复变函数与积分变换复习总结

为什么复习复变？

复变的几何性质尚且不懂，而电路和信号上要用。

为什么用手写？

加深印象．不抄概念．善用快[illegible][illegible]

目标是什么？

掌握概念 了解脉络

the most important thing

easy and of little account

complex variables

$r\arg\theta$ $\quad r[\cos\theta+i\sin\theta]$ $\quad re^{i\theta}$

开集 闭集
余集 边界点 边界
孤立点 有界集无界集
区域(连通开集)
闭域
平面曲线 光滑
重点 简单曲线 Jordan曲线
简单闭曲线 内部外部

important but easy

C-R + 可微

so important

即 $F'(z)=f(z)$

(u, v)是F的梯度场

important and difficult.

$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$

解析时 $\int_C f(z)dz=0$

类比到微积分 及Stokes定理

利用第二类曲线积分计算

有点像第一类曲线积分 $\lim \sum f(\zeta_k)\Delta z_k$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

计算 $\int_C f(z)dz = \int_C f(z(t))z'(t)dt$

收敛问题
幂级数收敛

收敛域

函数,在这一章里表述了幂级数与解析函数的紧密联系,一方面幂级数在一定的区域内收敛于一个解析函数;另一方面一个解析函数在其解析点的邻域内,能展开成幂级数. 所以

圆环的一种蜕化情形是一点的去心邻域,而当函数在一点的去心邻域内为解析,但其不在该点解析的时候,这一点就是函数的孤立奇点. 所以洛朗级数就很自然地成为研究解析函数的孤立奇点的有力工具(这点将在下一章看到).

解析函数的导数和实变函数的导数具有相同形式意味着什么?

① 四则运算法则

② 复合函数求导法则

③ 反函数的求导法则

④ 洛必达法则

⑤ 等效无穷小 但注意无等效无穷大

为什么CR法则出现可以用来做解析的一些思考

连续可导.

先关注导数形式

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + \Delta v\, i}{\Delta x + \Delta y\, i}$$

其中

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

→ 可微

则

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right]\Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i\right]\Delta y}{\Delta x + \Delta y\, i}$$

由于 $f'(z) = \text{Const}$ 要唯一 连续性 (可导)

So

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i}{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} i - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i$$

So

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(必要)

u, v 可微

+

(充分) 全都

可以看出,如果满足CR ⟺ 连续点可导

我理解的CR产生原因 (仔细阅读书中蓝笔)

调和函数的性质与物理含义

① 拉普拉斯算子 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

调和函数. 满足 $\Delta f = 0$ （$\exists$ 二阶偏导 且 $n \geq 2$）

② 解析性

调和函数在定义域内每一点是可以进行无穷次泰勒展开的，这就意味着调和函数是光滑的，或者说无穷次可导的

牛

② 平均值定理

简单来说，就是函数u在一点x的值等于函数在以x为中心的球区域中体积积分或面积积分的平均值(通过简单的积分计算可以证明，这两种积分平均值是等价的)：

③ 极值定理

调和函数如果不是常数，那么它不能在内部取到极大值或极小值。

$\Delta u = 0$ ：描述一个稳定的状态. eg：温度场. 引力势场等.

类似加速度和为0. 稳态

$\nabla^2 u = 0$ 梯度场 → 无旋 $\nabla \times u = 0$ 无旋

$(u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$ $\nabla \cdot V = 0$ 无源场 不能

$\nabla \cdot V = 0$ $\nabla \times V = 0$ 调和场

调和场的势函数为调和函数

即 $\nabla u = V$

https://www.sohu.com/a/387112575_348129

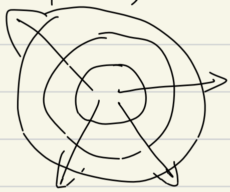
https://wenku.baidu.com/view/e524df94aa00b52acec7ca3a.html

https://zhuanlan.zhihu.com/p/54548572

感慨——场论太重要了.

共轭调和函数的几何意义

∇u 和 ∇v 正交，即两对梯度场正交



https://www.zhihu.com/column/c_1187367236074909696

此人所写极好，图文均好看（kè）

欢迎来看

初等函数

① 全纯函数 ：开集U上处处可微

$exp(x)$　$Ln(x)$　→ $\sin x$ $\cos x$

$p(z)$（多项式）

因为复微分是线性的，并且服从积、商、链式法则，所以全纯函数的和、积和复合是全纯的，而两个全纯函数的商在所有分母非 的地方全纯。

每个全纯函数在每一点无穷可微。它和它自己的泰勒级数相等，而泰勒级数在每个完全位于定义域 内的开圆盘上收敛。泰勒级数也可能在一个更大的圆盘上收敛；例如，对数的泰勒级数在每个不包含0的圆盘上收敛，甚至在复实轴的附近也是如此。证明请参看全纯函数解析。

全纯函数满足Cauchy-Riemann方组，该方程组含有两个偏微分方程，也可以用复偏导算子写成一个。

在非 导数的点的附近，全纯函数是共形的 (或保角的，实际上就是相似在局部的推广)。因为它保持了图形的局部角度和形状 (但尺寸可能改变)。

Cauchy 积分公式表明每个全纯函数在圆盘内的值由它在盘边界上的取值所完全决定。

② $e^z = exp(z) = e^x(\cos y + \sin y\, i)$

$e^z \neq 0$

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$2k\pi i$ 为周期

→ ∞ 没有极限 ⇒ 本性奇点

③ $Ln z$　e^z反函数，多值函数　$\ln z$为主值

$\ln z = \ln|z| + i \arg z$

$Ln z = \ln z + 2k\pi i$　　$Ln z^n \neq n Ln z$

$Ln(z_1 z_2) = Ln z_1 + Ln z_2$　　$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{1}{z}$

$Ln \frac{z_1}{z_2} = Ln z_1 - Ln z_2$

③ 幂函数 z^{α} 多分支 多值.

④ 三角函数

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

① 单值函数
② 2π 周期
③ $\cos z$ 偶 $\sin z$ 奇
④ $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \cdots$
⑤ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

只是 $|\sin z| \le 1$ $|\cos z| \le 1$ 不成立
$\sin^2 z$ $\cos^2 z$ 可 <0

⑥ 解析

⑤ 反三角

⑥ 双曲函数
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$
$$\sinh z = -i \sin iz \quad \cosh z = \cos iz$$

一个重要公式

例 3.2 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中 n 为任意整数，C 为以 z_0 为中心，r 为半径的圆周.

解 C 的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

由(3.4)式得

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta d\theta + \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)\theta d\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

此例的结果很重要，以后经常要用到. 以上结果与积分路径圆周的中心和半径无关，应记住这一特点.

关于复变函数积分的一些理解

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

[公式]

积分的实部是向量场沿 [公式] 的环量，虚部是向量场沿 [公式] 的通量（二维通量，可视为柱形三维通量的投影）！

$$\int_L f(z)dz = \int_L (Pdx + Qdy) + i\int_L (-Qdx + Pdy) = \Gamma + i\Phi$$

环流通量都为0，则调和

https://zhuanlan.zhihu.com/p/74716952

有关柯西积分公式

https://www.zhihu.com/column/c_1196023055833497600

定理 3.7 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D\cup C$ 上连续，z_0 是 D 内任一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \quad i\,d\theta. \tag{3.10}$$

$f(z)$所有值越来越趋近于$f(z_0)$

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z-2\pi \mathrm{i}\,f(z_0)\right|<2\pi\varepsilon,$$

即(3.10)式成立.

公式(3.10)称为柯西积分公式. 这个公式说明：如果一个函数在简单闭曲线 C 的内部解析，在 C 上连续，则函数在 C 内部的值完全可由 C 上的值而定. 它不仅提供了计算某些复变函数沿简单闭曲线积分的一种方法，而且可以帮助我们研究解析函数的许多重要性质.

一些思考

一个$\boxed{\text{点的值}}$可以用$\boxed{\text{其它点的通量}}$来思考

$\downarrow$

类似 $\nabla\cdot f(x)$ 是通量.

求导与积分线性，次序可换，反复求导.

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

幂级数的收敛半径为何存在

定理 4.5 若幂级数(4.3)在点 $z_1(z_1\neq z_0)$收敛，则级数(4.3)在圆域 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内绝对收敛.

证 设 z 为圆域 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内任一点(图 4.1(a)).

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z_1-z_0)^n$$

收敛，由定理4.3

$$\lim_{n\to\infty} C_n(z_1-z_0)^n=0.$$

因此，存在一个常数 $M>0$，对于任意非负整数 n 均有

$$|C_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M.$$

于是

$$|C_n(z-z_0)^n|=|C_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\leqslant M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n,$$

而当 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 时，$\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|<1$，因而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\right)$$

收敛. 再根据正项级数比较判别法，即知

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n(z-z_0)^n|$$

收敛，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

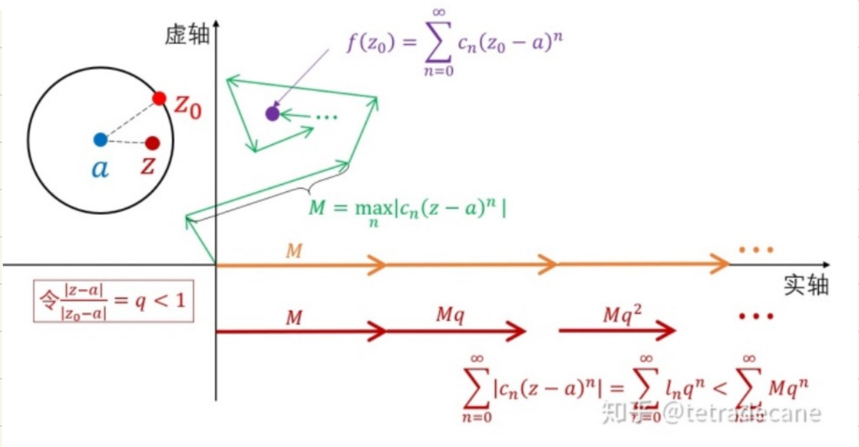
绝对收敛. 由于 z 在圆域 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内的任意性，故定理得证.

（1）幂级数的和 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 在收敛圆的内部是一个解析函数.

（2）在收敛圆的内部，幂级数的和 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 可以逐项求导及逐项积分任意次.

（1）比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lambda$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

（2）根值法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lambda$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.



https://www.zhihu.com/column/c_1196023055833497600

理解为何解析（或者说奇点？）可以是它的收敛域

意会，没能描述的很清楚

如果 $f(z)$ 解析，满足高阶导数公式，有 $c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$，把它代回泰勒级数，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta$$

这里面有个等比级数，当 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ 的时候，等比级数收敛，有

$$\text{上式} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

我可以让路径 C 在 $f(z)$ 解析的范围内尽可能地大，那么 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ 的范围也就尽可能地大。当 $f(z)$ 在一个圆域内解析时， C 可以任意靠近这个圆的边界， z 也可以任意靠近这个圆的边界，如下图所示:

常用泰勒展开

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

一个思考：由于 $f(x) = \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{关于x的函数}}$　　$f'(x) = \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{关于x的函数}}$

计 → 解析.

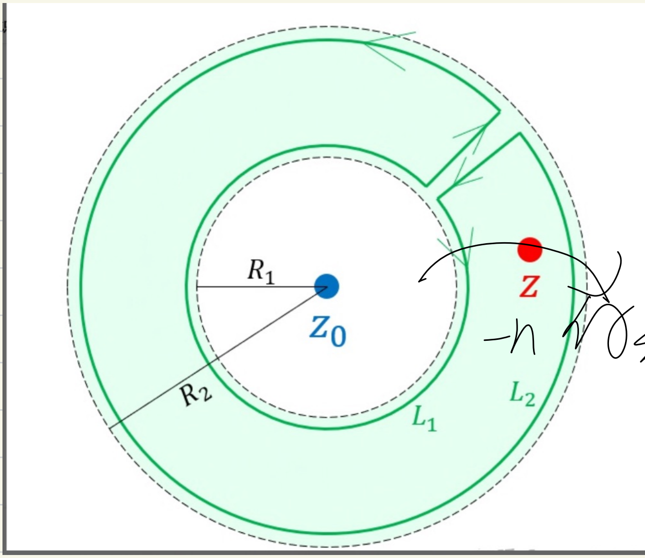
一般可以直接换x为z.

积分同理

洛朗级数的理解

复变 最强级数展开

人为制造闭环



$-n$ 的来源

我好像之前这里概念理解错了

(1) 在(5.4)式中,如果当 $n=1,2,3,\cdots$ 时,$C_n=0$,那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 在(5.4)式中,如果只有有限个(至少一个)整数 $n>0$,使得 $C_n\neq0$,那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的**极点**. 设对于正整数 m,$C_m\neq0$;而当 $n>m$ 时,$C_n=0$,那么 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m **阶极点**.

(3) 在(5.4)式中,如果有无穷个整数 $n>0$,使得 $C_n\neq0$,那么 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的**本性奇点**.

与有限点的情形相反,无穷远点作为函数的孤立奇点时,它的分类是以函数在无穷远点邻域的洛朗展开中正次幂的系数取零值的多少作为依据的.

无穷远 留数是 C_{-1}

不是 C_1

故 $\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

极点与零点想法

m阶极点 $\longrightarrow$ 阶无穷大

m阶零点 $\longrightarrow$ m阶无穷小

由于性质同.

等价无穷小/大 仍可用.

本质上，求系数，化极点为可去奇点 $f(z)$ m阶

$g(z)=(z-z_0)^m f(z)$ 是可去奇点.

$f(z)$ C_{-1} 是 $g(z)$ C_{m-1}

$C_{m-1}=\dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ why? $\longrightarrow$ for $g(z)=0+\bigcirc(z-z_0)+\bigcirc\cdots$

$\downarrow$

求导消去.

$=\lim\limits_{z\to z_0}\left[\dfrac{(z-z_0)^m f(z)}{(m-1)!}\right]^{(m-1)}$

(给可去奇点一个定义)

围道积分方法

还没学完 复习到此.

变换：

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C f(z(\theta))\,z'(\theta)\,d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$Q(z)$ 比 $P(z)$ 高两次

$Q(z)$ 实轴内无0点