

复变函数与积分变换复习总结



为什么复习反复?

复习几何性质尚且不懂,而电路微分马上要用.

为什么用手写?

加深印象. 耐少概念. 善用快记法

目标是什么?

掌握概念 了解网络

the more important

easy and of little course

—001 第一章 复数与复变函数

001 § 1.1 复数

004 § 1.2 复数的三角表示

012 § 1.3 平面点集的一般概念

016 § 1.4 无穷大与复球面

018 § 1.5 复变函数

022 本章小结

023 思考题

023 习题一

—025 第二章 解析函数

025 § 2.1 解析函数的概念

030 § 2.2 解析函数和调和函数的关系

034 § 2.3 初等函数

042 本章小结

043 思考题

043 习题二

第三章 复变函数的积分

046 § 3.1 复积分的概念

053 § 3.2 柯西积分定理

056 § 3.3 柯西积分公式

063 § 3.4 解析函数的高阶导数

064 本章小结

065 思考题

065 习题三

—067 第四章 解析函数的级数表示

067 § 4.1 复数项级数

070 § 4.2 复变函数项级数

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数

complex variables
arg θ $r[\cos \theta + i \sin \theta]$
re θ
开环 闭环
余集 内集 边界
区域 (连通性)
闭域
平开曲线 光滑
单点 简单曲线 Jordan
实开闭曲线 斜渐近

important but easy

CR + 3 级
域内函数可导可积

当 $z \rightarrow 0$ important
势函数 反函数映射

043 思考题
043 习题二
重要 and difficult
(u, v) 是共轭调和函数

046 § 3.1 复积分的概念
053 § 3.2 柯西积分定理
柯西积分定理 $\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$
区域 $\int_C f(z) dz = \int_C f(z) \bar{z} dz$

056 § 3.3 柯西积分公式
063 § 3.4 解析函数的高阶导数
类比的微分
Stokes 定理
解析函数的高阶导数
柯西积分公式 \rightarrow 联系到
会积分

064 本章小结
065 思考题
065 习题三
环型 + 通型

—067 第四章 解析函数的级数表示
067 § 4.1 复数项级数
收敛问题的
级数收敛

070 § 4.2 复变函数项级数
075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

075 § 4.3 泰勒 (Taylor) 级数
收敛问题的
级数收敛

081 § 4.4 洛朗 (Laurent) 级数

087 本章小结

087 思考题

087 习题四

—089 第五章 留数及其应用

089 § 5.1 孤立奇点

097 § 5.2 留数

105 § 5.3 留数在定积分计算中的应用

110 § 5.4 对数留数与辐角原理

115 本章小结

115 思考题

115 习题五

—118 第六章 共形映射

118 § 6.1 共形映射的概念

121 § 6.2 共形映射的基本问题

124 § 6.3 分式线性映射

135 § 6.4 几个初等函数构成的共形映射

143 本章小结

143 习题六

* 第七章 解析函数在平面场的应用

145 § 7.1 复势的概念

150 § 7.2 复势的应用

154 § 7.3 用共形映射的方法研究平面场

157 本章小结

157 思考题

158 习题七

—159 第八章 傅里叶变换

159 § 8.1 傅里叶变换的概念

167 § 8.2 单位冲激函数 (δ 函数)

171 § 8.3 傅里叶变换的性质

182 本章小结

183 习题八

—186 第九章 拉普拉斯变换

186 § 9.1 拉普拉斯变换的概念

—001	第一章 复数与复变函数
001	§ 1.1 基本要求与内容提要
004	§ 1.2 典型例题与解题方法
019	§ 1.3 教材习题同步解析
028	§ 1.4 自测题
—030	第二章 解析函数
030	§ 2.1 基本要求与内容提要
033	§ 2.2 典型例题与解题方法
056	§ 2.3 教材习题同步解析
070	§ 2.4 自测题
—072	第三章 复变函数的积分
072	§ 3.1 基本要求与内容提要
076	§ 3.2 典型例题与解题方法
101	§ 3.3 教材习题同步解析
108	§ 3.4 自测题
—111	第四章 解析函数的级数表示
111	§ 4.1 基本要求与内容提要
114	§ 4.2 典型例题与解题方法
140	§ 4.3 教材习题同步解析
147	§ 4.4 自测题
—149	第五章 留数及其应用
149	§ 5.1 基本要求与内容提要
154	§ 5.2 典型例题与解题方法
189	§ 5.3 教材习题同步解析
202	§ 5.4 自测题
—204	第六章 共形映射
204	§ 6.1 基本要求与内容提要
208	§ 6.2 典型例题与解题方法

227	§ 6.3 教材习题同步解析
238	§ 6.4 自测题
—240	第七章 傅里叶变换
240	§ 7.1 基本要求与内容提要
244	§ 7.2 典型例题与解题方法
249	§ 7.3 教材习题同步解析
261	§ 7.4 自测题
—263	第八章 拉普拉斯变换
263	§ 8.1 基本要求与内容提要
266	§ 8.2 典型例题与解题方法
272	§ 8.3 教材习题同步解析
286	§ 8.4 自测题

解析函数的导数和实变函数的导数具有相同形式意味着什么？

- ① 四则运算法则
- ② 复合函数求导法则
- ③ 反函数的求导法则
- ④ 洛必达法则
- ⑤ 等效无穷小 但注意无等效无穷大

为什么CR法则出现可以用来做解析的一些思考

先关注导数形式

连续可导

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + \Delta v i}{\Delta x + \Delta y i}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{aligned} \rightarrow \text{可微}$$

$$\text{则 } f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i] \Delta x + [\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i] \Delta y}{\Delta x + \Delta y i}$$

由于 $f'(z)$ 存在且连续 (可导)

$$\text{So } \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i}{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} i - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i$$

So

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(21/21)

u, v 可微

+

(8/25) 证明

可以看出, 如果满足CR \Leftrightarrow 该函数可导

我理解的CR产生原因 (仔细回想用蓝笔)

调和函数的性质与物理含义

① 拉普拉斯算子 $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

调和函数 满足 $\Delta f = 0$ (\exists 二阶偏导且 $n \geq 2$)

② 解析性

调和函数在定义域内每一点是可以进行无穷次泰勒展开的，这就意味着调和函数是光滑的，或者说无穷次可导的

牛

③ 平均值定理

简单来说，就是函数 u 在一点 x 的值等于函数在以 x 为中心的球区域中体积积分或面积积分的平均值(通过简单的积分计算可以证明，这两种积分平均值是等价的)：

③ 极值原理

调和函数如果不是常数，那么它不能在内部取到极大值或极小值。

$\Delta u = 0$: 描述一个稳定的状态. eg: 温度场, 引力场等.
↓
类似加速度和为0. 稳态

$$\nabla^2 u = 0$$

$$(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

梯度场 \rightarrow 无旋场 $\nabla \times u = 0$ 无旋

$\nabla \cdot V = 0$ 类型场无源场 不流

$$\nabla \cdot V = 0 \quad \nabla \times V = 0 \quad \text{调和场}$$

调和场的势函数为调和函数

$$\text{即 } \nabla u = V$$

https://www.sohu.com/a/387112575_348129

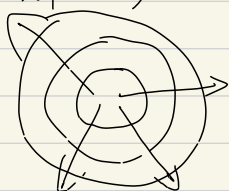
<https://wenku.baidu.com/view/e524df94aa00b52acec7ca3a.html>

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/54548572>

感慨——场论太美妙.

共轭调和函数的几何意义

∇u 和 ∇v 正交, 即两对梯度场正交



https://www.zhihu.com/column/c_1187367236074909696

此人所写极好, 图又好看 (kè)

欢迎来看

初等函数

① 全纯函数: f 在 U 上处处可微
 $\exp(x) \quad \ln(x) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $p(z)$ (多项式)

因为复微分是线性的, 并且服从积、商、链式法则, 所以全纯函数的和、积和复合是全纯的, 而两个全纯函数的商在所有分母非 0 的地方全纯。

每个全纯函数在每一点无穷可微。它和它自己的泰勒级数相等, 而泰勒级数在每个完全位于定义域内的开圆盘上收敛。泰勒级数也可能在一个更大的圆盘上收敛; 例如, 对数的泰勒级数在每个不包含 0 的圆盘上收敛, 甚至在复实轴的附近也是如此。证明请参看全纯函数解析。

全纯函数满足 Cauchy-Riemann 方程组, 该方程组含有两个偏微分方程, 也可以用复偏导算子写成一个。

在非导数的点的附近, 全纯函数是共形的 (或保角的, 实际上就是相似在局部的推广)。因为它保持了图形的局部角度和形状 (但尺寸可能改变)。

Cauchy 积分公式表明每个全纯函数在圆盘内的值由它在盘边界上的取值所完全决定。

$$\textcircled{2} e^z = \exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y) \\ e^z \neq 0 \\ e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \\ z \in \mathbb{C} \text{ 内周期}$$

$\rightarrow \infty$ 没有极点 \Rightarrow 非恒零

③ $\ln z$ e^z 反函数, 初等函数 $\ln z$ 为多值

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$\ln z = \ln z + 2k\pi i$$

$$\ln z^n \neq n \ln z$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$$

③ 幂函数 z^2 多值函数.

④ 三角函数

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

① 单值函数

② 2 π 周期

③ $\cos z$ 和 $\sin z$ 奇

④ $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \dots$

⑤ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\text{且 } |\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1 \text{ 不成立}$$

$$\sin^2 z \cos^2 z \leq 0$$

分析

⑤ 反三角

⑥ 双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = -i \sin iz \quad \cosh z = \cos iz$$

一个重要公式

例 3.2 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, 其中 n 为任意整数, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的圆周.

解 C 的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

由 (3.4) 式得

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta d\theta + \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)\theta d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

此例的结果很重要, 以后经常要用到. 以上结果与积分路径圆周的中心和半径无关, 应记住这一特点.

关于复变函数积分的一些理解

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

[公式]

积分的实部是向量场沿 [公式] 的环量，虚部是向量场沿 [公式] 的通量（二维通量，可视为柱形三维通量的投影）！

$$\int_L f(z) dz = \int_L (Pdx + Qdy) + i \int_L (-Qdx + Pdy) = \Gamma + i\Phi$$

环量通量都为0，则记号

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/74716952>

有关柯西积分公式

https://www.zhihu.com/column/c_1196023055833497600

定理 3.7 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析, 在 $\bar{D} = D \cup C$ 上连续, z_0 是 D 内任一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.10)$$

$f(z)$ 所有值都体现在 $f(z)$

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi \varepsilon,$$

即 (3.10) 式成立.

公式 (3.10) 称为柯西积分公式. 这个公式说明: 如果一个函数在简单闭曲线 C 的内部解析, 在 C 上连续, 则函数在 C 内部的值完全可由 C 上的值而定. 它不仅提供了计算某些复变函数沿简单闭曲线积分的一种方法, 而且可以帮助我们研究解析函数的许多重要性质.

一些思考

一个点 z_0 的值可以用其邻域内 $f(z)$ 来界定
↓
端点 $\nabla \cdot f(z)$ 是端点.

求导与积分线性, 次序可换. 复变求导.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

幂级数的收敛半径为何存在

定理 4.5 若幂级数 (4.3) 在点 $z_1 (z_1 \neq z_0)$ 收敛, 则级数 (4.3) 在圆域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 内绝对收敛.

证 设 z 为圆域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 内任一点 (图 4.1(a)).
因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_1 - z_0)^n$$

收敛, 由定理 4.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n (z_1 - z_0)^n = 0.$$

因此, 存在一个常数 $M > 0$, 对于任意非负整数 n 均有

$$|C_n (z_1 - z_0)^n| \leq M.$$

于是

$$|C_n (z - z_0)^n| = |C_n (z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

而当 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 时, $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$, 因而级数

072 第四章 解析函数的级数表示

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \right)$$

收敛. 再根据正项级数比较判别法, 即知

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n (z - z_0)^n|$$

收敛, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

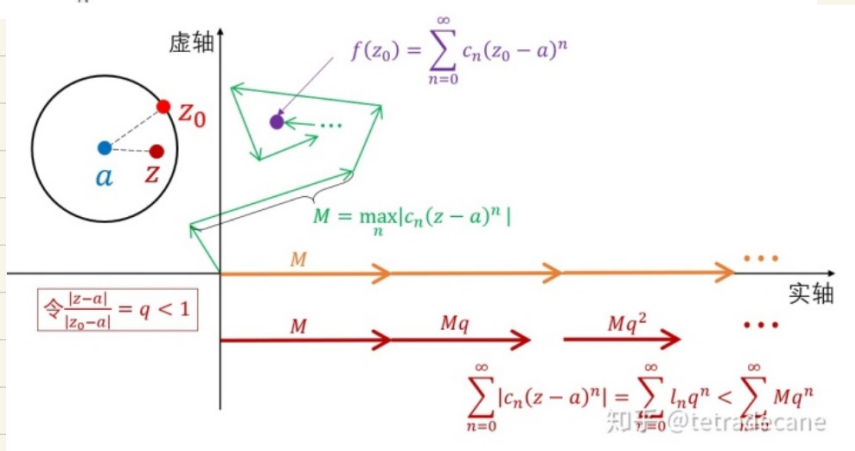
绝对收敛. 由于 z 在圆域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 内的任意性, 故定理得证.

(1) 幂级数的和 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ 在收敛圆的内部是一个解析函数.

(2) 在收敛圆的内部, 幂级数的和 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ 可以逐项求导及逐项积分任意次.

(1) 比值法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.



理解为何解析（或者说奇点？）可以是它的收敛域

总会，设能接近收敛点

如果 $f(z)$ 解析，满足高阶导数公式，有 $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$ ，把它代回泰勒级数，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta$$

这里面有个等比级数，当 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ 的时候，等比级数收敛，有

$$\text{上式} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

我可以令路径 C 在 $f(z)$ 解析的范围内尽可能地大，那么 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ 的范围也就尽可能地大。当 $f(z)$ 在一个圆域内解析时， C 可以任意靠近这个圆的边界， z 也可以任意靠近这个圆的边界，如下图所示：

常用泰勒展开

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

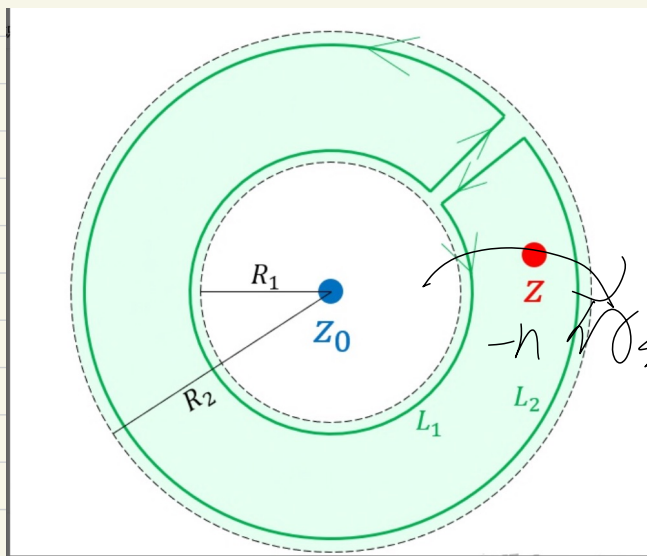
一个思考：由 $f(x) = \frac{\dots}{\text{关于 } x \text{ 的函数}}$ $f'(x) = \frac{\dots}{\text{关于 } x \text{ 的函数}}$
① → 角斗析

一般可以直接换 k 为 z .

积分同理

洛朗级数的理解

复变函数级数
人为制造闭环



$-n$ 的系数

我好像之前这里概念理解错了

(1) 在(5.4)式中,如果当 $n=1,2,3,\dots$ 时, $C_n=0$, 那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) 在(5.4)式中,如果只有有限个(至少一个)整数 $n>0$, 使得 $C_n \neq 0$, 那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的极点. 设对于正整数 m , $C_m \neq 0$; 而当 $n>m$ 时, $C_n=0$, 那么 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点.

(3) 在(5.4)式中,如果有无穷个整数 $n>0$, 使得 $C_n \neq 0$, 那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点.

与有限点的情形相反,无穷远点作为函数的孤立奇点时,它的分类是以函数在无穷远点邻域的洛朗展开中正次幂的系数取零值的多少作为依据的.

无穷远点函数是 C_1

不是 C_1

故
$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

极点与零点想法

m 阶极点 \longrightarrow 阶数变大

m 阶零点 \longrightarrow m 阶无穷小

由于性质同.

等价无穷小仍可应用.

本质上, 求导数. 化极点为可去奇点 $f(z)$ m 阶

$g(z) = (z - z_0)^m + f(z)$ 是可去奇点.

$f(z) \sim C_{-1} \frac{1}{z - z_0} \dots g(z) \sim C_{m-1} (z - z_0)^{m-1}$

$C_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ why? \rightarrow for

$g(z) = O((z - z_0)^0) + O((z - z_0)^1) + \dots$

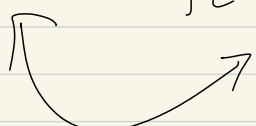
\downarrow
求导消去.

$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{(z - z_0)^m f(z)}{(m-1)!} \right] = C_{m-1}$
(给可去奇点一个台子)

围道积分方法

还没学完 复习到此.

反角: $\oint_C f(z) dz = \oint_C f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$Q(z)$ 或 $P(z)$ 为二次

$Q(z)$ 实轴上无零点