复习开始

微积分（上和下）

微积分重点

- 复合函数
- 极限定义

  对数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 定义中的 ε,N 的理解

-
  【2-2】 变量的极限存在(或者说收敛)的几个常用条件

  (1) 当数列 $\{x_n\}$ 满足以下条件之一时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

  ① 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界或单调减少有下界的数列；

  ② 数列 $\{x_n\}$ 被两个收敛到同一极限的数列所“夹挤”，即

  $$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=l.$$

  (2) 当函数 $f(x)$ 满足以下条件之一时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在：

  ① 左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等；

  ② 对任何趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ (要求 $x_n\neq x_0$)，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

  (3) 当函数 $f(x)$ 满足以下条件时，右极限存在：存在 $\delta>0$，在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内，函数 $f(x)$ 单调有界，右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在.

  对左极限，也有类似的结果.
- 一点处可导与一点附近可导的区别

- **【3-5】 导数概念与微分概念的比较**

  导数与微分的存在性是一致的，即“$f(x)$在点 x 处可导$\Leftrightarrow f(x)$在点 x 处可微”. 由于公式$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$ 及 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$使得两者的计算可以互相转化，因此导数与微分的运算法则、初等函数的导数公式与微分公式也十分类似，但是两者的区别还是比较明显的，主要体现在以下几个方面.

  (1) 从取值上区别：函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是一个常数，由函数 $f(x)$和点 x_0 完全确定；而函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)(x-x_0)$不是常数，其大小还会受变量 x 的影响.

  (2) 从几何上区别：导数 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率，而微分 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ 是曲线$y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线在对应点 $x=x_0+\Delta x$ 处纵坐标的改变量.

  (3) 从应用上区别：导数一般用于函数性质(如单调性、极值性、曲线的凹凸性等)的研究，而微分主要用于近似计算和寻找原函数(参见积分学).

- $$\text{罗尔定理} \xrightleftharpoons[f(a)=f(b)]{\text{推广}} \text{拉格朗日中值定理} \xrightleftharpoons[\text{分母}=x]{\text{推广}} \text{柯西定理}$$
  $$\text{推广}\Big\Downarrow\Big\Uparrow\; n=0$$
  $$\text{泰勒定理}$$

  【4-5】 选用微分中值定理的一般原则和思路

  解题时究竟使用哪一个微分中值定理作为切入点，对初学者是比较困难的. 需要认

- 真地分析例题，多做习题才能有所体会. 根据问题的任务和给出的条件大体上可以遵循以下原则：

  (1) 证明含中值的等式或方程根的存在性问题，可考虑用罗尔定理(或者连续函数的介值定理)；

  (2) 若结论中涉及含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理；

  (3) 若条件中函数有高阶导数，多考虑用泰勒定理，或者连续使用罗尔定理；

  (4) 不等式或估计大小的问题，多考虑用拉格朗日中值定理.

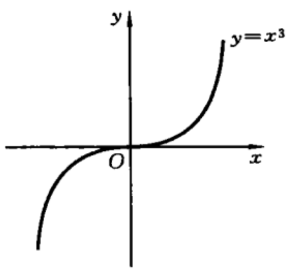
  

  图 4-2

- 点积叉积混合积

【9-3】 在某点的连续、偏导存在、方向导数存在及可微等的相互关系

(1) 偏导函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续且其偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，以及沿任何方向的方向导数存在；

(3) 偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 存在 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿着 x 轴正方向和反方向的两个方向导数存在(类似的结果适合于 $f_y(x_0,y_0)$)；

(4) 偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 的存在与 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的连续之间没有蕴含关系. 举例说明如下：

① 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处连续，有沿任何方向的方向导数，但是两个偏导数均不存在，自然也不可微；

② 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点的极限不存在，因而在原点处不连续，但是在原点的两个偏导数都存在，且均为 0.

【题型 9-5】 几何应用——空间曲线的切线和空间曲面的切平面

应对 本题型自然与空间解析几何及向量代数的内容密切相关联，需熟悉平面直线的方程的表达、向量的基本运算性质(主要是点积和叉积)等，然后才能与微分学的知识结合起来解决问题. 主要公式有以下几个：

(1) 空间曲线 $C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ 在点 $t=t_0$ 处的切矢量为 $\boldsymbol{\tau}=\{x'(t_0),y(t_0),z(t_0)\}$；

(2) 空间曲线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切矢量为 $\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G|_P$；

(3) 空间曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的法矢量为 $\boldsymbol{n}_F=\{F_x,F_x,F_x\}|_P$.

【题型 9-6】 方向导数与梯度

应对 方向导数是多元微分学的一个较为特殊的内容，它的思想来源于导数(即增量比的极限)但又不同于偏导数. 如果该点可微，则该点沿任意方向的方向导数都存在，而此时计算较为简洁，否则就需要直接用定义来进行计算. 梯度可以由方向导数概念延伸而来，是方向导数取最大值所对应的方向，也是场论的重要概念之一.

以三元函数为例，其计算公式如下：

(1) 若 $u=f(x,y,z)$ 在点 P_0 处存在对各变元的偏导数，则它在点 P_0 处的梯度为

$$\mathbf{grad}u(P_0)=\{f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)\};$$

(2) 若 $u=f(x,y,z)$ 在点 P_0 处可微，则它在点 P_0 处沿非零矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P_0}=\mathbf{grad}u(P_0)\cdot\boldsymbol{n}^\circ.$$

【题型 10-6】 在柱面坐标系下计算三重积分

应对 绘制积分区域的草图，依据区域特点选择是采用投影法(例如是 xy- 型区域)还是采用截面法，然后将其分解为二重积分和定积分计算，将其中二重积分化为极坐标下的逐次积分计算. 熟练之后也可以直接到达三次积分.

【题型 10-7】 在球面坐标系下计算三重积分

应对 绘制积分区域的草图，依据区域特点确定球面坐标系中各个坐标的变动范围，然后写出逐次积分：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)}\rho^2 f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\rho.$$

依次计算便可. 注意在被积函数中插入因子 $\rho^2\sin\varphi$.

1. 理解无穷级数收敛、发散及收敛级数的和的概念. 了解无穷级数收敛的必要条件及基本性质.
2. 掌握几何级数与 P-级数的收敛性.
3. 掌握正项级数的比较判别法、比值判别法和根值判别法.
4. 掌握交错级数的莱布尼兹判别法.
5. 了解绝对收敛与条件收敛的概念及绝对收敛与收敛的关系.
6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.
7. 掌握简单的幂级数的收敛区间和收敛域的求法.
8. 了解幂级数在收敛区间内的一些基本性质.
9. 了解函数展开成泰勒级数的条件. 会利用 $1/(1-x)$，e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 的麦克劳林(Maclaurin)级数展开式及幂级数的基本性质将一些简单的函数展开成幂级数.
10. 会利用幂级数的基本性质及一些已知幂级数的和函数求一些简单幂级数在收敛域内的和函数.
11. 了解幂级数在近似计算上的简单应用.
12. 了解函数展开为傅里叶(Fourier)级数的狄利克雷(Dirichlet)条件，会将定义在区间 $(-\pi,\pi)$ 和 $(-l,l)$ 上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在区间 $(0,\pi)$ 和 $(0,l)$ 上的函数展开为正弦和余弦级数.

无穷级数反正我自己是没搞太懂，只会傻傻做题了= =

微积分常用公式

常微分（和电路理论还有物理结合紧密）

表 7-1

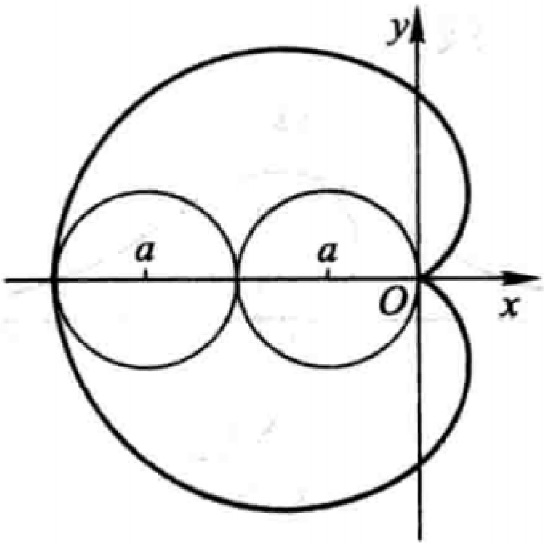
方程名称	主要特征	求解方法
可分离变量方程	$y'=f(x)g(y)$	分离变量后积分：$\int a(x)\mathrm{d}x=\int b(y)\mathrm{d}y$
齐次方程	$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$	代换 $u=\frac{y}{x}$ 后变成可分离方程：$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$
线性方程	$y'+p(x)y=q(x)$	通解为 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$
伯努利方程	$y'+p(x)y=q(x)y^n (n\neq 0,1)$	代换 $u=y^{1-n}$ 后变成线性方程：$\frac{1}{1-n}u'+p(x)u=q(x)$
全微分方程	$p(x,y)\mathrm{d}x+q(x,y)\mathrm{d}y=0$，其中 $q_x(x,y)=p_y(x,y)$	通过凑微分，求得函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=p(x,y)\mathrm{d}x+q(x,y)\mathrm{d}y$，通解为 $u(x,y)=C$

方程名称	主要特征	求解方法
可降阶二阶方程	$y''=f(x)$	通解 $y=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$
	缺自变量 x $y''=f(y,y')$	令 $p=y'$，化为未知函数 $p(x)$ 的一阶微分方程 $p'=f(x,p)$
	缺因变量 y $y''=f(x,y')$	令 $p=y'$，化为未知函数 $p(y)$ 的一阶微分方程 $pp'=f(y,p)$
常系数线性方程	齐次方程 $y''+ay'+by=0$	通解为两个基本解 y_1,y_2 的线性组合： $y_{齐}=C_1y_1+C_2y_2$ 其中 C_1,C_2 是任意常数(下同)
	非齐次方程 $y''+ay'+by=f(x)$	通解为相应的齐次方程的通解与非齐次方程的任何一个解函数 y^* 的和： $y_{非齐}=C_1y_1+C_2y_2+y^*$
变系数线性方程	欧拉方程 $ax^2y''+bxy'+cy=f(x)\ (a\neq 0)$	通过自变量代换 $x=e^t$ 化为函数 $y(t)$ 的常系数线性微分方程： $a\ddot{y}+(b-a)\dot{y}+cy=f(e^t)$ (关于 t 的导数记为 $\dot{y},\ddot{y}$)

表 7-4　结合特征根与非齐次项构建待定特解

非齐次项 $f(x)$ 的形式	与特征根比较	特解 y^* 的待定形式
$f(x)$ 为多项式	无特征根 0	y^* 为与 $f(x)$ 同次幂的多项式
	有特征根 0	$y^*=xg(x)$，　$g(x)$ 为与 $f(x)$ 同次幂的多项式
$f(x)=P(x)e^{rx}$	r 不是特征根	$y^*=Q(x)e^{rx}$，$Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
	r 是特征根单根	$y^*=xQ(x)e^{rx}$，$Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
	r 是二重特征根	$y^*=x^2Q(x)e^{rx}$，$Q(x)$ 为与 $P(x)$ 同次幂的多项式
$f(x)=e^{\xi x}(A(x)\cos\eta x+B(x)\sin\eta x)$	$\xi\pm\eta i$ 不是特征根	$y^*=e^{\xi x}(C(x)\cos\eta x+D(x)\sin\eta x)$，$C(x),D(x)$ 为与 $A(x),B(x)$ 同次幂的多项式，系数待定
	$\xi\pm\eta i$ 是共轭复根	$y^*=xe^{\xi x}(C(x)\cos\eta x+D(x)\sin\eta x)$，$C(x),D(x)$ 为与 $A(x),B(x)$ 同次幂的多项式，系数待定

（9）心形线（外摆线的一种）



码住，以后谈恋爱了可以用

$$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho=a(1-\cos\theta)$$

来表白

积分表（算啦不复制粘贴了反正需要的时候再去找）

147. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\ (n\text{ 为大于 1 的正奇数}),I_1=1,\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\ (n\text{ 为正偶数}),I_0=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

微积分与学科交叉

微积分与物理的交叉

【题型 4-12】 求曲线的曲率

应对 曲线曲率的计算公式归纳如表 4-4 所示.

表 4-4

	曲线方程	曲率	曲率半径
计算公式	$y=f(x)$	$K=\dfrac{\lvert y''\rvert}{(1+y'^2)^{3/2}}$	$R=\dfrac{1}{K}$
	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$	$K=\dfrac{\lvert\varphi'\psi''-\varphi''\psi'\rvert}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}$	
	$r=r(\theta)$	$K=\dfrac{\lvert r^2+2r'^2-rr''\rvert}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$	

常微分

微积分和电路理论的交叉

常微分

微积分易错点

- 定义域
- 一点处可导与一点附近可导的区别
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$ 注意这个绝对值
- 【6-10】 能否将定积分中"对称性方法"用在反常积分上

  不可以. 因为积分值为零便意味着该反常积分收敛，如果所讨论的反常积分发散，则此结论不能成立. 例如 $f(x)=x$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，但是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，无积分值之说. 类似地，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数，但是 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

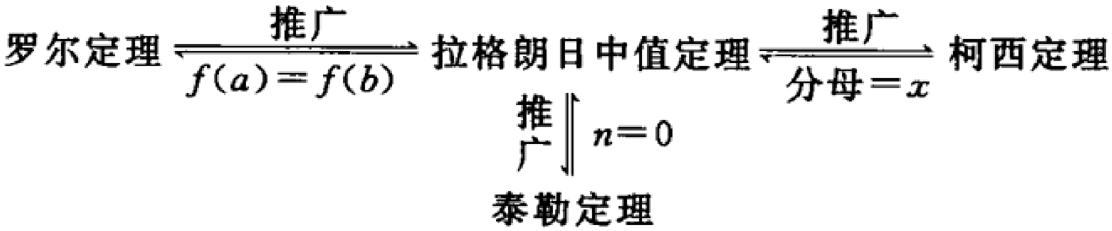
  由定义知，反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 只有在 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$（$c$ 为任意常数）均收敛时，才为收敛，且此时

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$
-

学微积分的心得

关于微分中值定理的一些想法

微分中值定理最为基础的就是罗尔定理，它说的是一个连续的首尾两端函数值相等的函数，如果它在我要的那个区间上可导，那么就会在其中有一个点导数为0，肉眼上很好理解，实际上它说的是有关最大值或最小值一定存在，则极大值极小值一定存在，则导数为0



然后当我把函数转了转换了个方向，它就是拉格朗日中值定理（这里就有一个思想，如果我想证明一个式子，我可以考虑将他加一个一次函数或者剪一个一次函数，这样子就相当于旋转函数）

但是注意，柯西中值定理并不是简单的拉格朗日定理的直接变形，这个没有什么可以直观上理解的东西，记住推导过程就行

泰勒定理其实就是对罗尔定理使用洛必达法则得到的一个数学归纳的结果，相当于是不停的切直到拟合，这个用无穷级数来理解也行

第二型曲线积分的一些心得

第二型曲线积分，即空间的

$$\int Pdx + Qdy + Rdz$$

或平面的

$$\int Pdx + Qdy$$

对它的积分使用凑微分法，比什么 ▿ x F 然后再积分舒服多了，可以先凑一部分算剩下的部分，因为相当于对于无旋场就是梯度场，我找它的势函数，然后再加上有旋的部分

举个例子，$I = \oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$，直接是d（arctan（y/x））的积分，如果要算它从点A到点B，相比于先求出Qx=Py，然后再找折线积分，不如直接arctan（yB/xB）-arctan（yA/xA），有的时候Qx-Py并不是0，也就是说不是梯度场，遍把它化成一个梯度场加一个好算的有旋场的形式

吐槽一下，直接算的方式，就是垃圾，又慢又傻还容易错，吐舌

关于记忆斯托克斯，green，高斯公式的一些心得和对其本质的探寻

有关▿

▿·F，源，是通量的来源

▿xF，旋，就是绕环的程度

那么把一个冬瓜的所有的源加起来，就是整个通量

$$\iiint_\Omega (\nabla \cdot A)\, dx\, dy\, dz = \oiint_\Sigma A \cdot d\vec{S}$$

把一个面上所有的旋加起来，就是整个绕环程度

$$\oint_{L+}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_{\sigma_{xy}}(\nabla\times\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{e_n})d\sigma$$

微积分书对这个完全没讲，搞得最开始就没理解它为什么会成立，其实想通了它的道理就很简单也会用了