a los matemáticos) como el número de índices. Un escalar tiene rango 0, un vector, rango 1, ~~...~~ etc.

El tipo de un tensor, a ~~...~~ modo, es cuántos índices hay arriba y cuántos abajo: $\binom{p}{q}$

Escalar: $\binom{0}{0}$

Vector contravariante: $\binom{1}{0}$

" covariante: $\binom{0}{1}$

Métrica: g_{ab} : tensor de rango 2 y tipo $\binom{0}{2}$ que sirve para medir distancias entre 2 puntos en un espacio. ~~...~~ Además, es simétrica: g_{ba} y no singular ($\det(g_{ab}) \neq 0$, $\exists (g^{-1})_{ab}$)

En espacio Euclídeo...

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= \delta_{ab}\,dx^a\,dx^b$$

↳ métrica de $\mathbb{E}^3$

$$(g^{-1}) \equiv g^{ab}\ ;\quad g_{ac}\,g^{cb} = \delta_a^{\ b}$$

La métrica es un tensor bajo transformaciones de coordenadas (NO lineales)

Un ejemplo loco de la vida...

$$\vec{e}_{i'} = (\Lambda^{-1})_{i}^{\ j}\,\vec{e}_j \qquad \text{(tipo covariante)}$$

→ cambio de coordenadas (cómo cambia la coord...)

$$x'^i = \Lambda^i{}_j x^j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j$$

Ejemplo ... $\quad x = r\cos\theta$

$\qquad\qquad\quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \,, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta \,, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y$$

$$= \cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{e}_\theta = r(-\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \qquad$ (coordenadas genéricas)

$$g_{rr} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$$

$$g_{r\theta} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 = g_{\theta r}$$

$$g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$$

$$\therefore\; g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{todo bien...}$$

Descomposición de tensores: normalización de las n! permutaciones

$$\underbrace{T_{(a_1 \ldots a_n)}}_{\text{tensor simetrizado}} = \frac{1}{n!}\sum_{\text{permutaciones}} T_{\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n)}$$

→ permutaciones

$$T_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{perm} T_{\sigma(a_1) \dots \sigma(a_n)} \cdot (-1)^{|\sigma|}$$

permutación par o impar

antisimétrico

Un tensor de rango 2 se puede descomponer en 2 partes, simétrica y antisimétrica. Uno de orden 3, necesita tr.

$\boxed{19/06/2012}$

Métrica:

$$g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \quad , \text{ en base } \{\vec{e}_a\}$$

espacio tangente

$$g : TM \to T^*M$$ espacio cotangente: no se imagina, pero está... como tal..

$$g_{ab} V^b = V_a$$

Euclídeo con métrica Euclídea: δ_{ab}

Sea $\vec{V} = (V^x, V^y, V^z)$

$$\tilde{V} : \quad V_x = \delta_{xa} V^a = V^x$$
$$V_y = V^y$$
$$V_z = V^z$$

Debido a esta métrica es que nadie se preocupa por co/contravectores en espacios euclídeos.

Pero si la métrica es:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad \text{(Coordenadas esféricas)}$$

$$\vec{V} = \left(1, \bar{r}^{a}, \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\tilde{V} = ?$$

$$V_r = g_{ra} V^a = V^r = 1$$

$$V_\theta = g_{\theta a} V^a = 1$$

$$V_\phi = g_{\phi a} V^a = r^2 \tg^2\theta$$

La métrica es, en palabras simples, lo que permite cambiar índices de lugar.

$$(g^{-1})_{ab} = g^{ab}$$

Épsilon de Levi-Civita: ϵ

Es tensor de rango igual a la dimensión, de tipo $\binom{0}{n}$, totalmente antisimétrico (en todos sus índices (¿?)) y si no es 0, es ± 1. Es 0 si algún índice se repite.

- $\epsilon_{12\dots n} = 1$
  $\epsilon^{12\dots n} = -1$ (en métrica de Lorentz)

Este objeto permite definir el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$:

$$(\vec{V} \times \vec{W})_i = \epsilon_{ijk} V^j W^k$$

Sea M una matriz 3×3

$$\epsilon^{abc} M_{1a} M_{2b} M_{3c} = \text{(explícitamente en sp)}$$

$$\begin{array}{cccc} & (123) & (132) & (312) \\ = & M_{11}M_{22}M_{33} & - M_{11}M_{23}M_{32} & + M_{13}M_{21}M_{32} \\ & (321) & (231) & (213) \\ & - M_{13}M_{22}M_{31} & + M_{12}M_{23}M_{31} & - M_{12}M_{21}M_{33} \end{array}$$

$= \det(M)$

En general, el determinante de una matriz es:

$$\det(M) = \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} M_1{}^{a_1} M_2{}^{a_2} \dots M_n{}^{a_n}$$

Más genérico,

$$\det(M) = \varepsilon_{a_1 \dots a_n} M_{b_1}{}^{a_1} \dots M_{b_n}{}^{a_n} \varepsilon^{b_1 \dots b_n} \cdot \frac{1}{n!}$$

introduce $n!$ nuevos términos, por eso la normalización

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{b_1 \dots b_n} = \begin{vmatrix} \delta_{a_1}{}^{b_1} & \dots & \delta_{a_1}{}^{b_n} \\ \vdots & & \\ \delta_{a_n}{}^{b_1} & \dots & \delta_{a_n}{}^{b_n} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ab} \varepsilon^{cd} = \delta_a{}^c \delta_b{}^d - \delta_a{}^d \delta_b{}^c = \begin{vmatrix} \delta_a{}^c & \delta_a{}^d \\ \delta_b{}^c & \delta_b{}^d \end{vmatrix}$$

$\varepsilon_{12} \varepsilon^{12} = 1$

$\varepsilon_{21} \varepsilon^{12} = -1$

$\varepsilon_{12} \varepsilon^{21} = -1$

$\varepsilon_{21} \varepsilon^{21} = 1$

Esto se extiende a más dimensiones considerando las combinaciones par-par, par-impar e impar-impar de los índices.

$$\epsilon_{a_1 \dots a_p c_{p+1} \dots c_n} \epsilon^{b_1 \dots b_p c_{p+1} \dots c_n}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{a_1}{}^{b_1} & \dots & \delta_{a_1}{}^{b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a_n}{}^{b_1} & \dots & \delta_{a_n}{}^{b_n} \end{vmatrix} \underbrace{(n-p)!}$$

formas de reducir a n-p índices la matriz

De la fórmula para el determinante...

$$\epsilon_{b_1 \dots b_n} \det(M) = \epsilon_{a_1 \dots a_n} M_{b_1}{}^{a_1} \dots M_{b_n}{}^{a_n}$$

(sin término factorial, porque no se introducen permutaciones)

Si $M = \Lambda^{-1}$, la trafo se simplifica...

$$\epsilon' = \epsilon_{b_1 \dots b_n} \det(\Lambda^{-1}) = \epsilon_{a_1 \dots a_n} (\Lambda^{-1})_{b_1}{}^{a_1} \dots (\Lambda^{-1})_{b_n}{}^{a_n}$$

No es una trafo de tensores... es un tensor escalado por el determinante (el Jacobiano, en el caso de los cambios de coordenadas)

El épsilon no es sólo un tensor, es una densidad tensorial: transforma escalado por el determinante de la matriz de transformación.

Conexión:

Objeto geométrico que permite llevar otro objeto de un punto a otro.

$$\vec{V} = V^a \vec{e}_a$$ cómo cambia las componentes + cómo cambia el vector base al moverse en una dirección b

$$\partial_b \vec{V} = (\partial_b V^a)\vec{e}_a + V^a (\partial_b \vec{e}_a)$$ → un nuevo vector

$$= (\partial_b V^c)\vec{e}_c + V^a \Gamma^c_{ba} \vec{e}_c$$ → cómo cambia el vector base a al moverse en la dirección b en la base c

$$= (\partial_b V^c + V^a \Gamma^c_{ba})\vec{e}_c$$

$$= D_b \vec{V}^a$$: la derivada covariante

$$D_a V^c = \partial_a V^c + \Gamma^c_{ab} V^b$$

- Los Γ son conocidos como conexiones.

- D_a es la derivada covariante

- Conexión de Levi-Civita

↳ Es la conexión que es simétrica en los índices inferiores.

- Sea $T \in (\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M)$ (objeto geométrico)

espacio vectorial, espacio dual

~~[illegible]~~ p veces el producto tensorial del espacio.

$\Rightarrow T \neq T^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q}$: $p \times q$ (rango), tipo $\binom{p}{q}$

$$D: C^\infty(\otimes^p TM \otimes^q T^*M) \to C^\infty(\otimes^p TM \otimes^{q+1} T^*M)$$
$$D_b: V^a \longrightarrow (DV)^a{}_b$$

Una derivada parcial no es un tensor, debido a los términos extra que aparecen ~~al~~ transformarla.

$$\partial_a \to (\Lambda^{-1})_a{}^b \partial_b$$
$$V^c \to (\Lambda)^c{}_d V^d$$

$$\partial_a V^a \to (\Lambda^{-1})_a{}^b \partial_b (\Lambda^c{}_d V^d) = (\Lambda^{-1})_a{}^b \Lambda^c{}_d \partial_b V^d$$ → transf. tensorial

término adicional que no va a la transformación, luego, la derivada parcial NO es un tensor. ← $+ (\Lambda^{-1})_a{}^b (\partial_b \Lambda^c{}_d) V^d$

La derivada covariante, por otro lado...

$$\begin{aligned}
D_a V^c \to D'_a V'^c &= \partial'_a V'^c + \Gamma'^c_{am} V'^m \\
&= (\Lambda^{-1})_a{}^b \Lambda^c{}_d \partial_b V^d + \underline{(\Lambda^{-1})_a{}^b (\partial_b \Lambda^c{}_d) V^d} \qquad (1) \\
&\quad + \Gamma'^c_{am} \Lambda^m{}_n V^n
\end{aligned}$$

↳ ¿cómo transforma eso? Si es un tensor, debiera transformar como tal.

$$= (\Lambda^{-1})_a{}^b \Lambda^c{}_d D_b V^d = (\Lambda^{-1})_a{}^b \Lambda^c{}_d \left[\partial_b V^d + \Gamma^d_{bm} V^m\right] \qquad (2)$$

↑ $D_a V^c$ sí es un tensor.

Igualando (1) y (2), se encuentra cómo transforma la conexión. Se puede encontrar que si bien ~~[illegible]~~ transforma con una matriz en cada índice, más un término adicional (subrayado en rojo). En conclusión, la conexión NO es un tensor.

Mirando otras derivadas...

$$\partial_a \phi \to (\Lambda^{-1})_a{}^b \partial_b \phi \qquad \text{(campo escalar)}$$

Esta derivada parcial de un campo escalar ϕ, transforma como tensor (vector, en particular). Tenemos,

$$D_a \phi \equiv \partial_a \phi$$

Ahora,

$$D_a (V^b W_b) = \partial_a (V^b W_b)$$

$$(D_a V^b) W_b + V^b (D_a W_b) = (\partial_a V^b) W_b + V^b (\partial_a W_b)$$

Expandiendo eso, se cancelan ciertos términos y se tiene la forma:

$$V^b D_a W_b = -\Gamma^b_{\ ac} V^c W_b + V^b \partial_a W_b$$

(aprovechando los índices mudos y factorizando)

$$\boxed{D_a W_b = \partial_a W_b - \Gamma^c_{\ ab} W_c}$$

Derivada covariante para el índice abajo.

(Algunos libros tratan a la derivada covariante con el nombre conexión... estúpida nomenclatura).

$$D_a (V^b W_b) = D_a (g_{bc} V^b W^c)$$

$$= (D_a g_{bc})(V^b W^c) + g_{bc} (D_a V^b) W^c$$

$$+ g_{bc} V^b (D_a W^c)$$

(tras muchas cancelaciones)

$$\therefore D_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \Gamma^m_{\ ab} g_{mc} - \Gamma^m_{\ ac} g_{bm}$$

Un Γ para cada índice de g_{bc}

Extendiendo a un tensor genérico de varios tipos de índices ...

$$D_a T^{b_1\dots b_p}{}_{c_1\dots c_q} = \partial_a T^{b_1\dots b_p}{}_{c_1\dots c_q}$$
$$+ \Gamma^{b_1}_{am} T^{m b_2\dots b_p}{}_{c_1\dots c_q}$$
$$+ \Gamma^{b_2}_{am} T^{b_1 m\dots b_p}{}_{c_1\dots c_q}$$
$$+ \dots$$
$$- \Gamma^{m}_{a c_1} T^{b_1\dots b_p}{}_{m c_2\dots c_q}$$
$$- \dots$$

$D_a T^{b_1\dots b_p}{}_{c_1\dots c_q}$ es un tensor de ~~tipo~~ $\binom{p}{q+1}$

Γ^m_{ab} : primer índice abajo, el de la derivada; índice arriba y segundo abajo se reemplazan según: uno se contrae con el tensor que multiplica y el otro es el índice contraído.

La Geodésica:

La distancia más corta entre dos puntos.

$ds^2(g)$: diferencial de línea para la métrica g

$$ds^2(g) = g_{ab}(x)\, dx^a\, dx^b$$

$$ds(g) = \sqrt{g_{ab}(x)\, dx^a\, dx^b} = \sqrt{g_{ab}(x) \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}}\, dt \, :$$

funcional a minimizar (una suerte de $\mathcal{L}$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 0$$

Desarrollando esto, queda una cosa horrenda y espantosa... pero eligiendo un sistema en el que la cosa esté normalizada, se hace más sencillo. Y al final, es lo mismo que minimizar el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(x)\, \dot{x}^a \dot{x}^b$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = \frac{1}{2} g_{ab}(x)\, \dot{x}^b$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\right) = \partial_c g_{ab}\, \dot{x}^b \dot{x}^c + g_{ab}\, \ddot{x}^b$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = \frac{1}{2} \partial_a g_{ab}\, \dot{x}^b \dot{x}^c$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial_c g_{ab}}_{\sim\ \text{simétrico}} \underbrace{\dot{x}^b \dot{x}^c}_{\text{simétrico}} + g_{ab}\, \ddot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_a g_{bc}\, \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

$$g_{ab}\, \ddot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_a g_{bc}\, \dot{x}^b \dot{x}^c + \frac{1}{2} \partial_b g_{ac}\, \dot{x}^b \dot{x}^c + \frac{1}{2} \partial_c g_{ab}\, \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

$$g_{ab}\, \ddot{x}^b + \frac{1}{2}\left(\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}\right) \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

Ecc de geodésica, en general.

$$\ddot{x}^a + \frac{1}{2} g^{am}\left(\partial_b g_{mc} + \partial_c g_{mb} - \partial_m g_{bc}\right) \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

(Se puede escribir + bonito... sp)

$$\boxed{\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0}$$ Ec de la geodésica.

↳ simétrico: Conexión de Levi-Civita, definido en términos de las derivadas de la métrica.

$\boxed{21/06/2012}$

Conexión:

- Objeto con 3 índices.

- $\partial_a \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$

Conecta 2 espacios ~~tangentes~~ en puntos distintos.

- $\Gamma^c_{(ab)}$ (simétrico) define la conexión de Levi-Civita (o símbolos de Christoffel)

Geodésica: distancia más corta entre 2 puntos.

$$S = \int \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}\,dt$$

$$\ddot{x}^c + \Gamma^c_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$$

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cm}\left(\partial_a g_{mb} + \partial_b g_{am} - \partial_m g_{ab}\right)$$

- Dada una conexión se puede definir una derivada covariante.

Condición de Metricidad:

$$D_a g_{bc} = 0$$: Derivada covariante de la métrica es 0.

Esta condición significa que... (de la derivada covariante para tensores):

$$\partial_a g_{bc} - \Gamma^m_{ab} g_{mc} - \Gamma^m_{ac} g_{bm} = 0 \quad (1)$$

Haciendo una permutación cíclica de índices...

$$\partial_b g_{ca} - \Gamma^m_{bc} g_{ma} - \Gamma^m_{ba} g_{cm} = 0 \quad (2)$$

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma^m_{ca} g_{mb} - \Gamma^m_{cb} g_{am} = 0 \quad (3)$$

(1) + (2) − (3), suponiendo conexiones simétricas,

$$\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} - 2\Gamma^m_{ab} g_{mc} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^m_{ab} g_{mc} = \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})$$

Contrayendo con la inversa de g_{mc}, g^{cd} : $g_{mc} g^{cd} = \delta_m{}^d$

$$\therefore \boxed{\Gamma^d_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})}$$

(La misma expresión que sale a partir de la geodésica)

La tarea pide esta demostración cuando las conexiones no son simétricas. Pero, se pueden separar las conexiones en parte simétrica y antisimétrica en los índices de abajo y sale con torsiones antisimétricas (~~[illegible]~~ llamarlas T^c_{ab}).

Todos los ~~tensores~~ postes acá utilizados son luego las transformadas del grupo difeomorfismo (cambio de coordenadas — ¿lo mismo?)

La ~~[illegible]~~ transformación Λ:

$$\Lambda^{m}{}_{n} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{n}} \quad ; \quad (\Lambda^{-1})_{m}{}^{n} = \frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{m}}$$

Notación: algunos viejos trasponen el ' al índice (v. libro con de Schultz, de métodos y de intro a relatividad general):

$$\Lambda^{m'}{}_{n} = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^{n}} \quad ; \quad \Lambda_{m'}{}^{n} = \frac{\partial x^{n}}{\partial x^{m'}}$$

Se sabe que:

- ∂_a : $\partial_{a'} = \Lambda_{a'}{}^{b}\, \partial_b$
- g_{bc} : $g_{b'c'} = \Lambda_{b'}{}^{m} \Lambda_{c'}{}^{n}\, g_{mn}$
- g^{df} : $g^{d'f'} = \Lambda^{d'}{}_{p} \Lambda^{f'}{}_{q}\, g^{pq}$

Con esto, se puede obtener la transformada de la conexión:

(un no fue transformado, porque como se cancela, después nos queda de orden y acá)

$$\Gamma^{d}_{ab} \to \Gamma^{d'}_{a'b'} = \frac{1}{2} g^{d'm}\left(\partial_{a'} g_{b'm} + \partial_{b'} g_{a'm} - \partial_m g_{a'b'}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Lambda^{d'}{}_{d}\, g^{dm} \Big[\Lambda^{a}{}_{a'} \partial_a \left(\Lambda^{b}{}_{b'} g_{bm}\right)$$

$$+ \Lambda_{b'}{}^{b} \partial_b \left(\Lambda^{a}{}_{a'} g_{am}\right)$$

$$- \partial_m \left(\Lambda^{a}{}_{a'} \Lambda^{b}{}_{b'} g_{ab}\right) \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\Lambda^{d'}{}_{d} \Lambda^{a}{}_{a'} \Big[\Lambda^{b}{}_{b'} g^{dm} \partial_a g_{bm}}_{1} + \partial_a (\Lambda^{a}{}_{a'}) g_{bm} \Big]$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\Lambda^{d'}{}_{d} \Lambda^{b}{}_{b'} \Big[\Lambda^{a}{}_{a'} g^{dm} \partial_b g_{am}}_{1} + g^{dm} (\partial_b \Lambda^{a}{}_{a'}) g_{am} \Big]$$

$$- \frac{1}{2} \underbrace{\Lambda^{d'}{}_{d} \Big[\Lambda^{a}{}_{a'} \Lambda^{b}{}_{b'} g^{dm} \partial_m g_{ab}}_{1} + g^{dm} \partial_m (\Lambda^{a}{}_{a'}) \Lambda^{b}{}_{b'} g_{ab}$$

$$+ g^{dm} \Lambda^{a}{}_{a'} \partial_m (\Lambda^{b}{}_{b'}) g_{ab} \Big]$$

$$= \overbrace{\Lambda^{d'}{}_{d} \Lambda^{a}{}_{a'} \Lambda^{b}{}_{b'} \Gamma^{d}_{ab}}^{\text{combinando } 1\text{'s}} + O(\partial \Lambda)$$

tensor

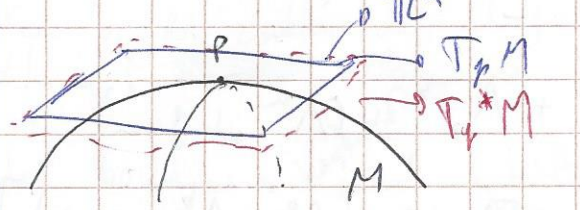
términos dependientes de las derivadas de Λ

Tenemos, la conexión no es un tensor, pero permite que las derivadas covariantes de ~~...~~ los tensores transforman como tensor.

Manifold (variedad):

Es un espacio (topológico) que localmente es homeomórfico a $\mathbb{R}^n$, para n fijo.

(~~Homomórfico~~ Isomórfico significa que tiene la misma forma, homeomórfico significa que parece a la otra cosa, como la Tierra).



La métrica : $g_{\alpha\beta} \in T^*M \otimes T^*M$

Intermezzo cuántico...

Spin $\frac{1}{2}$ $\uparrow$ y $\downarrow$:

$$|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$$
$$|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$
$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$
$$|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$$

$$H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2$$

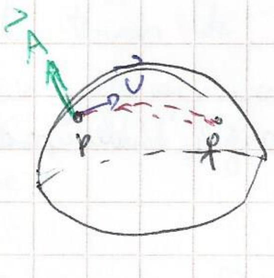
H para la segunda

H para la primera partícula

En palabras simples, los ~~[illegible]~~ estados transforman independiente.

Fin del Intermezzo

Una forma de pensarlo : en p se tiene un espacio tangente T_pM, uno cotangente T_p^*M y todos productos tensoriales, por hacerlos entre ellos y con sí mismo. En cuál se está metido, depende del objeto geométrico o tensor.



La idea es transportar $\vec{A}$ desde el plano T_pM al plano T_qM a lo largo del camino generado por $\vec{V}$:

$$V^j D_j A^i$$

($\vec{V}$ es el vector integral de la curva... sea lo que sea eso).

Si se quiere que el vector sea el mismo, pero en q, debe cumplirse que esa expresión es igual a 0:

$$V^j D_j A^i = 0$$

Transporte paralelo del vector $\vec{A}$ a lo largo de la curva generada por $\vec{V}$

(La conexión está incluida en la derivada covariante)

$\boxed{26/08/2012}$

$V^b D_b W^a = 0$ Transporte paralelo

$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^c\dot{x}^b = 0$ Geodésica.

Entrega de tarea 2 → miércoles. Límite jueves → -10%

Tarea 3 → página

tarea 4 → 10/10/2012

Notación:

∇: Derivada covariante de difeomorfismo (trafo de coordenadas)

D: Derivada covariante de otra cosa. (trafo de otra cosa)

Curvatura :

Se define a partir del conmutador de derivadas covariantes:

$$\underbrace{[\nabla_a, \nabla_b]}_{\text{antisimétrico}} V^c = \nabla_a \nabla_b V^c - \nabla_b \nabla_a V^c$$

$$= \nabla_a\left(\partial_b V^c + \Gamma^c_{bd} V^d\right) - \nabla_b\left(\partial_a V^c + \Gamma^c_{ad} V^d\right)$$

$$= \Big[\cancel{\partial_a \partial_b V^c} + \partial_a\left(\Gamma^c_{bd} V^d\right) - \Gamma^m_{ab}\left(\partial_m V^c + \Gamma^c_{md} V^d\right) + \Gamma^c_{am}\left(\partial_b V^m + \Gamma^m_{bd} V^d\right)\Big]$$

$$- \Big[\cancel{\partial_b \partial_a V^c} + \partial_b\left(\Gamma^c_{ad} V^d\right) - \Gamma^m_{ba}\left(\partial_m V^c + \Gamma^c_{md} V^d\right) + \Gamma^c_{bm}\left(\partial_a V^m + \Gamma^m_{ad} V^d\right)\Big]$$

Las derivadas parciales conmutan:

$$= \left(\partial_a \Gamma^c_{bd} - \partial_b \Gamma^c_{ad}\right) V^d \qquad \text{(lo azul)}$$

$$- T^m_{ab} \nabla_m V^c \qquad \text{(lo rojo)}$$

$T^m_{ab} = \Gamma^m_{ab} - \Gamma^m_{ba}$

Torsión

$$+ \left(\Gamma^c_{am} \Gamma^m_{bd} - \Gamma^c_{bm} \Gamma^m_{ad}\right) V^d \qquad \text{(lo verde)}$$

$$+ \Gamma^c_{am} \partial_b V^m - \Gamma^c_{bm} \partial_a V^m - \Gamma^c_{ad} \partial_b V^d + \Gamma^c_{bd} \partial_a V^d \qquad \text{(lo demás; derivadas de productos ceros)}$$

$$= \underbrace{R_{ab}{}^c{}_d}_{\text{Todo lo que multiplica a } V^d} V^d - T^m_{ab} \nabla_m V^c$$

Todo lo que multiplica a V^d ; Tensor de Riemann

El tensor de Riemann mide la curvatura del espacio. No aparece explícitamente en las ecuaciones de Einstein de relatividad general, pero aparecen otros construidos en base a este:

Tensor de Ricci:

$$R_{bd} \equiv R_{ab}{}^{a}{}_{d}$$

- Tensor de rango 2
- Simétrico

Escalar de Ricci: (Escalar de curvatura)

$$R \equiv R_{ab} g^{ab}$$

Simetrías del Tensor de Riemann # componentes $= n^4$, n-dim

- Es antisimétrico en los dos primeros índices: $R_{abcd} = -R_{bacd}$

$$\Rightarrow \# \text{ comp independientes} = \frac{n^3(n-1)}{2}$$

Para ver el resto de las simetrías, es mejor usar R_{abcd}.

- Es antisimétrico en los dos últimos: $R_{abcd} = -R_{abdc}$

$$\Rightarrow \# \text{ comp independientes} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

- $R_{abcd} = R_{cdab}$

$$\Rightarrow \# \text{ comp indep} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)}{2}$$

- Identidades de Bianchi:

$i - R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} = 0$

$ii - \nabla_a R_{bcdf} + \nabla_b R_{cadf} + \nabla_c R_{abdf} = 0$

componentes final (independientes):

$$\frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}$$

(mismo nº de componentes que les dimensions del Tableaux de Young

Bonus:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x^a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Parámetro

Comparando con $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0$, se encuentra:

$$\Gamma^a_{bc} = 0 \quad \forall a,b,c.$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{2}{r}}_{=(\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r})}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$$

Continuando con la segunda parte...

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^c = R_{ab}{}^c{}_d V^d - T^m_{ab} \nabla_m V^c$$

El tensor de Riemann mide la curvatura. Basta con que uno de los componentes independientes del tensor para que el espacio sea curvo. Si todos son 0, el espacio es plano.

T^c_{ab} : Torsión, rango 3, antisimétrico:

$$T^c_{ab} = -T^c_{ba}$$

Junto al tensor y escalar de Ricci, son parte de la relatividad general.

Relatividad General:

Einstein : 1915 - 1916: Una teoría sobre la gravitación.

Hilbert : 1915 : encontró la misma teoría a partir de un Lagrangiano:

$$S_g = \int d^n x \sqrt{g} \left[R + \mathcal{L}_{materia} \right]$$

Acoplamiento

Escalar de Ricci

$\det(g_{ab})$

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}}_{} = T_{ab} \circledast$$

G_{ab} : tensor de Einstein

T_{ab} : Stress energy / tensor de energía - momentum.

Lo viene de la materia.

- Einstein pensó que la gravedad se podía explicar geométricamente. El espacio le dice a la materia cómo moverse, y la materia al espacio, cómo curvarse.

Un ejemplo loco de la vida...

ϕ: escalar.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi g^{ab}$$ → métrica metida allí...

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{mn}} \neq 0 \; ; \; \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{mn}} = -\frac{1}{2} \partial_m \phi \partial_n \phi$$ → Parte del Tensor de energía-momentum

g_{ab} es la métrica, g es el valor absoluto del determinante de la métrica.

Las ecuaciones ✱ se conocen como las ecuaciones de Einstein. Para el caso particular del vacío, estas ecs son

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0$$

Cuando Einstein formuló su teoría, asumió que $T^{a}_{bc} = 0$

Con el Tensor de Riemann, debido a sus simetrías, a lo más tendrá 2 índices diferentes, si son más, debe ser 0.

Como cosa loca... g_{ab} siempre se puede diagonalizar.

$$\frac{\partial}{\partial g_{ab}} (g) = \frac{\partial}{\partial g_{ab}} (g_{11} g_{22} g_{33}) = g \, g^{ab}$$

limitado a 3 d

$\left(\text{para } g_{22}, = g_{11} g_{33} = g_{11} g_{22} g_{22}^{-1} g_{33} = g \, g^{22} \right)$

Tons, $\frac{\partial g}{\partial g^{ab}} = g\, g^{ab}$ (Relación válida incluso si la métrica no es diagonal)

~~[illegible]~~

$g = g_{11} g_{22} g_{33}$

$\ln(g) = \ln(g_{11}) + \ln(g_{22}) + \ln(g_{33}) = \mathrm{tr}(\ln(g_{ab}))$

$\det(g_{..}) = e^{\mathrm{tr}(\ln(g_{..}))}$ → diferenciando eso, se llega a lo mismo.

Para la conexión de Levi-Civita, alias símbolos de Christoffel, ...

$$\Gamma^b_{ab} = \frac{1}{2} g^{bm} (\partial_a g_{bm} + \partial_b g_{am} - \partial_m g_{ab})$$

Métrica diagonal $\Rightarrow b = m$

$$= \frac{1}{2} g^{bb} (\partial_a g_{bb} + \partial_b g_{ab} - \partial_b g_{ab})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{bb}} \partial_a g_{bb} = \frac{1}{2g} \partial_a g = \partial_a \ln\sqrt{g}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\partial_a(\ln g_{bb})} = (\partial_a \cancel{\ln\sqrt{g_{bb}}}$$ → determinante.

Más datos freaks de la vida...

$\nabla_i \phi = \partial_i \phi$ → covector

$\vec{\nabla}\phi = g^{ij} \partial_j \phi\, \vec{e}_i$ → vector.

En coordenadas esféricas, $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$; $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \partial_r \phi \vec{e}_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta \phi \vec{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\partial_\varphi \phi \vec{e}_\varphi$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ NO están normalizados. Por eso estos valores son diferentes de los valores clásicos.

$$= \partial_r \phi\left(\vec{e}_r\right) + \frac{1}{r}\partial_\theta \phi\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\partial_\varphi \phi\left(\frac{\vec{e}_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta}\right)$$

Estos vectores base sí están normalizados.

$\vec{e}_r = (\operatorname{sen}\theta \cos\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta) \rightarrow |\vec{e}_r|^2 = 1$

$\vec{e}_\theta = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta) \rightarrow |\vec{e}_\theta|^2 = r^2$

$\vec{e}_\phi = r \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\phi, \cos\phi, 0) \rightarrow |\vec{e}_\varphi|^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$

+ detalles...

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = g_{ab}\nabla^a A^b = g^{ab}\nabla_a A_b$$

$$= \delta_a{}^b \nabla_b A^a = \delta_a{}^b(\partial_b A^a + \Gamma^a_{bc}A^c)$$

$$= \partial_a A^a + \Gamma^a_{ac}A^c$$

$$= (\partial_c + \Gamma^a_{ac})A^c$$

$$= \left(\partial_c + \frac{1}{2}\frac{1}{g_{ab}}\partial_c g_{ab}\right)A^c$$

$$= \frac{1}{2g_{ab}}\left(g_{ab}(\partial_c A^c) + (\partial_c g_{ab})A^c\right)$$ → Revisar, el $\frac{1}{2}$ no debería ir o.O

$$= \frac{1}{g_{ab}}\partial_c(g_{ab}A^c)$$

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\, g^{ij}\partial_j\phi)$$

Para coordenadas esféricas, $\sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\theta$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\partial_r(r^2 \operatorname{sen}\theta\, \partial_r\phi) + \partial_\theta(\operatorname{sen}\theta\, \partial_\theta\phi) + \partial_\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\partial_\varphi\phi\right)\right.$$

$$= \frac{1}{r^2}\partial_r r^2\partial_r + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\partial_\theta(\operatorname{sen}\theta\, \partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\partial_\varphi^2\phi$$

04/07/2012

(Teorias de gauge personalizadas)

Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$; $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \; ; \; \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\nabla^2\phi = \rho$$

$$E = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$$

4D :

$$F^{ij} \equiv \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} B_k$$

$$E^i = -\partial^i \phi - \partial_t A^i$$

$$g = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$$

$$E^i = -\partial^i \phi + \partial^t A^i \equiv F^{0i}$$

$$A^0 = \phi$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi \to$ Simetría de gauge.

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi)$$

$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ no cambia.

¡La trafo + general es la de la fuerza! → Yang-Mills

$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger \to$ No abeliano

Si $U = e^{i\chi}$, $A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu \chi$

→ Abeliano

03/07/2012

Formas Diferenciales (Differential forms)

El propósito final de esta clase es particular es usar formas diferenciales para calcular curvatura.

Dentro del universo de objetos geométricos, están los tensores, con todos sus marrones y demases... y un subconjunto de ellos son las formas diferenciales.

Una forma diferencial es un tensor completa% covariante y total% antisimétrico. Se suele anteceder la palabra "forma" con el rango.

p-forma: forma diferencial de rango p.

ej. base:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad : \text{ Completa\% covariante y antisimétrico.}$$

$$= -(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

$$= -F_{\nu\mu} \quad : \text{ 2-Forma}$$

no perder estándar.

La base:

$$\vec{e}_\mu \equiv \partial_\mu \quad (\text{notación})$$

La derivada es buena vector base: transforma como uno, tiene dirección (μ), es 1-forma

$$\tilde{e}^\mu \equiv dx^\mu \quad (+\text{ notación})$$

F se puede escribir en función de la base. A veces se denota $F_{(2)}$ para marcar que es 2-Forma:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Operaciones sobre formas:

- Existe un número finito de formas diferenciales y en un espacio n-dimensional, la forma máxima es una n-forma

- Base para las formas:

$$dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Como las formas son totalmente antisimétricas, debe ser la base también antisimétrica:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$$

- $\wedge$ denota un producto tensorial antisimetrizado. (cuña o wedge)

- $\Lambda^p T^*M$: P veces el producto bco wedge de los espacios cotangentes (cotangent bundle)

$$\Lambda^p T^*M \otimes \Lambda^q T^*M \to \Lambda^{p+q} T^*M$$

- Derivada exterior:

$$d = \overbrace{(dx^\mu \wedge)}^{\text{es sobre la base}} \underbrace{\partial_\mu}_{\text{es sobre funciones}} \qquad (= \partial_\mu\, dx^\mu \wedge)$$

ej: $d\phi = dx^\mu \partial_\mu \phi$

$$A_{(1)} = A_\mu dx^\mu$$

debido a la antisimetría

sólo la parte antisimétrica

$$dA_{(1)} = \partial_\mu A_\nu\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$= F_{(2)}$$

¡¡tachán!!

$$d : \Lambda^p T^*M \to \Lambda^{p+1} T^*M$$

Con estas formas, se puede hasta hacer la colada. Ej. electromagnetismo...

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

$$\hookrightarrow dF_{(2)} = 0$$

$$d\,dA_{(1)} = \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu}_{\text{simétrico}} A_\lambda \underbrace{dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\text{antisimétrico}} \wedge dx^\lambda$$

alternación $= 0$

$$d^2 A_{(1)} = 0$$

$$d^2 (\text{cualquier cosa}) = 0$$ Nilpotencia (propiedad)

Con esto se puede construir la cohomología.

$dF = 0$
- $F = dA$ exactos
- F especial cerrados

Los ~~[illegible]~~ F cerrados que no son exactos definen la cohomología. Ejemplo bonito de esto es BRST quantización.

Una aplicación particular de esto es el cálculo de curvaturas...

La métrica curva se puede transformar en plana mediante un... "diccionario"...

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e^a_{\ \mu} \otimes e^b_{\ \nu}$$

$$E^{\ \mu}_{a} \equiv (e^a_{\ \mu})^{-1}, \; e^a \equiv e^a_{\ \mu} dx^\mu$$

a, b: índices planos
μ, ν: índices curvos.

Ecuaciones de estructura de Cartán

(1) $de^a + \omega^a_{\ b} \wedge e^b = T^a$ → índices planos (torsión) $= \frac{1}{2} T^a_{\ \mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$

- $\omega^a_{\ b}$ es 1-forma: conexión de spin (Spin connection) (transforma como conexión) → +2 índices, 1 índice → 3 índices
- T^a es una 2-forma → 1 índice + 2 índices → 3 índices. tensor.

(2) $d\omega^a_{\ b} + \omega^a_{\ c} \wedge \omega^c_{\ b} = R^a_{\ b}$

- $R^a_{\ b}$: 2-forma curvatura y está relacionada con el tensor de Riemann. → 2 + 2 índices = 4 índices.

Curvatura de la esfera.

$$ds^2(g) = r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

$$(ds^2(g) = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu)$$

$$ds^2(g) = r^2\, d\theta \otimes d\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi$$
$$= 1 (r\, d\theta) \otimes (r\, d\theta) + 1 (r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi) \otimes (r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi)$$

Métrica plana: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \delta_{ab}\, e^a\, e^b$$

$\therefore \quad e^1 = r\,d\theta \Rightarrow e^1_\theta = r$

$e^2 = r \sin\theta\, d\varphi \Rightarrow e^2_\varphi = r\sin\theta$

En relatividad general, la torsión es 0

$de^1 = 0 \qquad (d = dx^\mu \wedge \partial_\mu \Rightarrow d = d\theta\, \partial_\theta + d\varphi\, \partial_\varphi)$

$de^2 = r\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi = -\omega^2{}_b \wedge e^b$ es de la 1ª ec de estructura

$= -\cos\theta\, d\varphi \wedge (r\,d\theta) =$

$= -\cos\theta\, d\varphi \wedge e^1$

$\Rightarrow \quad \omega^2{}_1 = \cos\theta\, d\varphi = \omega^{21} = \omega_{21} = -\omega_{12} = -\omega^{12}$ (antisimétrico)

(el resto es 0). $\qquad = -\omega^1{}_2$

Para la 2ª ec de estructura ...

$d\omega^2{}_1 = d\theta\, \partial_\theta(\cos\theta\, d\varphi) = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$

$\omega^2{}_a \wedge \omega^a{}_1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{R^2{}_1 = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi} = -R^1{}_2$

$d\omega^1{}_2 = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$

Para $R^1{}_1, \dots \; d\omega^1{}_1 = 0 = d\omega^2{}_2$

$\omega^1{}_a \wedge \omega^a{}_1 = \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_1 = -\cos^2\theta\, d\varphi \wedge d\varphi = 0$

$= \omega^2{}_a \wedge \omega^a{}_2$

$R^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$

$$R^1{}_2 = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{2} R^1{}_{2\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{2}\left(R^1{}_{2\theta\varphi}\, d\theta\wedge d\varphi + \underbrace{R^1{}_{2\varphi\theta}}_{(-)}\, \underbrace{d\varphi \wedge d\theta}_{(-)}\right)$$

$$\Rightarrow R^1{}_{2\theta\varphi} = \sin\theta$$

$$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = R^1{}_{2\theta\varphi}\, E^\theta_1\, E^2_\varphi$$

$$= \sin\theta\, \frac{1}{r}\, r\sin\theta = \sin^2\theta$$

El resto sale de las (anti) simetrías ...

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = r^2 \sin^2\theta$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta\varphi\theta\varphi}\, g^{\varphi\varphi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta} = 1$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi\theta}\, g^{\theta\theta} = \frac{r^2\sin^2\theta}{r^2} = \sin^2\theta$$

$$R = R_{\theta\theta}\, g^{\theta\theta} + R_{\varphi\varphi}\, g^{\varphi\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$: escalar de Ricci

Un ejemplo loco de derivada exterior...

$$A = r\cos\theta\, d\varphi + \sin\theta\, dr$$

$$dA = \partial_r(r\cos\theta)\, \overset{\to\text{ orden}}{dr} \wedge d\varphi + \partial_\theta(r\cos\theta)\, d\theta\wedge d\varphi$$
$$+ \partial_\theta(\sin\theta)\, d\theta \wedge dr$$

$$= \cos\theta\, dr\wedge d\varphi - r\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi + \cos\theta\, d\theta\wedge dr$$

05/06/2012

Continuando con las formas diferenciales...

→ Tensores covariantes

→ Totalmente antisimétricos

→ Operaciones locas...

$a, b, c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etc.

$\alpha \in \Lambda^p T^* M$ (p-formas), $\beta \in \Lambda^q T^* M$

$\alpha + \beta \in \Lambda^p T^* M$

$a\alpha + b\beta \in \Lambda^p T^* M$

$\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} T^* M$ wedge (cuña) product

$d\alpha \in \Lambda^{p+1} T^* M$ derivada exterior

$d\alpha = (dx^\mu \wedge)\partial_\mu$

→ Ecuaciones de estructura de Cartán.

$$de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = T^a$$

$$d\omega^a{}_c + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c = R^a{}_c$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e^a_\mu\, e^b_\nu$$

; relación entre métrica curva ($g_{\mu\nu}$) y la plana (η_{ab})

vielbein (de muchas patas: einbein, zweibein, dreibein, vierbein...)

$\omega^a{}_b$: Spin ~~cont~~ connection.

$$e^a \equiv e^a_\mu\, dx^\mu = \tilde{e}^\mu$$

$$\omega^a{}_b \equiv \omega^a_{\mu b}\, dx^\mu$$

$$T^a \equiv \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

2-forma torsión

$R^a{}_b \equiv \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^a{}_b \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ 2-forma curvatura

↳ Tensor de Riemann

Ej. locos de la vida...

Métrica de Rindler:

$$ds^2(y) = \overset{(e^1_v)^2}{u^2} dv^2 - \overset{(e^0_u)^2}{}du^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u = 0 \\ v = 1 \end{matrix}$$

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{plano}$$

$$e^0_u = 1 \qquad e^1_v = u$$

$$e^0 = du \qquad e^1 = u\,dv$$

1ª eq: $de^0 = 0$

$$de^1 = du \wedge (\partial_u e^1) + dv \wedge (\partial_v e^1)$$
$$= du \wedge dv$$

En relatividad general, $T^a = 0$

$$\Rightarrow de^1 = -\omega^1{}_b \wedge e^b$$
$$= -dv \wedge du = -dv \wedge e^0$$

$$\Rightarrow \omega^1{}_0 = dv = -\omega^{10} = \omega^{01} = \omega^0{}_1$$

Únicos componentes diferentes de 0.

2^{da} ecuación de estructura...

$$d\omega^1{}_0 = 0$$

$$\omega^1{}_0 \wedge \omega^0{}_1 = \sim dr \wedge dr \xrightarrow{\text{por antisimetría}} = 0$$

$$\omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_0 = \sim dr \wedge dr = 0$$

$$R^a{}_b = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho = 0$$

Segundo caso... Métrica de Robertson-Walker...

$$ds^2(g) = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + \underbrace{r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2}_{\text{esfera de radio } r}\right]$$

$k=0$ → métrica plana (Kappa)

$k>0$ → espacio cerrado (esfera)

$k<0$ → espacio abierto

Si fuera una esfera, $a^2(t)$ agranda o disminuye su tamaño.

Esta es una métrica de espaciotiempo que describe un espacio que cambie (crece o decrece) a medida que pasa el tiempo.

$$e^0 = dt \qquad e^2 = a(t)\, r\, d\theta$$

$$e^1 = \frac{a(t)\, dr}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad e^3 = a(t)\, r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi$$

$$de^0 = 0$$

$$de^1 = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1-kr^2}} dt \wedge dr + \partial_r\left(\frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}\right) \overbrace{dr \wedge dr}^{0} = -\frac{\dot{a}}{\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge dt$$

$$= -\frac{\dot{a}}{\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge e^0 = -\omega^1{}_0 \wedge e^0$$

$$\therefore \boxed{\omega^1{}_0 = \frac{\dot a}{\sqrt{1-kr^2}}\, dr = -\omega^{10} = \omega^{01} = \omega^0{}_1}$$

$$de^2 = \dot a r\, dt \wedge d\theta + a\, dr \wedge d\theta$$

$$= -\dot a r\, d\theta \wedge e^0 - \underbrace{a\, d\theta \wedge dr \cdot \frac{\sqrt{1-kr^2}}{\sqrt{1-kr^2}}}_{e^1}$$

$$= -\dot a r\, d\theta \wedge e^0 - \sqrt{1-kr^2}\, d\theta \wedge e^1$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} \omega^2{}_0 &= \dot a r\, d\theta = -\omega^{20} = \omega^{02} = \omega^0{}_2 \\ \omega^2{}_1 &= \sqrt{1-kr^2}\, d\theta = \omega^{21} = -\omega^{12} = -\omega^1{}_2 \end{aligned}}$$

$$de^3 = \dot a r \sin\theta\, dt \wedge d\varphi + a \sin\theta\, dr \wedge d\varphi + a r \cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi$$

$$= -\dot a r \sin\theta\, d\varphi \wedge e^0 - \sqrt{1-kr^2} \sin\theta\, d\varphi \wedge e^1 - \cos\theta\, d\varphi \wedge e^2$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} \omega^3{}_0 &= \dot a r \sin\theta\, d\varphi = -\omega^{30} = \omega^{03} = \omega^0{}_3 \\ \omega^3{}_1 &= \sqrt{1-kr^2} \sin\theta\, d\varphi = \omega^{31} = -\omega^{13} = -\omega^1{}_3 \\ \omega^3{}_2 &= \cos\theta\, d\varphi = \omega^{32} = -\omega^{23} = -\omega^2{}_3 \end{aligned}}$$

Ahora viene la segunda ecuación de estructura. Hay que construir los $\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c$

$$d\omega^2{}_0 = d(\dot a r\, d\theta) = \ddot a\, r\, dt\wedge d\theta + \dot a\, dr\wedge d\theta$$

$$\omega^2{}_a\wedge\omega^a{}_0 = \omega^2{}_0\wedge\cancelto{0}{\omega^0{}_0} + \omega^2{}_1\wedge\omega^1{}_0 + \cancelto{0}{\omega^2{}_2}\wedge\omega^2{}_0 + \omega^2{}_3\wedge\omega^3{}_0$$

$$= \dot a\, d\theta\wedge dr - \cos\theta\, \dot a\, r \sin\theta\, \cancelto{0}{d\phi\wedge d\phi}$$

$$\Rightarrow R^2{}_0 = \ddot a\, r\, dt\wedge d\theta \quad (+\ \dot a\, dr\wedge d\theta + \dot a\, d\theta\wedge dr)$$

$$R^a{}_c = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^a{}_c\, dx^\mu\wedge dx^\nu \qquad \left(= \frac{1}{2}(R_{t\theta}{}^a{}_c\, dt\wedge d\theta + \frac{1}{2} R_{\theta t}{}^a{}_c\, d\theta\wedge dt\right)$$

$$\Rightarrow R_{t\theta}{}^2{}_0 = \ddot a\, r$$

$$R_{t\theta}{}^\theta{}_t = R_{t\theta}{}^2{}_0\, E_2^\theta\, e^0_t$$

$e^0 = dt \Rightarrow e^0_t = 1$

$e^2 = ar\, d\theta \Rightarrow E^\theta_2 = \frac{1}{ar}$

$$\therefore \boxed{R_{t\theta}{}^\theta{}_t = \frac{\ddot a}{a}}$$

¡ta daa!!

([illegible] en el librito relativity Demystified)