大学数学学习辅导丛书

复变函数与积分变换

学习辅导与习题选解

苏变萍　王一平　编

高等教育出版社

内容提要

本书内容分为第一篇、第二篇、知识点滴三部分。第一篇为复变函数，共六章，主要内容是：复变函数、导数、积分、级数、留数、保形映照。第二篇为积分变换，共两章，主要内容是：傅里叶变换、拉普拉斯变换。第一、二篇各章均包括五部分：本章的内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、典型例题及习题选解。知识点滴部分包括三个方面的内容：人物介绍，学科介绍和数学软件介绍。

本书可作为高等院校相关专业的学生及自学人员学习《复变函数与积分变换》的课外辅导书，也可作为教师讲授《复变函数与积分变换》课程的教学参考书，以及科技工作者科研、撰写论文的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换学习辅导与习题选解/苏变萍，王一平编．—北京：高等教育出版社，2003.12
ISBN 7－04－012962－0

Ⅰ．复…　Ⅱ．①苏…②王…　Ⅲ．①复变函数—高等学校—自学参考资料②积分变换—高等学校—自学参考资料　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 090439 号

策划编辑　张忠月　责任编辑　薛春玲　封面设计　张　楠　责任绘图　尹　莉
版式设计　马静如　责任校对　尤　静　责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	12.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	220 000	定　　价	13.40 元

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇　积 分 变 换

前　　言

本书是为配合教育科学“十五”国家规划课题研究成果《复变函数与积分变换》教材的使用而编写的辅导书。本书的主要特点是：

1. 系统地总结了《复变函数与积分变换》教材各部分的内容，指明了各部分内容学习的要求重点和难点。使学习者对自己应该学什么，怎么学，学到怎样的深度有了一个清晰的概念。

2. 在编写的过程中立足于读者，整理、归纳、释疑解难了近几年教学中学生及自学人员经常产生困惑的疑难点及典型例题。

3. 查阅了大量中外相关资料，分析、整理、挑选了约 260 道覆盖了各种题型的题目，按基本题目、逻辑与推理型题目、扩展思维及精彩题目构成，并对各类题目进行了详细的解答。

总之，鉴于目前人们学习工作的高效率、快节奏，这本书将为《复变函数与积分变换》的学习提供帮助。

本书在书的编写过程中得到了学校、理学院、数学教研室和广大同仁的大力支持和帮助，谨在此一并致以深切的谢意。同时，由于作者水平有限，不妥之处还望读者批评指正。

作　者

2003 年 9 月

第一篇　复 变 函 数

第 1 章　复数与复变函数

1.1　内容要点

1. 复数的各种表示法

代数表示法：$z=x+\mathrm{i}y$.

三角表示法：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

指数表示法：$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. 复数的代数运算及几何意义

复数的加减法：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$.

复数的乘法：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.

复数的除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\qquad(z_2\neq0)$.

定理 1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理 2　两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角差.

3. 扩充复平面、平面点集

4. 复变函数的概念及其几何意义

定义 1　设 D 是一个给定的复数集，如果有一法则 f，对于每一个数 $z\in D$，总有确定的复数 w 和它对应．则称 f 是 D 上确定的复变数函数（简称复变函数），记作 $w=f(z)$．数集 D 叫做这个函数的定义域.

5. 初等函数的定义及性质

1.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

牢固掌握复数的各种表示方法及其运算，了解区域的概念，理解复变函数的概念，了解指数函数、对数函数、幂函数和三角函数的定义及它们的主要性质.

重点：复数的运算，复变函数的概念.

难点：初等函数中的多值函数的理解.

2. 学习注意点

(1) 下面的证明过程错在何处？

题目：证明　若 $z_1z_2z_3=0$，则 z_1, z_2, z_3 中至少有一个为零.

证：设 $z_k=r_ke^{i\theta_k}\quad(k=1,2,3)$，则

$$z_1z_2z_3=r_1r_2r_3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=0.$$

$\therefore\quad r_1, r_2, r_3$ 中至少有一个为零，

$\therefore\quad z_1, z_2, z_3$ 中至少有一个为零.

答：证明过程的设是错误的，当 $z=0$ 时，z 不具有指数表达式. 正确的证明为：

若 $z_3\neq0$，则 $z_1z_2=z_1z_2\left(z_3\cdot\dfrac{1}{z_3}\right)=0$，

若 $z_2\neq0$，则 $z_1=z_1\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=0$，

故　z_1, z_2, z_3 中至少有一个为 0.

(2) 下面的解题过程错在何处？

题目：求 $8^{\frac{1}{6}}$的全部单根.

解：$8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2}=e^{\frac{1}{2}(\ln2+i\cdot2k\pi)}=e^{\ln2^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{k\pi i}=\pm\sqrt{2}$.

答：此解题过程在第二步到第三步的推导时出错了，正确的是：

在复数范围内

$$(2^3)^{\frac{1}{6}}=(2^3e^{2k\pi i})^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}e^{\frac{k\pi}{3}i}\quad(k=0,1,2).$$

在实数范围内

$$(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 下面的解题过程错在何处？

题目：设 $z_1=-1+\sqrt{3}i$，$z_2=-1+i$. 求 $\arg z_1z_2$.

解：
$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}z_1z_2&=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\\&=\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{4}\pi+2k\pi\\&=\frac{17}{12}\pi+2k\pi,\end{aligned}$$

$\therefore\quad \arg z_1z_2=\dfrac{17}{12}\pi.$

答：∵　$-\pi<\arg z_1z_2\leqslant\pi$，

∴　$\arg z_1z_2=\frac{17}{12}\pi$ 是错误的．

正确答案：由 $\mathrm{Arg}z_1z_2=-\frac{7}{12}\pi+2k\pi$，得

$$\arg z_1z_2=-\frac{7}{12}\pi.$$

(4) 证明：(a) $\mathrm{Ln}(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\mathrm{i}=\frac{1}{2}\mathrm{Lni}$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(b) $\mathrm{Lni}^2\neq2\mathrm{Lni}$.

证：(a) ∵　$\mathrm{Ln}(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})=\mathrm{i}\arg(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})+2k\pi\mathrm{i}$

$$=\begin{cases}\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i},\\ \left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{i}\end{cases}$$

$$=\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Lni}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\mathrm{i}=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\mathrm{i},$$

∴　$\mathrm{Ln}(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\mathrm{Lni}$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(b) ∵　$\mathrm{Lni}^2=\mathrm{Ln}(-1)=(2k+1)\pi\mathrm{i}$,

$2\mathrm{Lni}=2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\mathrm{i}=(4k+1)\pi\mathrm{i}$,

∴　$\mathrm{Lni}^2\neq2\mathrm{Lni}$.

1.3　释疑解难

1．复方程 $az^2+bz+c=0$ $(a\neq0)$ 的求根公式 $z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中 b^2-4ac 为什么要求不等于 0.

答：因为关于复数方根 $w=z^{\frac{1}{n}}$ (即 $w^n=z$) 的定义中要求 $w\neq0$，若 $z=0$ 必有 $w=0$. 而 $\sqrt{b^2-4ac}$ 为复数方根的形式，因此公式中 $b^2-4ac\neq0$.

事实上，因为

$$az^2+bz+c=0,$$

所以

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$$

若 $b^2-4ac=0$，　则

$$z=-\frac{b}{2a}.$$

2. 证明：(a) 若 $\ln z=\ln r+i\theta\left(r>0,\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{9}{4}\pi\right)$，那么

$$\ln i^2=2\ln i;$$

(b) 若 $\ln z=\ln r+i\theta\left(r>0,\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{11}{4}\pi\right)$，那么

$$\ln i^2\neq 2\ln i.$$

证：(a) $\because\quad \ln i^2=\ln(-1)=\pi i,\quad 2\ln i=2\left(\ln|i|+\frac{\pi}{2}i\right)=\pi i;$

$\therefore\quad \ln i^2=2\ln i.$

(b) $\because\quad \ln i^2=\ln(-1)=\pi i,\quad 2\ln i=2\left(\ln|i|+\frac{10}{4}\pi i\right)=5\pi i;$

$\therefore\quad \ln i^2\neq 2\ln i.$

由(a)、(b)可知，辐角主值的定义范围可由复平面上原点引出的任一条射线为起始边、终边来划分，随之相关的性质也可能发生变化.

3. 证明：对任何非零复数 z_1 和 z_2

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi i\quad(k=0,\pm1).$$

证：因为当 $\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时，

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi i\quad(k=0).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)>0$ 或 $\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时，

$$\arg(z_1z_2)=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & |\arg z_1+\arg z_2|\leqslant\pi,\\ \arg z_1+\arg z_2\pm2\pi, & |\arg z_1+\arg z_2|>\pi.\end{cases}$$

$$\ln|z_1z_2|=\ln|z_1|+\ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi i\quad(k=0,\pm1).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)<0$ 且 $\mathrm{Re}(z_2)<0$ 时，

$$\arg(z_1z_2)=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & |\arg z_1+\arg z_2|\leqslant\pi,\\ \arg z_1+\arg z_2\pm2\pi, & |\arg z_1+\arg z_2|>\pi.\end{cases}$$

$$\ln|z_1z_2|=\ln|z_1|+\ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi i\quad(k=0,\pm1).$$

综上所述，对任何非零复数 z_1 和 z_2 都有

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2+2k\pi i\quad(k=0,\pm1).$$

4. 求证：三个复数 z_1,z_2,z_3 成为等边三角形顶点的必要与充分条件是：

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

证：三角形 $z_1z_2z_3$ 是等边三角形的必要与充分条件为：向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 绕 z_1 旋转

$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$得向量$\overrightarrow{z_1 z_3}$，即 $z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$或

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad\Rightarrow\quad \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

两边平方化简得结论.

1.4 典型例题

例 1 将复数$\frac{2i}{-1+i}$化为三角表示式和指数表示式.

解：∵ $\frac{2i}{-1+i}=1-i, |1-i|=\sqrt{2}, \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$,

∴ $\frac{2i}{-1+i}$的三角表示式为：$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,

$\frac{2i}{-1+i}$的指数表示式为：$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

例 2 若$(1+i)^n=(1-i)^n$，试求 n 的值.

解：由$(1+i)^n=(1-i)^n$ 可得：

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}\right),$$

即

$$\sin\frac{n\pi}{4}=\sin\frac{-n\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{n\pi}{4}=-\frac{n\pi}{4}+2k\pi.$$

则得 $$n=4k \quad (k\text{ 为整数}).$$

例 3 判断 $\mathrm{Im}(z)=1$ 是否为区域？

答：点集$\{z\,|\,\mathrm{Im}(z)=1\}$不是区域.因为此点集的每一个点都不是内点，依照区域的定义知其不是区域.

例 4 判断 $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ 是开区域还是闭区域，有界否？

答：依平面点集部分有关开区域、闭区域、有界集和无界集的概念，$\mathrm{Im}(z)>0$为无界的开区域，$\mathrm{Im}(z)=0$ 为 $\mathrm{Im}(z)>0$ 的边界，故 $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ 为无界的闭区域.

例 5 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 的根，那么 $a-ib$ 也是它的根.

证：因为

$$\begin{aligned}
&a_0(\bar{z})^n+a_1(\bar{z})^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\bar{z}+a_n\\
&=a_0\overline{(z^n)}+a_1\overline{(z^{n-1})}+\cdots+a_{n-1}\bar{z}+a_n\\
&=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\overline{a_n}\\
&=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\
&=0,
\end{aligned}$$

所以，若 $z=a+ib$ 为上述方程的根，则其共轭复数 $\bar{z}=a-ib$ 也为方程的根.

例 6　为什么在复数范围内 $|\cos z|\leqslant 1$，$|\sin z|\leqslant 1$ 未必总成立？

答：设 $z=x+iy$，则

$$\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y,$$

$$\begin{aligned}|\cos z|&=\sqrt{(\cos x\operatorname{ch}y)^2+(\sin x\operatorname{sh}y)^2}\\&=\sqrt{(1+\operatorname{sh}^2y)\cos^2x+\sin^2x\operatorname{sh}^2y}\\&=\sqrt{\cos^2x+\operatorname{sh}^2y}.\end{aligned}$$

当 $\operatorname{sh}y>1$ 时，有 $|\cos z|>1$；当 $y\to\infty$ 时，$|\cos z|\to\infty$. 所以，$|\cos z|\leqslant 1$ 未必总成立. 同理 $|\sin z|\leqslant 1$ 也未必总成立.

例 7　证明：若 z 在圆周 $|z|=2$ 上，那么 $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

证：$\because\quad |z^4-4z^2+3|\geqslant\Big||z^4-4z^2|-3\Big|\geqslant\Big||z^4|-|4z^2|-3\Big|=3,$

$$\therefore\quad\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

例 8　求 $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$ 的所有的根、单根，并说明几何意义.

解：所有的方根：$(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}=(2e^{\frac{3}{4}\pi i+2k\pi i})^{\frac{1}{3}}$

$$=\sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi i}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

单根：$\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt[3]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$，$\sqrt[3]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

几何意义：半径为 $\sqrt[3]{2}$ 的圆内接等边三角形的三个顶点.

1.5　习题选解

1.1.4　证明：(a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}\quad(z_1\neq0,\ z_2\neq0)$；

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}\quad(z_3\neq0,\ z_4\neq0)$.

证：$\because\quad\dfrac{zz_1}{zz_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$，$z\cdot\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{z}{z_1}$，

$\therefore\quad$ (a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1z_2}\cdot\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=\dfrac{z_2}{z_1z_2}\cdot\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}$；

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=(z_1z_2)\left(\dfrac{1}{z_3}\cdot\dfrac{1}{z_4}\right)=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}$.

1.1.5　证明：$(z_1+z_2)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kz_1^{n-k}z_2^k$，其中 z_1,z_2 为任意的复数，n 为正整数.

证：当 $n=1$ 时，等式显然成立.

设 $n=m$ 时，$(z_1+z_2)^m=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^k$ 成立，则

当 $n=m+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)^{m+1} &= (z_1+z_2)\sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m+1-k}z_2^k+\sum_{k=0}^{m}C_m^k z_1^{m-k}z_2^{k+1} \\
&= z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_m^{k+1}z_1^{m-k}z_2^{k+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_m^k z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}(C_m^{k+1}+C_m^k)z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}C_{m+1}^{k+1}z_1^{m-k}z_2^{k+1}+z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1}+\sum_{k'=1}^{m-1}C_{m+1}^{k'}z_1^{m+1-k'}z_2^{k'}+z_2^{m+1} \\
&= \sum_{k'=0}^{m+1}C_{m+1}^{k'}z_1^{m+1-k'}z_2^{k'}.
\end{aligned}
$$

故结论成立.

1.1.7　证明：(a) $\overline{\bar{z}+3i}=z-3i$;　(b) $\overline{iz}=-i\bar{z}$;　(c) $\overline{(2+i)^2}=3-4i$;

(d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|=\sqrt{3}|2z+5|$.

证：(a) $\overline{\bar{z}+3i}=\overline{\bar{z}}+\overline{3i}=z-3i$;

(b) $\overline{iz}=\bar{i}\cdot\bar{z}=-i\bar{z}$;

(c) $\overline{(2+i)^2}=(\overline{2+i})^2=(2-i)^2=3-4i$;

(d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|=|\sqrt{2}-i||2\bar{z}+5|=\sqrt{3}|\overline{2z+5}|=\sqrt{3}|2z+5|$.

1.1.8　应用数学归纳法证明：当 $n=2,3,\cdots$ 时，

(a) $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$;　　(b) $\overline{z_1z_2\cdots z_n}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_n}$.

证：(a) $\because\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

设 $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_m}$，而

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m+z_{m+1}} &= \overline{z_1+z_2+\cdots+z_m}+\overline{z_{m+1}} \\
&= \overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_m}+\overline{z_{m+1}}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$　结论成立.

(b) $\because\ \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

设 $\overline{z_1z_2\cdots z_m}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_m}$，而

$$
\overline{z_1z_2\cdots z_m\cdot z_{m+1}}=\overline{z_1z_2\cdots z_m}\cdot\overline{z_{m+1}}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\cdots\overline{z_m}\cdot\overline{z_{m+1}}.
$$

∴ 结论成立.

1.1.9 证明：$\sqrt{2}|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

证：∵ $x^2+y^2 \geqslant 2|x||y|$,

∴ $2(x^2+y^2) \geqslant x^2+2|x||y|+y^2$,

∴ $2|z|^2 \geqslant (|x|+|y|)^2$,

∴ $\sqrt{2}|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

1.1.10 证明：当 z_2, z_3 为非零复数时，

(a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;　　(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

证：(a) ∵ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{1}{z_2}\cdot z_1\right| = \left|\dfrac{1}{z_2}\right|\cdot |z_1|$,

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\right| = \left|\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2^2+y_2^2}\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2} = \frac{1}{|z_2|},$$

∴ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2 z_3|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

1.1.11 证明：当 $|z_3| \neq |z_4|$ 时，不等式 $\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leqslant \dfrac{|z_1|+|z_2|}{\big||z_3|-|z_4|\big|}$ 成立.

证：$\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| = \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_3+z_4|} \leqslant \dfrac{|z_1|+|z_2|}{\big||z_3|-|z_4|\big|}$.

1.1.12 证明：当 $|z|<1$ 时，$\left|\mathrm{Im}(1-\bar{z}+z^2)\right|<3$.

证：$\left|\mathrm{Im}(1-\bar{z}+z^2)\right| = \left|\mathrm{Im}(1-x+\mathrm{i}y+x^2-y^2+2xy\mathrm{i})\right|$

$= |y+2xy| \leqslant |y|+2|x||y| \leqslant 3 \quad (|z|<1)$.

1.1.15 证明：以 z_0 为中心，R 为半径的圆的方程 $|z-z_0|=R$ 可以写成：

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2.$$

证：∵ $|z-z_0|^2 = (z-z_0)(\overline{z-z_0}) = (z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$

$= z\bar{z}-z_0\bar{z}-z\bar{z}_0+z_0\bar{z}_0$

$= |z|^2-(\overline{\bar{z}_0 z}+z\bar{z}_0)+|z_0|^2$

$= |z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2$,

∴ 以 z_0 为心，R 为半径的圆的方程可以写为：

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2.$$

1.1.16 证明：双曲线 $x^2-y^2=1$ 可以写成 $z^2+\bar{z}^2=2$.

证：∵ $x^2-y^2=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$=\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}+z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{4}$$

$$=\frac{z^2+\bar{z}^2}{2},$$

∴ 双曲线 $x^2-y^2=1$ 可以写为：$z^2+\bar{z}^2=2$.

1.1.18 就以下各种情况，分别求 $\arg z$.

(a) $z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$; (b) $z=\frac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$; (c) $z=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6$.

解：(a) $z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

∴ $\arg z=\frac{2\pi}{3}$;

(b) $z=\frac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{i}$,

∴ $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$;

(c) $z=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6=2^6\mathrm{e}^{6\left(-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)}$,

∴ $\arg z=\pi$.

1.1.19 利用复数的三角表达式或指数表达式证明：

(a) $(-1+\mathrm{i})^7=-8(1+\mathrm{i})$; (b) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-10}=2^{-11}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

证：(a) $(-1+\mathrm{i})^7=\sqrt{2}^7\mathrm{e}^{7\left(\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)}=\sqrt{2}^7\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$

$$=-8(1+\mathrm{i});$$

(b) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-10}=2^{-10}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)(-10)}=2^{-10}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$

$$=2^{-11}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

1.1.20 证明：(a) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=1$; (b) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$;

(c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_n)}$ $(n=2,3,\cdots)$.

证：(a) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=1$;

(b) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$;

(c) ∵ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.

设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n-1}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})}$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n-1}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_n)},$$

∴ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_n)}$ $(n=2,3,\cdots)$.

1.1.21　当 $z_1\neq 0$ 时，求 $\operatorname{Arg}z$.

(a) $z=z_1^n\quad(n=1,2,\cdots)$；　　(b) $z=z_1^{-1}$.

解：(a) $\because\quad z=z_1^n=(r_1e^{i\theta_1})^n=r_1^n e^{in\theta_1}$，

$\therefore\quad \operatorname{Arg}z=n\operatorname{Arg}z_1$；

(b) $\because\quad z=z_1^{-1}=(r_1e^{i\theta_1})^{-1}=r_1^{-1}e^{-i\theta_1}$，

$\therefore\quad \operatorname{Arg}z=-\operatorname{Arg}z_1$.

1.1.22　证明：若 $\operatorname{Re}(z_1)>0$，$\operatorname{Re}(z_2)>0$，那么 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

证：$\because\quad \operatorname{Re}(z_1)>0,\quad \operatorname{Re}(z_2)>0$，

$\therefore\quad -\dfrac{\pi}{2}<\arg z_1<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z_2<\dfrac{\pi}{2}$，

$-\pi<\arg z_1+\arg z_2<\pi$，

$\therefore\quad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

1.1.23　若 $z_1z_2\neq 0$，证明：$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|$ 当且仅当

$$\theta_1-\theta_2=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

这里 $\theta_1=\operatorname{Arg}z_1$，$\theta_2=\operatorname{Arg}z_2$.

证：设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=\operatorname{Re}\left(r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right)=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2),$$

$$|z_1||z_2|=r_1r_2,$$

$\therefore$　当 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|$ 时，

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=1,$$

即

$$\theta_1-\theta_2=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

反之，当 $\theta_1-\theta_2=2k\pi$ 时，

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1||z_2|.$$

$\therefore$　结论成立.

1.2.1　求下面各复数的所有的方根、单根，并说明几何意义.

(a) $(2i)^{\frac{1}{2}}$；　(b) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$；　(c) $(-1)^{\frac{1}{3}}$；

(d) $(-16)^{\frac{1}{4}}$；　(e) $8^{\frac{1}{6}}$；　(f) $(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$.

解：(a) 所有的方根：$(2i)^{\frac{1}{2}}=\left(2e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}e^{\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆的直径的两端点.

(b) 所有的方根：$(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{-\frac{\pi}{3}i+2k\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}e^{\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{6}i},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆的直径的两端点.

(c) 所有的方根：$(-1)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}(\pi i+2k\pi i)}$

$$=e^{\frac{1}{3}(2k+1)\pi i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$e^{\frac{\pi}{3}i},e^{\pi i},e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

几何意义：单位圆内接等边三角形的三个顶点.

(d) 所有的方根：$(-16)^{\frac{1}{4}}=2e^{\frac{1}{4}(\pi i+2k\pi i)}$

$$=2e^{\frac{1}{4}(2k+1)\pi i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$2e^{\frac{\pi}{4}i},2e^{\frac{3\pi}{4}i},2e^{\frac{5\pi}{4}i},2e^{\frac{7\pi}{4}i}$.

几何意义：半径为 2 的圆内接正四边形的四个顶点.

(e) 所有的方根：$8^{\frac{1}{6}}=(8e^{2k\pi i})^{\frac{1}{6}}$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{k\pi}{3}i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2},\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\pi i},\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆内接正六边形的六个顶点.

(f) 所有的方根：$(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}=2e^{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi i+2k\pi i\right)}$

$$=2e^{\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$2e^{\frac{\pi}{4}i},2e^{\frac{11\pi}{12}i},2e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

几何意义：半径为 2 的圆内接等边三角形的三个顶点.

1.2.2 (a) 令 a 为实数，证明：$a+i$ 的二次方根为 $\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}$，这里 $A=\sqrt{a^2+1}$且 $\alpha=\arg(a+i)$.

(b) 由(a)及

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2},\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

证明：$\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}\right)$.

证：(a) $\because\quad (a+i)^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{a^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\alpha i+2k\pi i}{2}}=\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}$,

$\left(A=\sqrt{a^2+1},\alpha=\arg(a+i)\right)$,

$\therefore$ 结论成立.

(b) $\because\quad \pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}=\pm\sqrt{A}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right),\quad \cos\alpha=\frac{a}{A}$,

$$\therefore \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{A+a}{2A}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{A-a}{2A}},$$

$$\therefore \quad \pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}).$$

1.2.3 (a) 证明：二次方程 $az^2+bz+c=0(a\neq 0)$ 当 a, b, c 为复常数时的求根公式是

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

这里 $b^2-4ac\neq 0$.

(b) 试用(a)的结果求方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根.

证：(a) $\because \quad az^2+bz+c=0,$

$$\therefore \quad 4a^2z^2+4abz+4ac=0,$$

$$\therefore \quad (2az+b)^2=b^2-4ac,$$

$$\therefore \quad z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (b^2-4ac\neq 0).$$

(b) 方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根为

$$z=\frac{-2+\sqrt{4-4(1-i)}}{2}=-1+\sqrt{i}=-1+e^{\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i} \quad (k=0,1).$$

1.2.4 设 z 为非零复数，$m=-n$(n 为负整数)，利用 $z=re^{i\theta}$证明：

$$(z^m)^{-1}=(z^{-1})^m.$$

证：$(z^m)^{-1}=[(re^{i\theta})^m]^{-1}=[(re^{i\theta})^{-n}]^{-1}=\left(\frac{1}{r^ne^{in\theta}}\right)^{-1}=r^ne^{in\theta}$

$$=(re^{i\theta})^{-m}=\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)^m=(z^{-1})^m.$$

1.2.5 建立恒等式 $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z\neq 1)$，并导出

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad (0<\theta<2\pi).$$

提示：关于第一个等式可记 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$，并考虑 $S-zS$. 关于第二个等式可在第一个等式中令 $z=e^{i\theta}$.

证：设 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$，则

$$S-zS=1-z^{n+1},$$

即

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

若记 $z=e^{i\theta}$,则

$$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{[1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta](1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta},$$

$$\therefore\quad 1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{2-2\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta-\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2\cos n\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

1.3.2 画出以下各种情形相应的闭区域的草图.

(a) $-\pi<\arg z<\pi\quad(z\neq0)$; (b) $|\mathrm{Re}(z)|<|z|$;

(c) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\leqslant\frac{1}{2}$; (d) $\mathrm{Re}(z^2)>0$.

解:(a) 带截痕 $z=x\ (x\leqslant0)$ 的复平面(图 1.1.1); (b) 整个复平面(图 1.1.2);

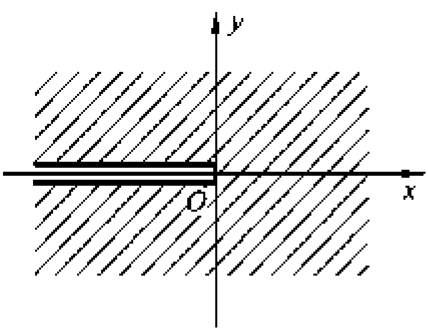

图 1.1.1

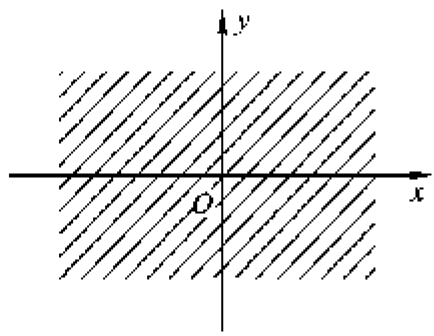

图 1.1.2

(c) $(x-1)^2+y^2\geqslant1$(图 1.1.3); (d) $|x|>|y|$(图 1.1.4);

1.3.3 设 S 为由 $|z|<1$ 和 $|z-2|<1$ 两点集构成的开集,请说明为什么 S 不是连通的.

解:因为从 $z=0$ 到 $z=2$ 的任何一条折线都不完全属于 S,由“连通”的定义知,S 不是连通的.

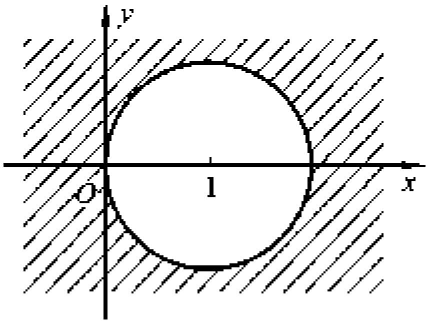

图 1.1.3

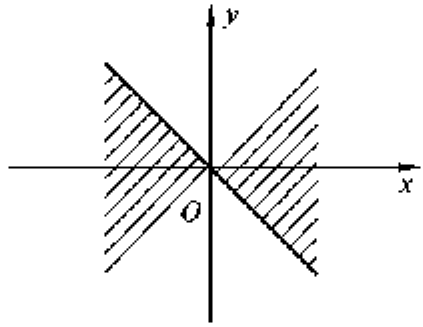

图 1.1.4

1.4.2　求函数 $g(z)=\frac{y}{x}+\frac{\mathrm{i}}{1-y}\ (z=x+\mathrm{i}y)$ 的定义域.并证明当 $x>0, |y|<1$ 时,

$$g(z)=f(z),$$

这里 $f(z)=y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}y^n$.

解:函数 $g(z)$ 的定义域为:$x\neq 0$ 且 $y\neq 1$.

$$\because\quad f(z)=y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}y^n=y\left.\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right|_0^{+\infty}+\mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\frac{1-y^n}{1-y}$$

$$=\frac{y}{x}+\frac{\mathrm{i}}{1-y}\quad(x>0, |y|<1),$$

$\therefore$　当 $x>0$ 且 $|y|<1$ 时,$f(z)=g(z)$.

1.4.3　写出函数 $f(z)=z^3+z+1$ 的 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 形式.

解:$f(z)=(x+\mathrm{i}y)^3+x+\mathrm{i}y+1$

$$=x^3-3xy^2+x+1+\mathrm{i}(y+3x^2y-y^3).$$

1.4.4　设 $f(z)=x^2-y^2-2y+\mathrm{i}(2x+2xy)$,写出 $f(z)$ 关于 z 的表达式.

解:$f(z)=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}+2x\mathrm{i}-2y=(x+\mathrm{i}y)^2+2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)$

$$=z^2+2\mathrm{i}z.$$

1.5.2　求 z 的值　(a) $\mathrm{e}^z=-2$;　(b) $\mathrm{e}^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(c) $\mathrm{e}^{2z-1}=1$.

解:(a) $\because\quad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=2\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}$,

$\therefore\quad x=\ln 2,\quad y=(2k+1)\pi$,

$\therefore\quad z=\ln 2+(2k+1)\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(b) $\because\quad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}$,

$\therefore\quad x=\ln 2,\quad y=\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi$,

$\therefore\quad z=\ln 2+\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(c) $\because\quad 2z-1=\mathrm{Ln}1=\ln 1+2k\pi\mathrm{i}$,

$\therefore \quad z=\dfrac{1}{2}+k\pi\mathrm{i} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

1.5.3 证明：$|e^{z^2}|\leqslant e^{|z|^2}$.

证：$\because \quad |e^{z^2}|=|e^{x^2-y^2+2xyi}|=e^{x^2-y^2}, \quad e^{|z|^2}=e^{x^2+y^2}$,

$\therefore \quad |e^{z^2}|\leqslant e^{|z|^2}$.

1.5.4 证明：$|e^{-2z}|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)>0$.

证：$\because \quad |e^{-2z}|=e^{-2x}$,

$\therefore$ 当 $\mathrm{Re}(z)=x>0$ 时，$|e^{-2z}|<1$.

反之，要想 $|e^{-2z}|<1$，需 $x=\mathrm{Re}(z)>0$.

$\therefore \quad |e^{-2z}|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)>0$.

1.5.5 证明：(a) $e^{\bar z}=\overline{e^{z}}$;

(b) $e^{i\bar z}=\overline{e^{iz}}$ 当且仅当 $z=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

证：(a) $e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^{x}(\cos y-i\sin y)=\overline{e^{x}(\cos y+i\sin y)}=\overline{e^{z}}$.

(b) $\because \quad e^{i\bar z}=\overline{e^{iz}}, \quad e^{i\bar z}=\overline{e^{-iz}}$,

$\therefore \quad -z=z+2k\pi$,

$\therefore \quad z=k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

反之，当 $z=k\pi$ 时.

$e^{i\bar z}=e^{k\pi i}=(-1)^k$,

$\overline{e^{iz}}=\overline{e^{k\pi i}}=(-1)^k$,

$\therefore \quad e^{i\bar z}=\overline{e^{iz}}$,

$\therefore \quad e^{i\bar z}=\overline{e^{iz}}$ 当且仅当 $z=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

1.5.6 (a) 若 e^{z} 为纯虚数，z 有什么限制？

(b) 证明：若 e^{z} 为实数，则 $\mathrm{Im}(z)=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

证：(a) 当 $e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ 为纯虚数时，

$$\cos y=0,$$

$\therefore \quad \mathrm{Im}(z)=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(b) 设 $z=x+iy$，则当 $e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ 为实数时，

$$\sin y=0,$$

$\therefore \quad \mathrm{Im}(z)=k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

1.5.7 证明：(a) $\ln(1-i)=\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{\pi}{4}i$;

(b) $\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)=\ln2+2\left(k+\dfrac{1}{3}\right)\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

证：(a) $\ln(1-i)=\ln\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{4}i=\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{\pi}{4}i$;

(b) $\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln 2 + \frac{2}{3}\pi\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}$

$$= \ln 2 + 2\left(k+\frac{1}{3}\right)\pi\mathrm{i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

1.5.11 证明：若 $\mathrm{Re}(z_1)>0, \mathrm{Re}(z_2)>0$，那么

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

证：由 1.1.22 知 $\mathrm{Re}(z_1)>0, \mathrm{Re}(z_2)>0$ 时，

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$\because \quad \ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$，

$\therefore \quad \ln z_1 z_2 = \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\arg(z_1 z_2)$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}(\arg z_1 + \arg z_2)$$

$$= \ln z_1 + \ln z_2.$$

1.5.13 应用 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2$，证明：$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2$.

证：$\because \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$$= \ln|z_1| - \ln|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_2$$

$$= \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2,$$

$\therefore$ 结论成立.

1.5.14 证明：当 $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，

(a) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2}$； (b) $(-1)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2k+1}{n}\pi\mathrm{i}}$.

证：(a) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}+2n\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2}$；

(b) $(-1)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(-1)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(2k+1)\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2k+1}{n}\pi\mathrm{i}} \quad (n\neq 0, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.15 求值：(a) $(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}$； (b) $\left[\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\right]^{3\pi\mathrm{i}}$.

解：(a) $(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{(\pi-8k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ln 2}$；

(b) $\left[\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\right]^{3\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)}$

$$= -\mathrm{e}^{(2-6k)\pi^2}.$$

1.5.16 由 $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}$ 证明：$(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$.

证：$\because \quad (-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\left(\ln 2+\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+3k\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln 2}$

$$= \pm 2\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 等式成立.

1.5.17 证明：若 $z\neq 0$，α 为实数，那么 $|z^{\alpha}| = \mathrm{e}^{\alpha\ln|z|} = |z|^{\alpha}$.

证：$\because \quad z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})}$，

$\therefore \quad |z^{\alpha}| = e^{\alpha \ln|z|} = |z|^{\alpha}$.

1.5.18　令 c, d 和 $z\ (z \neq 0)$ 为复数，若所有的幂均取主值，证明：

(a) $\dfrac{1}{z^c} = z^{-c}$;　　　(b) $z^c z^d = z^{c+d}$.

证：(a) $\because \quad z^c \cdot z^{-c} = e^{c\mathrm{Ln}z} \cdot e^{-c\mathrm{Ln}z} = e^0 = 1$,

$$\therefore \quad \frac{1}{z^c} = z^{-c}.$$

(b) $z^c z^d = e^{c\mathrm{Ln}z} \cdot e^{d\mathrm{Ln}z} = e^{(c+d)\mathrm{Ln}z} = z^{c+d}$.

1.5.19　证明：$e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

证：$\because \quad$ 右边 $= \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\,\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz} =$ 左边，

$\therefore \quad$ 等式成立.

1.5.20　(f) 证明：$2\sin(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1$.

证：$\because \quad 2\sin(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2)$

$$= 2 \cdot \frac{e^{(z_1+z_2)i} - e^{-(z_1+z_2)i}}{2i} \cdot \frac{e^{(z_1-z_2)i} - e^{-(z_1-z_2)i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{2z_1 i} - e^{-2z_2 i} - e^{2z_2 i} + e^{-2z_1 i}}{-2}$$

$$= \cos 2z_2 - \cos 2z_1$$

$\therefore \quad$ 等式成立.

1.5.20 中的 (a) ~ (e)，(g) 可类似证之.

1.5.21　证明：$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$，并进而推出 $|\sin z| \geqslant |\sin x|$.

证：$\because \quad \sin z = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$,

$\therefore \quad |\sin z|^2 = (\sin x\,\mathrm{ch}\,y)^2 + (\cos x\,\mathrm{sh}\,y)^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$,

$\therefore \quad |\sin z| \geqslant |\sin x|$.

1.5.22　证明：$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\sin z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$;　$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\cos z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$.

证：由上题

$$\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = |\sin z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x,$$

$$\therefore \quad |\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\sin z| \leqslant \mathrm{ch}\,y.$$

同理　$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\cos z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$.

1.5.23　证明：$\cos z = 0$ 当且仅当 $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$，其中 k 为整数.

证：$\because \quad \cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - i\sin x\,\mathrm{sh}\,y = 0$,

$\therefore \quad \cos x = 0$ 且 $\mathrm{sh}\,y = 0$,

$\therefore \quad z = x + iy = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

以上过程可逆，故结论成立.

1.5.24　根据复数相等的概念解方程.

(a) $\sin z=\operatorname{ch}4$;　　(b) $\sin z=\sqrt{2}$;　　(c) $\cos z=2$.

解：(a) $\because\quad \sin z=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y=\operatorname{ch}4$,

$\therefore\quad x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad y=\pm 4$,或

$\sin x=\operatorname{ch}4,\quad y=0$ (无解,舍去).

$\therefore\quad z=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\pm 4\mathrm{i}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(b) $\because\quad \sin z=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y=\sqrt{2}$,

$\therefore\quad x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ y=-\ln(\sqrt{2}+1)$,或

$\sin x=\sqrt{2},\quad y=0$ (无解,舍去).

$\therefore\quad z=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1)\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(c) $\because\quad \cos z=\cos x\operatorname{ch}y-\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh}y=2$,

$\therefore\quad x=2k\pi,\quad y=-\ln(2+\sqrt{3})$,或

$\cos x=2,\ y=0$ (无解,舍去).

$\therefore\quad z=2k\pi-\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3})\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

1.5.27　证明：$\operatorname{sh}z=\operatorname{sh}x\cos y+\mathrm{i}\operatorname{ch}x\sin y$.

证：$\because$　右边 $=\dfrac{\sin \mathrm{i}x}{\mathrm{i}}\cos y+\mathrm{i}\cos\mathrm{i}x\sin y$

$=\mathrm{i}(\cos\mathrm{i}x\sin y-\sin\mathrm{i}x\cos y)$

$=\mathrm{i}\sin(y-\mathrm{i}x)=\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)$

$=\mathrm{i}\,\dfrac{e^{-\mathrm{i}^2z}-e^{\mathrm{i}^2z}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\operatorname{sh}z$,

$\therefore$　等式成立.

1.5.25,1.5.26,1.5.28 可类似证之.

1.5.29　推导公式：$\operatorname{Arth}z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

证：$\because\quad w=\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$,

$\therefore\quad e^{2z}=\dfrac{1+w}{1-w},\qquad z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+w}{1-w}$,

$\therefore\quad \operatorname{Arth}w=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+w}{1-w}$,

即

$$\operatorname{Arth}z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

1.5.30　计算：(a) $\operatorname{Arc}\tan(2\mathrm{i})$;　　(b) $\operatorname{Arc}\tan(1+\mathrm{i})$;

(c) $\operatorname{Arch}(-1)$; (d) $\operatorname{Arth}(0)$.

解：(a) $$\operatorname{Arc}\tan(2\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+2\mathrm{i}^2}{1-2\mathrm{i}^2}$$
$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\mathrm{i}}{2}\ln 3 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

(b) $$\operatorname{Arc}\tan(1+\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}$$
$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\ln 5$$
$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

(c) $$\operatorname{Arch}(-1) = \operatorname{Ln}\left[-1+\sqrt{(-1)^2-1}\right]$$
$$= (2k+1)\pi\mathrm{i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

(d) $$\operatorname{Arth}(0) = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+0}{1-0} = k\pi\mathrm{i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

第2章　导　　数

2.1　内容要点

1. 复变函数的极限和连续的概念

2. 复变函数导数的概念和运算法则

定义1　设 $f(z)$ 在包含 z_0 的某区域 D 内有定义，如果

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in D)}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，那么我们说函数 $f(z)$ 在 z_0 可导(或可微)，并称这个极限为函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处的导数，记为 $f'(z_0)$. 即

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in D)}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

若记 $z=z_0+\Delta z$，则得到 $f'(z_0)$ 的另一种表达式

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

定理1　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在定义域内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导的必要与充分条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且在该点满足柯西–黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. 解析函数的概念、函数解析的必要与充分条件

定义2　如果函数 $f(z)$ 不仅在 z_0 处可导，而且在 z_0 的某个邻域内的任一点可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内任一点解析，则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

定理2　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的必要与充分条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微，并且满足柯西–黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4. 解析函数与调和函数的关系，由解析函数的实部求其虚部和由虚部求其实部的方法

定理3　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，那么 $u(x,y)$

和 $v(x,y)$均为 D 内的调和函数.

由解析函数的实部(虚部)求其虚部(实部)的方法共有三种,见本章 2.4 的例 6.

5. 初等函数的解析性

2.2 教学要求和学习注意点

1. 教学要求

了解复变函数的极限和连续的概念.理解复变函数的导数及复变函数解析的概念,掌握复变函数解析的必要与充分条件.了解调和函数与解析函数的关系,掌握从解析函数的实(虚)部求其虚(实)部的方法,了解初等函数的解析性.

重点:解析函数的概念,函数解析的必要与充分条件,已知解析函数的实(虚)部求其表达式的方法,初等函数的解析性.

难点:函数解析的必要与充分条件的证明.

2. 学习注意点

(1) 下面题目的求解过程错在何处?

题目:计算 $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{iz^3-1}{z+i}$.

解:令 $z=iy$,则

$$\lim_{z\to i}\frac{iz^3-1}{z+i}=\lim_{y\to 1}\frac{i(iy)^3-1}{iy+i}=0.$$

答:复函数求极限时,$z\to z_0$ 表达的是在复平面上 z 以任何方式趋于 z_0,它与实平面上 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的含义一样.

(2) 下面的解答错在何处?

题目:求函数 $\ln(1+z)$的奇点.

解:此函数的奇点为 $z\leqslant -1$.

答:此解答错在"$z\leqslant -1$"这个表达式上.复数域上的数是不分大小的.正确的解答是:此函数的奇点为 $z=x\leqslant -1$.

(3) (洛必达法则)若 $f(z)$及 $g(z)$在点 z_0 解析,且 $f(z_0)=g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$,试证:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

证:$\because$ $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

$\therefore$ 结论成立.

注意点：在使用此运算法则时，要注意结论成立的条件，特别是 $f(z_0)=g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$ 的要求.

(4) 应用定理 2 判定函数解析时，需注意：

定理的条件缺一不可，仅有 $u(x,y), v(x,y)$ 可微或仅有柯西－黎曼方程成立都不能推出函数解析的结论.

例如：函数 $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，虽然 $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ 均可微，但不能由此推断 $f(z)$ 的解析性. 事实上，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(\Delta z+z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

此极限在 Δz 沿 $\Delta x=0$ 趋于 0 时值为 -1，在 Δz 沿 $\Delta y=0$ 趋于 0 时值为 1，故此极限不存在，即函数 $f(z)=\bar{z}$ 在整个复平面上不可导，不解析.

从定理方面来看，由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$，即柯西－黎曼方程是不成立的.

例如：证明函数 $f(z)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\ (z\neq 0), f(0)=0$ 在原点满足柯西－黎曼方程，但在原点不解析 $\left(\text{提示：对}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z}\text{沿不同方向求极限}\right)$.

证：∵ $u=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\quad v=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$，

故由二元函数偏导数的定义得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y-0}=-1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y-0}=1.$$

∴ 柯西－黎曼方程在原点成立.

而 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-0}{z-0}$ 当 z 沿 $y=0$ 趋于原点时的极限为 $1+\mathrm{i}$，沿 $y=x$ 趋于原点时的极限为 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$，故 $f(z)$ 在原点不可导，不解析.

此题说明在使用函数解析的判定定理 2 时，仅有柯西－黎曼方程成立是不够的，一定还要有 u, v 可微.

(5) 应用定理 1 判定函数不可导时，应注意下面所叙述的情况.

① 避免出现类似于如下解题过程的错误.

例如：讨论函数 $f(z)=x^2y+2\mathrm{i}y$ 的可导性.

解：∵ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$，

∴ 函数 $f(z)=x^2y+2\mathrm{i}y$ 在复平面上处处不可导.

答：此题的结论是对的，但结论成立的原因是错的. 因为：

首先，当 $xy=1$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$是成立的.

其次，由 $2xy=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$ 与 $x^2=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ 知柯西－黎曼方程的两部分不能同时成立，从而推出结论.

② 下面的解题推导过程是正确的.

例如：讨论函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 的可导性.

解：$\because$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$,

$\therefore$ $\quad$ 函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 在复平面上处处不可导.

答：此结论的推导过程是正确的，因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$在复平面上任何一点都成立，不论柯西－黎曼方程的另一部分成立与否，还是 $u(x,y)$，$v(x,y)$可微与否，定理 1 关于函数可导的必要与充分条件都不成立，故函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 在复平面上处处不可导.

(6) 下面的题目用两种解法得到的结果为什么不一样呢？

题目：求函数 $w=\begin{cases}\dfrac{x^3y(y-\mathrm{i}x)}{x^3+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 的导数 $w'(0)$.

解法一：$\because$

$$\lim_{z\to 0}\frac{w(z)-w(0)}{z-0}=\lim_{x+\mathrm{i}y\to 0}\frac{\dfrac{x^3y(y-\mathrm{i}x)}{x^3+y^2}-0}{x+\mathrm{i}y}$$

$$=\lim_{x+\mathrm{i}y\to 0}\frac{-\mathrm{i}x^3y}{x^3+y^2}$$

$$\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=\!=\!=}\lim_{r\to 0}(-\mathrm{i})\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r\cos^3\theta+\sin^2\theta}$$

$$=0,$$

$\therefore \quad w'(0)=0.$

解法二：因为 $w'(0)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}+\mathrm{i}\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)}$，而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2y^4}{(x^3+y^2)^2}$$

在 $(0,0)$处无意义，所以 $w'(0)$不存在.

答：第一种解法是正确的，第二种解法因函数在 $z=0$ 处可导，故柯西－黎曼方程成立，$u(x,y)$，$v(x,y)$可微. $u(x,y)$与 $v(x,y)$可微则 $u(x,y)$与 $v(x,y)$偏导存在，但偏导未必连续，只有偏导连续时，才可先求偏导$\dfrac{\partial u}{\partial x}$再代入点$(0,0)$.

(7) 下面的证明过程哪个地方出问题了？

题目：证明函数 $h(x,y)=x^2-y^2$ 为调和函数.

证：$\because\quad h_{xx}+h_{yy}=2-2=0,$

$\therefore\quad h(x,y)$为调和函数.

答：此证明的问题出在推导结论的条件不够充分，依据调和函数的定义，还需说明 $h(x,y)$具有连续的二阶偏导，这一点在做题时常常被遗忘.

2.3　释疑解难

1. 设 $z=x+iy$，证明：$\lim\limits_{z\to 2i}(2x+iy^2)=4i$.

证：因为$|2x+iy^2-4i|\leqslant 2|x|+|y^2-4|=2|x|+|y-2||y+2|$，所以若能找到正数 δ，使得 $0<|z-2i|<\delta$ 时，有

$$2|x|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |y-2||y+2|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则可推出结论.

我们观察，当$|y-2|<1$ 时，有

$$|y+2|\leqslant|y-2|+4<5,$$

从而在$|y-2|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$时，

$$|y-2||y+2|<\frac{\varepsilon}{10}\cdot 5<\frac{\varepsilon}{2}.$$

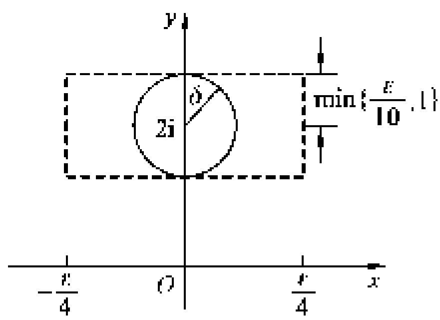

图 1.2.1

再观察图 1.2.1 中，在 $|x|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y-2|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$的带形域中，$\delta$ 只好取$\frac{\varepsilon}{4}$和 $\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$中的较小者，即 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$. 从而，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$，当 $0<|z-2i|<\delta$ 时，

$$|2x+iy^2-4i|<\varepsilon$$

成立，即$\lim\limits_{z\to 2i}(2x+iy^2)=4i$.

2. 证明 当 z_0 不取到负半实轴和原点时有：

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0.$$

证：设 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$w=\cos\arg z$，则

$$\arg z=\arccos w=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(0\leqslant\arg z\leqslant\pi),$$

$$\arg z_0=\arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

$$\because \quad \lim_{z\to z_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

$$\therefore \quad \lim_{z\to z_0}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

即

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0.$$

当 $-\pi<\arg z\leqslant 0$ 时，

$$\arg z=-\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

同理可得：

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0.$$

3. 证明：设函数 $f(z)$在 z_0 连续且 $f(z_0)\neq 0$，那么可以找到 z_0 的一个小邻域，在这个邻域内 $f(z)\neq 0$.

证：$\because \quad \lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，

$\therefore \quad \lim_{z\to z_0}|f(z)|=|f(z_0)|$，

$\therefore$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$||f(z)|-|f(z_0)||<\varepsilon$$

成立.

$\therefore$ 当取 $\varepsilon=|f(z_0)|>0$ 时，$\exists\ \delta_1$，当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时，

$$||f(z)|-|f(z_0)||<|f(z_0)|$$

成立，即

$$0<|f(z)|<2|f(z_0)|,$$

$\therefore$ 当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时，$f(z)\neq 0$.

故结论成立.

4. 证明：$f(z)$在 z_0 处可导的必要与充分条件是：$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\cdot\Delta z+o(|\Delta z|)$，其中 $A=a+ib$，$o(|\Delta z|)$为比 $|\Delta z|$高阶的无穷小.

证：必要条件

设 $f(z)$在 z_0 处的导数为 $f'(z_0)$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0).$$

$\therefore$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|\Delta z|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

$$\therefore \quad \frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\Delta z|}{|\Delta z|}<\varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\Delta z|}{|\Delta z|}=0,$$

$$\therefore \quad f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

充分条件

$$\because \quad f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\cdot\Delta z+o(|\Delta z|),$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=A,$$

$\therefore \quad f(z)$在 z_0 处可导.

5. 证明用极坐标表达的柯西–黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

证：$\because$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4}$$

利用$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$比较上面的式(1)与式(4)、式(2)与式(3)，即得极坐标形式的柯西–黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

6. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，并且 u,v 偏导存在. 求证：对 $f(z)$ 柯西–黎曼方程条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial \bar z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \bar z}=0.$$

证：$\because$

$$u(x,y)=u\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right),\ v(x,y)=v\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right),$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}u'_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}u'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}u'_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}u'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}v'_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}v'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}v'_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}v'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$\therefore$ 柯西－黎曼方程$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$成立等价于$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

7. 若 $f(z)$在上半复平面内解析，试证函数$\overline{f(\bar{z})}$在下半复平面内解析.

证：$\because$ $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\quad(y>0)$解析，

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial(-y)}\qquad (y>0)$$

$$=\frac{\partial(-v)}{\partial y}\qquad (y<0),$$

$$\because \quad -\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial(-y)}\qquad (y>0),$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}\qquad (y<0),$$

$\therefore$ $u(x,y),v(x,y)$在 $y<0$ 时柯西－黎曼方程成立.

又 $\because$ $u(x,y),v(x,y)$在 $y>0$ 和 $y<0$ 时均可微.

$\therefore$ $\overline{f(\bar{z})}=u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$在 $y<0$(下半平面内)时解析.

8. 证明 若 v 是u 在D 内的共轭调和函数，那么 v 在 D 内的共轭调和函数是$-u$.

证：$\because$ v 为u 的共轭调和函数，

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x},$$

$\therefore$ $-u$ 为v 的共轭调和函数.

2.4 典型例题

例 1 计算$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}$.

解：$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}\xlongequal{w=\frac{1}{z}}\lim\limits_{w\to 0}w(\mathrm{e}^{\frac{1}{w}}-1)$.

当 $w=u+\mathrm{i}v$ 沿 u 轴正半实轴趋于 0 时，$\lim\limits_{w\to 0}w(\mathrm{e}^{\frac{1}{w}}-1)=\infty$. 当 w 沿 u 轴负半实轴趋于 0 时，$\lim\limits_{w\to 0}w(\mathrm{e}^{\frac{1}{w}}-1)=0$, 故$\lim\limits_{w\to 0}w(\mathrm{e}^{\frac{1}{w}}-1)$的极限值不存在，即$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}$的极限值不存在.

例 2 讨论下面函数的可导性、解析性.

(a) $f(z)=\dfrac{z-2}{e^{-x}e^{-iy}}$;　　(b) $f(z)=x^3+i(1-y)^3$.

解：(a) $f(z)=(z-2)e^z$

$$=e^x(x\cos y-2\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y-2\sin y+y\cos y).$$

方法一　∵　$f(z)=(z-2)e^z$ 为解析函数 $(z-2)$ 和 e^z 的积，

∴　$f(z)$ 在整个复平面上可导，解析.

方法二　∵　$u=e^x(x\cos y-2\cos y-y\sin y)$，

$v=e^x(x\sin y-2\sin y+y\cos y)$，

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-\cos y-y\sin y)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y-\cos y-y\sin y)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x(\sin y-x\sin y-y\cos y)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)$，

且这四个偏导数连续（u，v 可微），柯西－黎曼方程成立，所以 $f(z)$ 在整个复平面上解析.

(b) ∵　$u=x^3$，$v=(1-y)^3$，

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-3(1-y)^2$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，

且这四个偏导数连续，柯西－黎曼方程在 $x=0$，$y=1$ 时成立. 所以，$f(z)$ 仅在 $z=i$ 处可导，在整个复平面上不解析.

例 3　函数 $g(z)=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ $(r>0,\ -\pi<\theta<\pi)$ 在定义域内解析，证明：复合函数 $g(z^2+1)$ 在四分之一 z 平面 $x>0$，$y>0$ 内解析（提示：$g(z)=z^{\frac{1}{2}}$）.

证：∵　$g(z)=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ 在定义域内解析，z^2+1 在整个复平面上解析.

∴　由复合函数的求导运算法则知：当 $|z^2+1|>0$，$\pi>\arg(z^2+1)>-\pi$ 时，函数 $g(z^2+1)$ 解析，即在 $x^2-y^2+1\leqslant 0$ 且 $x\cdot y=0$ 也就是 $x=0$ 且 $|y|>1$ 时，$g(z^2+1)$ 不解析. 故当 $x>0$，$y>0$ 时，$g(z^2+1)$ 是解析的.

例 4　判断下列命题的真假. 若真，试证之；若假，请举出反例.

(a) 若 $f'(z_0)$ 存在，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析；

(b) 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 处不可导；

(c) 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数存在，则 $f(z)=u+iv$ 可导.

答：(a) 假命题.

例如：函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导，但不解析.

(b) 假命题.

例如：$z=0$ 为函数 $f(z)=|z|^2$ 的奇点，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

(c) 假命题.

例如：设 $u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy$，则 $u(x,y), v(x,y)$ 偏导连续，但当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=x, \frac{\partial u}{\partial y}=0\neq-\frac{\partial v}{\partial x}=-y$，故 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在整个复平面上除原点外不可导：

例 5　设 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l, m, n 的值.

解：设 $u=my^3+nx^2y, v=x^3+lxy^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nyx, \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2, \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy.$$

$\because$　$f(z)$ 为解析函数，

$$\therefore\quad \begin{cases}2nyx=2lxy;\\ 3x^2+ly^2=-(3my^2+nx^2).\end{cases}$$

$\therefore$　$n=l=-3, m=1$.

例 6　由 $u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$ 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

解：方法一

$\because$　$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=2y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\therefore\quad v=y^2+h(x),$$

$$v_x=h'(x)=2(1-x),$$

$$h(x)=2x-x^2+c,$$

$$v=y^2+2x-x^2+c.$$

$$\therefore\quad f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+c).$$

$$\because\quad f(2)=-\mathrm{i},$$

$$\therefore\quad f(2)=2(2-1)\cdot 0+\mathrm{i}(0^2+2\times 2-2^2+c)=-\mathrm{i},$$

$$\therefore\quad c=-1.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(z)&=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2-1)\\ &=-\mathrm{i}(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)+2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\\ &=-(z^2-2z+1)\mathrm{i}\\ &=-(z-1)^2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

方法二

$$\because \quad v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 2(1-x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} 2(1-x)\mathrm{d}x+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)} 2y\mathrm{d}y+c$$

$$=(2x-x^2)\Big|_{x_0}^{x}+y^2\Big|_{y_0}^{y}+c$$

$$=y^2+2x-x^2+c,$$

$$\therefore \quad f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+c)$$

$$=-(z-1)^2\mathrm{i}+(1+c)\mathrm{i}.$$

$$\because \quad f(2)=-\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad f(2)=-\mathrm{i}+(1+c)\mathrm{i}=-\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad c=-1.$$

$$\therefore \quad f(z)=-(z-1)^2\mathrm{i}.$$

方法三

$$\because \quad f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=u_x-\mathrm{i}u_y$$

$$=2y-2\mathrm{i}(x-1)=-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+2\mathrm{i}$$

$$=-2\mathrm{i}(z-1),$$

$$\therefore \quad f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2+c.$$

$$\because \quad f(2)=-\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad c=0,$$

$$\therefore \quad f(z)=-(z-1)^2\mathrm{i}.$$

2.5 习题选解

2.1.1 设 z_0 为复常数,应用极限的定义证明:

(a) $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z_0)$; (b) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z}=0$.

证:(a) $\because \quad |\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)|=|x-x_0|$,

$\therefore$ 对 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\varepsilon$, 当 $|x-x_0|\leqslant|z-z_0|<\delta$ 时,

$$|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)|<\varepsilon$$

成立.故

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z_0).$$

(b) $\because$ 对 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\varepsilon$, 当 $|z-0|<\delta$ 时,

$$|\bar{z}^2/z-0|<\varepsilon$$

成立.故

$$\lim_{z\to0}\bar{z}^2/z=0.$$

2.1.2　证明：若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=A+B$.

证：∵　$0\leqslant|f(z)+g(z)-A-B|\leqslant|f(z)-A|+|g(z)-B|$，由已知条件和夹逼准则得：

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)+g(z)-A-B|=0,$$

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=A+B$.

2.1.4　设 $\Delta z=z-z_0$，证明：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$ 当且仅当 $\lim\limits_{\Delta z\to0}f(z_0+\Delta z)=w_0$.

证：∵　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$，

∴　对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon,$$

即对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta$，当 $|\Delta z-0|<\delta$ 时，

$$|f(z_0+\Delta z)-w_0|<\varepsilon,$$

∴　$\lim\limits_{\Delta z\to0}f(z_0+\Delta z)=w_0$.

以上过程可逆，故结论成立.

2.1.5　若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=0$ 且存在一个正整数 M，对 z_0 某邻域内所有的数 z 都有 $|g(z)|\leqslant M$，证明：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=0$.

证：∵　$0\leqslant|f(z)g(z)-0|=|f(z)-0||g(z)|\leqslant M|f(z)-0|$，

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)g(z)|=0$，

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=0$.

2.1.6　设 z_0 为扩充复平面上的点，证明：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$.进而计算 $\lim\limits_{z\to1}\dfrac{1}{(z-1)^3}$ 和 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z^3-1}$ 的值.

证：∵　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，

∴　对 $\forall\ M$，$\exists\ \delta$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)|>M,$$

∴　对 $\forall\ \varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\ \delta$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{1}{f(z)}-0\right|<\varepsilon,$$

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$.

以上过程可逆，故结论成立.

$\therefore \quad \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{(z-1)^3}=\infty;\quad \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z^3-1}=0.$

2.2.1 讨论 $f(z)=\dfrac{3z^3-2z^2+12z-8}{z^2+4}$ 的连续性，对 $f(z)$ 不连续的点修改或补充定义使之连续.

解：当 $z\neq\pm 2\mathrm{i}$ 时，$f(z)$ 连续.

当 $z=\pm 2\mathrm{i}$ 时，$f(z)$ 不连续.

$$\because \quad \lim_{z\to\pm 2\mathrm{i}}\frac{3z^3-2z^2+12z-8}{z^2+4}=\lim_{z\to\pm 2\mathrm{i}}\frac{3z(z^2+4)-2(z^2+4)}{z^2+4}$$

$$=(3z-2)\Big|_{z=\pm 2\mathrm{i}}=-2\pm 6\mathrm{i},$$

$\therefore$ 补充定义：$f(\pm 2\mathrm{i})=-2\pm 6\mathrm{i}$，使函数在 $z=\pm 2\mathrm{i}$ 处成为连续函数.

2.2.2 设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0,\end{cases}$$

试证 $f(z)$ 在原点不连续.

证：$\because$ 当 $y=kx$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{k^2+1},$$

$\therefore$ $f(z)$ 在 z 沿不同直线方向趋于 0 时，$f(z)$ 的极限值不相等，

$\therefore$ $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.

2.3.1 应用导数定义讨论下面函数的导数存在否？

(a) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$；　(b) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$.

解：(a) $\because$ $f(z)=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar z}{2}$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z+\overline{\Delta z}}{2\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right),$$

$\therefore$ 当 Δz 沿 $\Delta x=0$ 趋于 0 时，上面的极限值为 0；当 Δz 沿 $\Delta y=0$ 趋于 0 时，上面的极限值为 1，故 $f(z)$ 在任一点导数不存在.

(b) 用类似于 (a) 的方法可得：

$$f(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}$$

在任一点的导数不存在.

2.3.2 证明：函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

在 $z=0$ 处不可导.

证：∵ $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2$,

当 z 沿 $y=kx$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2=\left(\dfrac{1-\mathrm{i}k}{1+\mathrm{i}k}\right)^2$,

∴ 极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在，函数在 $z=0$ 处不可导.

2.3.4 应用求导法则证明：多项式函数 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0,\ n>1)$ 处处可导，且 $P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}$，并计算 $f(z)=(1-4z^2)^3$ 的导数.

证：当 n 为有限数时，重复应用函数和的导数等于导数的和的运算法则可得：

$$P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1},$$

$$f'(z)=[(1-4z^2)^3]'=3(1-4z^2)^2(-8z)=-24z(1-4z^2)^2.$$

2.3.5 设 $f'(z)$ 存在，试推导 $\dfrac{\mathrm{d}[c^{f(z)}]}{\mathrm{d}z}$.

证：设 $w=c^{f(z)}$，则

$$w=e^{f(z)\mathrm{Ln}c},$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=e^{f(z)\mathrm{Ln}c}\cdot f'(z)\mathrm{Ln}c=c^{f(z)}f'(z)\mathrm{Ln}c,$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}[c^{f(z)}]}{\mathrm{d}z}=c^{f(z)}f'(z)\mathrm{Ln}c.$$

2.3.6 推导 Arch$z$ 的求导公式.

证：设 $w=\mathrm{Arch}z$，则

$$z=\mathrm{ch}w=\frac{\mathrm{e}^w+\mathrm{e}^{-w}}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^{-1}=\left(\frac{\mathrm{e}^w-\mathrm{e}^{-w}}{2}\right)^{-1}$$

$$=(\mathrm{sh}w)^{-1}=(\mathrm{ch}^2w-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}.$$

2.3.8 验证函数 $w=xe^x\cos y-ye^x\sin y+\mathrm{i}(ye^x\cos y+xe^x\sin y)$ 满足柯西－黎曼方程.

解：∵ $w=xe^x\cos y-ye^x\sin y+\mathrm{i}(ye^x\cos y+xe^x\sin y)=ze^z$ 为解析函数，

$\therefore$ 柯西－黎曼方程成立.

2.3.9 讨论下面函数的可导性,如果可导,求出 $f'(z)$.

(a) $f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$; (b) $f(z)=z\mathrm{Im}(z)$.

解:(a) $\because \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y,$

且这四个偏导连续,当 $y=x$ 时柯西－黎曼方程成立.

$\therefore$ $f(z)$仅在 $y=x$ 时可导,且 $f'(z)=2x$.

(b) $\because \quad f(z)=(x+\mathrm{i}y)y=xy+\mathrm{i}y^2,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y,$$

且这四个偏导连续,当 $y=x=0$ 时柯西－黎曼方程成立.

$\therefore$ $f(z)$仅在 $z=0$ 时可导,且 $f'(0)=0$.

2.3.10 证明以下各函数在任一点处不可导.

(a) $f(z)=2x+\mathrm{i}xy^2$; (b) $f(z)=z-\bar{z}$;

(c) $f(z)=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$.

证:(a) $f(z)=2x+\mathrm{i}xy^2$,

$\because \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=2, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=y^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2xy,$

$\therefore$ 柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

不成立.

$\therefore$ $f(z)$在任一点处不可导.

(b) $\because \quad f(z)=2y\mathrm{i}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2,$

$\therefore$ 柯西－黎曼方程在任一点不成立,

$\therefore$ $f(z)$在任一点处不可导.

(c) $\because \quad f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\cos y.$$

又$\because$ $\sin y$ 与 $\cos y$ 不可能同时为 0,即柯西－黎曼方程不成立,

$\therefore$ $f(z)$在任一点处不可导.

2.3.11 证明以下各函数的 $f'(z)$、$f\ (z)$存在,并求之.

(a) $f(z)=\mathrm{i}z+2$; (b) $f(z)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$;

(c) $f(z)=\cos x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}y$.

证：(a)，(b)，(c)中 $f(z)$分别为解析函数：$\mathrm{i}z+2$、e^{-z}、$\cos z$，故它们均具有二阶导数，且

(a) $f'(z)=\mathrm{i}$，　　　$f\quad(z)=0$；

(b) $f'(z)=-\mathrm{e}^{-z}$，　　　$f\quad(z)=\mathrm{e}^{-z}$；

(c) $f'(z)=-\sin z$，　　　$f\quad(z)=-\cos z$.

2.4.1　证明 $f(z)=(z^2-4)(z^2+4)$在定义域内解析，并求当 $z=1,2,\mathrm{i},-\mathrm{i}$，$1+2\mathrm{i}$ 时 $f'(z)$的值.

证：∵　$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^4-16-(z^4-16)}{\Delta z}=4z^3$，

∴　$f(z)$在其定义域(整个复平面上)解析.且

$$f'(1)=4,f'(2)=32,f'(\mathrm{i})=-4\mathrm{i},$$
$$f'(-\mathrm{i})=4\mathrm{i},f'(1+2\mathrm{i})=-44-8\mathrm{i}.$$

2.4.4　证明：(a) $\ln(z-\mathrm{i})$在除去直线 $y=1$ $(x\leqslant 0)$的复平面上处处解析；

(b) 函数$\dfrac{\ln(z+4)}{z^2+\mathrm{i}}$在除去点 $z=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$和实轴上 $x\leqslant -4$ 的点后的复平面上处处解析.

证：(a) ∵　$\ln(z-\mathrm{i})=\ln[x+(y-1)\mathrm{i}]$，而 $\ln z=\ln(x+y\mathrm{i})$在除去负实轴和原点的复平面上解析，

∴　$\ln(z-\mathrm{i})$在除去 $y=1$ $(x\leqslant 0)$的复平面上处处解析.

(b) ∴　$\dfrac{\ln(z+4)}{z^2+\mathrm{i}}=\dfrac{\ln(x+4+y\mathrm{i})}{x^2-y^2+(2xy+1)\mathrm{i}}$，

∴　当 $x\leqslant -4$，$y=0$ 和 $z^2=-\mathrm{i}$ 时函数不解析，即函数在除去点 $z=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$和实轴上 $x\leqslant -4$ 的点后的复平面上解析.

2.4.5　由函数解析的必要与充分条件证明：若 $w=f(z)$为 D 内的解析函数，那么 $\sin f(z)$，$\cos f(z)$在 D 内解析，且$\dfrac{\mathrm{d}\sin w}{\mathrm{d}z}=\cos w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$；$\dfrac{\mathrm{d}\cos w}{\mathrm{d}z}=-\sin w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

证：设 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$，

$$\sin f(z)=\sin(u+\mathrm{i}v)=\sin u\,\mathrm{ch}v+\mathrm{i}\cos u\,\mathrm{sh}v=U+\mathrm{i}V,$$

∵　$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial\sin u}{\partial x}\mathrm{ch}v+\dfrac{\partial\mathrm{ch}v}{\partial x}\sin u=\cos u\cdot\mathrm{ch}v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{sh}v\cdot\sin u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial\cos u}{\partial y}\mathrm{sh}v+\frac{\partial\mathrm{sh}v}{\partial y}\cos u=-\sin u\cdot\mathrm{sh}v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{ch}v\cdot\cos u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=\sin u\cdot\mathrm{sh}v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{ch}v\cdot\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

∴　$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}$，

同理，$\dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}$，且这四个偏导数连续.

$\therefore\quad \sin f(z)$ 解析，且 $\sin f(z) = U_z + \mathrm{i}V_z$ 即

$$\frac{\mathrm{d}\sin w}{\mathrm{d}z} = \cos u \cdot \mathrm{ch} v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{sh} v \cdot \sin u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\left(-\sin u \cdot \mathrm{sh} v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{ch} v \cdot \cos u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \cos w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z},$$

同理，$\dfrac{\mathrm{d}\cos w}{\mathrm{d}z} = -\sin w \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

2.4.6　证明：$e^{\bar{z}}, \sin\bar{z}, \cos\bar{z}$ 在复平面上任一点都不解析.

证：$e^{\bar{z}}$ 由习题 2.3.10(c)可得结论.

$\because\quad \sin\bar{z} = \sin(x - \mathrm{i}y) = \sin x \,\mathrm{ch} y - \mathrm{i}\,\mathrm{sh} y \cos x,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \,\mathrm{ch} y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{sh} y \sin x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \,\mathrm{sh} y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\mathrm{ch} y \cos x.$$

且这四个偏导数连续.要想柯西－黎曼方程成立，需

$$\cos x = 0 \text{ 且 } \mathrm{sh} y = 0,$$

即

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ y = 0.$$

$\therefore\quad \sin\bar{z}$ 仅在离散点 $z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 处可导，在整个复平面上不解析.同理可得 $\cos\bar{z}$ 在整个复平面上不解析.

2.4.7　讨论下面各函数的解析性.

(a) $f(z) = x^3 + 3x^2 y\mathrm{i} - 3xy^2 - y^3\mathrm{i}$;　　(b) $f(z) = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}\ (z \neq 0)$;

(c) $w = \dfrac{1}{3x - 3\mathrm{i}y}$;　　(d) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{3x - 3\mathrm{i}y}$;　　(e) $w = \dfrac{1 - z^4}{1 + z^4}$.

解：(a) $\because\quad u = x^3 - 3xy^2,\quad v = 3x^2 y - y^3,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

且这四个偏导数均连续.

$\therefore\quad f(z)$ 解析且 $f'(z) = 3(x^2 - y^2) + 6xy\mathrm{i} = 3z^2$.

(b) $\because\quad f(z) \xlongequal{z = re^{i\theta}} \dfrac{1}{r}e^{-i\theta} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta),$

$$u = \frac{1}{r}\cos\theta,\ v = -\frac{1}{r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

且这四个偏导数均连续.

$\therefore\quad f(z)$解析且 $f'(z)=e^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial v}{\partial r}i\right)=-\dfrac{1}{z^2}$.

(c) $\because\quad w=\dfrac{x+iy}{3(x^2+y^2)}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{3(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{3(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$\therefore\quad$ 此函数在整个复平面上不解析.

(d) $\because\quad w=\dfrac{(x^2+y^2)(x+iy)}{3(x^2+y^2)}=\dfrac{z}{3}$,

$\therefore\quad$ 此函数在除去 $z=0$ 的复平面上解析.

(e) $\because\quad \dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{\dfrac{1-(z+\Delta z)^4}{1+(z+\Delta z)^4}-\dfrac{1-z^4}{1+z^4}}{\Delta z}=\dfrac{-2(2z+\Delta z)[z^2+(z+\Delta z)^2]}{[1+(z+\Delta z)^4](1+z^4)}$,

$\therefore\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{-8z^3}{(1+z^4)^2}$,

$\therefore\quad$ 此函数在除去 $z^4=-1$ 的点外的复平面上处处解析.

2.4.9 若函数 $f(z)$在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，试证 $f(z)$在 D 内必为常数.

(a) $\overline{f(z)}$在 D 内解析；　　(b) $|f(z)|$在 D 内为常数；

(c) $\mathrm{Re}f(z)$或 $\mathrm{Im}f(z)$在 D 内为常数.

证：(a) $\because\quad \overline{f(z)}=u-iv, f(z)=u+iv$ 在 D 内均解析，

$\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

$\therefore\quad u=c_1, v=c_2$ (c_1, c_2 为任意实数)，

$\therefore\quad f(z)=c$ (c 为任意复数，$z\in D$).

(b) $\because\quad |f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}=c', f(z)=u+iv$ 在 D 内解析，

$\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$\therefore\quad 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\quad 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$,

$\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$,

$\therefore\quad u=c_1, v=c_2$ (c_1, c_2 为任意实数)，

$\therefore\quad f(z)=c$ (c 为任意复数，$z\in D$).

(c) $\because\quad \mathrm{Re}f(z)=c_1=u(x,y)$,

$\therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$

$\therefore \quad v=c_2$（c_2 为任意实数），

$\therefore \quad f(z)=c$（c 为任意复数，$z\in D$）.

同理，$\mathrm{Im}f(z)=c_2$（c_2 为任意实数）时，

$$f(z)=c\ (c\ \text{为任意复数},z\in D).$$

2.4.12 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为 D 内的解析函数 $u(x,y)=c_1$，$v(x,y)=c_2$ 为两个曲线族，这里 c_1 和 c_2 为任意的实常数. 证明：这两族曲线正交（提示：曲线正交即为两曲线交点处切线相互垂直）.

证：$\because$ 曲线 $u(x,y)=c_1$ 上任一点处切线斜率 $k_1=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{u_x}{u_y}$，

曲线 $v(x,y)=c_2$ 上任一点处切线斜率 $k_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{v_x}{v_y}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\therefore \quad k_1\cdot k_2=-\frac{u_x}{u_y}\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{-\frac{\partial v}{\partial x}}\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}=-1,$$

$\therefore \quad u(x,y)=c_1, v(x,y)=c_2$ 两曲线族正交.

2.5.1 证明下面各函数满足拉普拉斯方程.

(a) $u=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy$； (b) $u=\mathrm{Re}[\mathrm{Ln}(z-1)]\ (z\neq 1)$.

证：(a) $\because \quad u_{xx}+u_{yy}=\mathrm{e}^{x^2-y^2}[(4x^2-4y^2+2)\sin 2xy+8xy\cos 2xy]$

$$-\mathrm{e}^{x^2-y^2}[(4x^2-4y^2+2)\sin 2xy+8xy\cos 2xy]$$

$$=0,$$

$\therefore \quad u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程.

(b) $\because \quad u=\mathrm{Re}[\mathrm{Ln}(z-1)]=\ln|z-1|=\ln[(x-1)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$，

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{y^2-(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}+\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=0,$$

$\therefore \quad u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程.

2.5.2 证明下面各函数为任意区域的调和函数.

(a) $u=\sin x\,\mathrm{sh}y$； (b) $v=\cos 2x\,\mathrm{sh}2y$.

证：(a) $\because \quad u_{xx}+u_{yy}=-\sin x\,\mathrm{sh}y+\sin x\,\mathrm{sh}y=0$ 且 u 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad u(x,y)$ 为调和函数.

(b) $\because \quad v_{xx}+v_{yy}=-4\cos 2x\,\mathrm{sh}2y+4\cos 2x\,\mathrm{sh}2y=0$ 且 v 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数.

2.5.3　用 x 和 y 表示 $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$，并说明这个函数为什么在不包含原点的任何区域内为调和函数.

解：∵　$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})=\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{x+iy}})=\mathrm{Re}(e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}})$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\frac{y}{x^2+y^2}-i\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

∵　$e^{\frac{1}{z}}$在 $z\neq0$ 时为解析函数，

∴　$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ 在除去原点的任何邻域内为调和函数.

2.5.4　用两种方法证明函数 $\ln(x^2+y^2)$ 在复平面上不含原点的任何区域内均为调和函数.

证：方法一　∵　$u_{xx}+u_{yy}=2\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$ 且 u 在 $z\neq0$ 时具有连续的二阶偏导数，

$$\therefore\quad u(x,y)=\ln(x^2+y^2)\text{为调和函数.}$$

方法二　设 $f(z)=u+iv=\ln(x^2+y^2)+i2\arctan\dfrac{y}{x}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

而且当 $z\neq0$ 时，这四个一阶偏导数连续. 故 $f(z)$ 为解析函数，其实部为调和函数.

2.5.5　证明：若 v 为 u 的共轭调和函数，并且 u 亦为 v 的共轭调和函数，那么 u 和 v 必为常数.

证：∵　v 为 u 的共轭调和函数，

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

∵　u 为 v 的共轭调和函数，

∴　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，

∴　u，v 必为常函数.

2.5.6　证明：如果 v 和 V 都是 u 在 D 内的共轭调和函数，那么 v 和 V 仅相差一个任意常数.

证：∵　v，V 均为 u 在 D 内的共轭调和函数，

∴　$f(z)=u+iv$，$g(z)=u+iV$ 在 D 内解析，则 v 和 V 均为如下形式

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y + c,$$

故 v 和 V 仅相差一个任意实常数 c.

2.5.7　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为 D 内的解析函数，阐述函数 $U(x,y)=\mathrm{e}^{u(x,y)}\cos v(x,y)$，$V(x,y)=\mathrm{e}^{u(x,y)}\sin v(x,y)$ 亦为 D 内的调和函数，且 V 为 U 的共轭调和函数.

解：设 $F(z)=U+\mathrm{i}V=\mathrm{e}^{u(x,y)}\cos v(x,y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{u(x,y)}\sin v(x,y)=\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$,

$\because$　$u+\mathrm{i}v$ 为 D 内的解析函数,

$\therefore$　复合函数 $F(z)=\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$ 为 D 内的解析函数,

$\therefore$　V 为 U 的共轭调和函数.

2.5.8　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 满足条件：$f(x+\mathrm{i}0)=\mathrm{e}^x$，$f(z)$ 为解析函数且对任一点 z 有 $f'(z)=f(z)$. 根据下面的叙述证明：$f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$.

(a) 在得到 $u_x=u$，$v_x=v$ 后证明存在关于 y 的实值函数 φ 和 ψ，使 $u=\mathrm{e}^x\varphi(y)$，$v=\mathrm{e}^x\psi(y)$.

(b) 应用 u 为调和函数获得方程 $\varphi\ (y)+\varphi(y)=0$，因此得 $\varphi(y)=A\cos y+B\sin y$，这里 A 和 B 均为实数.

(c) 随后有相应的 $\psi(y)=A\sin y-B\cos y$，应用 $u(x,0)+\mathrm{i}v(x,0)=\mathrm{e}^x$ 求出 A 和 B 得结论：$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 和 $v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$.

证：$\because$　$f'(z)=f(z)$,

$\therefore$　$u_x=u$，$v_x=v$.

由此的 u，v 微分方程解得：

$$u=\mathrm{e}^x\varphi(y),\ v=\mathrm{e}^x\psi(y),$$

$\because$　$f(z)$ 解析，故 u 为调和函数，即

$$u_{xx}+u_{yy}=\mathrm{e}^x\varphi(y)+\mathrm{e}^x\varphi\ (y)=0,$$

$\therefore$　解微分方程 $\varphi\ (y)+\varphi(y)=0$ 得

$$\varphi(y)=A\cos y+B\sin y,$$
$$u(x,y)=\mathrm{e}^x(A\cos y+B\sin y).$$

同理可得

$$v(x,y)=\mathrm{e}^x(C\cos y+D\sin y).$$

$\because$　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$\therefore$　$\mathrm{e}^x(A\cos y+B\sin y)=\mathrm{e}^x(-C\sin y+D\cos y)$.

$\because$　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

$\therefore\quad e^x(-A\sin y+B\cos y)=e^x(-C\cos y-D\sin y)$.

$\therefore\quad D=A,\ C=-B$.

$\therefore\quad v(x,y)=e^x(A\sin y-B\cos y)$.

$\because\quad f(x+i0)=e^x$,

$\therefore\quad u(x,0)=e^x=Ae^x,\ v(x,0)=0=-Be^x$,

$\therefore\quad A=1,\ B=0$,

$u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\sin y$.

$\therefore\quad f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

2.5.9 证明 $u(x,y)$ 为某区域内的调和函数，并求出它的共轭调和函数.

(a) $u(x,y)=2x(1-y)$；　　(b) $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$；

(c) $u(x,y)=\mathrm{sh}x\sin y$；　　(d) $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

证：(a) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=0+0=0$，$u$ 具有均连续的二阶偏导数，

$\therefore\quad u(x,y)$ 为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}2x\mathrm{d}x+2(1-y)\mathrm{d}y+c\\&=x^2+2y-y^2+c\quad(c\in\mathbf{R}).\end{aligned}$$

(b) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=-6x+6x=0$，$u$ 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore\quad u(x,y)$ 为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-6xy\mathrm{d}x+(2-3x^2+3y^2)\mathrm{d}y+c\\&=2y-3x^2y+y^3+c\quad(c\in\mathbf{R}).\end{aligned}$$

(c) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=\mathrm{sh}x\sin y-\mathrm{sh}x\sin y=0$，$u$ 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore\quad u(x,y)$ 为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\mathrm{sh}x\cos y\mathrm{d}x+\mathrm{ch}x\sin y\mathrm{d}y+c\\&=-\mathrm{ch}y\cos y+c\quad(c\in\mathbf{R}).\end{aligned}$$

(d) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}+\dfrac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}=0$,

u 在 $z\neq0$ 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore$ $u(x,y)$ 为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c$$
$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+c$$
$$=\frac{x}{x^2+y^2}+c\quad(c\in\mathbf{R}).$$

2.5.10 证明下面 u 或 v 为调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(a) $u=x^3-3xy^2$;　(b) $u=x^2-y^2+2x$;

(c) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;　(d) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

(e) $u=2e^x\sin y$;　(f) $v=2xy+3x$;

(g) $v=\dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2}$;　(h) $v=\arctan\dfrac{y}{x}\ (x>0)$;

(i) $v=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$;　(j) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$.

证：(a)—(e) 证明及求解 $v(x,y)$ 的方法如 2.5.9 题.

(f) $\because$ $v_{xx}+v_{yy}=0+0=0$，v_{xx} 和 v 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore$ $v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c$$
$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}2x\mathrm{d}x-(2y+3)\mathrm{d}y+c$$
$$=x^2-y^2-3y+c,$$

$\therefore$
$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$
$$=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}-3y+3\mathrm{i}x+c$$
$$=z^2+3\mathrm{i}z+c\quad(c\in\mathbf{R}).$$

(g) $\because$ $v_{xx}+v_{yy}=\dfrac{2y^3-14y(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^3}+\dfrac{14y(x+1)^2-2y^3}{[(x+1)^2+y^2]^3}=0$，

在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore$ $v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c$$
$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}\mathrm{d}x-\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2+y^2]^2}\mathrm{d}y+c$$
$$=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+c.$$

$\therefore$ $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$

$$= \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + c$$

$$= \frac{1}{z+1} + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(h) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$,

在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c,$$

$\therefore \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x} + c$

$$= \ln z + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(i) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y) -$

$$\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y) = 0,$$

v 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{x_0}^{x} [\mathrm{e}^x(\cos y_0 - y_0\sin y_0 + x\cos y_0) + 1]\mathrm{d}x$$

$$- \int_{y_0}^{y} [\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1]\mathrm{d}y + c$$

$$= \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c,$$

$\therefore \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$

$$= \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + \mathrm{i}[\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$$

$$+ x + y] + c = z\mathrm{e}^z + (1+\mathrm{i})z + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(j) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3} = 0$,

v 在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}x + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}y + c$$

$$= -\frac{x}{x^2 + y^2} + c,$$

$$\therefore \quad f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} + \frac{\mathrm{i}y}{x^2 + y^2} + c$$

$$= -\frac{1}{z} + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

$$\because \quad f(2) = -\frac{1}{2} + c = 0,$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}.$$

第3章　积　　分

3.1　内容要点

1. 复变函数积分的定义和计算方法

定义1　设 $f(z)$ 为定义在以 z_0 为起点，z 为终点的简单曲线 C 上的连续函数，把曲线用分点 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n = z$ 分成 n 个弧段，这里 $z_k (k = 0, 1, \cdots, n)$ 是曲线 C 上按照从 z_0 到 z 的次序排列的，ξ_k 是 z_{k-1} 到 z_k 的弧上的任一点．如果不论对 C 的分法和对 ξ_k 的取法，当分点无限增多，而这些弧段长度的最大值 λ 趋于零时，和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

的极限惟一存在，则称此极限为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 从 z_0 到 z 的积分，记作 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，即

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算方法：

若曲线 C

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

分段光滑，$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 C 上分段连续，那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

以上两式我们常用来计算积分．

2. 柯西积分定理及其推广

定理1　(柯西积分定理)设 C 是一条简单正向闭曲线，$f(z)$ 在以 C 为边界的有界闭区域 D 上解析，那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

定理2　(柯西积分定理的推广)设 D 为由外线路 C_0 及内线路 $C_1, C_2, \cdots,$

C_n 围成的有界多连通域，$f(z)$在多连通域 D 内及边界线 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 上解析，那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

这里 C 为多连通域D 的所有边界，其方向是 C_0 按逆时针方向取，$C_k\ (k=1,2,\cdots,n)$按顺时针方向取.

3. 柯西公式

定理 3　设 $f(z)$在简单正向闭曲线 C 及其所围区域 D 内处处解析，z_0 为 D 内任一点，那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z,$$

此式称为柯西公式.

4. 解析函数的高阶导数

定理 4　设 $f(z)$在简单正向闭曲线 C 及其所围区域 D 内处处解析，z_0 为 D 内任一点，那么

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

这里 $n=0,1,2,\cdots$.

3.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

正确理解复变函数积分的定义，了解其性质，会求复变函数的积分. 正确理解柯西积分定理，掌握柯西积分公式和高阶导数公式，了解解析函数无限次可导的性质.

重点：柯西积分定理及其推广，柯西公式，解析函数高阶导数公式.

难点：柯西公式，解析函数高阶导数公式的证明.

2. 学习注意点

(1) 下面求解积分的过程错在何处？

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-2}}{2z+1}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\cdot \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{4}{5}\pi \mathrm{i}.$$

答：错在第二个等号后. 正确的是：

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z+\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}\pi i.$$

这样的错误是时常发生的，应当引起注意！

(2) 计算 $\int_C \bar{z}dz$. 这里曲线 C 为 $z = x + i\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$，方向分别取逆时针和顺时针方向（图 1.3.1）.

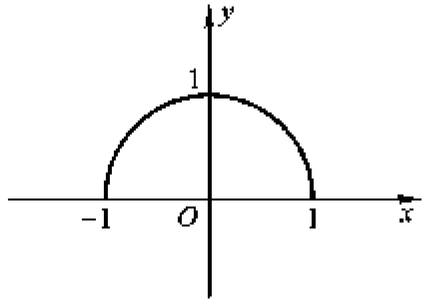

图 1.3.1

解：$\int_C \bar{z}dz = \int_C ie^{-i\theta}e^{i\theta}d\theta$

$$= \begin{cases} \int_0^\pi i d\theta; \\ \int_\pi^0 i d\theta. \end{cases} = \begin{cases} \pi i, & \text{逆时针}; \\ -\pi i, & \text{顺时针}. \end{cases}$$

此题在求解的过程中应特别注意上、下限的正确性.

(3) 等式 $\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)dz\right] = \int_C \mathrm{Re}[f(z)]dz$ 成立吗？

答：不成立. 如 $f(z) = z$, $C: z = it\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 时，等式的左边 $= -\frac{1}{2}$，右边 $= 0$.

(4) 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，C 为 D 内任一条简单闭曲线，问

$$\int_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \int_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

成立否？如成立，请证明之；如不成立，请举例说明.

答：不成立. 如 $f(z) = z$, $C: |z| = 1$ 时，

$$\int_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \pi i, \quad \int_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = -\pi i.$$

3.3 释疑解难

1. 设 $f(z)$ 在原点的邻域内解析，那么 $\lim\limits_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 2\pi f(0)$.

证：设 $z = re^{i\theta}$，则

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = \lim_{r\to 0}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{iz}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{i}\cdot f(0) = 2\pi f(0).$$

2. 计算下列各积分，积分路径为任意曲线.

(a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$;　　　　(b) $\int_a^b \frac{3z+2}{z-1}\mathrm{d}z$.

并说明积分路径为什么不能过 $z=0$ 及 $z=1$.

解: (a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_a^b = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;

(b) $\int_a^b \frac{3z+2}{z-1}\mathrm{d}z = \int_a^b\left(3+\frac{5}{z-1}\right)\mathrm{d}z = 3(b-a)+5\mathrm{Ln}\frac{b-1}{a-1}$.

因为计算题目所采用的方法要求被积函数在单连通域内解析，(a)、(b)中积分路径不过 $z=0$, $z=1$ 时，便能满足上述要求，即可采用积分值与路径无关，仅与起点和终点有关的定理来求解.

3. 设 $f(z)$在 $0<|z-a|<R$ 内解析，且 $f(z)$在 $z=a$ 处连续，证明：$f(z)$在圆 $|z-a|<R$ 内解析.

证: $\because$ $f(z)$在 a 处连续，

$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists\,\delta$, 当 $|\zeta-a|<\delta$ 时, $|f(\zeta)-f(a)|<\varepsilon$.

又 $\because$ $\left|2\pi\mathrm{i}f(a)-\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right|$ $(r<R)$,

$\therefore$ 取 $r=\frac{\delta}{k}<R$, 其中 k 为正整数，则

$$\left|2\pi\mathrm{i}f(a)-\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{\delta}{k}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\delta}{k} = 2\pi\varepsilon,$$

由于上式左边为一常数，而 ε 为任意取定的正数，

$$\therefore\quad f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta.$$

由解析函数高阶导数公式的证明过程可知：

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}\mathrm{d}\zeta,$$

$\therefore$ 函数 $f(z)$在 $z=a$ 处可导，在圆 $|z-a|<R$ 内解析.

4. 通过函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$, $a=0$, $b=1+\mathrm{i}$ 对下述结论进行验证：若 $f(z)$在区域 D 内解析，C 为 D 内以 a, b 为端点的直线段，则存在数 $\lambda\,(|\lambda|\leqslant 1)$与点 $\xi\in C$ 使得：

$$f(b)-f(a)=|\lambda|(b-a)f'(\xi).$$

验证：对函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$, 端点 $a=0$, $b=1+\mathrm{i}$ 要使

$$f(b)-f(a)=|\lambda|(b-a)f'(\xi)$$

成立，即

$$\frac{e^{1+i}-1}{1+i}=|\lambda|e^{\alpha(1+i)}$$

成立，其中$|\lambda|\leqslant 1, 0<\alpha<1$.

利用复数相等的定义知，若取：

$$\alpha=0.583\ 29,\quad \lambda=0.586\ 69,$$

上述结论成立.

5. 如果$f(z)$在$|z|<1$内解析，并且$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}$，证明：

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1)!\quad(n=1,2,\cdots).$$

（提示：考虑$f(z)$在$|z|=\frac{n}{n+1}$上的积分.）

证：因为$f(z)$在$|z|<1$内解析，由柯西积分公式知

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\quad(r<1),$$

利用积分性质有

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(0)|&\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|\\&\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{(1-|z|)|z|^{n+1}}\\&=\frac{n!}{(1-r)r^n},\end{aligned}$$

与要证明的结论相比较，取$r=\frac{n}{n+1}$，则

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1)!.$$

3.4 典型例题

例 1 计算$\int_{|z|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

解：被积函数在圆$|z|=\frac{1}{2}$及其所围区域内解析，应用柯西定理知

$$\int_{|z|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz=0.$$

例 2 计算$\int_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

解：$\int_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz=\int_{|z|=3/2}\frac{\frac{e^z}{z+2}}{z-1}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{z+2}\right|_{z=1}$

$$= \frac{2}{3}e\pi i.$$

这里曲线$|z|=3/2$只围住了被积函数的一个不解析点 1，$z-1$的次方为 1，故用柯西公式求解.

例 3 计算$\int_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$.

解：$$\int_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \int_{|z|=3/2}\frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i\cdot\left(\frac{e^z}{z+2}\right)'\bigg|_{z=1}$$
$$= \frac{4}{9}e\pi i.$$

这里曲线$|z|=3/2$只围住了被积函数的一个不解析点 1，$z-1$的次方为 2 大于 1，故用高阶导数公式求解.

例 4 计算$\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

解：$$\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz = \int_{|z-1|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz + \int_{|z+2|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$$
$$= \int_{|z-1|=1/2}\frac{\frac{e^z}{z+2}}{z-1}dz + \int_{|z+2|=1/2}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+2}dz$$
$$= \frac{2}{3}e\pi i - \frac{2}{3}e^{-2}\pi i = \frac{2}{3}(e-e^{-2})\pi i.$$

这里曲线$|z|=3$围住了被积函数的两个即一个以上的不解析点，应用柯西定理的推广定理计算原积分，这里$|z-1|=\frac{1}{2}$，$|z+2|=\frac{1}{2}$中的$\frac{1}{2}$是随意取的，但依柯西定理的推广定理应遵循$|z-1|=\frac{1}{2}$，$|z+2|=\frac{1}{2}$两曲线不相交原则，然后再用柯西公式求解.

例 5 计算 $\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$.

解：$$\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$$
$$= \int_{|z-1|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz + \int_{|z+2|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$$
(柯西定理的推广定理)
$$= \int_{|z-1|=1/2}\frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-1)^2}dz + \int_{|z+2|=1/2}\frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z+2}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z+2}\right)' \Bigg|_{z=1} + 2\pi i \cdot \frac{e^z}{(z-1)^2}\Bigg) \Bigg|_{z=-2}$$

(应用柯西公式,高阶导数公式)

$$= \frac{4}{9} e\pi i + \frac{2}{9} e^{-2} \pi i = \frac{2}{9}(2e + e^{-2})\pi i.$$

例 6　讨论并计算下列积分

(a) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-i)^n}(r \neq 1)$;

(b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$.

(a,b 均不在 $|z| = R$ 上,n 为正整数.)

解:(a) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-i)^n} = \begin{cases} 0, & \text{其他}, \\ 2\pi i, & \text{当 } r > 1, \quad n = 1 \text{ 时}; \end{cases}$

(b) 当圆面 $|z| \leqslant R$ 不包含 a 和 b 时,

$$\text{原式} = 0;$$

当圆面 $|z| \leqslant R$ 包含 a,但不包含 b 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{1}{(z-b)}\right]^{(n-1)}\Bigg|_{z=a}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{(a-b)^n} = -\frac{1}{(b-a)^n};$$

当圆面 $|z| \leqslant R$ 包含 b,但不包含 a 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{(z-a)^n}\Bigg|_{z=b} = \frac{1}{(b-a)^n};$$

当圆面 $|z| \leqslant R$ 包含 a 和 b 时,原式 $= 0$.

3.5　习题选解

3.1.1　求积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi a} dz$,积分路径为从 $z = 0$ 到 $z = 2\pi a$ 的摆线:$x = a(\theta - \sin\theta)$,$y = a(1 - \cos\theta)$.

解:$\displaystyle\int_0^{2\pi a} dz = \int_0^{2\pi}[a(1-\cos\theta) + ia\sin\theta]d\theta = 2\pi a$.

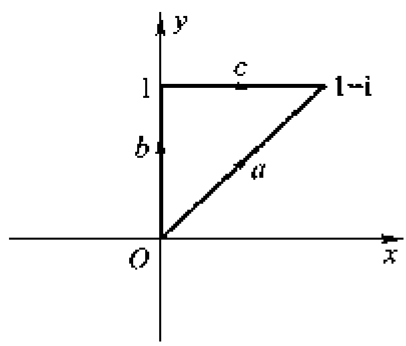

图 1.3.2

3.1.2　就下面各种情况求积分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$.

(1) $f(z) = y - x - i3x^2$,

C(图 1.3.2)是:(a) 从 $z = 0$ 到 $z = 1 + i$ 的直线段;

(b) 从 $z = 0$ 到 $z = i$ 的直线段;

(c) 从 $z = i$ 到 $z = 1 + i$ 的直线段.

解:(a) ∵　$x = y$,

$$\therefore \quad \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 -\mathrm{i}3x^2(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{i};$$

(b) $\because \quad x = 0,$

$$\therefore \quad \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{i}y\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}}{2};$$

(c) $\because \quad y = 1,$

$$\therefore \quad \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1 - x - \mathrm{i}3x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \mathrm{i}.$$

(2) $f(z) = \dfrac{(z+2)}{z},$

C(图 1.3.3) 是：(a) 半圆周 $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$;

(b) 半圆周 $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;

(c) 圆周 $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

解：(a) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} (1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = -4 + 2\pi\mathrm{i};$

(b) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\pi}^{2\pi} (1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 4 + 2\pi\mathrm{i};$

(c) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 4\pi\mathrm{i}.$

(3) $f(z) = \mathrm{e}^z,$

C(图 1.3.4)是：(a) 从 $z = \pi\mathrm{i}$ 到 $z = 1$ 的直线段；

(b) 沿坐标轴从 $z = \pi\mathrm{i}$ 到 $z = 0$ 再到 $z = 1$ 的直线段.

解：因为 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 为解析函数，故对(a)，(b)均有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\pi\mathrm{i}}^1 \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z\Big|_{\pi\mathrm{i}}^1 = 1 + \mathrm{e}.$$

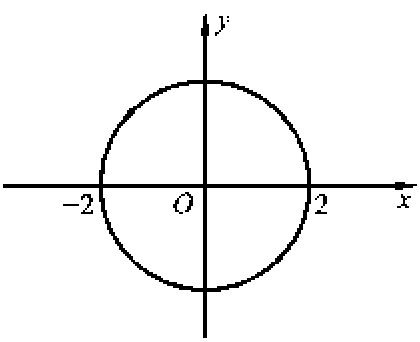

图 1.3.3

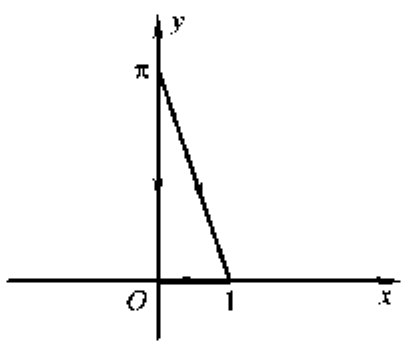

图 1.3.4

(4) $f(z) = z - 1,$

C(图 1.3.5)沿下面路径从 $z = 0$ 到 $z = 2$.

(a) 圆周 $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;

(b) x 轴上线段：$0 \leqslant x \leqslant 2$.

解：因为 $f(z)=z-1$ 为解析函数，故对 (a)，(b) 均有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_0^2(z-1)\mathrm{d}z=\left[\frac{z^2}{2}-z\right]_0^2=0.$$

(5) $f(z)=\begin{cases}4y, & \text{当 } y>0, \\ 1\ , & \text{当 } y<0.\end{cases}$

C (图 1.3.6) 是沿 $y=x^3$ 从 $z=-1-\mathrm{i}$ 到 $z=1+\mathrm{i}$ 的弧段.

解：$\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{-1}^0(1+3\mathrm{i}x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1 4x^3(1+3\mathrm{i}x^2)\mathrm{d}x$

$\qquad\qquad\qquad=2+3\mathrm{i}.$

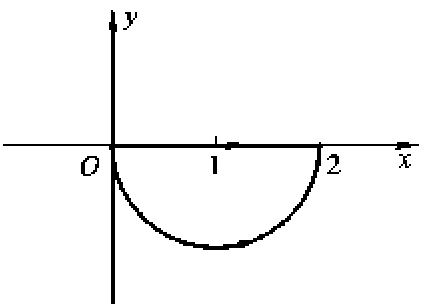

图 1.3.5

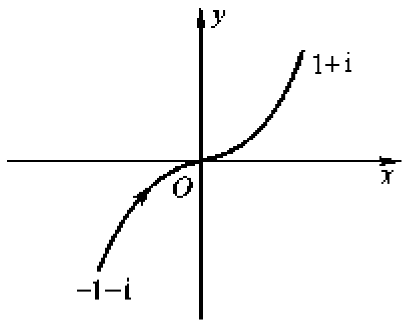

图 1.3.6

3.1.3 求值 $\displaystyle\int_{|z|=1} z^m z^{-n}\mathrm{d}z$， 这里 m,n 为正整数.

解：$\displaystyle\int_{|z|=1} z^m z^{-n}\mathrm{d}z=\int_{|z|=1} z^{m-n}\mathrm{d}z$

$$=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & m-n=-1, \\ 0\ , & m-n\neq -1.\end{cases}$$

3.1.4 证明：如果 C 是以 $z=0, z=1, z=\mathrm{i}, z=1+\mathrm{i}$ 为顶点的正方形的正向边界（如图 1.3.7 所示），那么

$$\int_C(3z+1)\mathrm{d}z=0.$$

证： ∵ $3z+1$ 在整个复平面上解析，

∴ 由柯西定理知结论成立.

3.1.5 设 C 为习题 3.1.4 中的闭曲线，计算 $\displaystyle\int_C \pi e^{\pi\bar{z}}\mathrm{d}z$.

解：$\displaystyle\int_C \pi e^{\pi\bar{z}}\mathrm{d}z=\int_0^1\pi e^{\pi x}\mathrm{d}x+\int_0^1\pi e^{\pi(1-\mathrm{i}y)}\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_1^0\pi e^{\pi(x-\mathrm{i})}\mathrm{d}x+\int_1^0\pi e^{-\pi\mathrm{i}y}\mathrm{i}\mathrm{d}y$

$\qquad\displaystyle=2\int_0^1\pi e^{\pi x}\mathrm{d}x+(1-e^{\pi})\int_0^1-\pi\mathrm{i}e^{-\pi\mathrm{i}y}\mathrm{d}y$

$\qquad=4(e^{\pi}-1).$

3.1.7 设 C 为 $|z|=2$ 上从 $z=2$ 到 $z=2\mathrm{i}$ 在第 Ⅰ 象限的圆弧（图 1.3.8），证明：

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

证：∵ $|z^2-1| \geqslant |z^2|-1=3$,

∴ 由性质知 $\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$.

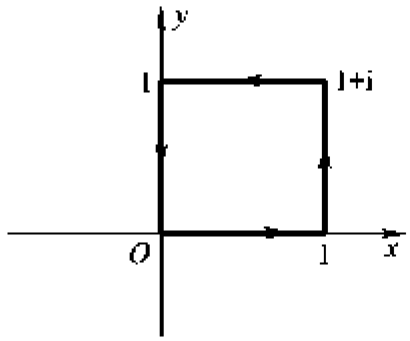

图 1.3.7

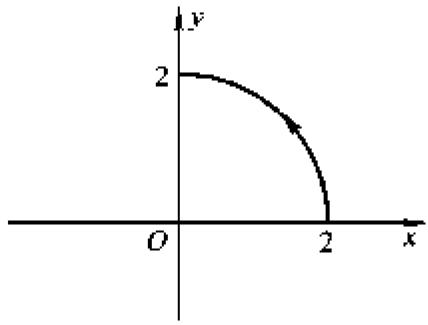

图 1.3.8

3.1.8 设 C 为从 $z=\mathrm{i}$ 到 $z=1$ 的直线段(图 1.3.9)，通过观察线段上点到原点的距离证明：

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right| \leqslant 4\sqrt{2}.$$

证：∵ $|z| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ 由性质知 $\left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right| \leqslant 4\sqrt{2}$.

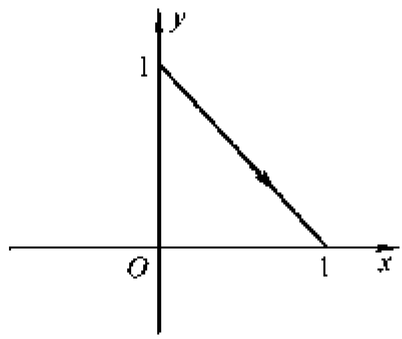

图 1.3.9

3.1.9 令 C_r 为正向圆周 $|z|=r\ (r>1)$，证明：

$$\left|\int_{C_r} \frac{\ln z}{z^2}dz\right| < 2\pi\frac{\pi+\ln r}{r},$$

并且积分值当 r 趋于无穷时而逼近于零.

证：∵ $\left|\frac{\ln z}{z^2}\right| = \left|\frac{\ln r+\mathrm{i}\theta}{r^2}\right| = \frac{\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2}}{r^2} < \frac{\sqrt{(\ln r+\pi)^2}}{r^2}$,

∴ $\left|\int_{C_r} \frac{\ln z}{z^2}dz\right| < \frac{\ln r+\pi}{r^2}\cdot 2\pi r = 2\pi\frac{\pi+\ln r}{r}$.

∵ $\lim\limits_{r\to\infty} 2\pi\frac{\pi+\ln r}{r} = 0$,

∴ $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{\ln z}{z^2}dz = 0$.

3.1.10 证明：(a) 如果 C_0 为正向圆周 $|z-z_0|=R$，$f(z)$在 C_0 上分段连续，那么

$$\int_{C_r} f(z)dz = \mathrm{i}R\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta.$$

(b) 设 C 为正向圆周 $|z|=R$，$f(z)$ 在 C 上分段连续，那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z-z_0)\mathrm{d}z.$$

证：(a) 设 $z-z_0=Re^{i\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+Re^{i\theta})Re^{i\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}R\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+Re^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta;$$

(b) $$\int_C f(z)\mathrm{d}z \xlongequal{z\,=\,w} \int_{|w|=R} f(w)\mathrm{d}w \xlongequal{w\,=\,z-z_0} \int_{|z-z_0|=R} f(z-z_0)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{C_0} f(z-z_0)\mathrm{d}z.$$

3.1.12　设 $f(z)$，$g(z)$ 在单连通域 D 内解析，α,β 是 D 内两点，试证

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)\mathrm{d}z = [f(z)g(z)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(z)g(z)\mathrm{d}z.$$

证：∵　$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$，

∴　$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)\mathrm{d}z = [f(z)g(z)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(z)g(z)\mathrm{d}z.$$

3.1.13　计算 $\int_{|z|=1}|z-1||\mathrm{d}z|$.

解：设 $z=e^{i\theta}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，则

$$\int_{|z|=1}|z-1||\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi}|\cos\theta-1+\mathrm{i}\sin\theta|\mathrm{d}\theta = 8.$$

3.2.1　应用柯西定理证明当 $f(z)$ 为下面各函数时.

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(a) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-3}$；　(b) $f(z)=ze^{-z}$；　(c) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$；

(d) $f(z)=\mathrm{sh}z$；　(e) $f(z)=\tan z$；　(f) $f(z)=\ln(z+2)$.

证：因为以上各函数在曲线 $|z|=1$ 上及曲线 $|z|=1$ 所围区域内解析，故由柯西定理知其积分为零.

3.2.2　设 C 为圆周 $|z|=4$ 和顶点为 $z=\pm1$，$z=\pm\mathrm{i}$ 的正方形所围区域的正向边界，证明当 $f(z)$ 为以下各函数时，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(a) $f(z)=\dfrac{1}{3z^2+1}$；　(b) $f(z)=\dfrac{z+2}{\sin\left(\dfrac{z}{2}\right)}$；　(c) $f(z)=\dfrac{z}{1-e^z}$.

证：因为以上各函数在题目所给的复连通域及其边界上解析，故由柯西定

理在复连通域上的推广定理知其积分为零.

3.2.3 当 C 为矩形 $0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ 的正向边界时,证明:

(a) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i$;

(b) $\displaystyle\int_C (z-2-i)^{n-1}dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(提示:应用例题结果和闭路变形原理.)

证:根据闭路变形原理知

$$\int_C (z-2-i)^{n-1}dz = \int_{|z-2-i|=1} (z-2-i)^{n-1}dz \xlongequal{z-2-i=e^{i\theta}} \int_0^{2\pi} ie^{in\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0\ , & n=\pm 1, \pm 2, \cdots. \end{cases}$$

3.2.4 试由原函数推导对任何从 z_1 到 z_2 的曲线,有

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

解:因为 z^n 为整个复平面上的解析函数,故

$$\int_C z^n dz = \int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

3.2.5 计算下列各积分,积分路径为任意曲线.

(a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}dz$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz$; (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3 dz$.

解:(a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}dz = \frac{1}{\pi}e^{\pi z}\Big|_i^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{\pi i}) = \frac{1}{\pi}(1+i)$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz = 2\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i} = 2\cos i = 2\mathrm{ch}1$;

(c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3 dz = \frac{(z-2)^4}{4}\Big|_1^3 = 0$.

3.2.6 (a) 借助 $\ln z = \ln|z| + i\theta\ (r>0, 0<\theta<2\pi)$ 为 $\dfrac{1}{z}$ 的原函数这一事实,证明

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = -\pi i,$$

积分路径为沿 $|z|=2$ 的左半圆周从 $z=-2i$ 到 $z=2i$(图 1.3.10).

(b) 如果 C 为正向圆周 $|z|=2$,从 (a) 怎样导出 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

解：(a) $\int_{-2i}^{2i}\frac{dz}{z}=[\ln|z|+i\theta]_{-2i}^{2i}$

$=[\ln|z|]_{-2i}^{2i}+[i\theta]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\pi i$;

(b) $\int_C\frac{dz}{z}=-\{[\ln|z|+i\theta]_2^{-2i}+$

$[\ln|z|+i\theta]_{-2i}^{2i}+[\ln|z|+i\theta]_{2i}^{2}\}$

$=2\pi i.$

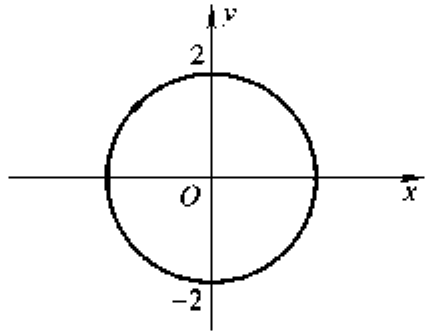

图 1.3.10

3.2.8 设函数 $f(z)$在圆环 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=R(0<R<1)$的积分为零，问 $f(z)$是否必须在 $z=0$ 处解析，试举例说明.

答：未必. 如：$f(z)=\frac{1}{z^2}$(在 $z=0$ 处不解析)时，$\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2}=0.$

3.2.9 (a) 证明当 C 为任何不通过原点的闭曲线时，$\int_C\frac{1}{z^2}dz=0$;

(b) 沿怎样的简单闭曲线有 $\int_C\frac{1}{z}dz=0$;

(c) 沿怎样的简单闭曲线有 $\int_C\frac{dz}{z^2+z+1}=0.$

证：(a) $\because$ $\int_C\frac{1}{z^2}dz=\begin{cases}0, & 当\ C\ 包含\ z=0\ 时;\\ 0, & 当\ C\ 不包含\ z=0\ 时.\end{cases}$

$\therefore$ $\int_C\frac{1}{z^2}dz=0$ (当 C 不过 $z=0$ 时)；

(b) 当 C 为不包含原点的简单闭曲线时，$\int_C\frac{1}{z}dz=0$;

(c) 当 $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 均不被简单闭曲线 C 包围或全部被包围时，

$$\int_C\frac{dz}{z^2+z+1}=0.$$

3.2.10 设 $f(z)$在单连通域 B 内处处解析，且不为零，C 为 B 内任一简单闭曲线，问积分 $\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 是否为零，为什么？

解：因为 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 B 内解析，所以

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0.$$

3.3.1 计算积分

(a) $\int_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z-2}dz$; (b) $\int_{x^2+y^2=2x}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$;

(c) $\oint_C \frac{z}{(2z+1)(z-2)}\mathrm{d}z$, $C: |z|=1$; $|z-2|=1$; $|z-1|=\frac{1}{2}$; $|z|=3$;

(d) $\oint_{|z-i|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-\mathrm{i}}$;　　(e) $\oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z\quad(a>1)$;

(f) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, C:不过 $z=\pm 3\mathrm{i}$ 的任意简单正向闭曲线;

(g) $\oint_{|z+i|=\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z$;　　(h) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}$.

解: (a) $\oint_{|z-2|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^z\Big|_{z=2} = 2\pi\mathrm{e}^2\mathrm{i}$;

(b) $$\oint_{x^2+y^2=2x}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{x^2+y^2=2x}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i};$$

(c) $\oint_C \frac{z}{(2z+1)(z-2)}\mathrm{d}z = \oint_C\left[\frac{1}{5(2z+1)}+\frac{2}{5(z-2)}\right]\mathrm{d}z$,

如图 1.3.11 所示,当 $|z|=1$ 时,原式 $=\frac{\pi}{5}\mathrm{i}$;

当 $|z-2|=1$ 时,原式 $=\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}$;

当 $|z-1|=1/2$ 时,原式 $=0$;

当 $|z|=3$ 时,原式 $=\pi\mathrm{i}$.

(d) $\because\quad z^2=\mathrm{i}$,

$\therefore\quad z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, z=\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}}$,

由图 1.3.12 知,$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ 在 $|z-\mathrm{i}|=\frac{3}{2}$ 内,

$$\therefore\quad \oint_{|z-i|=3/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-\mathrm{i}} = \oint_{|z-i|=3/2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})(z-\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}})}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{z-\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}}}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

(e) $\because\quad z^4=1$,

$\therefore\quad z=\pm 1, \pm\mathrm{i}$,

$$\therefore\quad \oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = \frac{z\cdot 2\pi\mathrm{i}}{(z^2+1)(z+1)}\Big|_{z=1} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}.$$

(f) $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} = \oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})}$,

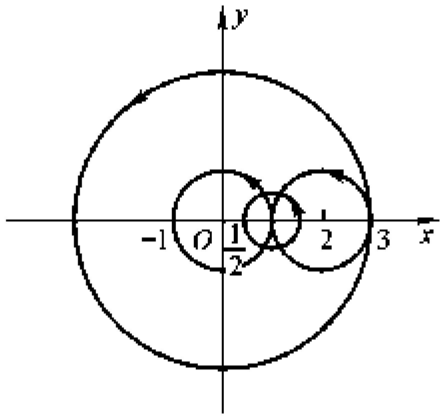

图 1.3.11

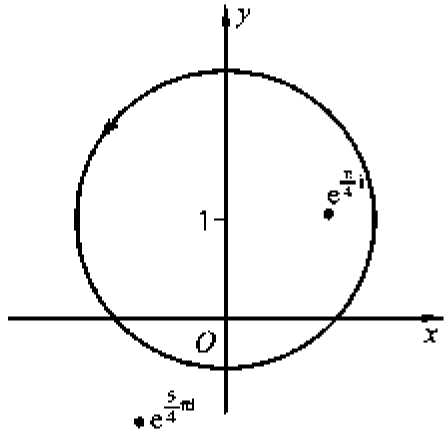

图 1.3.12

当 C 不包含 $\pm 3i$ 时，原式 $= 0$；

当 C 包含 $3i$，不包含 $-3i$ 时，原式 $= \left.\dfrac{2\pi i}{z+3i}\right|_{z=3i} = \dfrac{\pi}{3}$；

当 C 包含 $-3i$，不包含 $3i$ 时，原式 $= \left.\dfrac{2\pi i}{z+3i}\right|_{z=-3i} = -\dfrac{\pi}{3}$；

当 C 包含 $\pm 3i$ 时，原式 $= \displaystyle\int_C \frac{1}{6i}\left[\frac{1}{z-3i} - \frac{1}{z+3i}\right]dz = \frac{2\pi i}{6i}(1-1) = 0.$

(g) $$\int_{|z+i|=\frac{5}{2}} \frac{e^z}{z(z-i)}dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-i)}dz + \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-i)}dz$$
$$= \left.\frac{e^z}{z}\cdot 2\pi i\right|_{z=i} + \left.\frac{e^z}{z-i}\cdot 2\pi i\right|_{z=0}$$
$$= 2\pi(e^i - 1);$$

(h) $$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}i} - \frac{1}{z+\sqrt{2}i}\right)dz$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-1) = 0.$$

3.3.2　设 C 为单位圆周：$|z|=1$，由 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z+2}$ 之值证明：
$$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0.$$

证：∵ $$\int_C \frac{dz}{z+2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\theta + i\cos\theta)(2+\cos\theta - i\sin\theta)}{(2+\cos\theta + i\sin\theta)(2+\cos\theta - i\sin\theta)}d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} i\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 2i\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta,$$

又 ∵ $$\int_C \frac{dz}{z+2} = 0,$$

∴ $$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0.$$

3.3.3 计算积分 $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$，从而证明：

$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi.$$

解：∵ $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos\theta+i\sin\theta}}{\cos\theta+i\sin\theta}(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}ie^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}(-\sin\sin\theta + i\cos\sin\theta)d\theta$$

$$= 2i\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta,$$

∵ $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz = e^z\Big|_{z=0}\cdot 2\pi i = 2\pi i,$

∴ $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi.$

3.3.4 设曲线 $C: x^2+y^2=3$，函数 $f(z)=\int_C\frac{3\zeta^2-7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解：∵ $f(z)=\begin{cases}2\pi i(3z^2-7z+1), & z \text{ 在 } C \text{ 内},\\ 0, & z \text{ 不在 } C \text{ 内}.\end{cases}$

∴ $f'(1+i)=2\pi i(6z-7)\Big|_{z=1+i}=-2\pi(6+i).$

3.3.5 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任一条简单闭曲线，它的内部包含于 D，如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

证：在 C 内任取一点，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

∵ 在 C 上处处有 $f(z)=g(z)$，

∴ $\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_C\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$

∴ 当 z 在 C 内时，$f(z)=g(z)$.

3.4.1 计算积分

(a) $\int_{|z+i|=5}\frac{z^3-z}{(z-4)^3}dz$;　　(b) $\int_{|z|=1}\frac{ze^z}{(4z+\pi i)^2}dz$;

(c) $\int_{4x^2+y^2=2y}\frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2}dz$;

(d) $\int_C\frac{\sin 2z}{z^4}dz$; $C: x=\pm2, y=\pm2$ 围成的正方形正向曲线；

(e) $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}dz$;　　　　(f) $\int_{|z|=1}z^{-2n-1}\cos z\,dz$;

(g) $\int_{C_1+C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz$, $C_1:|z|=2$, $C_2:|z|=3$;

(h) $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$; C:不过 $z=\pm ai$ 的简单正向闭曲线;

(i) $\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-i)^4}dz$;　　　　(j) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z-1)^2(z-3)^5}$.

解: (a) $\int_{|z+i|=5}\frac{z^3-z}{(z-4)^3}dz=(z^3-z)''\Big|_{z=4}\cdot\frac{2\pi i}{2!}=24\pi i.$

(b) $\int_{|z|=1}\frac{ze^z}{(4z+\pi i)^2}dz=2\pi i\left(\frac{z}{16}e^z\right)'\Big|_{z=-\frac{\pi i}{4}}=\frac{\pi(\pi+4i)(1-i)}{32\sqrt{2}}.$

(c) $\int_{4x^2+y^2=2y}\frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2}dz=\left[\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}\cdot 2\pi i=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{2}i.$

(d) $\int_C\frac{\sin 2z}{z^4}dz=[\sin 2z]'''_{z=0}\cdot\frac{2\pi i}{3!}=-\frac{8}{3}\pi i.$

(e) $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}dz=[e^z]^{(99)}_{z=0}\cdot\frac{2\pi i}{99!}=\frac{2\pi i}{99!}.$

(f) $\int_{|z|=1}z^{-2n-1}\cos z\,dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\cos^{(2n)}z\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(2n)!}\cos(z+n\pi)$

$=\frac{(-1)^n 2\pi i}{(2n)!}.$

(g) $\int_{C_1+C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz=\int_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}dz-\int_{C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz=0.$

(h) 当 $\pm ai$ 均不被 C 包含时,原式 $=0$;

当 C 包含 ai,不含 $-ai$ 时,

$$原式=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{(z+ai)^2}\right]'_{z=ai}=-\frac{i}{4a^3};$$

当 C 含 $-ai$,不含 ai 时,

$$原式=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{(z-ai)^2}\right]'_{z=-ai}=\frac{i}{4a^3};$$

当 C 既包含 $-ai$,又包含 ai 时,

$$原式=-\frac{i}{4a^3}+\frac{i}{4a^3}=0.$$

(i) $\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-i)^4}dz=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z-i)^4}dz+\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z-i)^4}dz$

$$=\frac{e^z}{(z-i)^4}\bigg|_{z=0}\cdot 2\pi i+\left[\frac{e^z}{z}\right]'''_{z=i}\cdot\frac{2\pi i}{3!}$$

$$=2\pi i+\frac{(-3+5i)e^i}{3}\pi i$$

$$=(2-e^i)\pi i-\frac{5}{3}\pi e^i.$$

(j) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z-1)^2(z-3)^5}=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z-1)^2(z-3)^5}+$

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z-1)^2(z-3)^5}$$

$$=\left[\frac{1}{(z-1)^2(z-3)^5}\right]'_{z=0}\cdot 2\pi i+$$

$$\left[\frac{1}{z^2(z-3)^5}\right]'_{z=1}\cdot 2\pi i$$

$$=-2\pi\left(\frac{11}{3^6}+\frac{1}{2^6}\right)i.$$

3.4.3 证明：

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^ne^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

这里 C 是围绕原点的一条简单正向闭曲线.

证：∵ $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^ne^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{z^n}{2\pi i\cdot n!}(e^{z\zeta})^{(n)}\bigg|_{\zeta=0}\frac{2\pi i}{n!}=\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2,$

∴ 原式成立.

3.4.4 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且 $f(0)=1$，求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}.$$

解：$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[\frac{2f(z)}{z}\pm f(z)\pm\frac{f(z)}{z^2}\right]dz$

$$=2f(0)\pm f'(z)\bigg|_{z=0}=2\pm f'(0).$$

3.4.5 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且 $|f(z)|\leqslant 1$，试证 $|f'(0)|\leqslant 1$.

证：∵ $|f'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1,$

∴ 结论成立.

3.4.7 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内任一条正向简单闭曲线，证明对在 D 内，但不在 C 上的任一点 z_0，下面等式成立

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

证：$\because$ $f(z)$ 在 D 内解析，

$\therefore$ $f'(z)$ 在 D 内解析，

$\therefore$ $\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(z_0)$.

又 $\because \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(z_0)$，

故 $\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$.

第 4 章　级　　数

4.1　内容要点

1. 复数项级数

定义 1　如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

的部分和序列

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \quad (N = 1,2,\cdots)$$

收敛于复数 S，则称该级数收敛，S 称为级数的和，记作 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. 否则称该级数发散.

定义 2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛；非绝对收敛的收敛级数，称为条件收敛.

2. 幂级数，阿贝尔定理，收敛圆和收敛半径，和函数的性质

定理 1　对幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

如果下列条件之一成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l$，　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l$，

那么该级数的收敛半径 $R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0. \end{cases}$

3. 解析函数的泰勒展式，一些初等函数的泰勒展开式

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \ (|z| < +\infty).$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} (|z| < +\infty).$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}z^n$$
$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots(|z|<1).$$

$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots(|z|<1)$.

4. 罗朗级数，解析函数的罗朗展式

定理 2 设函数 $f(z)$ 在圆环 $D: R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$ 上解析，则在 D 内

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

C 是正向圆周 $|z-z_0|=\rho$，ρ 是满足 $R_1<\rho<R_2$ 的任意实数.

4.2 教学要求和学习注意点

1. 教学要求

正确理解复数项级数收敛、发散及绝对收敛等概念. 了解幂级数收敛圆的概念，掌握简单的幂级数收敛半径的求法，知道和函数的一些基本性质. 了解泰勒定理，掌握 e^z、$\sin z$、$\ln(1+z)$、$(1+z)^{\alpha}$ 的麦克劳林展开式，并能利用它们将一些简单的解析函数展开为幂级数. 了解罗朗定理. 掌握将简单的函数在圆环内展为罗朗级数的间接方法.

重点：解析函数在圆及圆环内展为级数的方法.

难点：罗朗定理的证明.

2. 学习注意点

(1) 在应用和函数的积分性质求函数的幂级数时，积分下限的设置问题.

题目：$\because\quad (\ln z)'=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{i+z-i}=\dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}(z-i)^n\quad(|z-i|<1),$$

$$\therefore\quad\int_i^z(\ln z)'dz=\int_i^z\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}(z-i)^n dz,\qquad ①$$

$$\ln z\Big|_i^z=\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\frac{(z-i)^{n+1}}{n+1}\Big|_i^z,\qquad ②$$

$$\ln z=\ln i+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n+1}(z-i)^{n+1}\qquad(|z-i|<1).$$

① 式的下限为什么选 i 呢？首先，这个下限不能选 0，因为，下限为 0 代入 ② 式原函数中，函数无意义. 其次，由和函数的积分性质知，积分下限可取满足 $|z-\mathrm{i}|<1$ 的任一点，但选 i 使 ② 式右边代入上、下限后的运算最简单.

(2) 无穷远点的邻域是指点集 $\{z \mid R<|z|<+\infty\}$.

4.3 释疑解难

1. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ 的敛散性.

解：∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n}+\mathrm{i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，部分和序列 $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos\dfrac{\pi}{2}n$，$\sum\limits_{n=1}^{N}\sin\dfrac{\pi}{2}n$ 均有界，

∴ 由狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}$ 收敛.

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ 收敛. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ 为条件收敛.

狄利克雷判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是两个实数串，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和序列有界，a_n 组成单调数串，且趋于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

2. 关于函数 $f(z)$ 展为幂级数时，级数收敛范围的确定.

答：若题目要求将 $f(z)$ 在 z_0 处展为幂级数，则 $f(z)$ 一定满足在 z_0 及其某邻域内解析的条件，这个邻域即为所展幂级数的收敛域. 在使用间接展开法求其幂级数时，要考虑所引用的已有的函数展开式的成立条件. 一般地，所引用的函数展开式的条件即为级数收敛的范围.

例如：将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ 在 $z=1$ 处展为幂级数.

此函数在 $z=1$ 及其邻域 $|z-1|<1$（以 $z=1$ 为心 $f(z)$ 的最大范围的解析域）内解析，因此 $f(z)$ 展为形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$ 的幂级数的收敛范围为 $|z-1|<1$.

例如：将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ 展成关于 z 的幂级数.

分析：从题目本身来看，题目要求结果为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 形式，函数 $f(z)=\frac{1}{z+2}$ 在 $z_0=0$ 及其邻域 $|z|<2$（$|z|<2$ 为 $z=0$ 为心的邻域中 $f(z)$ 的最大范围的解析域）内是解析的. 从使用间接展开法求幂级数的过程

$$f(z)=\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\right)$$

来看应有 $|z|<2$，这与从题目本身得到的收敛范围是一致的.

$$\therefore\quad f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^n \qquad (|z|<2).$$

3. 关于函数 $f(z)$ 展为罗朗级数时，级数收敛范围的确定.

答：当题目要求将 $f(z)$ 在 z_0 处展为罗朗级数时，则 $f(z)$ 必在某圆环 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$ 上满足解析的条件. 这个圆环有的题目已经给出，有的题目没有给出，这时建议在 z 平面上画出 $f(z)$ 的定义域简图来找出这个圆环，这个圆环一般不惟一. 在使用间接展开法求其幂级数时，考虑引用的已有的函数展开式的成立条件，级数的收敛范围为所引用的函数展开式的条件.

例如：将函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处展为罗朗级数.

分析：题目没有给出 $f(z)$ 的解析圆环 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$，从其定义域图形可以看出圆环 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$ 应为 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 及 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$.

结合题目用间接法展为罗朗级数的求解过程：

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n, & 0<\left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|<1\\[2ex] \dfrac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n, & 0<\left|\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|<1\end{cases}\\
&=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n, & 0<|z-\mathrm{i}|<1,\\[2ex] -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(z-\mathrm{i})^n}, & 1<|z-\mathrm{i}|<+\infty.\end{cases}
\end{aligned}$$

级数的收敛范围为 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 及 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$.

这里 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$ 也可取作 $0<|z-\mathrm{i}|<r_2\,(r_2<1)$ 及 $r_1<|z-\mathrm{i}|<+\infty\,(r_1>1)$，但一般我们所选的圆环为 $0<|z-\mathrm{i}|<1$，$1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$，使函数展为级数成立的范围最大.

4. 设在 $|z|<R$ 内解析函数 $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

试证：

若令 $M(r) = \max\limits_{0<\theta\leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$，则有

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad (\text{柯西不等式}),$$

这里 $n = 0, 1, 2, \cdots;\ 0 < r < R$.

证：设 $C: |z| = r\ (r < R)$，则

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_C \left(\frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1}{z^n} + \frac{a_2}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{z} + \cdots \right) dz$$

$$= \int_C \frac{a_0}{z^{n+1}} dz + \int_C \frac{a_1}{z^n} dz + \int_C \frac{a_2}{z^{n-1}} dz + \cdots + \int_C \frac{a_n}{z} dz + \cdots$$

$$= 2\pi i a_n,$$

$$\therefore \quad |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right|$$

$$= \frac{\max\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|}{r^n},$$

$$\therefore \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

5．设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R\,(0 < R < +\infty)$，并且在收敛圆周上一点绝对收敛．证明这个级数对于所有的点 $z\,(|z| \leq R)$ 为绝对收敛．

证明：当 $|z| < R$ 时，由阿贝尔定理知

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

绝对收敛．

当 $|z| = R$ 时，设 z_0 为 $|z| = R$ 上一绝对收敛点，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z_0|^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$$

收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛．

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z| \leq R$ 上绝对收敛．

6．设在 $|z| < R$ 内，解析函数 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$．试证：当 $0 \leq r < R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

[提示：$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$.]

证：∵ $$|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_m \overline{z}^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_m r^m e^{-im\theta},$$

∴ $$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_m r^m e^{-im\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \overline{a}_m r^{m+n} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \overline{a}_m r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \cdot 2\pi,$$

∴ $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

7. 求 $\sin z$ 关于 $(z+\pi)$ 的幂级数，并证明：$\lim\limits_{z\to-\pi} \dfrac{\sin z}{z+\pi} = -1$.

解：∵ $\sin z = \sin(z+\pi-\pi) = -\sin(z+\pi)$,

∴ $$\sin z = -(z+\pi) + \frac{(z+\pi)^3}{3!} - \frac{(z+\pi)^5}{5!} + \frac{(z+\pi)^7}{7!} - \cdots,$$

∴ $$\frac{\sin z}{z+\pi} = -1 + \frac{(z+\pi)^2}{3!} - \frac{(z+\pi)^4}{5!} + \frac{(z+\pi)^6}{7!} - \cdots$$

$$= -1 + (z+\pi)^2\left[\frac{1}{3!} - \frac{(z+\pi)^2}{5!} + \frac{(z+\pi)^4}{7!} - \cdots\right],$$

而级数 $\dfrac{1}{3!} - \dfrac{(z+\pi)^2}{5!} + \dfrac{(z+\pi)^4}{7!} - \cdots$ 在复平面上是收敛的，其和函数记为 $\varphi(z)$，则 $\varphi(z)$ 在复平面上解析，有界．所以

$$\lim_{z\to-\pi} \frac{\sin z}{z+\pi} = -1.$$

4.4 典型例题

例 1 将函数 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ 展成 z 的幂级数.

解：∵ $$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1),$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{-2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)',$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}=\frac{1}{-2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=-\frac{1}{2z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right]'$$

$$=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2nz^{2n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{2(n-1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}\qquad(|z|<1).$$

此题目是要求我们将函数 $f(z)$ 展成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的级数，也就是麦克劳林级数.

例 2　将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z=2$ 处展成泰勒级数.

解：
$$f(z)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{2}{4+(z-2)}-\frac{1}{3+(z-2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z-2}{4}}-\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

$$\left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1\text{ 且 }\left|\frac{z-2}{3}\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2\times 4^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n\quad(|z-2|<3).$$

此题目是要求我们将函数 $f(z)$展成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 的级数，有时题目也叙述成将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 展成 $(z-2)$ 的幂级数.

例 3　将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$在圆环 $0<|z|<1$ 内展成罗朗级数.

解：$\because$
$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}\quad(|z|<1),$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\quad(0<|z|<1).$$

此题目是要求我们将函数 $f(z)$展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$ 的级数，有时题目也叙述

成将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$在 $z=0$ 处展为罗朗级数.

例 4 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$在圆环 $0<|z-1|<1$ 内展成罗朗级数.

解：∵ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$，

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}\quad (0<|z-1|<1).$$

此题目是要求我们将函数 $f(z)$展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-1)^n$ 的级数，有时题目也叙述成将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$在 $z=1$ 处展为罗朗级数.

例 5 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$分别在圆环 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 与 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$ 内展为罗朗级数.

解：当 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 时，

$$\because\quad \frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\left(\frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}\right)'=\mathrm{i}\left(\frac{1}{1+\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}}\right)'$$

$$=\mathrm{i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n\right]'\quad\left(\left|\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{i}^{n+1}(z-\mathrm{i})^{n-1}\quad (|z-\mathrm{i}|<1),$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{i}^{n+1}(z-\mathrm{i})^{n-2}\quad (0<|z-\mathrm{i}|<1).$$

当 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$时，

$$\because\quad \frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\left(\frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}\right)'=-\left(\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)'$$

$$=-\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^{n+1}\right]'\quad\left(\left|\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n(n+1)\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}\quad (1<|z-\mathrm{i}|),$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\mathrm{i}^n}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+3}}\quad (1<|z-\mathrm{i}|<+\infty).$$

此题目是要求我们利用已有展式 $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1)$及 $\dfrac{1}{1-z}=$

$-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$ $(|z|>1)$来求解罗朗展式的问题，括号里的 $|z|<1$ 及 $|z|>1$是展式成立的条件，这一点要引起足够重视. 另外此题目还可叙述成将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$在以 i 为中心的圆环内展为罗朗级数. 这时就要我们自己去找解析圆环了，函数 $f(z)$有两个不解析点 $z=0$ 和 $z=\mathrm{i}$，以 i 为中心的 $f(z)$的解析圆环从图 1.4.1 和图 1.4.2 中可以看出只有：$0<|z-\mathrm{i}|<1$ 及 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$.

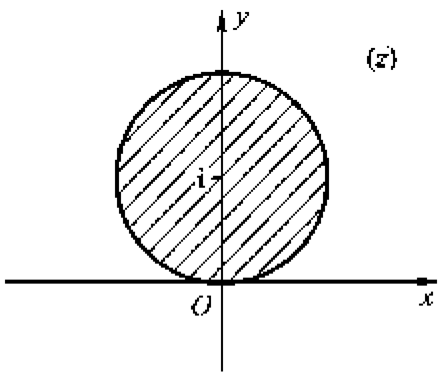

图 1.4.1

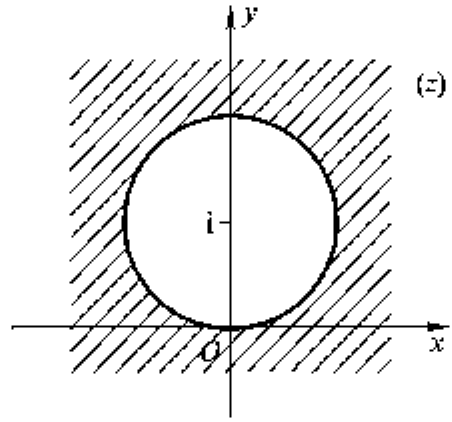

图 1.4.2

例 6　将函数 $f(z)=\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$在 $z=\infty$ 处展成罗朗级数.

解：
$$
\begin{aligned}
f(z)&=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}\\
&=1+\frac{6}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\right)-\frac{2}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z}}\right)\\
&=1+\frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n\quad\left(\left|\frac{4}{z}\right|<1\text{ 且}\left|\frac{3}{z}\right|<1\right)\\
&=1+\sum_{n=0}^{\infty}(6\times4^n-2\times3^n)\frac{1}{z^{n+1}}\quad(4<|z|<+\infty).
\end{aligned}
$$

此题目是要求我们将函数 $f(z)$在 $z=\infty$ 的一个解析邻域内展成形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$ 的罗朗级数，这个邻域在此题目中应为 $4<|z|<+\infty$. 这个题目有时也叙述成将函数 $f(z)=\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$在 $4<|z|<+\infty$ 内展为罗朗级数.

4.5　习题选解

4.1.1　证明序列 $z_n=-2+\mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n^2}$收敛于 -2.

证：方法一

$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-2) = -2,\quad \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0,$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = -2.$

方法二

$\because\quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，

$$|z_n - (-2)| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = -2.$

4.1.2 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

证：$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,$

$\therefore\quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N$，当 $n > N$ 时，$|z_n - z| < \varepsilon$ 成立，

又 $\because\quad \Big||z_n| - |z|\Big| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon,$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|.$

4.1.3 证明：复数序列的极限与其对应的两实数序列极限构成一一对应.

证：设 $z_n = u_n + v_n$，$z = u + v$，

$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ 的必要与充分条件是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u,\quad \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

$\therefore$ 复数序列 $\{z_n\}$ 的极限与其对应的实数序列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 的极限构成一一对应.

4.1.4 设 $\{z_n\}$ 为收敛的复数序列，证明存在一个正数 M，对所有的 n 都有 $|z_n| \leqslant M$ 成立.

证：设 $\{z_n\}$ 收敛于 z. 则取 $\varepsilon = 1$ 时，$\exists\, N$，当 $n > N$ 时，

$$|z_n - z| < 1,$$

$\therefore\quad |z_n| = |z_n - z + z| \leqslant |z_n - z| + |z| < 1 + |z|.$

若记 $M' = \{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_N|\}$，则对所有的 n，

$$|z_n| \leqslant \max\{1 + |z|, M'\} = M.$$

4.1.5 证明：(a) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = z$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{z}$；

(b) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = z$，$c$ 为任意复常数，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n = cz$；

(c) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = T$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T$.

证：(a) $\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} z_n = z$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \bar{z}_n = \bar{z}$，

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{z}$.

(b) $\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} z_n = z$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} cz_n = cz$，

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cz$.

(c) $\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} z_n = S, \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} w_n = T$，

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} (z_n + w_n) = S + T$，

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T$.

4.1.6 考虑余项 $\rho_N(z) = \frac{z}{1-z} - \frac{z(1-z^N)}{1-z} \quad (N = 1,2,3,\cdots)$，证明当 $|z| < 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

证：$\because \quad z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{z(1-z^N)}{1-z}$，

$\therefore \quad \frac{z}{1-z} - \sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{z^{N+1}}{1-z}$.

设 $\rho_N(z) = \frac{z^{N+1}}{1-z}$，则

$$\lim_{N\to\infty} |\rho_N(z)| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|1-z|} \cdot |z|^{N+1} = 0 \quad (|z| < 1),$$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \quad (|z| < 1)$.

4.1.7 记 $z=re^{i\theta}(0<r<1)$，由公式 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\frac{z}{1-z}$，借助级数收敛的必要与充分条件，证明：当 $0<r<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

(注：这个结论在 $r=0$ 时也成立.)

证：∵ $\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\frac{z}{1-z}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\sum_{n=1}^{\infty}(r^n\cos n\theta+\mathrm{i}r^n\sin n\theta),$$

$$\frac{z}{1-z}=\frac{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{1-r\cos\theta-\mathrm{i}r\sin\theta}=\frac{r\cos\theta-r^2+\mathrm{i}r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

注：$r=0$ 时，作为等式结论仍然成立.但推导过程不能用 $z=re^{i\theta}$，因为 $r=0$ 时，θ 无意义.

4.1.8 判断下列级数的敛散性.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}^n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$； (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}$； (c) $\sum_{n=0}^{n}\left(\frac{1+5\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

解：(a) ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\mathrm{i}^n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}^n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\mathrm{i}\sum_{k'=1}^{\infty}(-1)^{k'-1}\ln\left(1+\frac{1}{2k'-1}\right),$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$，$\sum_{k'=1}^{\infty}(-1)^{k'-1}\ln\left(1+\frac{1}{2k'-1}\right)$ 均为收敛的交错级数，

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}^n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛，

∴ 原级数条件收敛；

(b) ∵ $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{34})^n}{n!}$,

∴ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{34})^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{(\sqrt{34})^n}{n!}\right]=0<1$,

∴ $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}\right|$ 收敛，

∴ 原级数绝对收敛；

(c) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\dfrac{1+5\mathrm{i}}{2}\right)^n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{26})^n}{2^n}\neq 0,$

$\therefore$ 原级数发散.

4.2.2 试确定下列幂级数的收敛半径.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$;　　(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nz^n}{2^n}$;　　(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$;

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$;　　(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解: (a) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n+1}:\dfrac{1}{n}\right| = 1,\quad \therefore R=1;$

(b) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{2^{n+1}}:\dfrac{n}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2},\quad \therefore R=2;$

(c) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{2n+1}\right| = 0,\quad \therefore R=\infty;$

(d) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\dfrac{z^{2n+3}}{2n+3}\right| : \left|\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}\right|\right) = |z|^2,\quad \therefore R=1;$

(e) $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = 1,\quad \therefore R=1.$

4.2.4 证明: (a) $\mathrm{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^z\quad (|z|<+\infty)$;

(b) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^6}{5!}-\dfrac{z^{10}}{7!}+\cdots = \dfrac{\sin(z^2)}{z^4}\quad (z\neq 0)$.

证: (a) $\because\quad \mathrm{e}^z = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{z-1} = \mathrm{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n!}\quad (|z|<\infty),$

$\therefore$ 结论成立.

(b) $\because\quad \sin(z^2) = z^2-\dfrac{(z^2)^3}{3!}+\dfrac{(z^2)^5}{5!}-\dfrac{(z^2)^7}{7!}+\cdots,$

$\therefore\quad \dfrac{\sin(z^2)}{z^4} = \dfrac{1}{z^2}-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^6}{5!}-\dfrac{z^{10}}{7!}+\cdots\quad (z\neq 0).$

4.3.1 证明: (a) $\dfrac{1}{z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\quad (|z+1|<1)$;

(b) $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\dfrac{z-2}{2}\right)^n\quad (|z-2|<2)$.

证: (a) $\because\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n = \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n+1}\right]' = \left(\dfrac{z+1}{-z}\right)' = \dfrac{1}{z^2},$

$\therefore$ 结论成立.

(b) $\because\quad \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\dfrac{z-2}{2}\right)^n$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{z-2}{2}\right)^{n+1}\right]'$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\frac{z-2}{2}}{1+\frac{z-2}{2}}\right]' = \frac{1}{z^2} \quad (|z-1|<2),$$

∴ 结论成立.

4.3.2 将下列函数展成 z 的幂级数,并指出展式成立的范围.

(a) $\frac{1}{az+b}$ (a, b 为复数,且 $b \neq 0$); (b) $\int_0^z e^{z^2}dz$;

(c) $\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz$; (d) $\sin^2 z$.

解: (a) $\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{a}{b}z}$

$$= \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n z^n \quad \left(|z| < \left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

(b) $\int_0^z e^{z^2}dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!}dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \quad (|z|<\infty).$$

(c) $\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz = \int_0^z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)dz$

$$= z-\frac{z^3}{3\times 3!}+\frac{z^5}{5\times 5!}-\frac{z^7}{7\times 7!}+\cdots \quad (|z|<\infty).$$

(d) $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\cdots\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}z^{2k} \quad (|z|<+\infty).$$

4.3.3 写出下列函数的幂级数展式至前三个非零项.

(a) $f(z) = \text{Arctan}z$ 展为$\left(z-\frac{1}{4}\right)$的幂; (b) $f(z) = \ln(z-3)$展为$(z-2i)$的幂;

(c) $f(z) = e^{\sin z}$展为 z 的幂; (d) $f(z) = \frac{1}{z^2+16}$展为$(z-3)$的幂.

解: (a) ∵ $(\text{Arctan}z)' = \frac{1}{2i}\left(\text{Ln}\frac{i-z}{i+z}\right)' = \frac{1}{2i}\left(\ln\frac{i-z}{i+z}\right)' = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}-i}\frac{1}{1+\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-i}}-\frac{1}{\frac{1}{4}+i}\frac{1}{1+\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+i}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\frac{1}{4}-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}-i\right)^n}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\frac{1}{4}+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}+i\right)^n}\right]$$

$$=\frac{16}{17}-\frac{128}{289}\left(z-\frac{1}{4}\right)+\cdots\quad\left(\left|z-\frac{1}{4}\right|<\frac{\sqrt{17}}{4}\right),$$

$$\therefore\quad \operatorname{Arctan} z=\frac{i}{2}\ln\frac{4i+1}{4i-1}+\frac{16}{17}\left(z-\frac{1}{4}\right)-\frac{64}{289}\left(z-\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\quad\left(\left|z-\frac{1}{4}\right|<\frac{\sqrt{17}}{4}\right).$$

(b) $\because$ $$[\ln(z-3)]'=\frac{1}{z-3}=\frac{1}{2i-3}\frac{1}{1+\frac{z-2i}{2i-3}}$$

$$=\frac{1}{2i-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^n}\quad(|z-2i|<\sqrt{13}),$$

$$\therefore\quad \ln(z-3)=\ln(2i-3)-\frac{z-2i}{3-2i}-\frac{(z-2i)^2}{2(3-2i)^2}-\cdots\quad(|z-2i|<\sqrt{13}).$$

(c) $\because$ $(e^{\sin z})'|_{z=0}=e^{\sin z}\cos z|_{z=0}=1$,

$(e^{\sin z})\ |_{z=0}=e^{\sin z}(\cos^2 z-\sin z)|_{z=0}=1$,

$$\therefore\quad e^{\sin z}=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\quad(|z|<+\infty).$$

(d) $\because$ $$\frac{1}{z^2+16}=\frac{1}{8i}\left(\frac{1}{z-4i}-\frac{1}{z+4i}\right)$$

$$=\frac{1}{8i}\left(\frac{1}{3-4i}\frac{1}{1+\frac{z-3}{3-4i}}-\frac{1}{3+4i}\frac{1}{1+\frac{z-3}{3+4i}}\right)$$

$$=\frac{1}{8i}\left[\frac{1}{3-4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{(3-4i)^n}-\frac{1}{3+4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{(3+4i)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{25}-\frac{6}{25^2}(z-3)+\frac{11}{25^3}(z-3)^2+\cdots\quad(|z-3|<5).$$

4.3.4 将下列函数在指定点展成幂级数,并指明其收敛的范围.

(a) $\cos z$ 在 $z=\dfrac{\pi}{2}$; (b) $\operatorname{sh} z$ 在 $z=\pi i$; (c) $\operatorname{th} z$ 在 $z=0$.

解: (a) $\because$ $\cos z=\cos\left(z-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore \quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z|<+\infty);$$

(b) $\because$ $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$,

$$e^{z}=e^{z-\pi i+\pi i}=-e^{z-\pi i}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{n}}{n!},$$

$$e^{-z}=e^{-z+\pi i-\pi i}=-e^{-(z-\pi i)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(z-\pi i)^{n}}{n!},$$

$$\therefore \quad \operatorname{sh} z=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-(-1)^{n}\right]\frac{(z-\pi i)^{n}}{n!}$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (|z|<+\infty).$$

(c) 设 $\operatorname{th} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n}z^{n}$,则

$$\operatorname{ch} z\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}z^{n}=\operatorname{sh} z,$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}z^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

比较等式两边同次幂的系数得

$$c_0=0,\ c_2=0,\ c_4=0,\ \cdots,$$

$$c_1=1,\ c_3=-\frac{1}{3},\ c_5=\frac{2}{15},\ \cdots,$$

$$\therefore \quad \operatorname{th} z=z-\frac{1}{3}z^{3}+\frac{2}{15}z^{5}-\cdots \quad (|z|<+\infty).$$

4.3.5 通过以下三种方式推导 $\operatorname{ch} z$ 的麦克劳林展式.

(a) 泰勒展式定理; (b) 恒等式 $\operatorname{ch} z=\cos iz$; (c) 恒等式 $\operatorname{ch} z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

解: (a) $\because$ $\operatorname{ch}^{(n)} z\big|_{z=0}=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ 0, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

$$\therefore \quad \operatorname{ch} z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

(b) $\because \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$,

$$\therefore \quad \mathrm{ch} z = \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

(c) $\mathrm{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

4.3.8 假设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，$f(z_0)=0$，用级数表达 $f(z)$，并证明：

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = f'(z_0).$$

(注：顺便指出这个结果从 $f'(z_0)$ 的定义也可获得).

解：$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

$$= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)^2\left[\frac{f''(z_0)}{2!} + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0) + \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}(z-z_0)^2 + \cdots\right],$$

因为 $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)^2\varphi(z)$，这里 $\varphi(z) = \frac{f''(z_0)}{2!} + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0) + \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}(z-z_0)^2 + \cdots$ 在 z_0 的某邻域内解析，有界，所以

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}[f'(z_0) + (z-z_0)\varphi(z)] = f'(z_0).$$

4.3.9 设 $f(z) = \sin z^2$，通过麦克劳林公式：$\sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$ $(|z| < +\infty)$

证明：

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, f^{(4n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

证：因为

$$\sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

等式的右边没有出现 z^{2n+1} 及 z^{4n} 次幂，故其系数为 0，即

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(4n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

4.3.11 设 $f(z)$ 为整个复平面上的解析函数，它可由下式表达

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad (|z| < +\infty).$$

(a) 通过对复合函数 $g(z) = f[f(z)]$ 求导，将 $g(z)$ 展成麦克劳林级数（写至前三项）；

(b) 应用(a)的结果，推导 $\sin(\sin z)$ 的幂级数.

解：(a) $\because \quad f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2a_2, f'''(0)=6a_3,$

$$f[f(z)]=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^n(z)\ (a_1=1),\ f'[f(z)]=\sum_{n=1}^{\infty} na_n f^{n-1}(z),$$

$$f''[f(z)]=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n f^{n-2}(z),$$

$$f'''[f(z)]=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n f^{n-3}(z),$$

$\therefore$
$$g(0)=f[f(0)]=0,\ g'(0)=f'[f(z)]\cdot f'(z)\Big|_{z=0}=1,$$

$$g''(0)=f''[f(z)]\cdot[f'(z)]^2\Big|_{z=0}+f'[f(z)]\cdot f''(z)\Big|_{z=0}=4a_2,$$

$$g'''(0)=f'''[f(z)]\cdot[f'(z)]^3\Big|_{z=0}+3f'(z)\cdot f''(z)f''[f(z)]\Big|_{z=0}+$$
$$f'[f(z)]\cdot f'''(z)|_{z=0}=12(a_2^2+a_3),$$

$\therefore$
$$g(z)=z+2a_2z^2+2(a_2^2+a_3)z^3+\cdots \quad (|z|<+\infty).$$

(b) $\because \quad \sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots$

$\therefore$ 由(a)的结论可得

$$\sin(\sin z)=z-\frac{z^3}{3}+\cdots \quad (|z|<+\infty).$$

4.4.1 证明：(a) $\ln z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$;

(b) $\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}=\dfrac{-1}{2(z-1)}-3\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n} \quad (0<|z-1|<2)$;

(c) $\dfrac{\operatorname{sh}z}{z^2}=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!} \quad (0<|z|<+\infty)$;

(d) $\csc z=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{3!}z+\left[\dfrac{1}{(3!)^2-5!}\right]z^3+\cdots \quad (0<|z|<\pi)$;

(e) $\dfrac{1}{e^z-1}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}z-\dfrac{1}{720}z^3+\cdots \quad (0<|z|<2\pi)$.

证：(a) $\because \quad \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z-1+1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (|z-1|<1),$

$\therefore$
$$\ln z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1).$$

(b) $\because \quad \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}=\dfrac{1}{z-1}\left(1+\dfrac{3}{z-1-2}\right)$

$$=\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}\right],$$

$$\therefore\quad \frac{z}{(z-1)(z-3)}=-\frac{1}{2(z-1)}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}\quad (0<|z-1|<2).$$

(c) $\because\quad \mathrm{sh}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{sh}z}{z^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}\quad (0<|z|<+\infty).$$

(d) $\because\quad \csc z\cdot\sin z=1,\quad \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots,$

$\therefore$ 设 $\csc z=\frac{1}{z}(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots)$,

$$\therefore\quad a_0+a_1z+\left(a_2-\frac{a_0}{3!}\right)z^2+\left(a_3-\frac{a_1}{3!}\right)z^3$$

$$+\left(a_4+\frac{a_0}{5!}-\frac{a_2}{3!}\right)z^4+\cdots=1,$$

$$\therefore\quad a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=\frac{1}{3!},\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!},\cdots,$$

$$\therefore\quad \csc z=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z+\left[\frac{1}{(3!)^2-5!}\right]z^3+\cdots\quad (0<|z|<\pi).$$

(e) $\because\quad e^z-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$,

$\therefore$ 设$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots)$,

$$\therefore\quad (a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$$

$$=a_0+\left(a_1+\frac{a_0}{2!}\right)z+\left(a_2+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!}\right)z^2+$$

$$\left(a_3+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!}\right)z^3+\cdots$$

$$=1,$$

$$\therefore\quad a_0=1,\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{12},\ a_3=0,\ a_4=-\frac{1}{720},\cdots,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z-\frac{1}{720}z^3+\cdots\quad (0<|z|<2\pi).$$

4.4.3 求 (a) $\frac{\sin z}{z^3}$关于 z 的罗朗展式的前四个非零项;

(b) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$关于$(z-i)$在$0<|z-i|<1$的罗朗展式的前四个非零项，问它们的负幂的最高次是多少？

解：(a) $\dfrac{\sin z}{z^3}=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z^2}{5!}-\dfrac{z^4}{7!}+\cdots\quad(0<|z|<+\infty).$

(b) $\because\quad \dfrac{e^z}{1+z^2}=\dfrac{e^i e^{z-i}}{(z-i)(z+i)},$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n,$$

$$\therefore\quad \frac{e^z}{1+z^2}=\frac{e^i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^{n-1}$$

$$=\frac{e^i}{2i}\left[\frac{1}{z-i}+\left(1+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}\right)(z-i)+\left(-\frac{1}{12}+\frac{i}{8}\right)(z-i)^2+\cdots\right]\quad(0<|z-i|<1),$$

函数$\dfrac{e^z}{1+z^2}$关于$(z-i)$的罗朗展式的负幂的最高次为1.

4.4.4　将下列函数在指定点的去心邻域内展成罗朗级数，并指出其收敛范围.

(a) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2},z=i$；　(b) $z^2e^{\frac{1}{z}},z=0$及$z=\infty$；　(c) $e^{\frac{1}{1-z}},z=1$及$z=\infty$.

解：(a) $\because\quad \dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2},$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n\quad(0<|z-i|<2),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(z+i)^2}=\left(-\frac{1}{z+i}\right)'=-\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2i}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(z^2+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-3}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(z-i)^{n-2}}{(2i)^{n+2}}\quad(0<|z-i|<2).$$

(b) $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{z^n}=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)!}\cdot\dfrac{1}{z^n}\quad(0<|z|<+\infty).$

(c) $e^{\frac{1}{1-z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot\dfrac{1}{(z-1)^n}\quad(0<|z-1|<+\infty),$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}=e^{-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right)^k$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^2 -$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{19}{5!z^5} + \cdots \quad (1 < |z| < +\infty).$$

4.4.5　将下面函数在不同区域内展为级数.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$　$(1 < |z| < +\infty, 0 < |z-1| < 1)$;

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$　$(0 < |z| < 1, 1 < |z-\mathrm{i}| < 2)$;

(c) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)(z+3)}$　$(|z| < 2, 2 < |z| < 3, 3 < |z| < +\infty)$;

(d) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}$　$(0 < |z| < 1$，只要求含到 z^2 的项$)$.

解：(a) $\dfrac{1}{z^2(1-z)} = \dfrac{-1}{z^3}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+3}}$

$$= -\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty).$$

$$\because \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 1),$$

$$\frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n(z-1)^{n-1},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z^2(1-z)} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n(z-1)^{n-2} \quad (0 < |z-1| < 1).$$

(b) $\dfrac{1}{z(1+z^2)} = \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1} \quad (0 < |z| < 1).$$

$$\because \quad \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+\mathrm{i})} - \frac{1}{2(z-\mathrm{i})},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}} \quad (1 < |z-\mathrm{i}| < 2),$$

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}+z-\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{1+\dfrac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n \quad (1<|z-i|<2),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z(1+z^2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+1}}+\frac{1}{2(z-i)}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{(z-i)^{n-1}}{2^{n+1}} \quad (1<|z-i|<2).$$

(c) $\because \quad \dfrac{z-1}{(z-2)(z+3)} = \dfrac{z-1}{5}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+3}\right),$

当 $|z|<2$ 时，

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n+1}},$$

$$\therefore \quad \frac{z-1}{(z-2)(z+3)} = \frac{z-1}{5}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)z^n\right]$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n.$$

当 $2<|z|<3$ 时，

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n+1}},$$

$$\therefore \quad \frac{z-1}{(z-2)(z+3)} = \frac{z-1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}z^n\right]$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}z^n.$$

当 $3<|z|<+\infty$ 时，

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}},$$

$$\therefore \quad \frac{z-1}{(z-2)(z+3)} = \frac{z-1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[2^n+4(-3)^n]\frac{1}{z^{n+1}}.$$

(d) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1}$

$$= \frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2+\cdots \quad (0<|z|<1).$$

4.4.6 求 $f(z)=\dfrac{z}{(2z+1)(z-2)}$在 $z=0$ 处的泰勒展式，在 $z=-\dfrac{1}{2}$及 $z=2$ 处的罗朗展式，并确定其收敛域.

解：$f(z)=\dfrac{z}{5}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{2z+1}\right)$，

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$时，

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^n,$$

$$f(z)=\frac{z}{5}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^n\right]$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-2)^n-\frac{1}{2^n}\right]z^n.$$

当$\dfrac{1}{2}<|z|<2$ 时，

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2z)^{n+1}},$$

$$f(z)=\frac{z}{5}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1}{z^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{1}{z^n}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n z^n}-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

当 $|z|>2$ 时，

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2z)^{n+1}},$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1}{z^{n+1}}\right] \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n z^n} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n - \frac{(-1)^n}{2^n}\right]\frac{1}{z^n}.
\end{aligned}
$$

第 5 章　留　　数

5.1　内容要点

1. 奇点的概念、孤立奇点的分类

2. 留数的概念、留数定理、孤立奇点处留数的计算方法

定义 1　设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 作圆 $C: |z-z_0|=r$，其中 $0<r<R$，称

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

为函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的留数，记为 $\mathrm{Res}(f,z_0)$，这里积分是沿着 C 按正向取的. 即

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

定理 1　设 D 是复平面上的一个有界闭区域，若函数 $f(z)$ 在 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，且它在 D 的边界 C 上也解析，则有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}[\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)+\cdots+\mathrm{Res}(f,z_n)]$$

$$=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k),$$

其中沿 C 的积分是关于区域 D 的正向取的.

留数的计算方法：

(1) 当 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点时，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0;$$

(2) 当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)};$$

(3) 当 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点时，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}.$$

(4) $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right\}.$

(5) 在扩充的 z 平面上，有有限个奇点的函数 $f(z)$ 在各奇点处的留数和为零.

3. 应用留数计算定积分

(1) 令 $z=e^{i\theta}$，由 $\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2iz}$，$\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$，$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ 可将形如

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$$

的积分经换元得到沿 $|z|=1$ 的积分并进行计算，其中 $R(x,y)$ 为有理分式，并且在单位圆周上分母不为零.

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum\text{Res}[R(z),z_k],$$

其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高二次，并且 $R(x)$ 在实轴上没有孤立奇点时积分是存在的，z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的孤立奇点.

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum\text{Res}[R(z)e^{iaz},z_k]\quad(a>0),$$

其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高一次，并且 $R(x)$ 在实轴上没有孤立奇点时积分是存在的，z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的孤立奇点.

5.2 教学要求和学习注意点

1. 教学要求

了解孤立奇点的分类(不包括无穷远点). 正确理解留数的概念，掌握极点处求留数的方法. 理解留数定理，掌握用留数求沿封闭曲线积分的方法，会用留数求一些实积分.

重点：留数的概念和计算方法.

难点：应用留数计算定积分.

2. 学习注意点

(1) 下面计算错在何处?

$$\int_{|z|=1}ze^{\frac{1}{z}}dz\xlongequal{z=\frac{1}{u}}-\int_{|u|=1}\frac{e^u}{u^3}du=-2\pi i\text{Res}\left[\frac{e^u}{u^3},0\right]$$

$$=-2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{u\to0}\left(u^3\frac{e^u}{u^3}\right)''=-\pi i.$$

答：错在第一步. 对变量替换 $z=\dfrac{1}{u}$，若设 $z=e^{i\theta}$，则 $u=e^{-i\theta}$，题目中 $|z|=1$ 按一般约定为正向，变量替换后得到的 $|u|=1$ 事实上是负方向，因此，正确的做法应该是：

$$\int_{|z|=1}ze^{\frac{1}{z}}dz=-\left(-\int_{|u|=1}\frac{e^u}{u^3}du\right)=\pi i.$$

(2) 比较下面关于函数 $f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^2}$ 在孤立奇点 $z=0$ 处求解留数的两种方法，找出问题所在.

方法一：因为 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^2}$ 的一阶极点，所以

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1-e^z}{z^2},0\right]=\lim_{z\to0}z\cdot\frac{1-e^z}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{1-e^z}{z}=-1.$$

方法二：因为 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^2}$ 的一阶极点，所以

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1-e^z}{z^2},0\right]=\left.\frac{1-e^z}{2z}\right|_{z=0}=\lim_{z\to0}\frac{1-e^z}{2z}=-\frac{1}{2}.$$

答：上述解答过程中的方法一是正确的，方法二存在两个问题：① 公式 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\operatorname{Res}\left[\dfrac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 的适用条件是 $P(z_0)\neq0, Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq0$，显然 $f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^2}$ 在 $z=0$ 处不满足这些条件. ② $\left.\dfrac{1-e^z}{2z}\right|_{z=0}\neq\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-e^z}{2z}=-\dfrac{1}{2}$（不等式的左边函数在 $z=0$ 时无定义，$f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 的使用条件是 $f(z)$ 在 z_0 处连续有定义）.

这个题目给我们一个提示：使用公式

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

时注意公式的适用条件.

(3) 无穷远点 ∞ 是任何函数的孤立奇点吗?

答：未必.因为任何一个函数在 $z=\infty$ 处均无定义，所以无穷远点是任何函数的奇点.但它未必是任何函数的孤立奇点，如 $z=\infty$ 就不是函数 $f(z)=\bar{z}$ 的孤立奇点，却是 $f(z)=e^z$ 的孤立奇点.

5.3 释疑解难

1. 孤立奇点 $z_0(|z_0|<+\infty)$ 的分类问题.

方法与步骤

第一步：

找出函数 $f(z)$ 的所有孤立奇点.当题目没有特别强调在扩充复平面上求解时，不必考虑无穷远点 ∞.一般地，我们遇到的题目中函数 $f(z)$ 的孤立奇点基本上均为 $f(z)$ 的表达式无意义的点，如 0 为 $\dfrac{\sin z}{z}$, $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$, $e^{\frac{1}{z}}$, $\dfrac{e^z}{\cos z-1}$ 的孤立奇点，$z=1$, $z_k=1+\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 为 $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$ 的可列个孤立奇点.但我们心里要明白，

还有一些函数如 $f(z)=\bar{z}$，$f(z)=|z|$ 在整个复平面上是处处不解析的，它们没有孤立奇点．原点及负半轴上的点是函数 $f(z)=\mathrm{Ln}z$ 的奇点，但不是孤立奇点．

第二步：

判断 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 是否等于常数，如果是常数，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点．

例如：因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$，所以 $z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点．

第三步：

如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不等于常数，看它是否属于下面两种类型：

① 若 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=c$（$c$ 为不等于 0 的常数），则 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点．

例如：因为 $\lim\limits_{z\to 0}(z-0)^2\dfrac{1}{z^2(z-1)}=-1\neq 0$，所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点．

② 若 $f(z)$ 为分母含三角函数、指数函数情形，则通过分母的零点来判断孤立奇点是否为极点．

例如：函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z-1}$ 的分母有零点 $z=2k\pi$，由于 $(\cos z-1)'\Big|_{z=2k\pi}=0$，$(\cos z-1)''\Big|_{z=2k\pi}=-1\neq 0$，从而 $z=2k\pi$ 为分母 $\cos z-1$ 的二阶零点．又因为 $z=2k\pi$ 不是分子 e^z 的零点，所以 $z=2k\pi$ 为 $f(z)$ 的二阶极点．

例如：函数 $f(z)=\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$ 的分母有零点 $z=2k\pi i(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，由于 $[(e^z-1)^2]'\Big|_{z=2k\pi i}=0$，$[(e^z-1)^2]''\Big|_{z=2k\pi i}\neq 0$，从而 $z=2k\pi i$ 为分母的二阶零点．又因为 $z=2k\pi i$ 当 $k\neq 0$ 时不是分子的零点，故 $z=2k\pi i(k\neq 0)$ 为 $f(z)$ 的二阶极点．当 $k=0$ 时 $z=0$ 为分子的一阶零点，故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一阶极点．

第四步：

如果第三步不易做到，此时只好将 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的解析邻域内展为罗朗级数，依孤立奇点分类的定义来判断其类型．若级数中有无穷多项 $(z-z_0)$ 的负指数幂，则 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，若级数中只有有限项 $(z-z_0)$ 的负指数幂，则 z_0 为 $f(z)$ 的极点（同时可知极点的阶数）．

例如：因为函数 $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^{n-1}}$，故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点．

例如：因为函数 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^m}=\dfrac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots}{z^m}$（$m$ 为整数），所以当 $m\leqslant 2$ 时，$z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点；当 $m>3$ 时，$z=0$ 为 $f(z)$ 的 $m-2$ 阶极点．

在这一步里要求对常用函数的罗朗展式较为熟悉.

2. 无穷远点作为孤立奇点的分类

方法与步骤

第一步：判断$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$是否等于常数，若为常数，则$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点.

例如：$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z-1}{z(z^2-1)}=0$，则$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点.

第二步：令$w=\dfrac{1}{z}$，$\varphi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$，判断$w=0$作为函数$\varphi(w)$的孤立奇点的类型（方法步骤同上面5.3中1所述），依据无穷远点作为孤立奇点的分类的定义下结论.

例如：判断函数$f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$的孤立奇点$z=\infty$的类型.

解：设$w=\dfrac{1}{z}$，$\varphi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$，则

$$\varphi(w)=\frac{e^w}{w},$$

而

$$\lim_{w\to0}\varphi(w)=\lim_{w\to0}w\cdot\frac{e^w}{w}=1,$$

故$w=0$为$\varphi(w)$的一阶极点，即$z=\infty$为$f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$的一阶极点.

例如：判断函数$f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z}$的孤立奇点$z=\infty$的类型.

解：设$w=\dfrac{1}{z}$，$\varphi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$，则

$$\begin{aligned}\varphi(w)&=w\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{w}=w\cdot\frac{e^{\frac{1}{w}}-e^{-\frac{1}{w}}}{2}\\&=w\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!w^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(-w)^n}}{2}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!w^{2k}},\end{aligned}$$

显然，$w=0$为$\varphi(w)$的本性奇点，即$z=\infty$为$f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z}$的本性奇点.

5.4　典型例题

例 1　计算 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)}$.

解：$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z+2)},0\right]=\pi i.$

此题目也可用柯西公式求解.

例 2　计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(z+2)}$.

解：
$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+2)} &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3(z+2)},0\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{1}{z^3(z+2)}\right]'' \\ &= \pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{2}{(z+2)^3} \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{4}.\end{aligned}$$

此题目也可利用高阶导数公式求解.

例 3　计算 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{d}z}{z(2z+1)}$.

解：
$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z(2z+1)} &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(2z+1)},0\right] + 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(2z+1)},-\frac{1}{2}\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(2z+1)} + 2\pi\mathrm{i}\cdot \lim_{z\to -\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z(2z+1)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

此题目也可用多连通域上的柯西公式的结论求解.

例 4　计算 $\oint_{|z|=3} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z+2)}$.

解：
$$\begin{aligned}\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z+2)} &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(z+2)},0\right] + 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(z+2)},-2\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{1}{z^2(z+2)}\right]' + 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{1}{z^2(z+2)} \\ &= -2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{\pi\mathrm{i}}{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

此题目也可用多连通域上的高阶导数公式的结论求解.

例 5　计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{\cos z}$.

解：
$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\cos z} &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\cos z},\frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\cos z},-\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} + 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} \\ &= \left.\frac{2\pi\mathrm{i}}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{2\pi\mathrm{i}}{-\sin z}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

例 6　计算　$\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{dz}{z(z+1)(z+2)^{10}}$.

解：$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z(z+1)(z+2)^{10}}$$

$$=2\pi i\left\{\text{Res}\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)^{10}},0\right]+\text{Res}\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)^{10}},-1\right]\right.$$

$$\left.+\text{Res}\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)^{10}},-2\right]\right\}$$

$$=-2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)^{10}},\infty\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{z}+2\right)^{10}}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+z)(1+2z)^{10}},0\right]=0.$$

这道题目的特点是：被积函数有 10 阶极点 $z=-\frac{1}{2}$，用类似于例 4 的方法求解，将面临 9 阶导数的繁琐计算，本题的解法对这类题目很有代表性.

例 7　计算　$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz$

解：$$\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{6}\text{Res}\left[\frac{z^5}{1+z^6},z_k\right]\quad\left(z_k=e^{\frac{2k+1}{6}\pi i},k=0,1,2,3,4,5\right)$$

$$=-2\pi i\text{Res}\left[\frac{z^5}{1+z^6},\infty\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^5}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^6}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i.$$

这道题目的特点是积分所沿曲线围住了 6 个（较多个数）孤立奇点，这时借助相关结论通过函数在无穷远点的留数来求解题目.

5.5　习题选解

5.1.1　在扩充复平面上找出下列函数的孤立奇点并加以分类，若是极点，指出其阶数.

(a) $\dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$；　(b) $\dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$；　(c) $\dfrac{\sin z}{z^4}$；　(d) $ze^{\frac{1}{z}}$；

(e) $\dfrac{1-\text{ch}z}{z}$；　(f) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；　(g) $\dfrac{e^{2z}}{(1-z)^2}$；　(h) $z\cos\dfrac{1}{z}$；

(i) $\dfrac{e^z-1}{z}$;　(j) $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}$;　(k) $\dfrac{z^6+1}{z(z+1)^2}$;　(l) $\dfrac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$.

解：(a) 孤立奇点为：0，$\pm$ i，∞.

$$\because\quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{2z+1}{z(z^2+1)}=\text{常数},$$

$$\lim_{z\to\pm i}(z\mp i)\cdot\frac{2z+1}{z(z^2+1)}=\text{常数},$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z+1}{z(z^2+1)}=0,$$

$\therefore$　$z=0,\pm i$，为一阶极点，$z=\infty$ 为可去奇点.

(b) 孤立奇点为：1，2，∞.

$$\because\quad \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z^3+i}{z^2-3z+2}=\text{常数},$$

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{z^3+i}{z^2-3z+2}=\text{常数},$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^3+i}{z^2-3z+2}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{1}{u^3}+i}{\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{3}{u}+2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1+iu^3}{u(2u-1)(u-1)}=\infty,$$

$\therefore$　$z=1,2,\infty$ 均为一阶极点.

(c) 孤立奇点为：0，∞.

$$\because\quad \frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!z}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots\xlongequal{z=\frac{1}{u}}u^3-\frac{u}{3!}+\frac{1}{5!u^2}-\frac{1}{7!u^4}+\cdots,$$

$\therefore$　$z=0$ 为三阶极点，$z=\infty$ 为本性奇点.

(d) 孤立奇点为：0，∞.

$$\because\quad ze^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-1}}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{n-1}}{n!},$$

$\therefore$　$z=0$ 为本性奇点，$z=\infty$ 为一阶极点.

(e) 孤立奇点为：0，∞.

$$\because\quad \frac{1-\operatorname{ch}z}{z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!u^{2n-1}},$$

$\therefore$　$z=0$ 为可去奇点，$z=\infty$ 为本性奇点.

(f) 孤立奇点为：0，∞.

$$\because\quad \frac{1-e^{2z}}{z^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{n-4}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1}{u^{n-4}},$$

$\therefore\quad z=0$ 为三阶极点，$z=\infty$ 为本性奇点.

(g) 孤立奇点为：$1,\infty$.

$$\because\quad \lim_{z\to 1}(1-z)^2\cdot\frac{e^{2z}}{(1-z)^2}=\text{常数},\ \lim_{z\to\infty}\frac{e^{2z}}{(1-z)^2}\ \text{不存在},$$

$\therefore\quad z=1$ 为二阶极点 $\quad z=\infty$ 为本性奇点.

(h) 孤立奇点为：$0,\infty$.

$$\because\quad z\cos\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-2n+1}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n-1},$$

$\therefore\quad z=0$ 为本性奇点，$z=\infty$ 为一阶极点.

(i) 孤立奇点为：$0,\infty$.

$$\because\quad \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1,\qquad \lim_{z\to\infty}\frac{e^z-1}{z}\ \text{不存在},$$

$\therefore\quad z=0$ 为可去奇点，$z=\infty$ 为本性奇点.

(j) 孤立奇点为：$0,\infty,\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

$$\because\quad \lim_{z\to\frac{1}{k}}\left(z-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}=\lim_{z\to\frac{1}{k}}\frac{1}{\left(-\frac{\pi}{z^2}\right)\cos\frac{\pi}{z}}=\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi},$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\lim_{u\to 0}\frac{1}{\sin u\pi}=\infty,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}\ \text{不存在}.$$

$\therefore\quad z=0$ 为本性奇点，$z=\frac{1}{k},\infty$ 为一阶极点.

(k) 孤立奇点为：$0,-1,\infty$.

$$\because\quad \lim_{z\to 0}z\frac{z^6+1}{z(z+1)^2}=1,\qquad \lim_{z\to -1}(z+1)^2\frac{z^6+1}{z(z+1)^2}=-2,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^6+1}{z(z+1)^2}\xlongequal{z=\frac{1}{u}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{u^6}+1}{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}+1\right)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1+u^6}{u^3(1+u)^2},$$

$\therefore\quad z=0$ 为一阶极点，$z=-1$ 为二阶极点，$z=\infty$ 为三阶极点.

(l) 孤立奇点为：$(2k+1)i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\infty$.

$$\because\quad [(1+z^2)(1+e^{\pi z})]'\big|_{z=(2k+1)i}=4k(k+1),$$

当 $k=-1,0$ 时上式为 0，当 $k\neq-1,0$ 时上式不为 0.

又 $\because\quad [(1+z^2)(1+e^{\pi z})]''\big|_{z=\pm i}=[2+(\pi^2+4\pi z+2)e^{\pi z}]_{z=\pm i}=\pm4\pi i\neq 0,$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}\ \text{不存在},$$

$\therefore\quad z=\pm i$ 为二阶极点，$z=(2k+1)i\quad(k\neq-1,0)$ 为一阶极点，$z=$

∞ 为本性奇点.

5.1.2　证明：若 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 阶极点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m+1$ 阶极点.

证：$\because$　z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，故有解析函数 $\varphi(z)$ $(\varphi(z_0)\neq 0)$ 使得：

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$

$$f'(z)=\frac{\varphi'(z)(z-z_0)-m\varphi(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\qquad(\text{分子在 } z_0 \text{ 处不为 } 0),$$

$\therefore$　z_0 为 $f'(z)$ 的 $m+1$ 阶极点.

5.1.3　设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点，又是 $g(z)$ 的 n 阶零点，试问下列函数在 z_0 处具有何种性质.

(a) $f(z)+g(z)$；　(b) $f(z)\cdot g(z)$；　(c) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

解：因 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，$g(z)$ 的 n 阶零点，故可设

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\qquad g(z)=(z-z_0)^n\psi(z).$$

其中 $\varphi(z),\psi(z)$ 在 z_0 的某邻域内解析且在 z_0 不为 0.

(a) $\because$　$f(z)+g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)+(z-z_0)^n\psi(z)$,

$\therefore$　当 $m\neq n$ 时，z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 $\min(m,n)$ 阶零点，

当 $m=n$ 时，z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的大于等于 m 阶零点.

(b) $\because$　$f(z)\cdot g(z)=(z-z_0)^{m+n}\varphi(z)\cdot\psi(z)$,

$\therefore$　z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(c) $\because$ $\dfrac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

$\therefore$　当 $m>n$ 时，z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点，

当 $m\leqslant n$ 时，z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 0 阶零点.

5.2.1　求下列函数在孤立奇点处的留数.

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z^4}$；　(b) $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$；　(c) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^2}$；

(d) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$；　(e) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$；　(f) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$；

(g) $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z}$；　(h) $f(z)=ze^{\frac{1}{z-1}}$；　(i) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$ (n 为自然数)；

(j) $f(z)=\dfrac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)^n}$ (m,n 为自然数)；　(k) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$；

(l) $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

解：　(a) $\because$　$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z^2+1)}$，

$\therefore$　$z=0$ 为 $f(z)$ 二阶极点，$z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的一阶极点.

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\left[z^2\cdot\dfrac{1}{z^2(z^2+1)}\right]'=0$，

$\mathrm{Res}[f(z),\pm i]=\dfrac{1}{(z^4+z^2)'}\Bigg|_{z=\pm i}=\pm\dfrac{i}{2}$.

(b) $\because$　$z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$.

(c) $\because$　$z=0$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}z\cdot\dfrac{1-e^{2z}}{z^2}=-2$.

(d) $\because$　$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，

$\therefore$　$\mathrm{Res}\left[f(z),k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]=\dfrac{1}{-\sin z}\Bigg|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}$.

(e) $\because$　$z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

$z^2\sin\dfrac{1}{z-1}=(z-1+1)^2\cdot$

$\left[\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{3!(z-1)^3}+\dfrac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right]$，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),1]=c_{-1}=\dfrac{5}{6}$.

(f) $\because$　$z=-1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

$\sin\dfrac{z}{z+1}=\sin\left(1-\dfrac{1}{z+1}\right)=\sin 1\cos\dfrac{1}{z+1}-\cos 1\sin\dfrac{1}{z+1}$

$=\cos\dfrac{1}{z+1}\sin 1-$

$\left[\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{3!(z+1)^3}+\dfrac{1}{5!(z+1)^5}-\cdots\right]\cos 1$，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),-1]=c_{-1}=-\cos 1$.

(g) $\because$　$z=0$ 为 $f(z)$ 的三阶极点，$z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 0}\left(z^3\cdot\dfrac{1}{z^2\sin z}\right)''=\dfrac{1}{6}$，

$\therefore$　$\mathrm{Res}[f(z),k\pi]=\dfrac{1}{2z\sin z+z^2\cos z}\Bigg|_{z=k\pi}=\dfrac{(-1)^k}{(k\pi)^2}$.

(h) $\because$　$z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = (z-1+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n},$$

$\therefore\quad \operatorname{Res}[f(z),1] = c_{-1} = \dfrac{3}{2}$.

(i) $\because\quad z_k = (-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$\therefore\quad \operatorname{Res}[f(z),(-1)^{\frac{1}{n}}] = \left.\dfrac{z^{2n}}{nz^{n-1}}\right|_{z=(-1)^{\frac{1}{n}}} = -\dfrac{1}{n}e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$.

(j) $\because\quad z = \alpha,\beta$ 分别为 $f(z)$ 的 m 阶, n 阶极点,

$$\therefore\quad \operatorname{Res}[f(z),\alpha] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{1}{(z-\beta)^n}\right]^{(m-1)}$$
$$= (-1)^{m-1}C_{m+n-2}^{m-1}(\alpha-\beta)^{1-m-n},$$
$$\operatorname{Res}[f(z),\beta] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\beta}\left[\frac{1}{(z-\alpha)^m}\right]^{(n-1)}$$
$$= (-1)^{n-1}C_{m+n-2}^{n-1}(\alpha-\beta)^{1-m-n}.$$

(k) $\because\quad z = \pm i$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$\therefore\quad \operatorname{Res}[f(z),\pm i] = \left.\dfrac{e^{\pi z}}{2z}\right|_{z=\pm i} = \pm\dfrac{i}{2}$;

(l) $\because\quad z = 0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点, $z = 1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\therefore\quad \operatorname{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+z-1}{z-1}\right)' = 0,$$
$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \left.\frac{z^2+z-1}{3z^2-2z}\right|_{z=1} = 1.$$

5.2.2 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点,求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]$.

解: $\because$ z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点,故有 z_0 某邻域内的解析函数 $\varphi(z)$ ($\varphi(z_0)\neq 0$),使

$$f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z),$$
$$f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + \varphi'(z)(z-z_0)^m,$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)}\left[m + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}(z-z_0)\right],$$

$$\therefore\quad \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = m.$$

5.2.3 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 n 阶极点,求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]$.

解: $\because$ z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶极点,故有 z_0 的某邻域内的解析函数 $\varphi(z)$ ($\varphi(z_0)\neq 0$),使

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},$$

$$f'(z)=\frac{\varphi'(z)(z-z_0)-n\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)}\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}(z-z_0)-n\right],$$

$$\therefore\quad \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}=-n.$$

5.2.4 求下列各函数在其孤立奇点的留数.

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$; (b) $f(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z-i)^3}$; (c) $f(z)=\dfrac{1}{z(e^z-1)}$;

(d) $f(z)=\cot z$; (e) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+4}$; (f) $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z}$;

(g) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$; (h) $f(z)=\dfrac{\sin^4 z}{z^2}$;

(i) $f(z)=\dfrac{z^{\frac{1}{4}}}{z+i}(|z|>0,0<\arg z<2\pi)$.

解: (a) $\because\ z=\pm 3i$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z),\pm 3i]=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm 3i}=\mp\frac{i}{6}.$$

(b) $\because\ z=i$ 为 $f(z)$ 的三阶极点,

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\frac{z^3+2z}{(z-i)^3}\right]''=3i.$$

(c) $\because\ z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶点, $z=2k\pi i(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{1}{z(e^z-1)}\right]'=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2k\pi i]=\left.\frac{1}{e^z+ze^z-1}\right|_{z=2k\pi i}=\frac{1}{2k\pi i}.$$

(d) $\because\ z=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z),k\pi]=\left.\frac{\cos z}{\cos z}\right|_{z=k\pi}=1.$$

(e) $\because\ z_k=(-4)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}(k=0,1,2,3)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z),z_k]=\left.\frac{z}{4z^3}\right|_{z=z_k}=\frac{(-1)^{k+1}}{8}i.$$

(f) $\because\ z=0$ 为可去奇点, $\therefore\ \mathrm{Res}[f(z),0]=0$.

(g) $\because\ \dfrac{e^z-1}{z^5}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-5}}{n!}$, $\therefore\ \mathrm{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\dfrac{1}{24}$.

(h) $\because\ z=0$ 为可去奇点, $\therefore\ \mathrm{Res}[f(z),0]=0$.

(i) $\because\ z=-i$ 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}] = z^{\frac{1}{4}}\big|_{z=-\mathrm{i}} = (-\mathrm{i})^{\frac{1}{4}}.$

5.2.5　利用留数计算下列积分.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3 - z^5}\mathrm{d}z$;　(b) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$;　(c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{1}{(4+z^2)(z+5\mathrm{i})}\mathrm{d}z$;

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$;　(e) $\displaystyle\int_C \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$, $C: x^2+y^2=2x$;　(f) $\displaystyle\int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\mathrm{d}z$;

(g) $\displaystyle\int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\mathrm{d}z$;　(h) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z$,（$m$ 为正整数）;

(i) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$, C 为不过 0 和 1 的任意简单闭曲线;

(j) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$;　(k) $\displaystyle\int_{|z|=2} \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}\mathrm{d}z$;　(l) $\displaystyle\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}\mathrm{d}z$;

(m) $\displaystyle\int_{|z-2\pi|=2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^z - \mathrm{i}^{\mathrm{i}}}\mathrm{d}z$;　(n) $\displaystyle\int_{|z|=n} \tan \pi z\,\mathrm{d}z$.

解：(a) $\because\quad z=0$ 为三阶极点，$z=\pm 1$ 为一阶极点，

$$\therefore\quad \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)'' = 1,$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5}, \pm 1\right] = \frac{1}{3z^2-5z^4}\bigg|_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \int_{|z|=2} \frac{1}{z^3-z^5}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) $\because\quad z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，故留数为 0，

$$\therefore\quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

(c) $\because\quad z=\pm 2\mathrm{i}$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，

$$\therefore\quad \mathrm{Res}[f(z), \pm 2\mathrm{i}] = \frac{1}{3z^2+10\mathrm{i}z+4}\bigg|_{z=\pm 2\mathrm{i}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{28}, & z=2\mathrm{i}, \\ \dfrac{1}{12}, & z=-2\mathrm{i}, \end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_{|z|=3} \frac{1}{(4+z^2)(z+5\mathrm{i})}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{28}\right) = \frac{2}{21}\pi\mathrm{i}.$$

(d) $\because\quad z=1$ 为被积函数的二阶极点，

$$\therefore\quad \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}, 1\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\right]' = 2\mathrm{e}^2,$$

$$\therefore\quad \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^2.$$

(e) $\because \quad z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$ 为被积函数的一阶极点，

$$\text{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, z_k\right] = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_k} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 \pm i),$$

$$\therefore \quad \int_C \frac{1}{1+z^4}dz = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}i.$$

(f) $\because \quad z = 0$ 为被积函数的本性奇点，

$$\text{Res}\left[\sin\frac{1}{z}, 0\right] = c_{-1} = 1,$$

$$\therefore \quad \int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

(g) $\because \quad z = i$ 为被积函数的一阶极点，

$$\text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right] = \frac{e^{iz}}{2z}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2i}e^{-1},$$

$$\therefore \quad \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \pi e^{-1}.$$

(h) 当 $m \leqslant 2$ 时，$z = 0$ 为可去奇点，积分为 0.

当 $m = 3$ 时，$z = 0$ 为一阶极点，$\text{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m}, 0\right] = \frac{1}{2}$.

当 $m > 3$ 时，$z = 0$ 为 $m-2$ 阶极点，

$$\text{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m}, 0\right] = c_{-1} = (-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{(m-1)!},$$

$$\therefore \quad \int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^m}dz = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-3}{2}}\dfrac{2\pi i}{(m-1)!}, & m \geqslant 3, \\ 0, & m < 3. \end{cases}$$

(i) ① C 不包含 0，1 时，积分为 0.

② C 只包含 0 时，原式 $= 2\pi i \lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sin z}{z-1}\right)' = -2\pi i.$

③ C 只包含 1 时，原式 $= 2\pi i \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sin z}{z^2} = 2\pi i \sin 1.$

④ C 同时包含 0，1 时，原式 $= 2\pi i(-1 + \sin 1)$.

(j) $\because \quad z = 1$ 为二阶极点，

$$\therefore \quad \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\right]' = -2\pi i e^{-1}.$$

(k) $\because \quad z = 0$ 为本性奇点，$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^{2n}}$,

$$\therefore \quad \int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}dz = 2\pi i c_{-1} = 0.$$

(l) $\oint\limits_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),0] = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i.$

(m) $\because$ $f(z)$ 的所有奇点 $z_k = -\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为一阶极点，圆 $|z-2\pi| = 2\pi$ 包含了 z_{-1}, z_{-2}，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k] = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi},$$

$$\therefore \oint\limits_{|z-2\pi|=2\pi} \frac{1}{e^z - i^i}dz = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),z_{-1}] + 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),z_{-2}]$$

$$= 2\pi i(e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{7}{2}\pi}).$$

(n) $\because$ $f(z)$ 的被 $|z| = n$ 包含的所有奇点 $z_k = k+\frac{1}{2}\ (k = 0,\pm1,\cdots,\pm(n-1),-n)$ 均为一阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k] = -\frac{1}{\pi},$$

$$\therefore \oint\limits_{|z|=n} \tan\pi z dz = 2\pi i.2n.\frac{-1}{\pi} = -4ni.$$

5.2.6 试求下列函数在无穷远点的留数.

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$; (b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; (c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$; (e) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$; (f) $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$;

(g) $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}$.

解: (a) $\because$ $f(z) = \frac{1}{z}$,

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1} = -1.$$

(b) $\because$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$,

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1} = -1.$$

(c) $\because$ $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k$,

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = -\sin 1.$$

(d) $\because$ $f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{1}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+1\right)^4\left(\frac{1}{z}-4\right)}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)}$,

$$\lim_{z\to0} f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2} = 0,$$

$\therefore \quad z=0$ 为 $f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}$ 的可去奇点,

$\therefore \quad \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=0.$

(e) $\because \quad e^{z+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n},$

$\therefore \quad \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{k!(k+1)!}.$

(f) $\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin z},0\right]=-\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{\sin z}\right)''\Bigg|_{z=0}=-\frac{1}{6}.$

(g) $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{(1-z^2)^2}{z^2(1-\alpha z)(1-\beta z)},0\right]=-(\alpha+\beta).$

5.2.7 利用定理计算下列各积分.

(a) $\int_C\frac{5z}{z(z-1)}\mathrm{d}z$, C: $|z|=2$;

(b) $\int_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z$, C: $|z|=3$;

(c) $\int_C\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}\mathrm{d}z$, C: $|z|=2$;

(d) $\int_C\frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$, C: $|z|=r>1$ (n 为正整数);

(e) $\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2\sin\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$;

(f) $\int_{|z|=2}\frac{z^5\cos\frac{1}{z}}{1+z^6}\mathrm{d}z.$

解: (a) $\because \quad \operatorname{Res}\left[\frac{5z}{z(z-1)},0\right]=0,$

$\operatorname{Res}\left[\frac{5z}{z(z-1)},1\right]=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{5z}{z(z-1)}=5,$

$\therefore \quad \int_C\frac{5z}{z(z-1)}\mathrm{d}z=2\pi i(0+5)=10\pi i.$

(b) $\because \quad f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}=\frac{\frac{1}{z^{15}}}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)^2\left(\frac{1}{z^4}+2\right)^3}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},$

$\therefore \quad \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=-1,$

$\int_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\{-\operatorname{Res}[f(z),\infty]\}=2\pi i.$

(c) $\because \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)},3\right]=\lim_{z\to3}(z-3)\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}=\frac{1}{242},$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)},\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{\frac{1}{z^2}}{\left(\frac{1}{z^5}-1\right)\left(\frac{1}{z}-3\right)},0\right]=0,$$

$$\therefore\quad \int_C\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-1}{242}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{121}.$$

(d) $\because\quad \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}=z^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{z^{kn}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{z^{(k-1)n}},$

$$\therefore\quad \operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=-c_{-1}=\begin{cases}-1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_C\frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

(e) $\because\quad z=0,\ \pm\dfrac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 均被包含在 $|z|=1$ 内,

$$\therefore\quad \int_{|z|=1}\frac{1}{z^2\sin\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin z},0\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0}=2\pi\mathrm{i}.$$

(f) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^5\cos\frac{1}{z}}{1+z^6}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z(1+z^6)},0\right]=2\pi\mathrm{i}.$

5.3.1 计算下列积分.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta\quad(0<a<1)$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2x}\mathrm{d}x\quad(a>0)$; (d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\quad(|a|<1)$;

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$.

解: (a) $\because\quad \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$

$$=\int_{|z|=1}\frac{4}{2z^2+5\mathrm{i}z-2}\mathrm{d}z,$$

$z=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ 为 $|z|=1$ 所包含的孤立奇点,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{4}{2z^2+5iz-2}, -\frac{i}{2}\right] = \frac{4}{4z+5i}\bigg|_{z=-\frac{i}{2}} = -\frac{4}{3}i,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}+\sin\theta}d\theta = 2\pi i\left(-\frac{4}{3}i\right) = \frac{8}{3}\pi.$$

(b) $\because$ $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = \int_{|z|=1}\frac{1}{1-2a\cdot\frac{z^2+1}{2z}+a^2}\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{i}{a}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1},$$

$z = a$ 为 $|z| = 1$ 所包含的孤立奇点，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1}, a\right] = \frac{1}{2z-\left(a+\frac{1}{a}\right)}\Bigg|_{z=a} = \frac{1}{a-\frac{1}{a}},$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = 2\pi i\cdot\frac{i}{a}\frac{1}{a-\frac{1}{a}} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

(c) $\because$ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2x}dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\sin^2x} = \frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}\frac{dz}{iz}$$

$$= i\int_{|z|=1}\frac{z}{z^4-2(2a+1)z^2+1}dz,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^4-2(2a+1)z^2+1}, \pm\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2+a}}\right]$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{a^2+a}},$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2x}dx = 2\pi i\cdot i\cdot\left(-\frac{2}{8\sqrt{a^2+a}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}.$$

(d) $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\sin\theta}d\theta = \int_{|z|=1}\frac{1}{1+a\cdot\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}$$

$$= \int_{|z|=1}\frac{1}{\frac{a}{2}z^2+iz-\frac{a}{2}}dz$$

$$= 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\frac{a}{2}z^2+iz-\frac{a}{2}}, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}i\right]$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right]$

$$= \pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right]'$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

(f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4}, z_k\right]$ （z_k 为函数在上半平面上的孤立奇点）

$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} + \frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(g) $\because \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{i}az}, z_k] \quad (a>0)$，

$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z^2+1},\mathrm{i}\right]\right\} = \pi\frac{e^{\mathrm{i}z}}{2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}$$

$$= \frac{\pi}{2e}.$$

(h) 原式 $\xlongequal{t=x+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-1}{t^2}\sin(t-1)\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-1}{t^2}\cos 1\sin t - \frac{t-1}{t^2}\sin 1\cos t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\cos 1 + \frac{\cos t}{t^2}\sin 1\right)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\cos 1 + \sin 1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \pi\cos 1 + \sin 1\left[-\frac{1}{t}\cos t\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sin t}{-t}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \pi(\cos 1 - \sin 1).$$

(i) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\int_\varepsilon^\gamma \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x + \int_{-\gamma}^{-\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x\right],$$

而 $\int_{-\gamma}^{-\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\gamma\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z +$

$\int_{\Gamma_\gamma}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)},\mathrm{i}\right]$，

如图 15.1 所示，

$$\int_{\Gamma_\gamma}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\to 0(\gamma\to\infty),$$

$$\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k,$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=-\pi i,$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)},i\right]=\frac{e^{iz}}{3z^2+1}\bigg|_{z=i}=-\frac{e^{-1}}{2}.$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\left[2\pi i\left(-\frac{e^{-1}}{2}\right)+\pi i\right]\left(-\frac{i}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-e^{-1}).$$

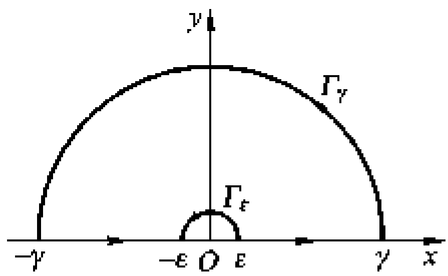

图 1.5.1

(j) $\because\quad \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iaz},z_k\right](a>0),$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\pi i\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)},z_k\right]\right\}\quad(z_1=i,z_2=3i)$$

$$=\frac{\pi}{16}\left(e^{-1}-\frac{e^{-3}}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{48e^3}(3e^2-1).$$

第 6 章　保 形 映 照

6.1　内容要点

1. 解析函数的导数的几何意义、保形映照的概念

2. 分式线性映照及其性质、简单区域之间的保形映照

分式线性映照 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$具有保角性、保圆性、保对称性.

分式线性函数 $w=\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}(\mathrm{Im}(z_0)>0)$将 z 平面的上半平面 $\mathrm{Im}(z_0)>0$ 映照成 w 平面的单位圆 $|w|<1$.

分式线性函数 $w=\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}(|z_0|<1)$将 z 平面的单位圆 $|z|<1$ 映照成 w 平面的单位圆 $|w|<1$.

3. 幂函数 $w=z^{\alpha}$(α 为正有理数)、指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 构成的映照

幂函数 $w=z^{\alpha}$ 将角形域映照成角形域.

指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 将带形域映照成角形域.

6.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

了解导数的几何意义及保形映照的概念.掌握分式线性映照的性质,了解 $w=z^{\alpha}$(α 为正有理数)和 $w=\mathrm{e}^z$ 的映照性质.会求一些简单区域(如平面、半平面、角形域、圆、带形域等)之间的保形映照.

重点:分式线性映照.

难点:分式线性映照的运用.

2. 学习注意点

在应用分式线性映照的保角性时应避免犯如下错误.

题目:画出如图 1.6.1 中直线 C_1, C_2 经分式线性函数 $w=\dfrac{z-(1+i)}{z-2(1+i)}$映照的像 C_1', C_2'.

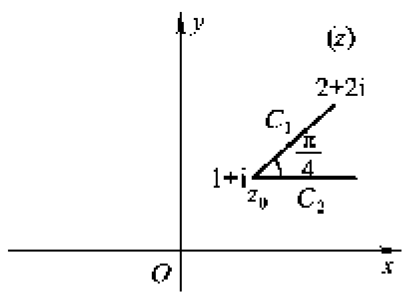

图 1.6.1

解:直线 C_1 经 $w=\dfrac{z-(1+i)}{z-2(1+i)}$映照成 w 平

面上的 C_1', C_2 与 C_1 在 $1+\mathrm{i}$ 处的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，所以 C_2' 的像 C_2' 应与 C_1' 夹角为 $\frac{\pi}{4}$，位置如图 1.6.2 所示.

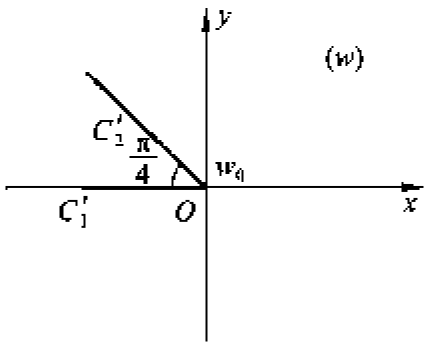

图 1.6.2

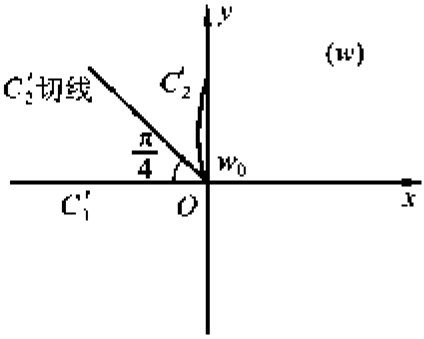

图 1.6.3

答：正确的 C_1, C_2 的像如图 1.6.3 所示.分式线性函数的保角性指的是两条曲线 C_1, C_2 在交点 z_0 处切线的夹角等于这两条曲线在 z_0 的像点 w_0 处像曲线 C_1', C_2' 的切线的夹角.而不是题目解中所示的那样的情形.

6.3 释疑解难

1. 若 $w=f(z)$是在 D 内解析的函数，$z_0\in D$，$w_0=f(z_0)$，$f'(z_0)\neq0$，那么 $w=f(z)$把 z_0 的一个邻域内任一小三角形映照成含 w_0 的一个区域内的曲边三角形.

答：$\because$ $w=f(z)$为 D 内的解析函数，$w_0=f(z_0)$，

$\therefore$ $w=f(z)$将 z 平面上有限区域 D 映照为 w 平面上有限区域 G.记 D_1 为 z_0 邻域内的任一小三角形，对 $\forall\, z\in D$，有

$$w=f(z)\in G \text{ 且} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}\approx|f'(z_0)|\neq0,$$

$\therefore$ w 属于 w_0 的邻域：$|w-w_0|\approx|f'(z_0)||z-z_0|$，

$\therefore$ $f(D_1)$属于 w_0 的邻域：$|w-w_0|\approx|f'(z_0)||z-z_0|$.

$\because$ $\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|}\to|f'(z_0)|\quad(z\to z_0)$，

$\therefore$ $f(D_1)$与 D_1 形状大致相似，为曲边三角形.

2. 若 $w=f(z)$在 z_0 解析，且 $f'(z_0)\neq0$，则曲线 C 经过映照 $w=f(z)$后在 z_0 处的转动角与伸缩率跟曲线 C 的形状和方向无关.

答：因为曲线 C 经过映照 $w=f(z)$后在 z_0 处的转动角与伸缩率分别为 $\arg f'(z_0)$，$|f'(z_0)|$，这二者的值只与 $w=f(z)$和 z_0 有关，而与经过 z_0 的曲线的形状及方向无关，所以结论正确.

3. 若分式线性映照 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq0)$将 z 平面上圆周 C 映照为 w 平

面上的圆周 C'.那么,C 的“内部”整个映成 C' 的“内部”或“外部”.

答:设 z_1,z_2 为 C 的“内部”的任意两点,用直线段把这两点联结起来.如果线段 z_1z_2 的像为曲线弧 $\overset{\frown}{w_1w_2}$(或直线段),且 w_1 在 C'之外,w_2 在 C'之内,那么弧 $\overset{\frown}{w_1w_2}$必与 C'交于一点 Q,Q 在 C' 上,所以 Q 必须是 C 上某一点的像,但从假设,Q 又是 z_1z_2 上某一点的像,因而就有两个不同的点(一个在圆周 C 上,另一个在线段 z_1z_2 上)被映照成同一点,这与分式线性映照的一一对应相矛盾,故上述结论是正确的,即 C 的“内部”不可能部分映照为 C' 的“内部”,部分映照为 C' 的“外部”.

另外,通过对幂函数将角形域映照为角形域,指数函数将带形域映照为角形域的特点的分析.我们知道,这两种映照不具有在将 z 平面上区域 D 的内部映照为 w 平面上的区域 G 的内部(外部)时,同时还将 D 的外部映照为 G 的外部(内部)的性质.

4. ① 若圆弧 C 上一点经过 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$映照成 w 平面上的无穷远点,则 C 映照成 w 平面上的一条直线.

② 若两相交圆弧的一交点经过 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$映照成 w 平面上的无穷远点,则这两圆弧所围区域映照成角形域.

答:① 由于分式线性映照在扩充复平面上具有保圆性,当圆弧 C 上一点经过 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$映照成 w 平面上的无穷远点时,说明这段弧映照成了半径为无穷大的圆上的圆弧,而半径为无穷大的圆周被看作是直线,因此圆弧 C 的像为直线.

② 两圆弧 C_1,C_2 相交于 z_0 点,而 z_0 点经 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$映照成无穷远点.$C_1,C_2$ 的像由①知为直线 C_1',C_2',而分式线性映照使 z 与 w 为一一对应,所以 z_0 的像 w_0 为 C_1',C_2' 的交点,从而 C_1',C_2' 所围的区域为角形域.

5. 当 n 为正整数时,幂函数 $w=z^n\left(0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}\right)$和 $w=z^{\frac{1}{n}}(0<\arg z<2\pi)$将 z 平面上的角形域映照成 w 平面上的角形域.如若括号内的条件不满足,用此结论需慎重.

6.4 典型例题

例 1 求将半径为 1,圆心分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处的两圆的公共部分映照为上半平面的函数.

解:① 将所给区域通过分式线性函数先映照为 ω 平面上顶角为 $\dfrac{2}{3}\pi$ 的角

形域(图 1.6.4(b)),

$$\omega = \frac{z - \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}{z - \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}},$$

其中 $\omega(0) = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \omega(1) = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

② 将 ω 平面上角形域旋转 $-\frac{2\pi}{3}$ 得到 ζ 平面上角形域(图 1.6.4(c)),

$$\zeta = \omega e^{-\frac{2}{3}\pi \mathrm{i}}.$$

③ 通过幂函数将 ζ 平面上角形域映照为 w 平面的上半平面(图 1.6.4(d))

$$w = \zeta^{\frac{3}{2}}.$$

综上所述

$$w = -\left(\frac{2z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

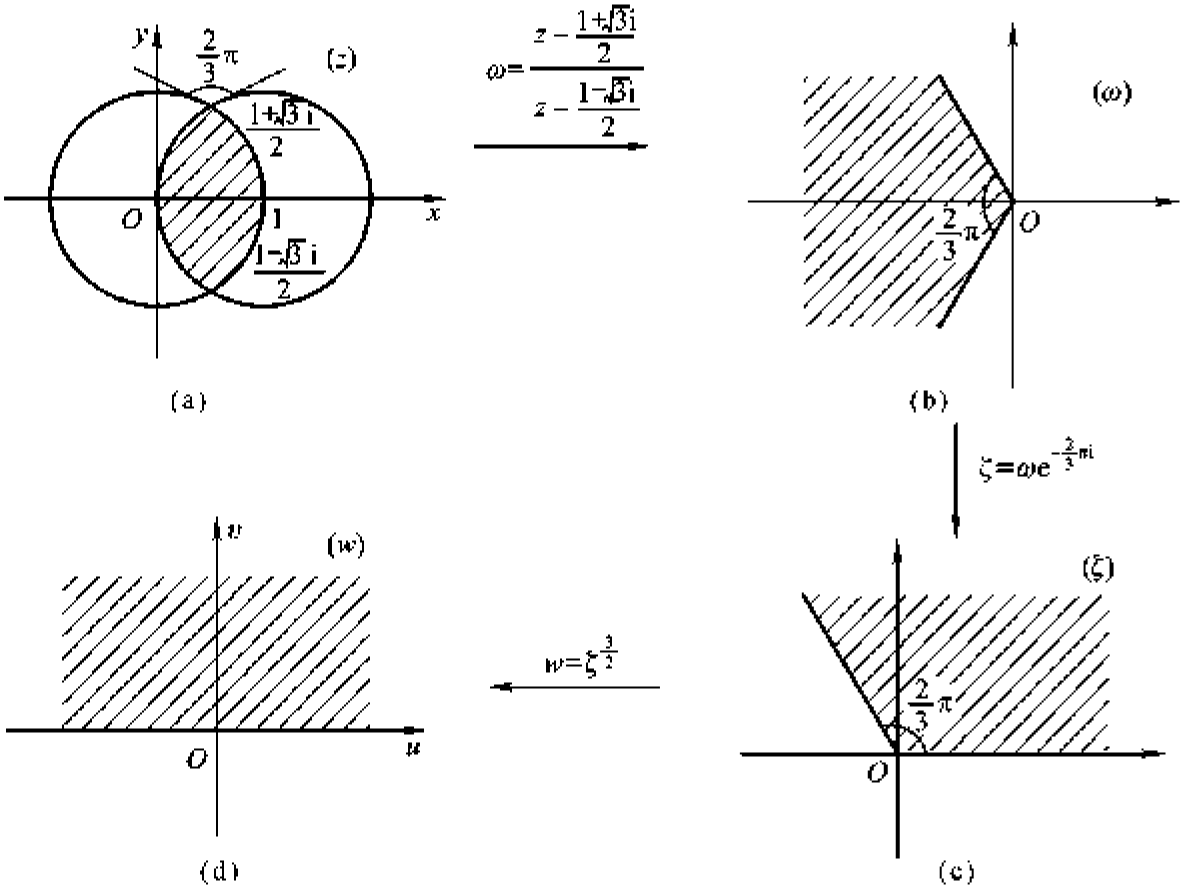

图 1.6.4

例 2 求将以单位圆周 C 及与此圆相切于点 $z=\mathrm{i}$ 的直线 L 为边界的区域映照为上半平面的函数.

解：① 通过分式线性函数将原区域映照为 ω 平面上的带形域(图 1.6.5(b))

$$\omega=\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}},$$

这里直线映照成 $\mathrm{Re}(\omega)=1$，圆周映照成 $\mathrm{Re}(\omega)=0$，阴影映照成 $0<\mathrm{Re}(\omega)<1$.

② 旋转 ω 平面上的带形域成 ζ 平面上的带形域(图 1.6.5(c))

$$\zeta=\omega\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\mathrm{i}\omega.$$

③ 通过指数函数将 ζ 平面上的带形域映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.5(d))

$$w=\mathrm{e}^{\pi\zeta}.$$

综上所述

$$w=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}.$$

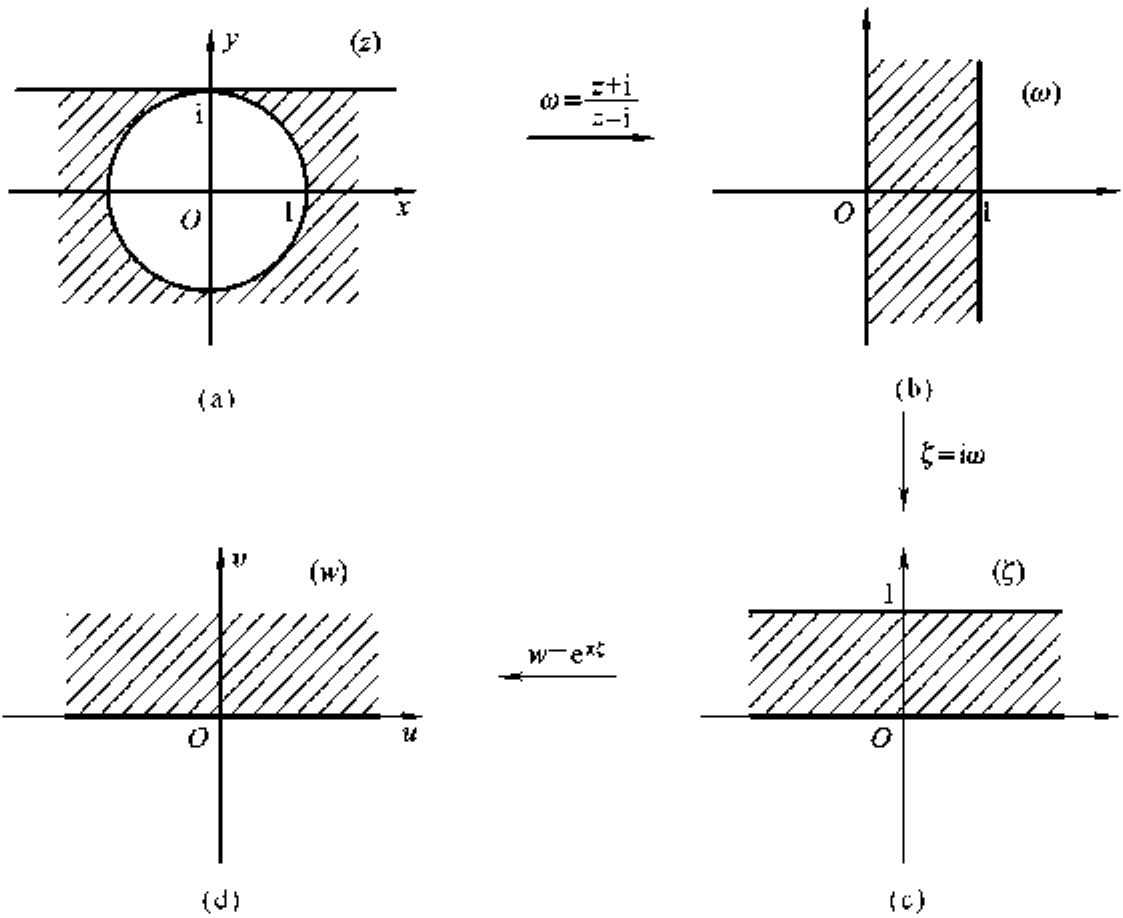

图 1.6.5

例 3　设在 z 平面上有一带截痕 $-\infty<\mathrm{Re}(z)\leqslant 1$，$\mathrm{Im}(z)=\mathrm{i}$ 的带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<2$，试将这区域映照为上半平面.

解：① z 平面上带截痕的带形域映照成 ω 平面上带截痕的带形域(图 1.6.6(b))

$$\omega = e^{\frac{\pi}{2}z}.$$

② 应用幂函数将 ω 平面上带截痕的带形域映照成 ζ 平面上带截痕的带形域(图 1.6.6(c))

$$\zeta = \omega^2.$$

③ 平移 ζ 平面上带截痕的带形域并经幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.6(d))

$$w = \sqrt{\zeta + e^{\pi}}.$$

综上所述

$$w = \sqrt{e^{\pi z} + e^{\pi}}.$$

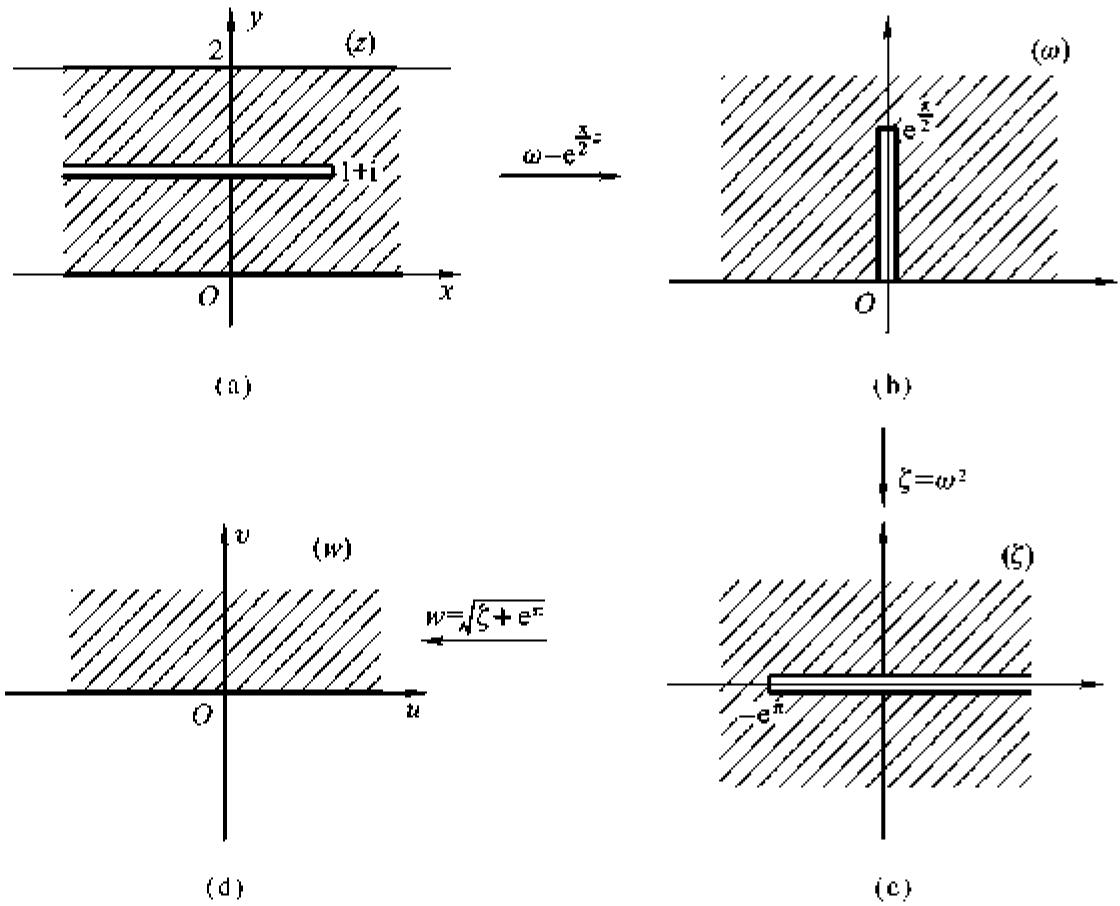

图 1.6.6

例 4　求将 $|z|>2$ 和 $|z-3|>1$ 围成的区域映照为上半平面的函数.

解:① 通过分式线性函数将原区域映照为 ω 平面上的带形域(图 1.6.7(b))

$$\omega = \frac{z-4}{z-2},$$

这里 $|z|=2$ 映照成 $\mathrm{Re}(\omega)=\frac{3}{2}$, $|z-3|=1$ 映照成直线 $\mathrm{Re}(\omega)=0$,两圆圆内映照成带形域外.

② 旋转 ω 平面带形域为 ζ 平面带形域(图 1.6.7(c))

$$\zeta = \mathrm{i}\omega.$$

③ 将 ζ 平面的带形域的宽度调整到 π 且通过指数函数将该带形域映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.7(d))

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\zeta}$$

综上所述

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}\frac{z-4}{z-2}}.$$

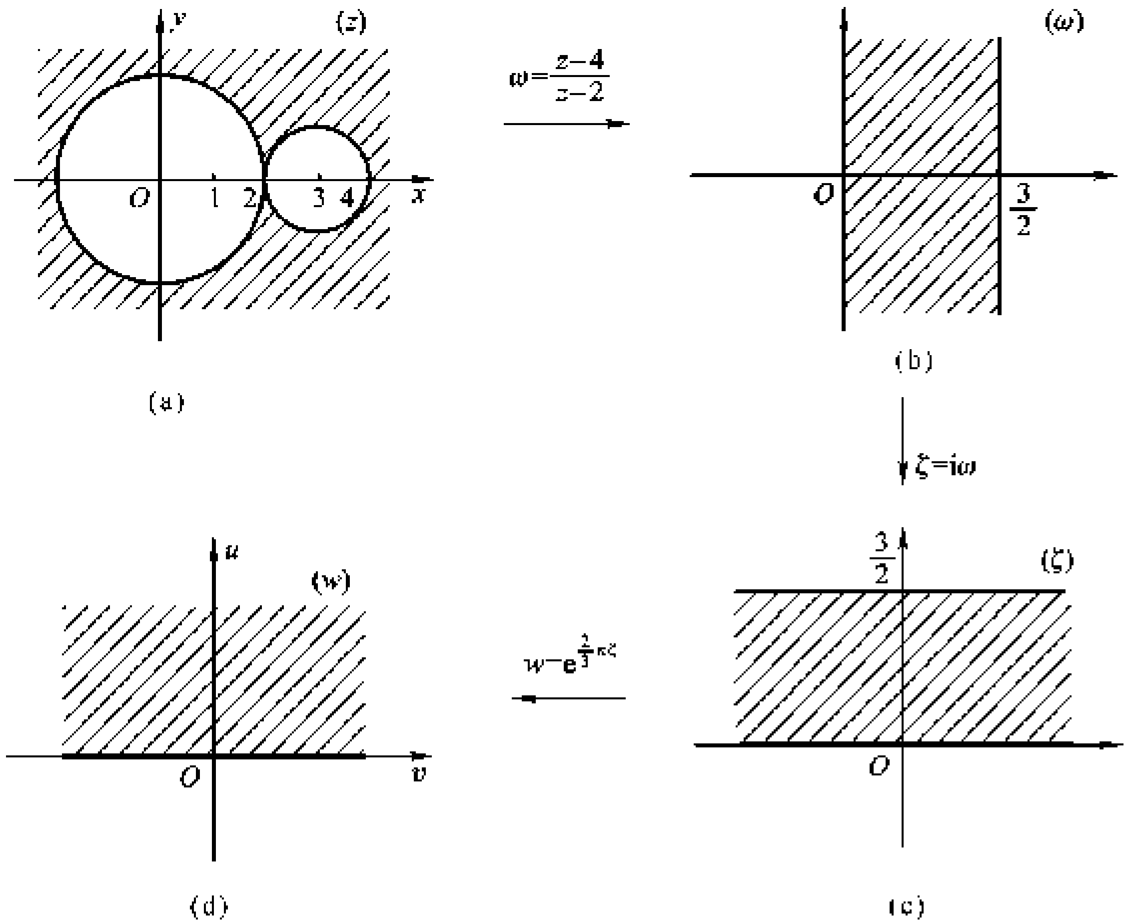

图 1.6.7

6.5 习题选解

6.1.1 (a) 一个解析函数构成的映照在什么条件下具有旋转角和伸缩率的不变性.

(b) 求映照 $w=\dfrac{1}{z}$ 与 $w=\mathrm{e}^z$ 在点 $z_0=1+\mathrm{i}$ 处的伸缩率和旋转角,并说明它们将 z 平面的哪一部分放大? 哪一部分缩小?

(c) 设曲线 $C_1: y=x$, $C_2: x=1$,映照 $w=z^2$. 验证:在 $z=1+\mathrm{i}$ 处映照具有保角性,并求出其伸缩率.

(d) 证明:在映照 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$下,相互正交的直线族 $\mathrm{Re}(z)=C_1$ 与 $\mathrm{Im}(z)=C_2$ 依

次映成相互正交的直线族$\frac{v}{u}=\tan C_1$与圆族 $u^2+v^2=e^{-2C_2}$.

解：(a) $f'(z_0)\neq 0$.

(b) $w=\frac{1}{z}$在点$z_0=1+i$处的伸缩率和旋转角为$\frac{1}{2}$和$\frac{\pi}{2}$. 由于 $w=\frac{1}{z}$,所以$|w|=\frac{1}{|z|}$, $\arg w=-\arg z$,故它将$|z|<1$放大,$|z|>1$缩小; $w=e^z$ 在点 $z_0=1+i$ 处的伸缩率和旋转角为 e 和 1. 由于 $w=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$,通过对 w 的实部、虚部值的分析知它将 $\mathrm{Re}(z)>0$ 放大,$\mathrm{Re}(z)<0$ 缩小.

(c) $\because$ C_1, C_2 在 $z=1+i$ 处夹角为 $-\frac{\pi}{4}$. 经 $w=z^2$ 映照 C_1 为 C_1', C_2 为 C_2',其在 $w(1+i)=2i$ 处的夹角为

$$\arg 2(1+i)^2x\,|_{x=1}-\arg 2(1+iy)i\,|_{y=1}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\pi=-\frac{\pi}{4},$$

$\therefore$ 映照 $w=z^2$ 在 $z=1+i$ 处具有保角性.

伸缩率: $|w'(1+i)|=|2(1+i)|=2\sqrt{2}$;

(d) $\because$ $\mathrm{Re}(z)=C_1\xrightarrow{w=e^{iz}}w=e^{iC_1-y}\rightarrow\frac{u}{v}=\tan C_1$,

$\mathrm{Im}(z)=C_2\xrightarrow{w=e^{iz}}w=e^{iz-C_2}\rightarrow u^2+v^2=e^{-2C_2}$,

$w=e^{iz}$为保形映照,

$\therefore$ $\frac{u}{v}=\tan C_1$ 与 $u^2+v^2=e^{-2C_2}$正交.

6.2.1 (a) 试说明每个分式线性映照在扩充复平面上都有两个固定的映照点.

(b)把 x 轴映成 u 轴的分式线性映照 $w=\frac{az+b}{cz+d}$的系数 a,b,c,d 应满足什么条件?

解: (a) $w=\frac{az+b}{cz+d}$将 $z=-\frac{b}{a}$映照为 $w=0$, $z=-\frac{d}{c}(c\neq 0)$映照为 $w=\infty$.

(b) 由$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$知 a,b,c,d 均为实数.

6.2.2 求满足下列条件的分式线性函数

(a) 把 $z_1=1, z_2=i, z_3=-1$ 分别映照为 $w_1=\infty, w_2=-1, w_3=0$;

(b) 把 $z_1=-1, z_2=\infty, z_3=1$ 分别映照为 $w_1=-1, w_2=i, w_3=1$;

(c) 把 $z_1=-i, z_2=0, z_3=i$ 分别映照为 $w_1=\infty, w_2=-1, w_3=0$;

(d) 把 $z_1=-1, z_2=i, z_3=1+i$ 分别映照为 $w_1=0, w_2=\infty, w_3=2+i$.

解: (a) $\because$ $\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$,

$$\therefore \quad \frac{w+1}{w}=\frac{z-\mathrm{i}}{z+1}:\frac{1-\mathrm{i}}{2},$$

$$\therefore \quad w=\frac{\mathrm{i}(1+z)}{1-z};$$

(b) $\because \quad \dfrac{w-w_1}{w-w_3}:\dfrac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}:\dfrac{z_2-z_1}{z_2-z_3},$

$$\therefore \quad \frac{w+1}{w-1}:\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}=\frac{z+1}{z-1}:1,$$

$$\therefore \quad w=\frac{(z+1)\mathrm{i}-(z-1)}{(z+1)\mathrm{i}+(z-1)};$$

(c) $\because \quad \dfrac{w-w_2}{w-w_3}=\dfrac{z-z_2}{z-z_3}:\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3},$

$$\therefore \quad \frac{w+1}{w}=\frac{z}{z-\mathrm{i}}:\frac{-\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}},$$

$$\therefore \quad w=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}};$$

(d) $\because \quad \dfrac{w-w_3}{w-w_1}=\dfrac{z-z_3}{z-z_1}:\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_1},$

$$\therefore \quad \frac{w-(2+\mathrm{i})}{w}=\frac{z-(1+\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}:\frac{-1}{1+\mathrm{i}},$$

$$\therefore \quad w=\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}.$$

6.2.3 证明：$w=\dfrac{1}{z}$将 z 平面上区域 $x>c$ （$c>0$）映照成 w 平面上区域 $\left(u-\dfrac{1}{2c}\right)^2+v^2<\left(\dfrac{1}{2c}\right)^2$.

解：$\because \quad w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}, \quad x=c,$

$$\therefore \quad u=\frac{c}{c^2+y^2}, \quad v=-\frac{y}{c^2+y^2},$$

$$\therefore \quad c^2+y^2=\frac{c}{u}, \quad c^2+y^2=-\frac{y}{v},$$

$$\therefore \quad y=-\frac{v}{u}c, \quad u=\frac{c}{c^2+\left(\dfrac{v}{u}c\right)^2},$$

$$\therefore \quad \left(u-\frac{1}{2c}\right)^2+v^2=\frac{1}{(2c)^2}.$$

$\because \quad z=2c$ 时，$w=\left(\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{2c}\right)^2+0^2<\dfrac{1}{(2c)^2},$

$\therefore \quad$ 结论成立.

6.2.4 试说明以下各映照的结果.

(a) $\mathrm{Im}(z)=0$, $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$（$\theta$ 为任意实数，$\mathrm{Im}(z_0)<0$）；

(b) $|z|\leqslant 1$, $w=\dfrac{i-z}{i+z}$；　　(c) $|z-1|\leqslant 1$, $w=\dfrac{z-2}{z}$.

解：(a) $\mathrm{Im}(z)=0$ 经 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ 的映照结果：$|w|=1$；

(b) $\because$　$w=\dfrac{i-z}{i+z}$,

$\therefore$　$w(i)=0$, $w(-i)=\infty$, $w(1)=i$, $|z|=1$ 映为虚轴 $u=0$.

又　$\because$　$w(0)=1$,

$\therefore$　$|z|<1$ 映照成 $\mathrm{Re}(w)>0$.

$\therefore$　$|z|\leqslant 1$ 映照成 $\mathrm{Re}(w)\geqslant 0$；

(c) $\because$　$w=\dfrac{z-2}{z}$,

$\therefore$　$w(0)=\infty$, $w(2)=0$, $w(1+i)=i$, $|z-1|=1$ 映为虚轴 $u=0$.

又　$\because$　$w(1)=-1$,

$\therefore$　$|z-1|<1$ 映照成 $\mathrm{Re}(w)<0$.

$\therefore$　$|z-1|\leqslant 1$ 映照成 $\mathrm{Re}(w)\leqslant 0$.

6.2.5　试把 $\mathrm{Im}(z)>0$ 保形映照成 $\mathrm{Im}(w)>0$，并把点 (a) $-1,0,1$ 或 (b) $\infty,0,1$ 或 (c) $\infty,1,0$ 映照成 $0,1,\infty$.

解：(a) 显然 $w=-\dfrac{z+1}{z-1}$ 将 $-1,0,1$ 映照成 $0,1,\infty$，即 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)=0$.

$\because$　$w(i)=i$,

$\therefore$　$\mathrm{Im}(z)>0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)>0$；

(b) 显然 $w=\dfrac{1}{1-z}$ 将 $\infty,0,1$ 映照成 $0,1,\infty$，即 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)=0$.

$\because$　$w(i)=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}$,

$\therefore$　$\mathrm{Im}(z)>0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)>0$；

(c) 显然 $w=\dfrac{1}{z^3}$ 将 $\infty,1,0$ 映照成 $0,1,\infty$，即 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)=0$.

$\because$　$w(i)=\dfrac{1}{i^3}=i$,

$\therefore$　$\mathrm{Im}(z)>0$ 映照成 $\mathrm{Im}(w)>0$.

6.2.6　把点 $z=1, i, -i$ 分别映照成点 $w=1,0,-1$ 的分式线性函数，把单位圆 $|z|<1$ 映照成 w 平面上的什么区域？求出这个分式线性函数.

解：$\because$　$\dfrac{w-1}{w+1}:\dfrac{0-1}{0+1}=\dfrac{z-1}{z+i}:\dfrac{i-1}{i+i}$,

$\therefore \quad w=\dfrac{(1+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{(1+z)+3\mathrm{i}(1-z)}$.

$\because \quad w(0)=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{5}, w(1)=1, w(-1)=-\dfrac{1}{3} \quad w(\mathrm{i})=0,$

$\therefore$ 此分式线性映照将$|z|<1$映照成$\mathrm{Im}(w)<0$.

6.3.1 求满足所给条件且把单位圆映照成单位圆的分式线性函数 $w=f(z)$.

(a) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, f(1)=-1;$

(b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2};$

(c) $f(0)=0, \arg f'(0)=-\dfrac{\pi}{2}$.

解：(a) $\because \quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, f(2)=\infty, f(1)=-1,$

$$\therefore \quad w=\frac{2z-1}{z-2};$$

(b) 设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{2z-1}{2-z}$,

$$\because \quad w'\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2(2-z)+2z-1}{(2-z)^2}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{4}{3}\right),$$

$$\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad w=\mathrm{i}\,\frac{2z-1}{2-z};$$

(c) $\because \quad f(0)=0,$

$\therefore \quad f(\infty)=\infty,$

$\therefore$ 设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$，而

$$w'|_{z=0}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \arg f'(0)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad \theta=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad w=-\mathrm{i}z.$$

6.3.2 试求将圆域$|z|<R$映照成圆域$|w|<1$的分式线性映照.

解：设 $w'=\dfrac{z}{R}$，则

$$|w'|<1 \xrightarrow{w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{w'-\alpha}{1-\bar{\alpha}w'}} |w|<1 \quad (|\alpha|<1),$$

$$\therefore \quad w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-R\alpha}{R-\bar{\alpha}z} \qquad (|\alpha|<1).$$

6.3.3 求把上半平面 $\operatorname{Im}(z)>0$ 映照成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映照 $w=f(z)$，并且满足条件

(a) $f(\mathrm{i})=0, f(-1)=1$;

(b) $f(\mathrm{i})=0, \arg f'(\mathrm{i})=0$;

(c) $f(1)=1, f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

解：(a) 设 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$,

$\because \quad f(-1)=1$,

$\therefore \quad 1=e^{i\theta}\dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$,

$\therefore \quad e^{i\theta}=-\mathrm{i}$,

$\therefore \quad w=-\mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$;

(b) 设 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$,

$\because \quad w'\Big|_{z=i}=e^{i\theta}\dfrac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}\Big|_{z=i}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}e^{i\theta}=\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$,

$\arg f'(\mathrm{i})=\theta-\dfrac{\pi}{2}=0$,

$\therefore \quad \theta=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \quad f(z)=\mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$;

(c) $\because \quad f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore \quad f(-\mathrm{i})=\sqrt{5}$ （分式线性映照具有保对称性），

$\because \quad f(1)=1$,

$$\therefore \quad \frac{w-1}{w-\sqrt{5}}:\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}}=\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}:\frac{\mathrm{i}-1}{2\mathrm{i}},$$

$$\therefore \quad w=\frac{(\sqrt{5}-3+2\mathrm{i})z+(-\sqrt{5}+3+2\mathrm{i})}{(-\sqrt{5}+3+2\mathrm{i})z+(\sqrt{5}-3+2\mathrm{i})}.$$

6.3.4 求将 $|z|<2$ 保形映照为 $\operatorname{Re}(w)>0$ 的保形映照 $w=f(z)$，使之满足 $f(0)=1, \arg f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

解：考虑由 w 平面区域 $\operatorname{Re}(w)>0$ 到 z 平面区域 $|z|<2$ 的映照可得

$$z=f^{-1}(w)=k\frac{w-1}{w+1} \text{且} \left|k\frac{w-1}{w+1}\right|=2,$$

$\therefore \quad |k|=2,$

$$\therefore \quad z=2e^{i\theta}\frac{w-1}{w+1},$$

$$\therefore \quad w=\frac{-z-2e^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}},$$

$$\because \quad w'=\frac{4e^{i\theta}}{(z-2e^{i\theta})^2}, \quad \arg w'(0)=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad \theta=-\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad w=-\frac{z-2i}{z+2i}.$$

6.4.1 问以下函数将扩充的 z 平面上的区域映照成扩充的 w 平面上的什么区域？并画出映照前后区域图.

(a) $-\pi<\theta<\pi, w=z^{\frac{1}{2}}$;

(b) $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, w=e^z$;

(c) $\mathrm{Re}(z)>0, w=\ln z$.

解：(a) $-\pi<\theta<\pi, w=z^{\frac{1}{2}}$的映照结果是：$-\frac{\pi}{2}<\arg w<\frac{\pi}{2}$(图 1.6.8)；

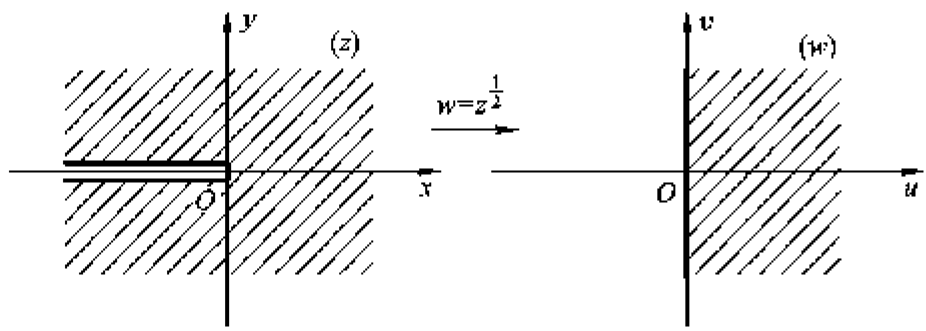

图 1.6.8

(b) $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, w=e^z$ 的映照结果是 (图 1.6.9)：

$$e^a<|w|<e^b, c<\mathrm{Arg}w<d;$$

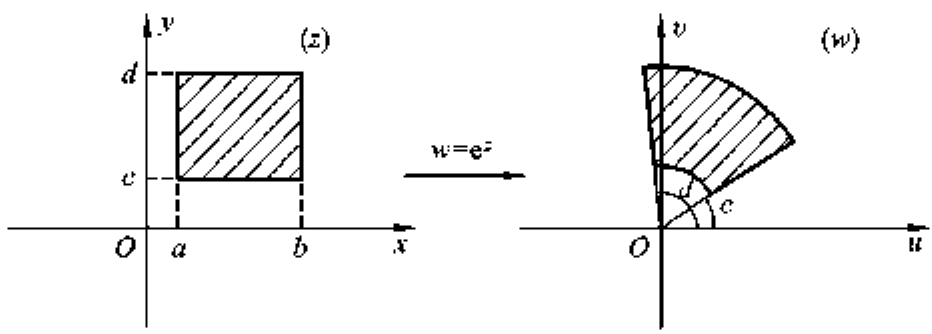

图 1.6.9

(c) $\mathrm{Re}(z)>0, w=\ln z$ 的映照结果是：$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(w)<\frac{\pi}{2}$(图 1.6.10).

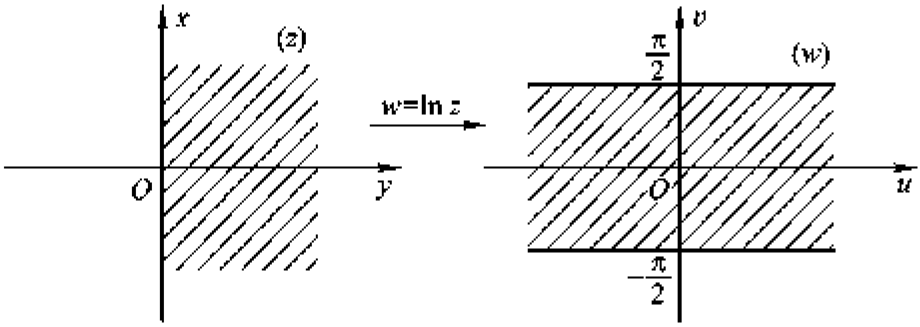

图 1.6.10

6.4.2 求将以下角形域

(a) $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$;

(b) $-\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}$;

(c) $0<\arg z<\frac{\pi}{2}, 0<|z|<1$

分别映照为单位圆 $|w|<1$ 的保形映照.

解：(a) $w=\frac{z^3-\mathrm{i}}{z^3+\mathrm{i}}$;

(b) ①z 平面上角形域经 $\omega=z^3$ 映照成 ω 平面的右半平面(图 1.6.11(b));
② ω 平面的右半平面经 $\zeta=\mathrm{i}\omega$ 映照成 ζ 平面的上半平面(图 1.6.11(c));
③ ζ 平面的上半平面经 $w=\frac{\zeta-\mathrm{i}}{\zeta+\mathrm{i}}$ 映照成 w 平面的单位圆(图 1.6.11(d)).

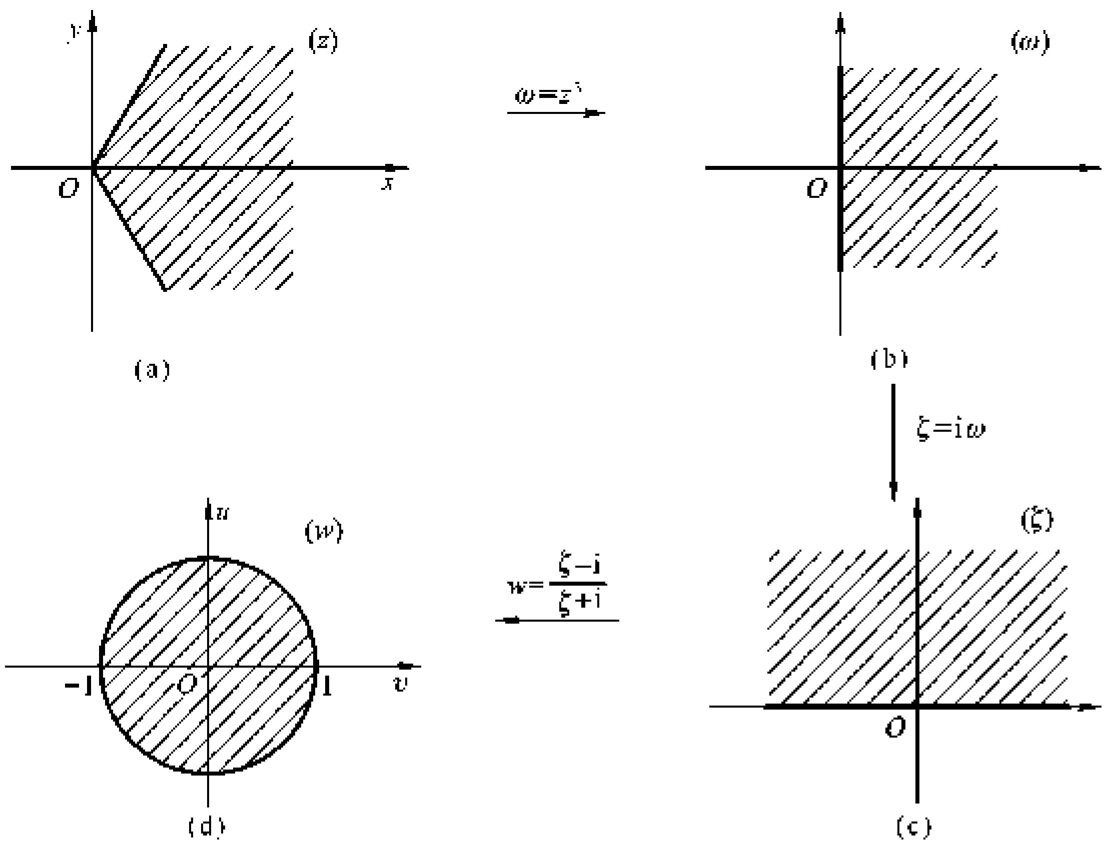

图 1.6.11

综上所述

$$w = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1};$$

(c) ①z 平面上区域经 $\omega = z^2$ 映照成 ω 平面的上半单位圆内(图 1.6.12(b));

② ω 平面的上半单位圆经 $\zeta = \left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2$ 映照成 ζ 平面的上半平面(图 1.6.12(c));

③ ζ 平面的上半平面经 $w = \frac{\zeta - \mathrm{i}}{\zeta + \mathrm{i}}$ 映照成 w 平面的单位圆(图 1.6.12(d)).

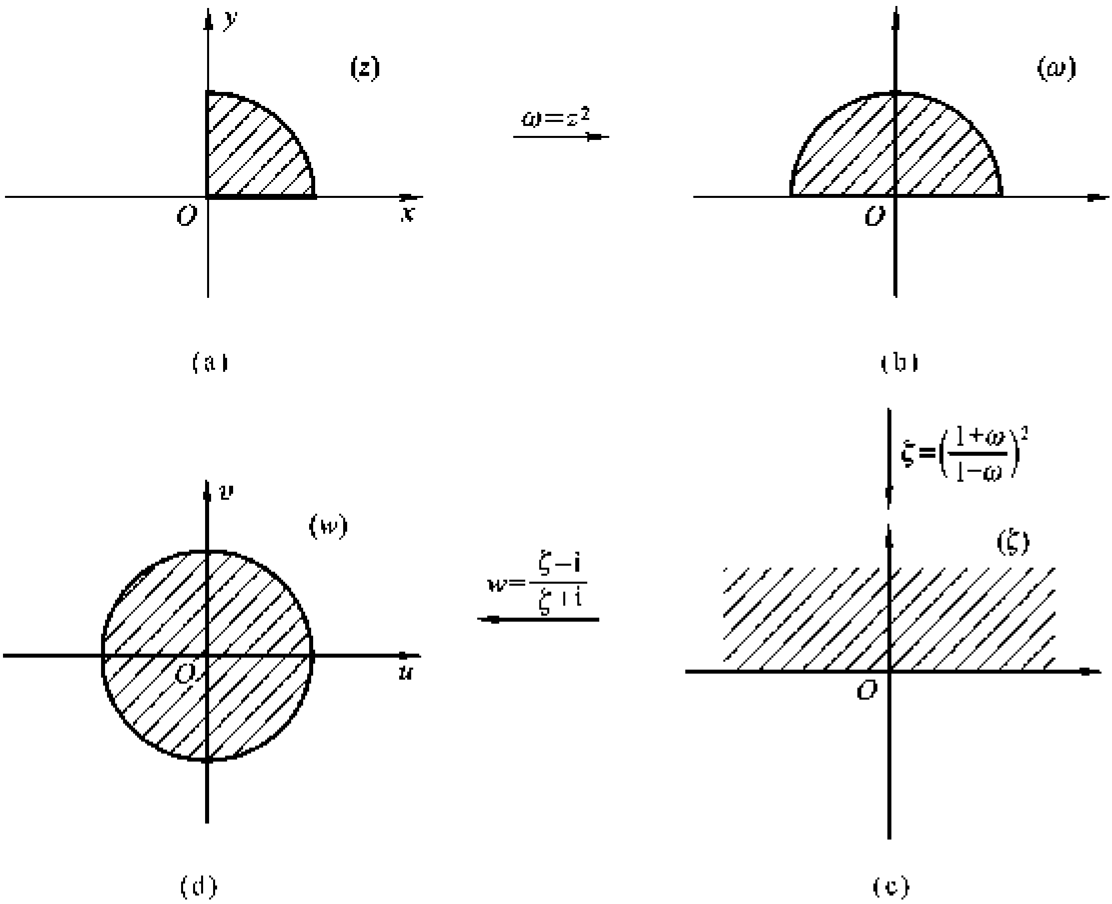

图 1.6.12

综上所述

$$w = \frac{(z^2+1)^2 - \mathrm{i}(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + \mathrm{i}(z^2-1)^2}.$$

6.4.3 试求将以下各区域映照为上半平面的保形映照.

(a) $\mathrm{Im}(z) > 1, |z| < 2$;

解: ① 将 z 平面上的阴影区域通过分式线性函数映照为 ω 平面上的角形域(图 1.6.13(b))

$$\omega = \frac{z - (-\sqrt{3} + \mathrm{i})}{z - (\sqrt{3} + \mathrm{i})},$$

② 将 ω 平面的角形域顺时针旋转角度 π 成 ζ 平面的角形域(图 1.6.13(d))

$$\zeta = -\omega,$$

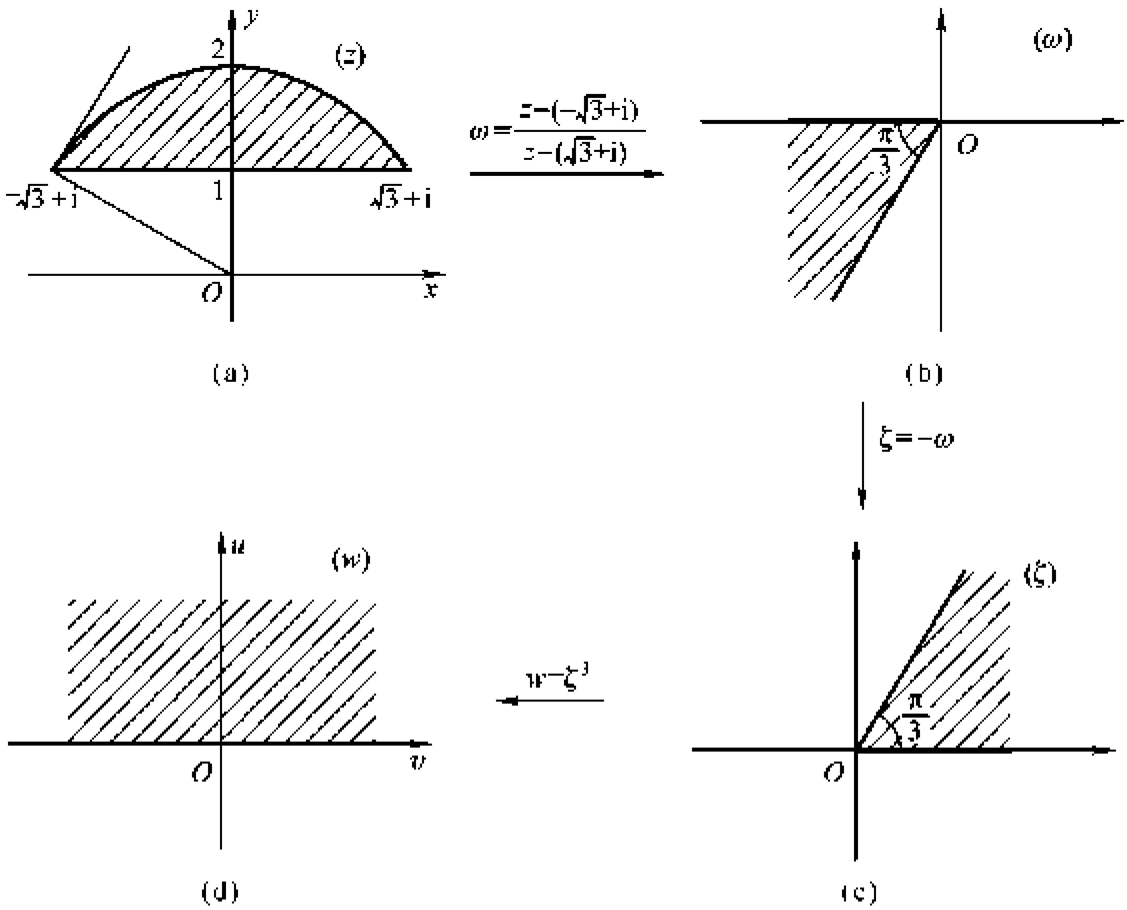

图 1.6.13

③ 将 ζ 平面的角形域通过幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.13(c))

$$w = \zeta^3,$$

综上所述

$$w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^3;$$

(b) $|z|>2, |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$;

解: ① 将 z 平面上的阴影区域通过分式线性函数映照为 ω 平面的角形域(图 1.6.14(b))

$$\omega = \frac{z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i})}{z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})},$$

② 将 ω 平面的角形域顺时针旋转角度 π 成 ζ 平面的角形域(图 1.6.14(c))

$$\zeta = -\omega,$$

③ 将 ζ 平面角形域通过幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.14(d))

$$w = \zeta^4,$$

综上所述

$$w = \left[\frac{z - \sqrt{2}(1 - i)}{z - \sqrt{2}(1 + i)}\right]^4;$$

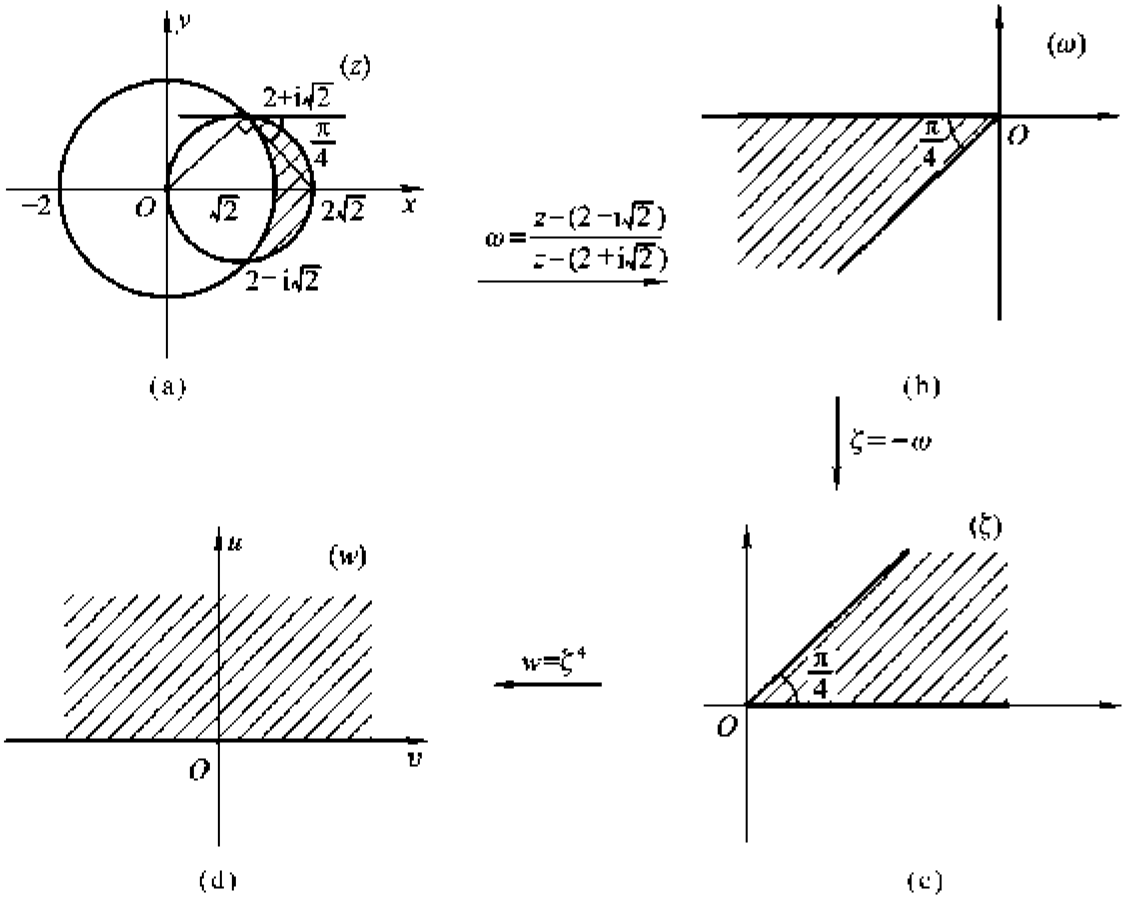

图 1.6.14

(c) $|z| < 2, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$;

解：① 将 z 平面上的阴影区域通过幂函数映照成 ω 平面的上半圆内（图 1.6.15(b)）

$$\omega = z^4,$$

② 将 ω 平面上半圆内通过分式线性函数映照成 ζ 平面的第 Ⅰ 象限（图 1.6.15(c)）

$$\zeta = \frac{2^4 + \omega}{2^4 - \omega},$$

③ 将 ζ 平面的第 Ⅰ 象限通过幂函数映照成 w 平面的上半平面（图 1.6.15(d)）

$$w = \zeta^2,$$

综上所述

$$w = \left(\frac{z^4 + 16}{z^4 - 16}\right)^2;$$

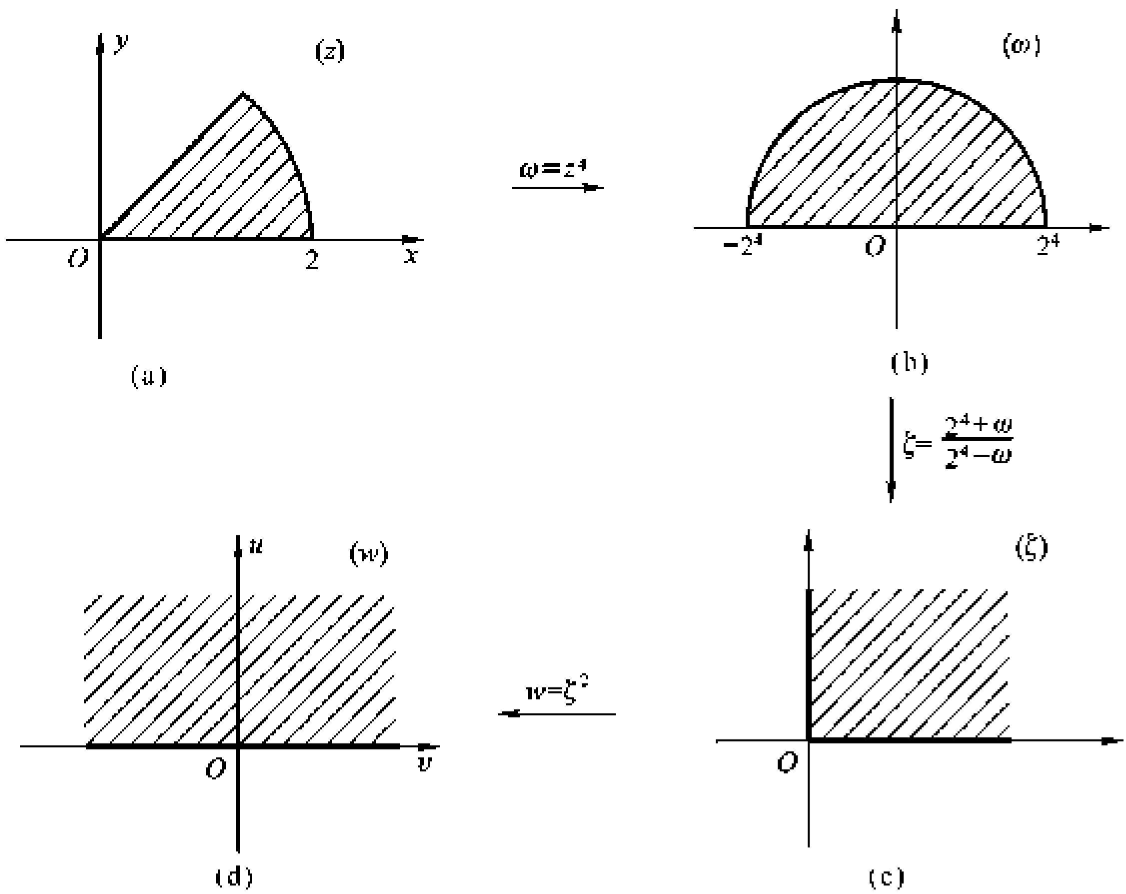

图 1.6.15

(d) $|z|>2, 0<\operatorname{Arg} z<\dfrac{3\pi}{2}$;

解：① 将 z 平面上阴影区域通过幂函数映照成 ω 平面的上半圆外(图 1.6.16(b))

$$\omega = z^{\frac{2}{3}},$$

② 将 ω 平面的上半圆外通过分式线性函数映照成 ζ 平面的第Ⅱ象限(图 1.6.16(c))

$$\zeta = \frac{2^{\frac{2}{3}}+\omega}{2^{\frac{2}{3}}-\omega},$$

③ 将 ζ 平面的第Ⅱ象限顺时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$，得 ξ 平面的第Ⅰ象限(图 1.6.16(d))

$$\xi = e^{-\frac{\pi}{2}i}\zeta,$$

④ 将 ξ 平面的第Ⅰ象限通过幂函数映照为 w 平面的上半平面(图 1.6.16(e))

$$w = \xi^2,$$

综上所述

$$w=-\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2;$$

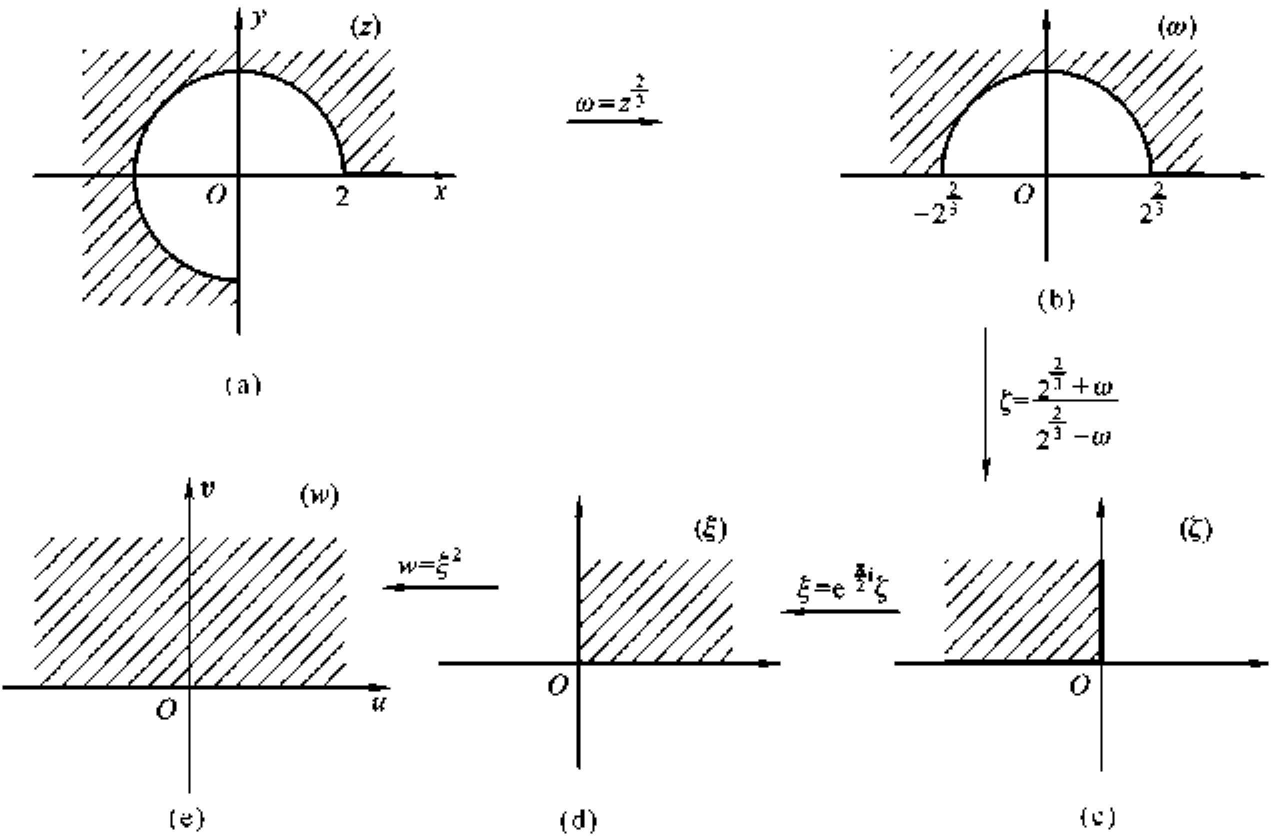

图 1.6.16

(e) 沿联结点 $z=0$ 和 $z=a\mathbf{i}$ 的线段有割痕的上半平面;

解: ① 将 z 平面带割痕区域通过幂函数映照成 ω 平面上带割痕区域(图 1.6.17(b))

$$\omega=z^2,$$

② 将 ω 平面上带割痕区域平移成 ζ 平面上带割痕区域(图 1.6.17(c))

$$\zeta=\omega+a^2,$$

③ 将 ζ 平面上带割痕区域通过幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.17(d))

$$w=\sqrt{\zeta},$$

综上所述

$$w=\sqrt{z^2+a^2};$$

(f) 单位圆的外部,沿虚轴由 $\mathbf{i}$ 到 ∞ 有割痕的区域;

解: ① 将 z 平面上的阴影部分通过分式线性函数映照成 ω 平面上带割痕区域(图 1.6.18(b))

$$\omega=\mathbf{i}\,\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}},$$

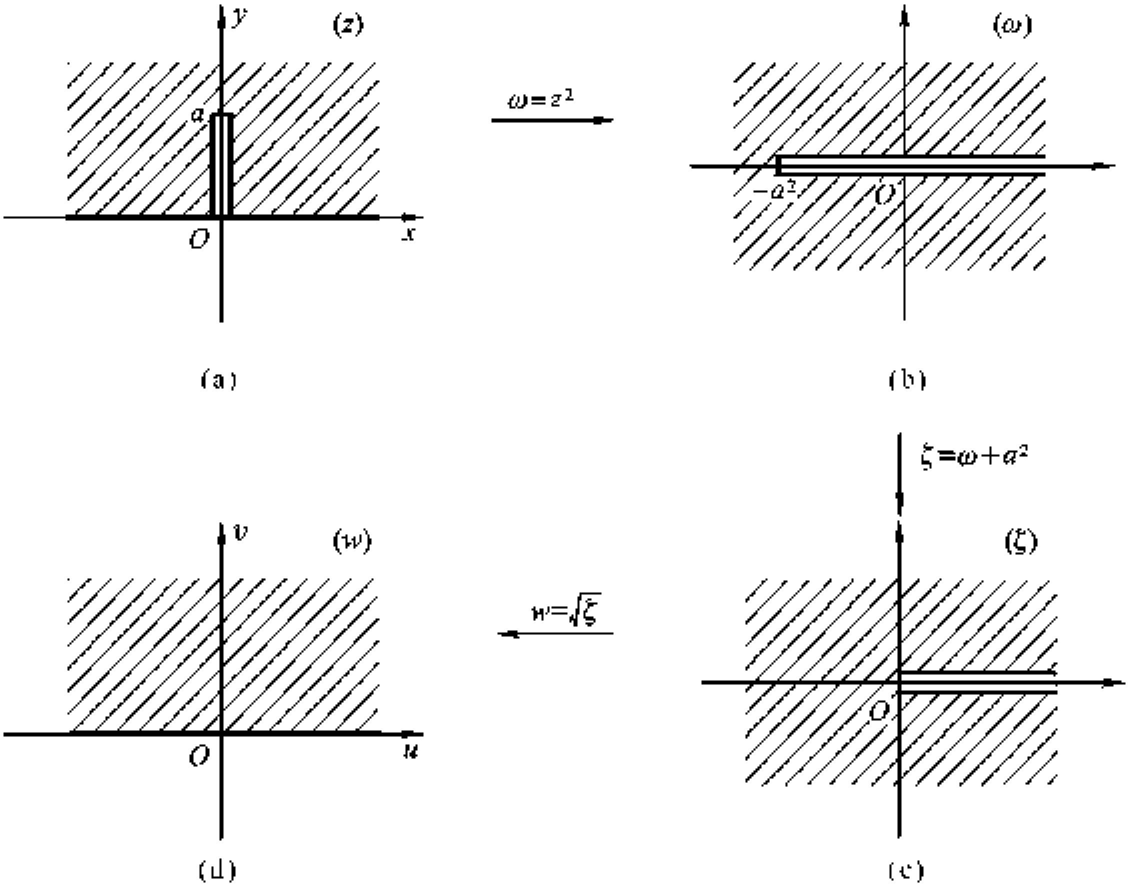
(z)
y
a
O
x
$\omega=z^2$
(ω)
$-a^2$
O
(a)
(b)
$\zeta=\omega+a^2$
(w)
v
O
u
$w=\sqrt{\zeta}$
(ζ)
O
(d)
(c)

图 1.6.17

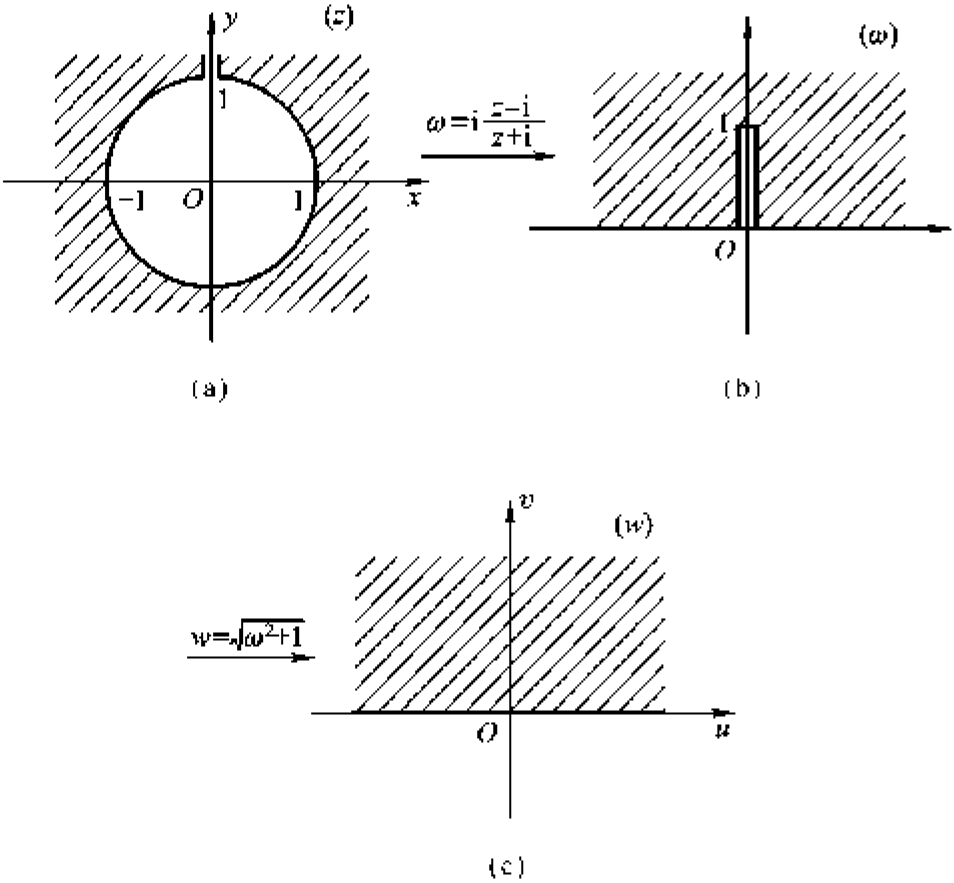
y
(z)
1
−1
O
1
x
$\omega=\mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$
(ω)
1
O
(a)
(b)
v
(w)
$w=\sqrt{\omega^2+1}$
O
u
(c)

图 1.6.18

② 借助习题6.4.3(e)的结论将 ω 平面带割痕域映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.18(c))

$$w = \sqrt{\omega^2 + 1},$$

综上所述

$$w = \sqrt{1 - \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^2};$$

(g) 单位圆的内部且沿由0到1的半径有割痕的区域;

解: ① 将 z 平面上阴影区域通过幂函数映照成 ω 平面的上半圆内(图 1.6.19(b))

$$\omega = z^{\frac{1}{2}},$$

② 将 ω 平面的上半圆内通过分式线性函数映照成 ζ 平面的第Ⅰ象限(图 1.6.19(c))

$$\zeta = \frac{1 + \omega}{1 - \omega},$$

③ 将 ζ 平面的第Ⅰ象限通过幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.19(d))

$$w = \zeta^2,$$

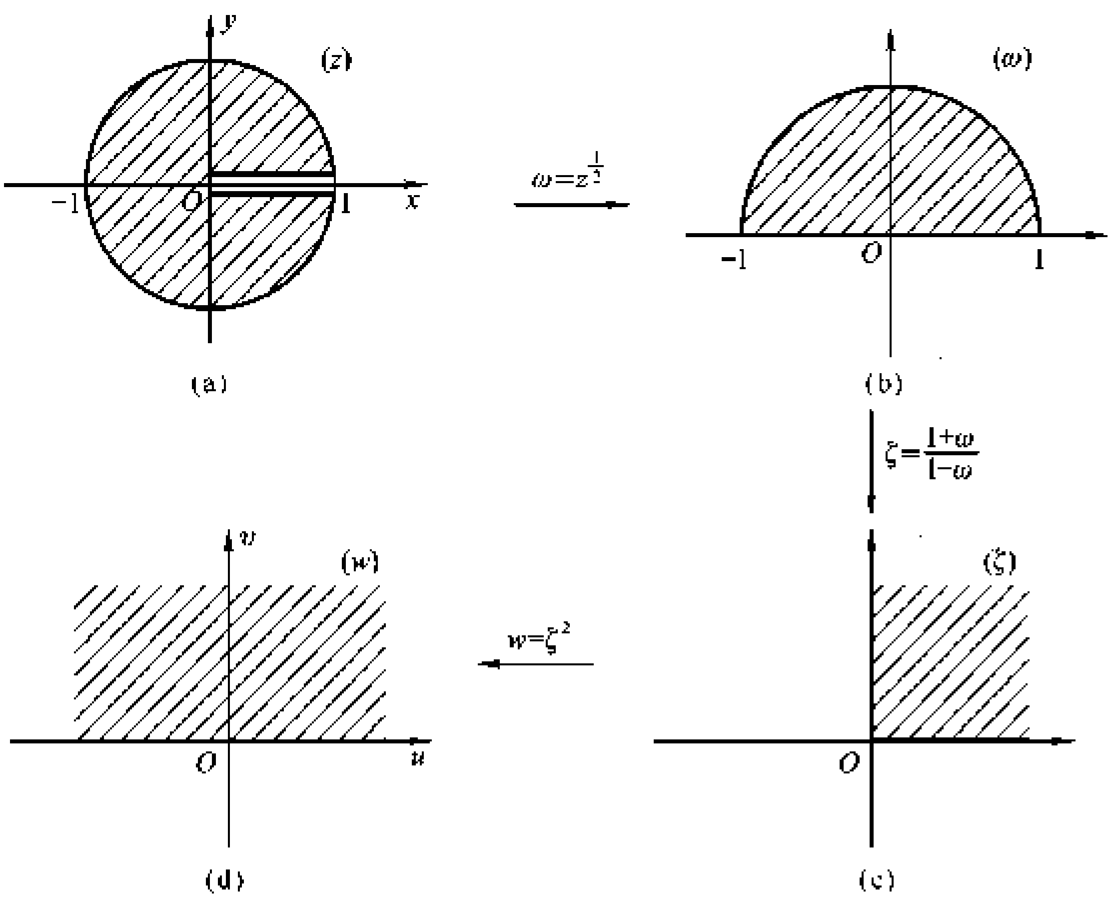

图 1.6.19

综上所述

$$w=\left(\frac{1+z^{\frac{1}{2}}}{1-z^{\frac{1}{2}}}\right)^{2};$$

(h) $|z|<2,|z-1|>1$;

解：① 将 z 平面上阴影区域通过分式线性函数映照成 ω 平面的带形域(图 1.6.20(b))

$$\omega=\frac{1}{z-2},$$

② 将 ω 平面的带形域先向右平移 $\frac{1}{2}$ 单位再逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得 ζ 平面上的带形域(图 1.6.20(c))

$$\zeta=\mathrm{i}\left(\omega+\frac{1}{2}\right),$$

③ 将 ζ 平面带形域宽度扩大为 π 并通过指数函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.20(d))

$$w=\mathrm{e}^{4\pi\zeta},$$

综上所述

$$w=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{z}{z-2}};$$

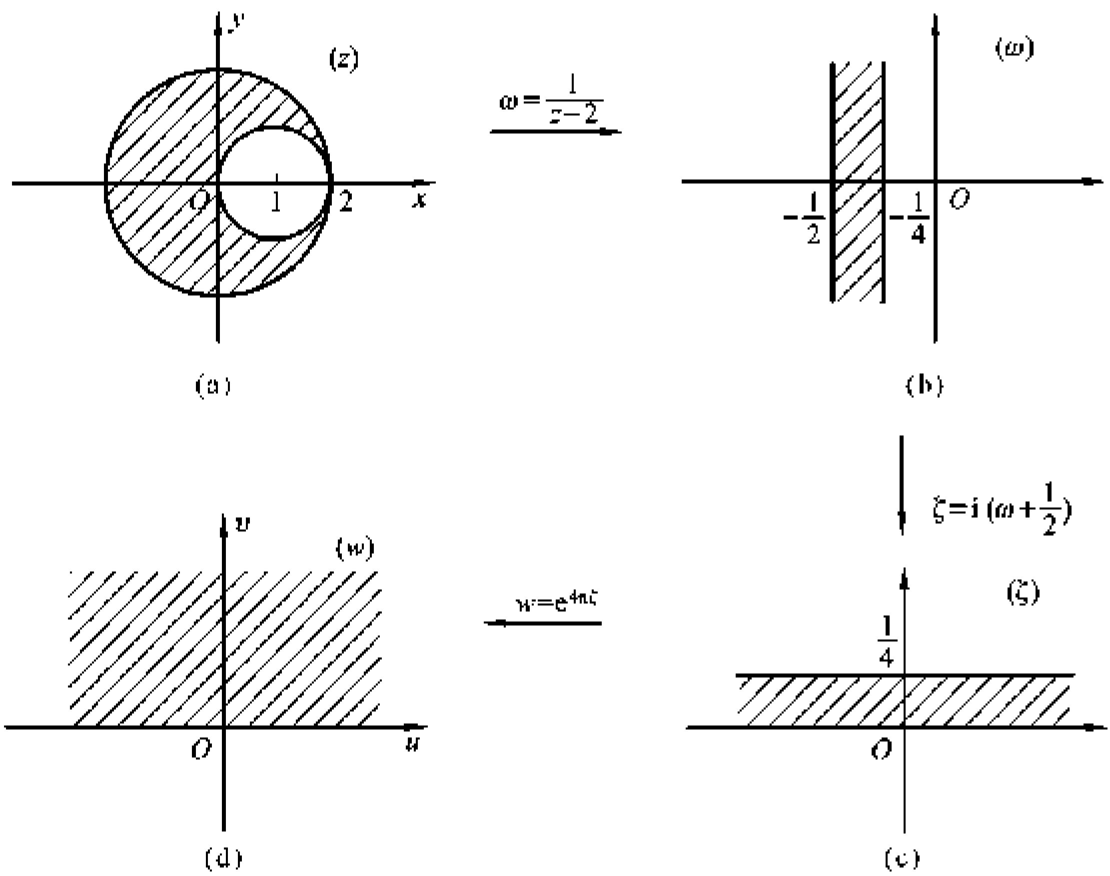

图 1.6.20

(i) $a < \mathrm{Re}(z) < b$;

解：① 将 z 平面上的带形域 $a < \mathrm{Re}(z) < b$ 向左平移同时调整其宽度到 π 得 ω 平面上的带形域(图 1.6.21 (b))

$$\omega = (z - a) \times \frac{\pi}{b - a},$$

② 将 ω 平面上的带形域按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得 ζ 平面上的带形域(图 1.6.21 (c))

$$\zeta = \mathrm{i}\omega,$$

③ 将 ζ 平面上的带形域通过指数函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.21 (d))

$$w = \mathrm{e}^{\zeta},$$

综上所述

$$w = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{b-a}(z-a)};$$

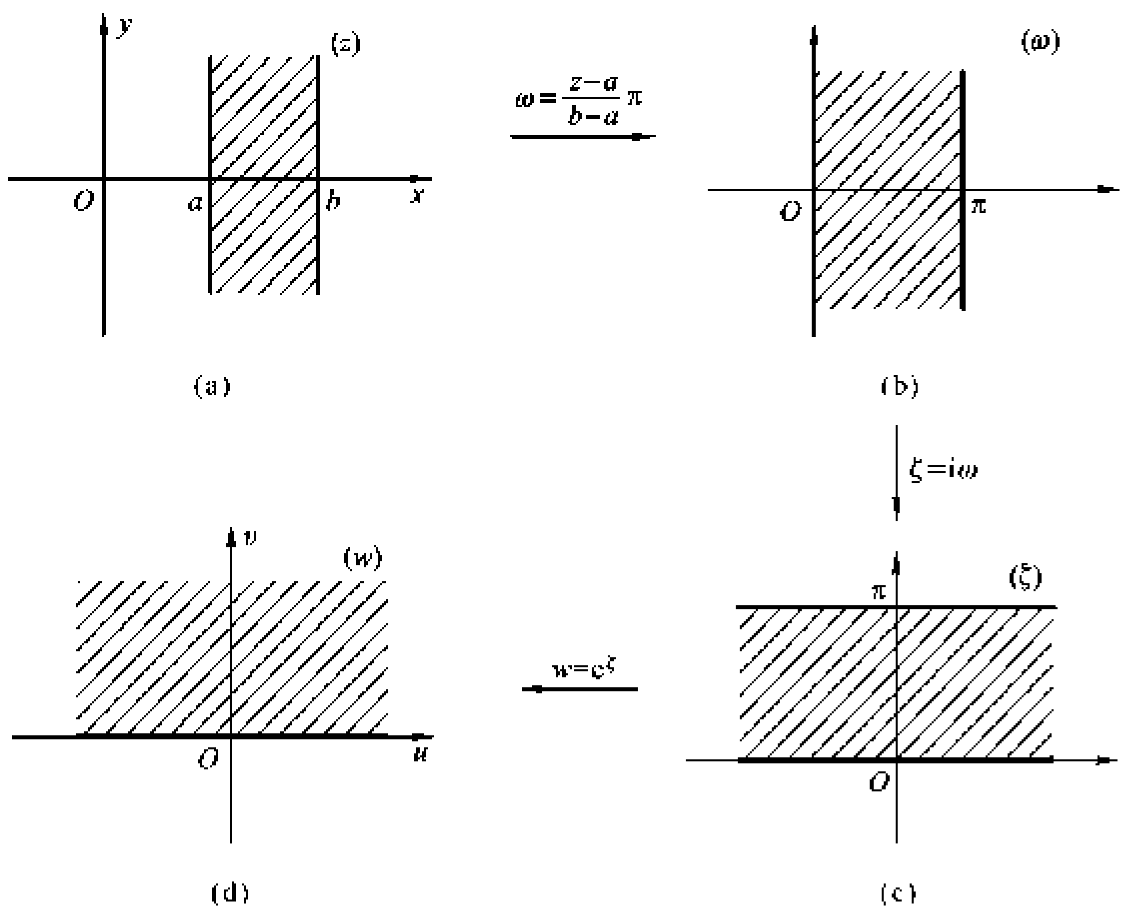

图 1.6.21

(j) $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < a$;

解：① 将 z 平面阴影区域宽度调整到 π，并映照成 ω 平面上带形域(图 1.6.22(b))

$$\omega = -\frac{\pi}{a}z,$$

② 将 ω 平面带形域通过指数函数映照成 ζ 平面的上半单位圆内(图 1.6.22(c))

$$\zeta = -e^{\omega},$$

③ 将 ζ 平面的上半单位圆内通过分式线性函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.22(d))

$$w = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2,$$

综上所述

$$w = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}z}-1}{e^{\frac{\pi}{a}z}+1}\right)^2;$$

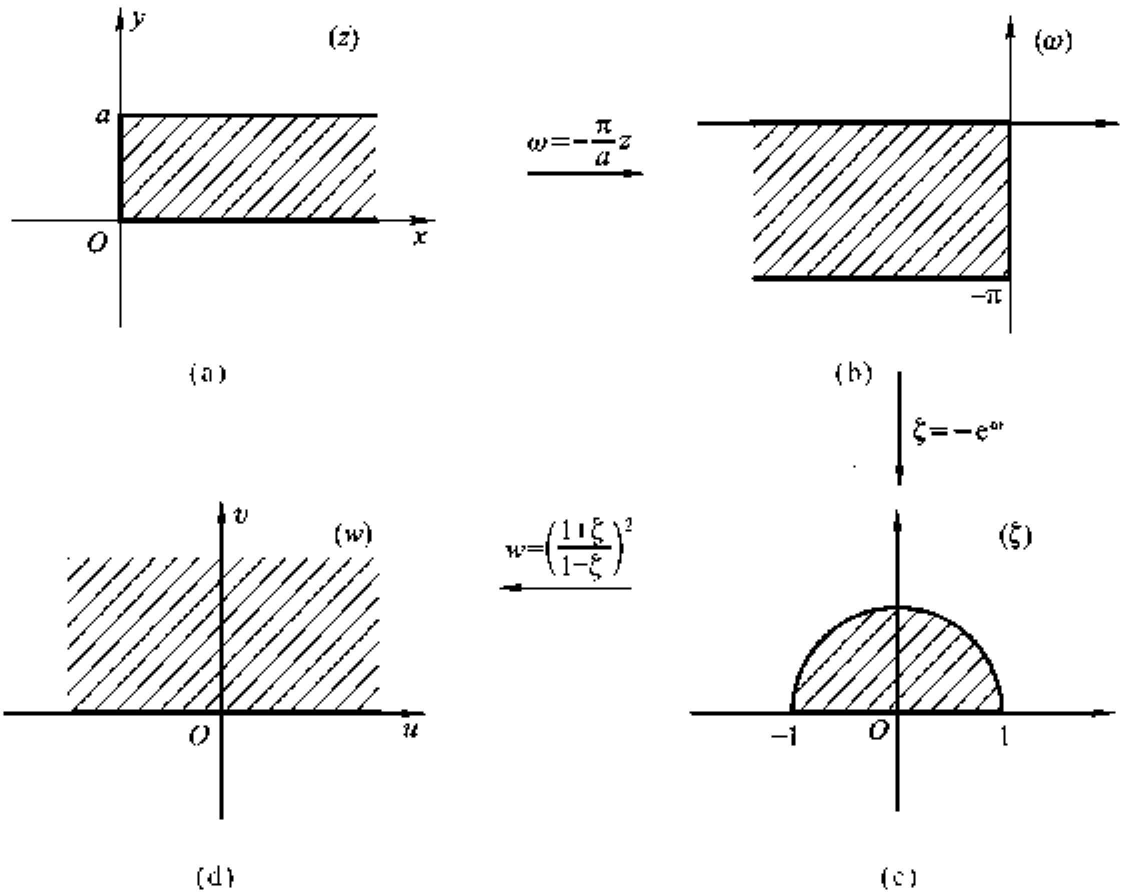

图 1.6.22

(k) $|z+i|>\sqrt{2}, |z-i|<\sqrt{2}$

解: ① 将 z 平面的阴影区域通过分式线性函数映照成 ω 平面的角形域(图 1.6.23(b))

$$\omega = \frac{z+1}{z-1},$$

其中 $\omega(1)=\infty, \omega(-1)=0, \omega(\sqrt{2}i-i)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \omega(\sqrt{2}i+i)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \omega(i)=-i.$

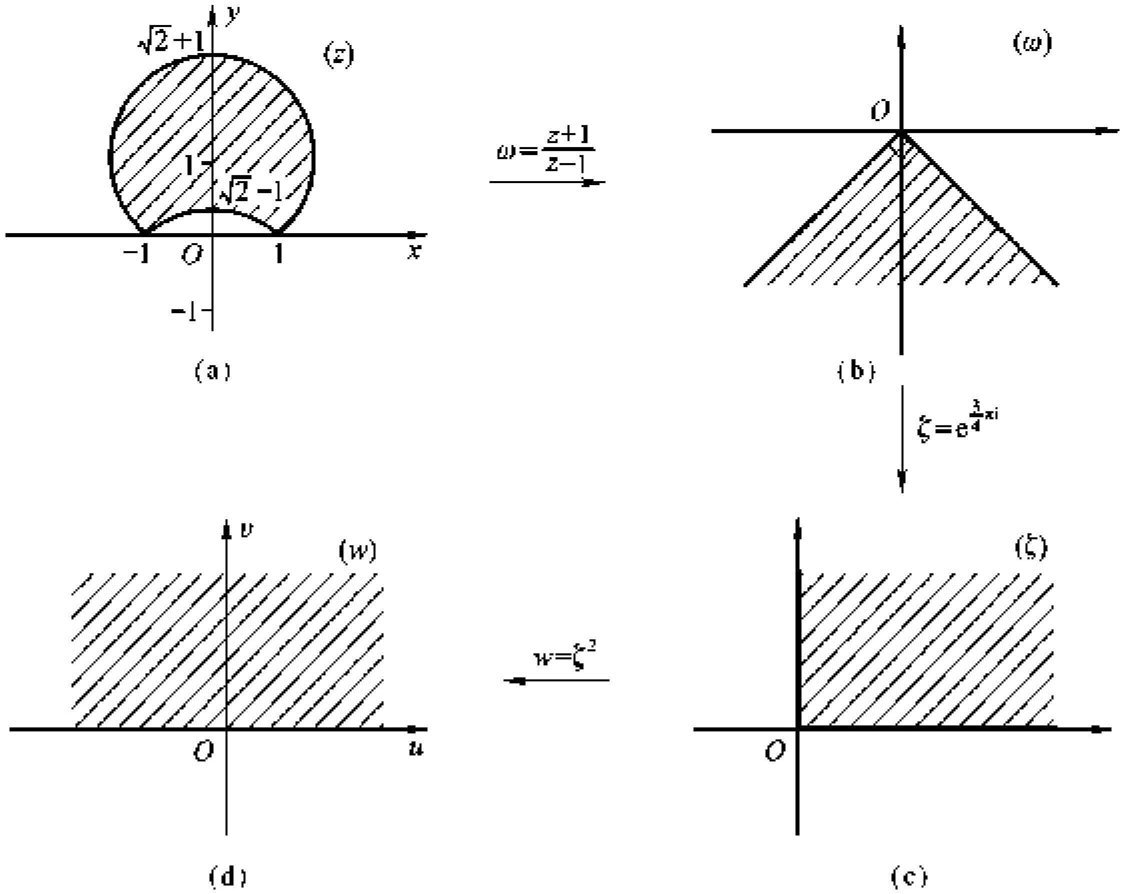

图 1.6.23

② 将 ω 平面的角形域逆时针旋转$\dfrac{3}{4}\pi$得 ζ 平面第Ⅰ象限(图 1.6.23(c))

$$\zeta = e^{\frac{3}{4}\pi i}\omega,$$

③ 将 ζ 平面第Ⅰ象限通过幂函数映照成 w 平面的上半平面(图 1.6.23(d))

$$w = \zeta^2,$$

综上所述

$$w = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

6.4.5 求第Ⅰ象限到上半平面的保形映照,使 $z=\sqrt{2}i,0,1$ 分别映照成 $w=0,\infty,-1$.

解: ① 将 z 平面上的第Ⅰ象限通过幂函数映照成 ω 平面的上半平面(图 1.6.24(b))

$$\omega = z^2,$$

② 将 ω 平面的上半平面按题目要求映照为 w 平面的上半平面(图 1.6.24(c))

$$w = -\frac{\omega-(\sqrt{2}i)^2}{3\omega-0},$$

综上所述

$$w = -\frac{z^2 + 2}{3z^2}.$$

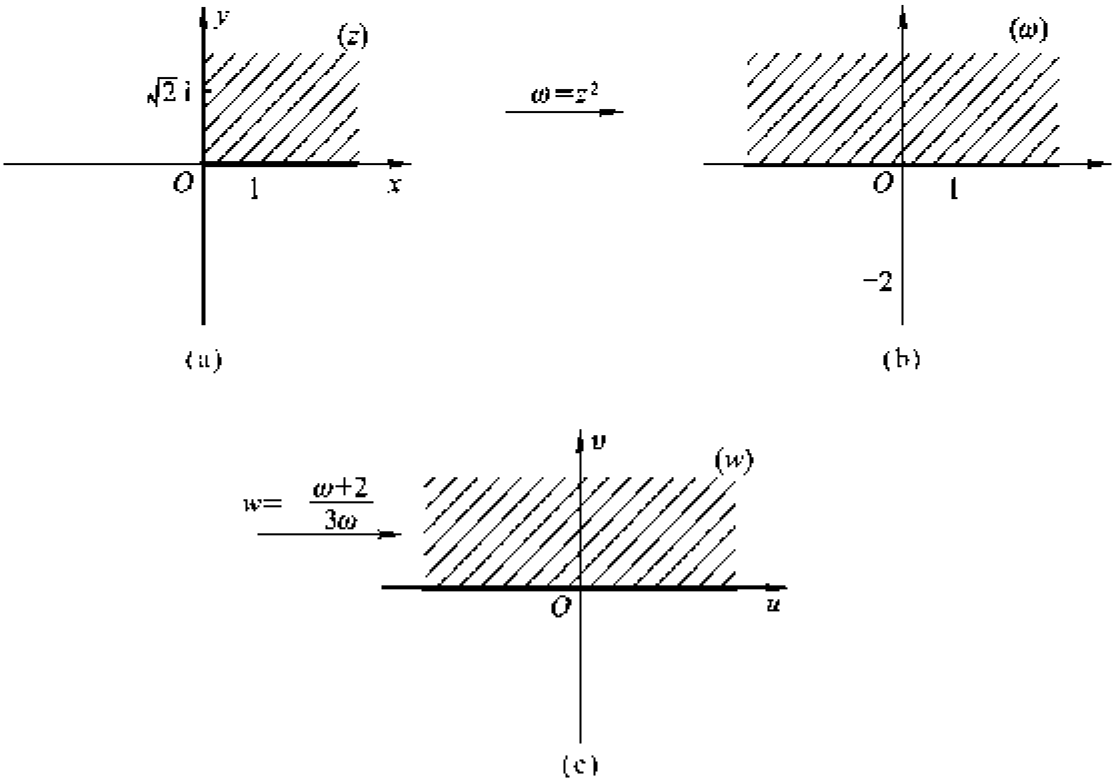

图 1.6.24

第二篇　积 分 变 换

第 1 章　傅里叶变换

1.1　内容要点

1. 傅里叶积分的概念、频谱的概念、傅里叶定理

2. 傅里叶变换的定义、性质、应用

定义 1　设 $f(t)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值（或复值）函数，其傅里叶积分收敛. 由积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

建立的 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 之间的对应称作傅里叶变换（简称傅氏变换）. 用字母 $\mathscr{F}$ 表达，即

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)].$$

积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

建立的 $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 之间的对应称作傅里叶逆变换（简称傅氏逆变换）. 用字母 $\mathscr{F}^{-1}$ 表达，即

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)].$$

傅里叶变换的性质

(1) 线性性质：

$$\mathscr{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathscr{F}[f(t)]+\beta\mathscr{F}[g(t)],$$
$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)]=\alpha\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]+\beta\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)],$$

其中，α,β 是常数.

(2) 位移性质：

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)],$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{i\omega_0 t}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)],$$

其中，t_0 和 ω_0 是常数.

(3) 微分性质：

设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，则

① 若 $|t|\to+\infty$ 时，$f^{(n)}(t)\to 0$，则

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n\mathscr{F}[f(t)] \qquad (n=0,1,2\cdots);$$

② 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|t^n f(t)|\,dt$ 收敛，则

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^n\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

(4) 积分性质：

若当 $t\to+\infty$ 时，$\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt\to 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt\right]=\frac{1}{i\omega}\mathscr{F}[f(t)].$$

卷积的概念：

定义 2　若给定两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则由积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

确定的 t 的函数称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记作 $f_1(t)*f_2(t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

定理 1　(卷积定理)

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，则

(1) $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$

(2) $\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)f_2(t)$

3. δ 函数的概念、性质、傅里叶变换

1.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

了解傅里叶积分、傅里叶积分定理，了解频谱的概念，理解傅里叶变换的概念，会求工程技术中一些常用函数的傅里叶变换．正确理解傅里叶变换的线性性质、位移性质、微分性质、积分性质，理解卷积的概念及卷积定理，会用这些性质来求傅里叶变换，掌握利用傅里叶变换解微分方程的方法．了解单位脉冲函数 (δ 函数) 的概念及筛选性质并会用此性质来求一些函数的傅里叶变换．

重点:傅里叶变换的概念、性质、应用.

难点:δ 函数的概念.

2. 学习注意点

关于同时使用几种傅里叶变换的性质求某函数的傅里叶变换时,应注意避免出现下面情形的错误:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(at+b)]&=\mathscr{F}\left\{f\left[a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right]\right\}=\frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left[f\left(t+\frac{b}{a}\right)\right]\Big|_{\omega=\frac{\omega}{a}}\\&=\frac{1}{|a|}\left[e^{i\omega\frac{b}{a}}F(\omega)\right]\Big|_{\omega=\frac{\omega}{a}}=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a^2}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\end{aligned}$$

或

$$\mathscr{F}[f(at+b)]=e^{ib\omega}\mathscr{F}[f(at)]=e^{ib\omega}\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

事实上,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(at+b)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at+b)e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}f(at+b)e^{-i\frac{\omega}{a}(at+b)}e^{i\frac{b}{a}\omega}d(at+b)\\&\xlongequal{\tau=at+b}\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\frac{b}{a}\omega}}{a}f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau, & a>0,\\ \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{i\frac{b}{a}\omega}}{a}f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau, & a<0\end{cases}\\&=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{a}e^{i\frac{b}{a}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau, & a>0,\\ \displaystyle-\frac{1}{a}e^{i\frac{b}{a}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}d\tau, & a<0\end{cases}\\&=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

避免出现上述情形的办法是首先查表看能否直接得到所要求解的结果.否则,若要多次使用变换的一些性质时,最好记住公式或依定义求解.

1.3 释疑解难

1. 求证:若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理条件,当 $f(t)$ 为奇函数时,则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其中

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt;$$

当 $f(t)$ 为偶函数时,则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t \mathrm{d}\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t \mathrm{d}t.$$

证：当 $f(t)$ 为奇函数时，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\times(-2\mathrm{i})\int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\times(-2\mathrm{i})(2\mathrm{i})\int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\int_0^{+\infty}\sin\omega\tau\sin\omega t \mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t \mathrm{d}\omega \\
&= \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

同理得，当 $f(t)$ 为偶函数时结论成立.

2. 设 $F(\omega)$ 是函数 $f(t)$ 的傅氏变换，证明：

$$F(-\omega) = \mathscr{F}[f(-t)] \quad (\text{翻转性质}).$$

证：$\because \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$

$$\therefore \quad F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \xlongequal{t=-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \mathscr{F}[f(-t)].$$

且 $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 的奇偶性相同.

3. 证明像原函数 $f(t)$ 是实值函数的必要与充分条件是它的像函数满足

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}.$$

证：$\because \quad f(t)$ 是实值函数，

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \overline{F(\omega)} &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= F(-\omega).
\end{aligned}$$

反之，若 $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F(-\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega')e^{i\omega' t}d\omega'} \quad (\omega' = -\omega)$$

$$= \overline{f(t)}.$$

$\therefore$ $f(t)$为实值函数.

4. 求函数 $F(\omega) = \dfrac{\sin(2\pi T\omega)\cos(2\pi T\omega)}{2\pi\omega}$ 的傅氏逆变换.

解：$\because$ 当 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1; \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 时，$\mathscr{F}[f(t)] = \dfrac{2\sin\omega}{\omega}$，

$$\therefore \quad \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\sin(4\pi T\omega)}{4\pi T\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi T\omega)}{4\pi T\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi T\omega)}{4\pi T\omega}e^{i4\pi T\omega\cdot\frac{t}{4\pi T}}d(4\pi T\omega)$$

$$= \frac{1}{4\pi T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega'}{\omega'}e^{i\omega'\left(\frac{t}{4\pi T}\right)}d\omega' \quad (\omega' = 4\pi T\omega)$$

$$= \frac{1}{4\pi T}f\left(\frac{t}{4\pi T}\right),$$

$$\therefore \quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = T\cdot\frac{1}{4\pi T}f\left(\frac{t}{4\pi T}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\begin{cases} 1, & \left|\dfrac{t}{4\pi T}\right| \leqslant 1, \\ 0, & \left|\dfrac{t}{4\pi T}\right| > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}, & |t| \leqslant 4\pi T, \\ 0, & |t| > 4\pi T. \end{cases}$$

1.4 典型例题

例 1　求函数 $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的傅里叶变换.

解：$\mathscr{F}[f(x)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$

$$= \int_{-1}^{0}(1+x)e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \left.\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{-1}^{0} + \left[\frac{ixe^{-i\omega x}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2}\right]_{-1}^{0} +$$

$$\left.\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{0}^{1} - \left[\frac{ixe^{-i\omega x}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{e^{i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{ie^{i\omega}}{\omega} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{ie^{-i\omega}}{\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \frac{2}{\omega}\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2} - \frac{2}{\omega}\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}$$

$$= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega).$$

例 2　证明：$\mathscr{F}[\delta'(t)]=\mathrm{i}\omega$，并求 $f(t)=1-2\delta(t)+3\delta'(t-1)$ 的傅氏变换.

证：$\because$ $\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathscr{F}[\delta'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta(t+\Delta t)-\delta(t)}{\Delta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+\Delta t)-\delta(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\Delta t}-1}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\omega\Delta t)-1}{\Delta t}+\mathrm{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\omega\Delta t)}{\Delta t}\\ &= \mathrm{i}\omega,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathscr{F}[\delta'(t)]=\mathrm{i}\omega,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathscr{F}[f(t)] &= \mathscr{F}[1]-2\mathscr{F}[\delta(t)]+3\mathscr{F}[\delta'(t-1)]\\ &= 2\pi\delta(\omega)-2+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[\delta'(t)]\\ &= 2\pi\delta(\omega)+3\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-2.\end{aligned}$$

例 3　利用傅氏变换求解下列方程

$$f'(t)-\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t=\delta(t).$$

解：设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，方程两边同时施加傅氏变换得

$$\mathrm{i}\omega F(\omega)-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)=1,$$

$$\therefore\quad F(\omega)=\frac{-\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}\right),$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{1}{2}\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}-\frac{1}{2}\begin{cases}\mathrm{e}^{t}, & t\leqslant 0,\\ 0, & t>0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\mathrm{e}^{t}, & t<0.\end{cases}$$

例 4　求函数 $F(\omega)=\omega\sin\omega t_0$ 的傅氏逆变换.

解：$\because$ $\mathscr{F}^{-1}[\sin\omega t_0]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)]$,

$$\mathscr{F}^{-1}[(\mathrm{i}\omega)^nF(\omega)]=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\{\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]\},$$

$$\therefore\quad \mathscr{F}^{-1}[\omega\sin\omega t_0]=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}[\delta'(t - t_0) - \delta'(t + t_0)].$$

例 5 若 $f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t}, & t \geqslant 0, \end{cases}$ $f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)]$.

解：
$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t e^{-i\omega t} dt$$
$$= \frac{-1 + i\omega e^{-\frac{\pi}{2}\omega i}}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{1 - i\omega}{\omega^2 + 1}.$$

例 6 设 $f_1(t) = e^t \cos t$，$f_2(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$，求 $f_1(t) * f_2(t)$.

解：
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} \cos\tau [\delta(t - \tau + 1) + \delta(t - \tau - 1)] d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} \cos\tau [\delta(\tau - t - 1) + \delta(\tau - t + 1)] d\tau$$
$$= e^{t+1}\cos(t+1) + e^{t-1}\cos(t-1).$$

1.5 习题选解

1.1.1 求下列函数的傅氏积分：

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1, \\ -1, & -1 < t < 0, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < +\infty; \end{cases}$

(c) $f(t) = e^{-\frac{(\pi t)^2}{a}}$.

解：(a)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{1} (1 - t^2) e^{-i\omega t} dt$$
$$= \frac{4\sin\omega}{\omega^3} - \frac{4\cos\omega}{\omega^2};$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{0} - e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 e^{-i\omega t} dt$$
$$= \left.\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right|_{0}^{1}$$
$$= \frac{2(1 - \cos\omega)}{i\omega};$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\pi t)^2}{a} - i\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a}\left[t + \frac{ai\omega}{2\pi^2}\right]^2 - \frac{a\omega^2}{4\pi^2}} dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{a\omega^2}{4\pi^2}}.$$

1.1.2 求如图 2.1.1 所示锯形波的频谱.

解：第 $k+1$ 个周期

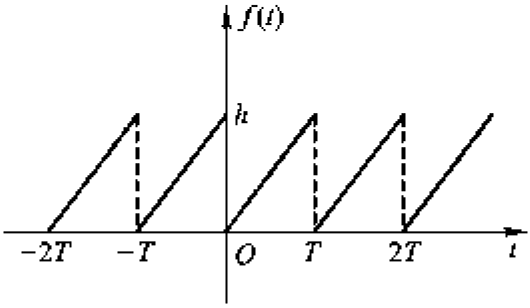

图 2.1.1

$$f_T(t) = \frac{h}{T}(t - kT) \quad (kT \leqslant t \leqslant kT + T),$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}, c_0 = \frac{h}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \frac{h}{T}(t + T) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \frac{h}{T} t e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} dt\right] = \frac{hi}{2n\pi},$$

$$|c_n| = \frac{h}{2n\pi}.$$

1.2.1 求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果：

(a) $f(t) = e^{-\beta|t|}(\beta > 0)$， 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$；

(b) $f(t) = e^{-|t|}\cos t$， 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos\omega t\, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}\cos t$；

(c) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leqslant \pi; \\ 0, & |t| > \pi, \end{cases}$ 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & |t| \leqslant \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$

解：(a) $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\beta - i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + i\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{\beta - i\omega} + \frac{1}{\beta + i\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

$$\because \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega,$$

$$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}.$$

(b) $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos t\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}(e^{it} + e^{-it}) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}(e^{it} + e^{-it}) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4}.$$

$$\because \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4} e^{i\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega,$$

$$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}\cos t.$$

(c) $$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t e^{-i\omega t} dt = -2i\int_0^{\pi} \sin t \sin\omega t dt$$

$$= i\int_0^{\pi} [\cos(1+\omega)t - \cos(1-\omega)t] dt = \frac{-2i}{1-\omega^2}\sin\omega\pi.$$

$$\because \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i}{1-\omega^2}\sin\omega\pi e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\omega^2}\sin\omega\pi\sin\omega t d\omega,$$

$$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & |t| \leqslant \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

1.2.2 求下列函数的傅氏逆变换

(a) $F(\omega) = \dfrac{2}{(3+i\omega)(5+i\omega)}$; (b) $F(\omega) = \dfrac{\omega^2+10}{(5+i\omega)(9+\omega^2)}$.

解: (a) $\because \quad F(\omega) = \dfrac{1}{3+i\omega} - \dfrac{1}{5+i\omega}$,

$$\therefore \quad f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+i\omega}\right] - \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right] = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-5t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

(b) $$\because \quad F(\omega) = \frac{15}{16(5+i\omega)} + \frac{1}{12(3+i\omega)} + \frac{1}{48(3-i\omega)}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right] = \begin{cases} e^{-5t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+i\omega}\right] = \begin{cases} e^{-3t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{3-i\omega}\right] = \begin{cases} e^{3t}, & t < 0, \\ 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(t) = \begin{cases} \frac{15}{16}e^{-5t} + \frac{1}{12}e^{-3t}, & t \geqslant 0, \\ \frac{1}{48}e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$$

1.2.3 已知某函数的傅氏变换为 $F(\omega) = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$,求该函数 $f(t)$.

解: $$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega} d\omega$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+t)\omega}{\omega} d\omega + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-t)\omega}{\omega} d\omega$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t>-1,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & t<-1,\\ 0, & t=-1\end{cases}+\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & t>1,\\ 0, & t=1\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}0, & |t|>1,\\ \pi, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & |t|=1,\end{cases}
$$

$$
\therefore\quad f(t)=\begin{cases}0, & |t|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{1}{4}, & |t|=1.\end{cases}
$$

1.2.5 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明:

$$
\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)].
$$

证: $\because\quad \mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\dfrac{1}{2}\mathscr{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}+f(t)e^{-i\omega_0 t}]$

$$
=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)],
$$

$\therefore$ 结论成立.

1.2.6 证明:$\dfrac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\dfrac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)=f_1(t)*\dfrac{df_2(t)}{dt}$.

证: $\because\quad f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$,

$$
\therefore\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau,
$$

$$
\therefore\quad \frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df_1(t-\tau)}{dt}f_2(\tau)d\tau=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)
$$

$$
=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\frac{df_2(t-\tau)}{dt}d\tau=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}.
$$

1.2.7 证明:若 $\mathscr{F}[e^{i\varphi(t)}]=F(\omega)$,其中 $\varphi(t)$为一实函数,则

$$
\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],
$$

$$
\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2i}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}].
$$

证: $\because\quad \mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\dfrac{1}{2}\mathscr{F}[e^{i\varphi(t)}+e^{-i\varphi(t)}]$

$$
=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\varphi(t)}e^{-i\omega t}dt\right]
$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\omega) + \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi(t)} e^{-i(-\omega)t} dt}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\omega) + \overline{F(-\omega)}\right],$$

$\therefore$ 结论成立.

同理,$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)] = \dfrac{1}{2i}\left[F(\omega) - \overline{F(-\omega)}\right]$.

1.2.8 已知 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$,求下列函数的傅氏变换:

(a) $tf(t)$; (b) $(1-t)f(1-t)$; (c) $tf(2t)$;

(d) $(t-2)f(-2t)$; (e) $f(2t-5)$; (f) $t\dfrac{df(t)}{dt}$.

解: (a) $\because$ $tf(t) = i(-it)f(t)$,

$\therefore$ $\mathscr{F}[tf(t)] = iF'(\omega)$;

(b) $$\mathscr{F}[(1-t)f(1-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}(1-t)f(1-t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\overset{1-t=\tau}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\tau f(\tau)e^{-i\omega(1-\tau)}d\tau$$

$$= e^{-i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau f(\tau)e^{-i(-\omega)\tau}d\tau$$

$$= e^{-i\omega}\mathscr{F}[tf(t)]\Big|_{\omega=-\omega}$$

$$= -ie^{-i\omega}\frac{dF(-\omega)}{d\omega}.$$

(c) $\because$ $tf(2t) = \dfrac{2t}{2}f(2t)$,

$\therefore$ 由相似性质

$$\mathscr{F}[tf(2t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathscr{F}[tf(t)]\Big|_{\omega=\frac{\omega}{2}} = \frac{i}{4}F'\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(d) $\because$ $(t-2)f(-2t) = tf(-2t) - 2f(-2t)$,

$\therefore$ 由相似性质

$$\mathscr{F}[(t-2)f(-2t)] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathscr{F}[tf(t)]\Big|_{\omega=-\frac{\omega}{2}} - 2\mathscr{F}[f(-2t)]$$

$$= -\frac{i}{4}F'\left(-\frac{\omega}{2}\right) - 2\cdot\frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= -\frac{i}{4}F'\left(-\frac{\omega}{2}\right) - F\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

(e) $\because$ $\mathscr{F}[f(at+b)] = \dfrac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$,

$\therefore$ $\mathscr{F}[f(2t-5)] = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}i\omega}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.

(f) $\mathscr{F}[tf'(t)] = i\{\mathscr{F}[f'(t)]\}' = i[i\omega F(\omega)]'$

$$= -F(\omega) - \omega F'(\omega).$$

1.2.9 求下列函数的傅氏变换：

(a) $f(t) = t\mathrm{e}^{-at}u(t)$；　　(b) $f(t) = \dfrac{a^2}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$.

解：　(a) $\mathscr{F}[t\mathrm{e}^{-at}u(t)] = \mathrm{i}\{\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-at}u(t)]\}' = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{a + \mathrm{i}\omega}\right)'$

$$= \frac{1}{(a + \mathrm{i}\omega)^2};$$

(b) ∵　$f(t) = \dfrac{a^2}{4\pi^2}\left(\dfrac{1}{t^2 + \dfrac{a^2}{4\pi^2}}\right)$,

∴　查表得：

$$F(\omega) = \frac{a^2}{4\pi^2}\left(-\frac{\pi}{a/2\pi}\mathrm{e}^{\frac{a}{2\pi}|\omega|}\right)$$

$$= -\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{a}{2\pi}|\omega|}\quad (\mathrm{Re}(a) < 0).$$

1.2.10 利用傅氏变换求解下列积分方程：

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1; \\ 2, & 1 \leqslant t < 2; \\ 0, & t \geqslant 2. \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega = \frac{\sin t}{t}$.

解：　(a) 在 $(-\infty, 0)$ 上补充定义，使 $g(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上成为奇函数.

$$\because\quad g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} g(t')\cos\omega(t - t')\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} g(t')(\cos\omega t\cos\omega t' + \sin\omega t\sin\omega t')\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(t')\sin\omega t\sin\omega t'\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega t\left[\int_0^{+\infty} g(t')\sin\omega t'\,\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega + \int_1^2 2\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1 + \cos t - 2\cos 2t}{t},$$

$$\therefore\quad g(\omega) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 + \cos\omega - 2\cos 2\omega}{\omega}\quad (\omega > 0).$$

此题还可从本章习题 1.1.3 的结论直接推出结果.

(b) 在 $(-\infty,0)$ 上补充定义，使 $g(\omega)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成为偶函数，则由本章习题 1.1.3 结论可知

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega = \frac{\sin t}{t},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad g(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos\omega t}{t}\mathrm{d}t\\ &= \begin{cases}0, & \omega > 1;\\ 1, & 0 < \omega < 1;\\ \dfrac{1}{2}, & \omega = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

1.2.11 若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0.\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求 $f_1(t)*f_2(t)$.

解：
$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t) &= f_2(t)*f_1(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\tau f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\tau\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & t > \dfrac{\pi}{2},\\ \displaystyle\int_0^{t}\sin\tau\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\mathrm{e}^{-t}, & t > \dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-t}}{2}, & 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}\end{aligned}$$

1.2.12 利用瑞利定理，求下列积分的值：

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　　(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解：(a) 设 $f^2(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$，则

$$F(\omega)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}e^{-i\omega x}dx \xlongequal{\text{查表得}} \begin{cases}\sqrt{2}\pi, & |\omega|\leqslant\frac{1}{2},\\ 0, & |\omega|>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}2\pi^2d\omega$$
$$=\pi.$$

(b) 设 $f(x)=\dfrac{\sin^2x}{x}$,则

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x}e^{-i\omega x}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{2x}[e^{-i(\omega-1)x}-e^{-i(\omega+1)x}]dx$$
$$=\frac{1}{2}\begin{cases}\pi, & |\omega-1|\leqslant 1,\\ 0, & |\omega-1|>1\end{cases}-\frac{1}{2}\begin{cases}\pi, & |\omega+1|\leqslant 1,\\ 0, & |\omega+1|>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & |\omega|>2,\\ -\frac{\pi}{2} & -2\leqslant\omega<0,\\ \frac{\pi}{2}, & 0<\omega\leqslant 2.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{\pi^2}{4}d\omega$$
$$=\frac{\pi}{2}.$$

(c) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-i\omega x}dx\xlongequal{\text{查表得}}\pi e^{-|\omega|}.$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2e^{-2|\omega|}d\omega$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{2\omega}d\omega+\int_{0}^{+\infty}e^{-2\omega}d\omega\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}.$$

(d) 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,则

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{-i\omega x}dx$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega|z}}{1+z^2},\mathrm{i}\right]$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega|z}}{2}\bigg|_{z=\mathrm{i}} = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-|\omega|}.$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2\mathrm{e}^{-2|\omega|}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

1.3.1 求下列函数的傅氏变换：

(a) $u(t)\sin bt$； (b) $u(t)\cos bt$； (c) $\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$；

(d) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t-t_0)$； (e) $\sin^3 t$； (f) $\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$

(g) $\frac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$.

解：(a) $\because \quad u(t)\sin bt = \frac{1}{2\mathrm{i}}u(t)[\mathrm{e}^{ibt}-\mathrm{e}^{-ibt}]$

$$\therefore \quad F(\omega) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}[u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-b)t}-u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+b)t}]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-b)}+\pi\delta(\omega-b)-\frac{1}{\mathrm{i}(\omega+b)}+\pi\delta(\omega+b)\right]$$

$$= \frac{b}{b^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{i}}[\delta(\omega-b)-\delta(\omega+b)].$$

(b) 方法同(a)或查表：

$$F(\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega}{b^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-b)+\delta(\omega+b)].$$

(c) $$F(\omega) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega_0-a-\mathrm{i}\omega)t}}{\mathrm{i}\omega_0-(a+\mathrm{i}\omega)}\bigg|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\omega_0-a-\mathrm{i}\omega)t}}{\mathrm{i}\omega_0+a+\mathrm{i}\omega}\bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\omega_0+a+\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega_0-a-\mathrm{i}\omega}\right)$$

$$= \frac{a+\mathrm{i}\omega}{\omega_0^2+(a+\mathrm{i}\omega)^2}.$$

(d) $\because \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t-t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t-t_0)}u(t-t_0)$,

$$\therefore \quad F(\omega) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t-t_0)}u(t-t_0)] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)]$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_0}\left\{\frac{\mathrm{i}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\right.$$

$$+\frac{\omega_0 \mathrm{i}}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]\Big\}$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega_0-\omega}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right].$$

(e) $\because\quad \sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t,$

$\therefore\quad \mathscr{F}[\sin^3 t]=\frac{3}{4}\mathscr{F}[\sin t]-\frac{1}{4}\mathscr{F}[\sin 3t]$

$$=\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]-\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)].$$

(f) $\because\quad \operatorname{sgn}(t)=u(t)-u(-t),$

$\therefore\quad \mathscr{F}[\operatorname{sgn}(t)]=\mathscr{F}[u(t)]-\mathscr{F}[u(-t)]$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)-\left[\frac{1}{\mathrm{i}(-\omega)}+\pi\delta(-\omega)\right]\quad\text{(翻转性质)}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{i}\omega}\ (\delta\ \text{为偶函数}).$$

(g) $F(\omega)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega a}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega a}{2}}]$

$$=\cos a\omega+\cos\frac{a\omega}{2}.$$

第 2 章　拉普拉斯变换

2.1　内容要点

1.　拉普拉斯变换的概念、存在定理、常用函数的拉普拉斯变换

定义 1　设 $f(t)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的实值(或复值)函数，其拉普拉斯积分收敛.由积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s\ \text{为复参量})$$

建立的 $f(t)$ 与 $F(s)$ 之间的对应称作拉普拉斯变换(简称拉氏变换).用字母 $\mathscr{L}$ 表达，即

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)].$$

2. 拉普拉斯逆变换、拉普拉斯变换的性质、应用部分分式、卷积性质求拉普拉斯逆变换

定义 2　若 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$，则积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds \quad (\alpha\ \text{为}\ s\ \text{的实部})$$

建立的 $F(s)$ 与 $f(t)$ 之间的对应称作拉普拉斯逆变换(简称拉氏逆变换).用字母 $\mathscr{L}^{-1}$ 表达，即

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)].$$

拉普拉斯变换的性质

(1)线性性质：

$$\mathscr{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathscr{L}[f(t)] + \beta\mathscr{L}[g(t)];$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[F(s)] + \beta\mathscr{L}^{-1}[G(s)],$$

其中，α, β 是常数.

(2) 微分性质：

① 像原函数的微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0);$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (\mathrm{Re}(s) > c_0).$$

②像函数的微分性质

$$F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)] \qquad (\mathrm{Re}(s) > c_0);$$

$$F^{(n)}(s) = \mathscr{L}[(-t)^nf(t)] \quad (\mathrm{Re}(s) > c_0).$$

(3) 积分性质:

① 像原函数的积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s);$$

$$\mathscr{L}\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{ 次}} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s^n}F(s).$$

② 像函数的积分性质

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s;$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{ 次}} F(s)\,\mathrm{d}s.$$

(4) 延迟性质:

若 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 则对任一非负实数 t_0 有

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}F(s),$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-st_0}F(s)] = f(t-t_0).$$

(5) 位移性质:

$$F(s-a) = \mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)],$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathrm{e}^{at}f(t).$$

卷积的概念

定义 3　若给定的两个函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 在 $t<0$ 时均为零, 则积分

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积, 记作 $f_1(t)*f_2(t)$, 即

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

定理 1　(卷积定理)

若 $F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]$, $F_2(s)=\mathscr{L}[f_2(t)]$, 则

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(s)F_2(s),$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = f_1(t)*f_2(t).$$

3. 应用拉普拉斯变换求解微分方程

2.2 教学要求和学习注意点

1. 教学要求

正确理解拉普拉斯变换的概念，知道拉氏变换的存在定理，会求一些常用函数的拉普拉斯变换，正确理解拉氏变换的线性、微分、积分、位移及延迟性质，了解初值定理与终值定理以及它们在计算拉氏变换中的应用. 会用部分分式的方法及查表的方法求拉氏逆变换. 掌握拉氏变换的卷积性质，会利用这一性质求一些函数的拉氏逆变换. 会用拉普拉斯变换方法求解线性微分方程及微分方程组.

重点：拉普拉斯变换的概念、性质、应用.

难点：拉普拉斯变换存在定理的证明.

2. 学习注意点

在应用拉氏变换的延迟性质求像函数时，应特别注意性质成立的条件.

例如：求下列函数的拉氏变换：

(a) $f(t)=\sin(t-2)$；

(b) $f(t)=\sin(t+2)$.

解：(a) $\mathscr{L}[\sin(t-2)]=e^{-2s}\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$；

(b) $\mathscr{L}[\sin(t+2)]=e^{2s}\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{e^{2s}}{s^2+1}$.

答：这两题的求解都错了.

(a) 函数 $f(t)=\sin(t-2)$不满足延迟性质的应用条件 $f(t)=0\,(t<0)$，故不能用延迟性质求解. 如果是函数 $f(t)=\sin(t-2)\,u(t-2)$则满足性质条件，

$$\mathscr{L}[\sin(t-2)\,u(t-2)]=e^{-2s}\mathscr{L}[\sin t u(t)]=e^{-2s}\mathscr{L}[\sin t]=\frac{e^{-2s}}{s^2+1}.$$

(b) 函数 $f(t)=\sin(t+2)=\sin[t-(-2)]$同样不能用延迟性质求解，且其中的数字 -2，相当于性质中的 t_0，应是大于等于零的.

这两题的正确解法应是依定义求解

$$\mathscr{L}[\sin(t-2)]=\int_0^{+\infty}\sin(t-2)e^{-st}dt=\frac{-s\sin2+\cos2}{s^2+1},$$

$$\mathscr{L}[\sin(t+2)]=\int_0^{+\infty}\sin(t+2)e^{-st}dt=\frac{s\sin2+\cos2}{s^2+1}.$$

2.3 释疑解难

1. 若 $F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]$，$F_2(s)=\mathscr{L}[f_2(t)]$，则

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s).$$

证：$\because\quad t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$,

$$\therefore\quad f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_t^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_0^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\left[\int_0^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{+\infty}F_2(s)f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$=F_1(s)F_2(s).$$

2. 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，证明：

(a) $\mathscr{L}^{-1}[F(bs)]=\dfrac{1}{b}f\left(\dfrac{t}{b}\right)\quad(b>0)$；

(b) $\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s}\quad(a>0,b>0)$，

并由此性质计算 $\mathscr{L}[\sin(\omega t+\varphi)u(\omega t+\varphi)]\quad(\omega>0,\varphi<0)$.

证：(a) $\because\quad \mathscr{L}\left[f\left(\dfrac{t}{b}\right)\right]=\displaystyle\int_0^{+\infty}f\left(\frac{t}{b}\right)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}b\,f\left(\frac{t}{b}\right)\mathrm{e}^{-sb\frac{t}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{t}{b}\right)$
$$=bF(sb),$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}^{-1}[F(bs)]=\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right).$$

(b) $$\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]=\int_{\frac{b}{a}}^{+\infty}f(at-b)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{\frac{b}{a}}^{+\infty}\frac{1}{a}f(at-b)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}(at-b)}\mathrm{e}^{-\frac{sb}{a}}\mathrm{d}(at-b)$$
$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

$$\mathscr{L}[\sin(\omega t+\varphi)u(\omega t+\varphi)]=\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\frac{\varphi}{\omega}s}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\frac{\varphi}{\omega}s}.$$

3. 求变系数微分方程：$ty\ +2(t-1)y'+(t-2)y=0$ 满足初始条件 $y(0)$

$=0$ 的解.

解：$\because\quad \mathscr{L}[ty]+2\mathscr{L}[ty']-2\mathscr{L}[y']+\mathscr{L}[ty]-2\mathscr{L}[y]=0,$

$$\therefore\quad -[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]'-2[sY(s)-y(0)]'$$
$$-2[sY(s)-y(0)]-Y'(s)-2Y(s)=0,$$

$$\therefore\quad Y'(s)+\frac{4}{s+1}Y(s)=\frac{3y(0)}{(s+1)^2}\quad(\text{微分方程}),$$

$$\therefore\quad Y(s)=\frac{y(0)}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^4},$$

$$\therefore\quad y(t)=y(0)e^{-t}+ct^3e^{-t}.$$

又 $\because\quad y(0)=0,$

$$\therefore\quad y(t)=ct^3e^{-t}.$$

4. 某系统的传递函数 $H(s)=\dfrac{k}{1+Ts}$，求当输入函数 $f(t)=A\sin\omega t$ 时系统的输出函数 $y(t)$.

解：$\because\quad Y(s)=H(s)X(s),$

其中 $H(s)$ 为传递函数，$X(s)$ 为输入函数，$Y(s)$ 为输出函数.

$$\therefore\quad Y(s)=H(s)\mathscr{L}[f(t)]=\frac{k}{1+Ts}\mathscr{L}[A\sin\omega t]=\frac{k}{1+Ts}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{Ak\omega}{T\omega^2+\dfrac{1}{T}}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{T}+s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{\dfrac{1}{T}}{s^2+\omega^2}\right],$$

$$\therefore\quad y(t)=\frac{Ak\omega}{T\omega^2+\dfrac{1}{T}}\left[e^{-\frac{t}{T}}-\cos\omega t+\frac{1}{T\omega}\sin\omega t\right]$$

$$=\frac{Ak}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin[\omega t-\arctan(\omega T)]+\frac{AkT\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{T}}.$$

2.4 典型例题

例 1 计算 $\mathscr{L}[t^2u(1-e^{-t})]$.

解：$\because\quad u(1-e^{-t})=\begin{cases}1, & 1-e^{-t}\geqslant 0,\\ 0, & 1-e^{-t}<0\end{cases}=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

$$\therefore\quad \mathscr{L}[t^2u(1-e^{-t})]=\mathscr{L}[t^2u(t)]$$
$$=\int_0^{+\infty}t^2u(t)e^{-st}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}t^2e^{-st}dt$$
$$=\frac{2}{s^3}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 2　求函数 $\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$ 的拉氏逆变换.

解：∵　$\left[\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}\right]'=\dfrac{2s}{s^2-1}-\dfrac{2}{s}$,

$$\therefore\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\left[\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right]'\right\}=2\mathrm{ch}t-2u(t),$$

而

$$\mathscr{L}^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-t)^n f(t),\ f(t)=\frac{1}{(-t)^n}\mathscr{L}^{-1}[F^{(n)}(s)],$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}^{-1}\left[\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right]=-\frac{1}{t}[2\mathrm{ch}t-2u(t)]=\frac{2}{t}[u(t)-\mathrm{ch}t].$$

例 3　求函数 $f(t)=e^{-(t+\alpha)}\sin\beta t$ 的拉氏变换.

解：
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{-(t+\alpha)}\sin\beta t]&=e^{-\alpha}\mathscr{L}[e^{-t}\sin\beta t]\\&=e^{-\alpha}\mathscr{L}[\sin\beta t]\Big|_{s=s+1}\\&=e^{-\alpha}\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\Bigg|_{s=s+1}\\&=\frac{\beta e^{-\alpha}}{(s+1)^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

例 4　求函数 $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2-3}$ 的拉氏逆变换.

解：
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(s)]&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2-3}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3}\right]\Bigg|_{t=t-2}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sh}\sqrt{3}t\Bigg|_{t=t-2}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sh}\sqrt{3}(t-2).\end{aligned}$$

例 5　利用拉氏变换的性质,求函数 $\displaystyle\int_0^t\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$ 的拉氏变换.

解：
$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt\right]&=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{e^t-\cos 2t}{t}\right]\\&=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\mathscr{L}[e^t-\cos 2t]ds\\&=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds\\&=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}.\end{aligned}$$

例 6　解微分积分方程 $1-2\sin t-y(t)-\displaystyle\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau=0$.

解：方程两边同时实施拉氏变换得像方程

$$\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2+1}-Y(s)-\mathscr{L}[e^{2t}*y(t)]=0,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{s}-\frac{2}{s^2+1}-Y(s)-\frac{1}{s-2}Y(s)=0,$$

$$Y(s)=\frac{s^2-3s+2}{s(s^2+1)}=\frac{2}{s}-\frac{s+3}{s^2+1},$$

$$\therefore\quad y(t)=2-\cos t-3\sin t.$$

例 7 已知电路的有关数据如图2.2.1所示，且初始电流为0，试求各支路上的电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$.

解：设 $NPJK$ 中电流为 i，i 在节点 K 处分为 i_1，i_2，所以 $i=i_1+i_2$.

在 $JKNPJ$ 与 $KLMNK$ 回路，分别应用基尔霍夫第一定律得

$$\begin{cases}20i+2i_1'+10i_1=120,\\-10i_1-2i_1'+4i_2'+20i_2=0,\end{cases}$$

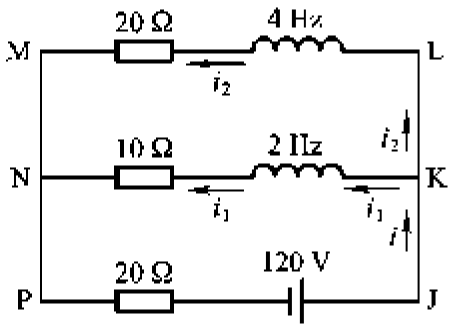

图 2.2.1

其中 $i=i_1+i_2$，初始条件 $i_1(0)=i_2(0)=0$，记 $\mathscr{L}[i_1(t)]=I_1(s)$，$\mathscr{L}[i_2(t)]=I_2(s)$，对方程组中每一个方程取拉氏变换，得

$$\begin{cases}(30+2s)I_1(s)+20I_2(s)=\dfrac{120}{s},\\-(10+2s)I_1(s)+(4s+20)I_2(s)=0,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}I_1(s)=\dfrac{60}{s(s+20)}=3\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+20}\right),\\I_2(s)=\dfrac{30}{s(s+20)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+20}\right).\end{cases}$$

求逆变换得

$$i_1(t)=3(1-e^{-20t}),$$

$$i_2(t)=\frac{3}{2}(1-e^{-20t}),$$

而

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=\frac{9}{2}(1-e^{-20t}).$$

2.5 习题选解

2.1.1 由定义分别直接计算下列各函数的拉氏变换.

(a) $f(t)=\cos t\delta(t)-\sin tu(t)$;　　(b) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi,\\ 0, & t\leqslant 0 \text{或} t\geqslant \pi.\end{cases}$

(c) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t>4.\end{cases}$

解：(a) $F(s)=\int_0^{+\infty}\cos t\delta(t)e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}\sin te^{-st}dt$

$$=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}.$$

(b) $F(s)=\int_0^{\pi}\sin te^{-st}dt=\frac{-\cos t-\sin t}{1+s^2}e^{-st}\Big|_0^{\pi}$

$$=\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}.$$

(c) $F(s)=\int_0^2 3e^{-st}dt-\int_2^4 e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{s}(e^{-4s}-4e^{-2s}+3).$$

2.2.1　利用留数，求下列函数的拉氏逆变换.

(a) $\frac{1}{s^3(s-a)}$;　　(b) $\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$;　　(c) $\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$.

解：(a) $f(t)=\sum_k \mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^3(s-a)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^3(s-a)},a\right]$$

$$=\left[\frac{e^{st}}{2(s-a)}\right]_{s=0}''+\frac{e^{st}}{s^3}\Big|_{s=a}$$

$$=\frac{1}{a^3}\left(e^{at}-\frac{a^2t^2}{2}-at-1\right).$$

(b) $f(t)=\sum_k \mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2},-a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2},-b\right]$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{c-b}{a-b}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}.$$

(c) $f(t)=\mathrm{Res}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^3(s-1)^2},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^3(s-1)^2},1\right]$

$$=t^2+5t+8+(3t-8)e^t.$$

2.3.1　利用拉氏变换的性质及拉氏变换表求下列函数的拉氏变换.

(a) $\cos\alpha t\cos\beta t$;　　(b) $u(t-1)-u(t-2)$;

(c) $3\sqrt[3]{t}+e^{2t}$;　　(d) $e^{2t}+5\delta(t)$.

解：(a) $F(s) = \frac{1}{2}\mathscr{L}[\cos(\alpha+\beta)t + \cos(\alpha-\beta)t]$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{1}{s^2+(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{s^2+(\alpha-\beta)^2}\right].$$

(b) $F(s) = \mathscr{L}[u(t-1)] - \mathscr{L}[u(t-2)]$

$$= e^{-s}\mathscr{L}[u(t)] - e^{-2s}\mathscr{L}[u(t)]$$

$$= \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}.$$

(c) $F(s) = 3\mathscr{L}[t^{\frac{1}{3}}] + 4\mathscr{L}[e^{2t}]$

$$= \frac{3}{s^{4/3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{4}{s-2}.$$

(d) $F(s) = \mathscr{L}[e^{2t}] + 5\mathscr{L}[\delta(t)]$

$$= \frac{1}{s-2} + 5.$$

2.3.3　求下列函数的拉氏变换.

(a) $\sin(t-2)$;　　(b) $\sin(t-2)u(t-2)$;

(c) $\sin t u(t-2)$;　　(d) $e^{2t}u(t-2)$;

(e) $(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$.

解：(a) $F(s) = \int_0^{+\infty}\sin(t-2)e^{-st}dt$

$$= \frac{\cos 2 - s\sin 2}{s^2+1}.$$

(b) $F(s) = e^{-2s}\mathscr{L}[\sin t u(t)] = \frac{e^{-2s}}{s^2+1}.$

(c) $F(s) = \int_0^{+\infty}\sin t u(t-2)e^{-st}dt = \int_2^{+\infty}\sin t e^{-st}dt$

$$= \left.\frac{-\cos t - s\sin t}{s^2+1}e^{-st}\right|_2^{+\infty}$$

$$= \frac{\cos 2 + s\sin 2}{s^2+1}e^{-2s}.$$

(d) $F(s) = e^4\mathscr{L}[e^{2(t-2)}u(t-2)] = e^4e^{-2s}\mathscr{L}[e^{2t}u(t)]$

$$= \frac{e^{2(2-s)}}{s-2}.$$

(e) $F(s) = \mathscr{L}[(t-1)u(t-1)] - \mathscr{L}[(t-2)u(t-2)] - \mathscr{L}[u(t-2)]$

$$= e^{-s}\mathscr{L}[tu(t)] - e^{-2s}\mathscr{L}[tu(t)] - e^{-2s}\mathscr{L}[u(t)]$$

$$= \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$= \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1+s}{s^2}e^{-2s}.$$

2.3.4　利用延迟性质，求下列函数的拉氏逆变换.

(a) $\dfrac{e^{-5s+1}}{s}$;　　(b) $\dfrac{e^{-2s}}{s^2-4}$;　　(c) $\dfrac{2s^2e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^3}$.

解：(a) $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-5s}\dfrac{e}{s}\right]=e\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]_{t=t-5}$

$$=eu(t-5).$$

(b) $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2-4}\right]=\dfrac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2-4}\right]\Bigg|_{t=t-2}$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t\Big|_{t=t-2}=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2(t-2).$$

(c) $f(t)=2\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right]$

$$=2u(t-1)-(t-2)u(t-2)-\frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2).$$

2.3.5　用单位阶跃函数把图 2.2.2 所示的函数表示出来，并求其拉氏变换.

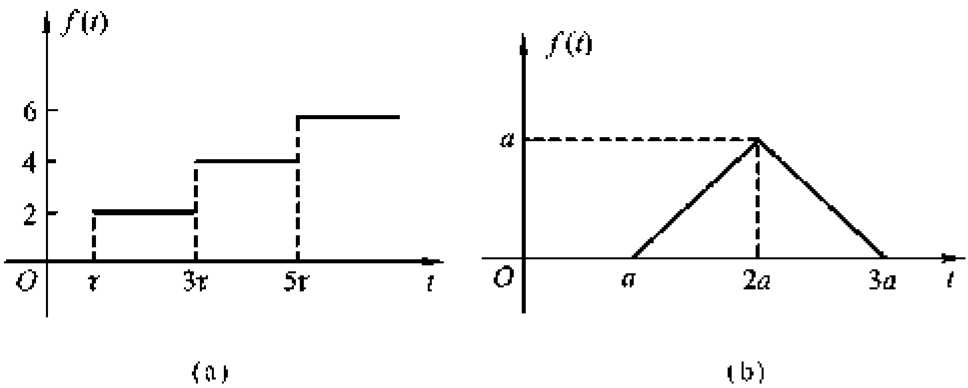

图 2.2.2

解：(a) $\because\quad f(t)=2u(t-\tau)+2u(t-3\tau)+2u(t-5\tau)+\cdots$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}2u[t-(2k+1)\tau],$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}[f(t)]=2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(2k+1)\tau s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s}\cdot\frac{e^{-\tau s}}{1-e^{-2\tau s}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\ \tau s}.$$

(b) $\because\ f(t)=(t-a)u(t-a)-2(t-2a)u(t-2a)+(t-3a)u(t-3a)$,

$$\therefore\ \mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s^2}(e^{-as}-2e^{-2as}+e^{-3as}).$$

2.3.6　利用拉氏变换的性质，求下列函数的拉氏变换.

(a) $(t-1)^2e^t$;　　(b) $e^{-(t+\alpha)}\cos\beta t$;　　(c) $e^{-\frac{t}{a}}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$ $(a>0)$;

(d) $te^{-\alpha t}\sin\beta t$;　　(e) $\dfrac{e^{-3t}\sin2t}{t}$;　　(f) $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$;

(g) $\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$;　　(h) $u(1-e^{-t})$;　　(i) $\dfrac{d^2}{dt^2}(e^{-t}\sin t)$;

(j) $t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt$;　(k) $\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt$;　(l) $\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$.

解：(a) $\mathscr{L}[(t-1)^2e^t]=\mathscr{L}[(t^2-2t+1)e^t]=\left(\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)\bigg|_{s=s-1}$

$$=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}.$$

(b) $\mathscr{L}[e^{-(t+\alpha)}\cos\beta t]=e^{-\alpha}\mathscr{L}[e^{-t}\cos\beta t]=e^{-\alpha}\mathscr{L}[\cos\beta t]|_{s=s+1}$

$$=e^{-\alpha}\frac{s}{s^2+\beta^2}\bigg|_{s=s+1}=\frac{(s+1)e^{-\alpha}}{(s+1)^2+\beta^2}.$$

(c) $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}dt$

$$=\int_0^{+\infty}af\left(\frac{t}{a}\right)e^{-(1+as)\frac{t}{a}}d\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$=aF(1+as).$$

(d) $\mathscr{L}[te^{-\alpha t}\sin\beta t]=\mathscr{L}[t\sin\beta t]|_{s=s+\alpha}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right)\bigg|_{s=s+\alpha}$

$$=\frac{2\beta s}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

(e) $\mathscr{L}\left[\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]ds$

$$=\int_s^{+\infty}\frac{2}{s^2+2^2}\bigg|_{s=s+3}ds$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}.$$

(f) $\mathscr{L}\left[\frac{1-\cos t}{t^2}\right]=\int_s^{\infty}\int_s^{\infty}\mathscr{L}[1-\cos t]ds$

$$=\int_s^{\infty}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)ds$$

$$=\int_s^{\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+1}\bigg|_s^{\infty}ds$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}s\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)-\arctan s.$$

(g) $\mathscr{L}[t^{-\frac{1}{2}}e^{3t}]=\mathscr{L}[t^{-\frac{1}{2}}]|_{s=s-3}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{s=s-3}=\sqrt{\frac{\pi}{s-3}}.$

(h) $\mathscr{L}[u(1-e^{-t})]=\int_0^{+\infty}u(1-e^{-t})e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}.$

(i) $\mathscr{L}[(e^{-t}\sin t)'']=s^2\mathscr{L}[e^{-t}\sin t]-s(e^{-t}\sin t)|_{t=0}-(e^{-t}\sin t)'|_{t=0}$

$$=s^2\mathscr{L}[\sin t]|_{s=s+1}-e^{-t}(\cos t-\sin t)|_{t=0}$$

$$= \frac{s^2}{(s+1)^2+1} - 1 = \frac{-2(s+1)}{s^2+2s+2}.$$

(j) $\mathscr{L}\left[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right] = -\left\{\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right]\right\}'$

$$= -\left\{\frac{1}{s}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]\right\}'$$

$$= -\left\{\frac{1}{s}\mathscr{L}[\sin 2t]\big|_{s=s+3}\right\}'$$

$$= -\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]' = \frac{2(3s^2+12s+13)}{(s^3+6s^2+13s)^2}.$$

(k) $\mathscr{L}\left[\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]$

$$= \frac{1}{s}\mathscr{L}[t\sin 2t]\bigg|_{s=s+3}$$

$$= -\frac{1}{s}\{\mathscr{L}[\sin 2t]\}'\bigg|_{s=s+3}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)'\bigg|_{s=s+3} = \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+4]^2}.$$

(l) $\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{e^t-\cos 2t}{t}\right] = \frac{1}{s}\int_s^{\infty}\mathscr{L}[e^t-\cos 2t]ds$

$$= \frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds = \frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}.$$

2.3.7 计算下列积分:

(a) $\int_0^{\infty} e^{-3t}\cos 2t\,dt$; (b) $\int_0^{\infty} te^{-2t}dt$;

(c) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sh}t\sin t}{t}dt$; (d) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt$;

(e) $\int_0^{\infty} t^3e^{-t}\sin t\,dt$; (f) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.

解:以下计算均按公式$\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{\infty}F(s)ds$ 进行.

(a) $\int_0^{\infty} e^{-3t}\cos 2t\,dt = \int_0^{\infty}\mathscr{L}[te^{-3t}\cos 2t]ds$

$$= -\int_0^{\infty}\mathscr{L}[-t\cos 2t]\,|_{s=s+3}ds$$

$$= -\int_0^{\infty}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\bigg|_{s=s+3}ds = \frac{3}{13}.$$

(b) $\int_0^{\infty} te^{-2t}dt = \int_0^{\infty}\mathscr{L}[t^2e^{-2t}]ds = \int_0^{\infty}\frac{2}{(s+2)^3}ds = \frac{1}{4}.$

(c) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sh}t\ \sin t}{t}dt = \int_0^{\infty}\mathscr{L}[e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sh}t\ \sin t]ds$

$$= \int_0^\infty \mathscr{L}[\text{sh}t\ \sin t]\Big|_{s=s+\sqrt{2}} ds$$

$$\xlongequal{\text{查表}} \int_0^\infty \frac{2s}{s^4+4}\Big|_{s=s+\sqrt{2}} ds = \int_0^\infty \frac{ds^2}{(s^2)^2+4}\Bigg|_{s=s+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

(d) $$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t} dt = \int_0^\infty \mathscr{L}[e^{-t}\sin^2 t] ds$$

$$= \int_0^\infty \mathscr{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]\Big|_{s=s+1} ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]\Big|_{s=s+1} ds$$

$$= \frac{1}{4}\ln 5.$$

(e) $$\int_0^\infty t^3 e^{-t}\sin t\, dt = \int_0^\infty \mathscr{L}[t^4 e^{-t}\sin t] ds$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^{(4)}\Big|_{s=s+1} ds$$

$$= \left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]'''\Big|_0^\infty = 0.$$

(f) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^\infty \mathscr{L}\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right] ds$$

$$= \int_0^\infty \int_s^\infty \mathscr{L}[\sin^2 t] ds\, ds = \int_0^\infty \int_s^\infty \mathscr{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right] ds\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_s^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) ds\right] ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{4}{s^2+4} ds\right] = \frac{\pi}{2}.$$

2.3.8 利用拉氏变换的性质,求下列函数的拉氏逆变换.

(a) $\dfrac{2s+3}{s^2+9}$;

(b) $\dfrac{1}{(s+2)^4}$;

(c) $\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$;

(d) $\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$;

(e) $\dfrac{7}{\sqrt{s+3}}$;

(f) $\dfrac{s-se^{-s}}{s^2+\pi^2}$.

解: (a) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2+9}\right] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$= 2\cos 3t + \sin 3t.$$

(b) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^4}\right] = \frac{e^{-2t}}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{t^3}{6e^{2t}}.$$

(c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right] = \dfrac{1}{b^2-a^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}-\dfrac{s}{s^2+b^2}\right]$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt).$$

(d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{[(s+2)^2+1]^2}\right\}$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$\xlongequal{\text{查表}} \frac{1}{2}te^{-2t}\sin t.$$

(e) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{7}{\sqrt{s+3}}\right] = \dfrac{7e^{-3t}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\right] = \dfrac{7}{\sqrt{\pi t}}e^{-3t}.$

(f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-se^{-s}}{s^2+\pi^2}\right] = \cos\pi t - \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+\pi^2}\right]\Bigg|_{t=t-1}$

$$= \cos\pi t - \cos\pi(t-1)u(t-1).$$

2.3.9　求下列各函数拉氏逆变换的初值与终值：

(a) $\dfrac{s+6}{(s+2)(s+5)}$；　　(b) $\dfrac{10(s+2)}{s(s+5)}$；

(c) $\dfrac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$；　　(d) $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$.

解：(a) $f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = 1$，　$f(+\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = 0$.

(b) $f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = 10$，　$f(+\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = 4$.

(c) $f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = 0$，　$f(+\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = 0$.

(d) $f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = 2$，　$f(+\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = 1$.

2.3.10　求下列周期函数的拉氏变换.

(a) 周期为 2π 的半波整流正弦波函数(图 2.2.3)；

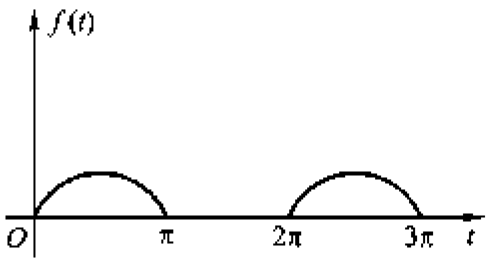

图 2.2.3

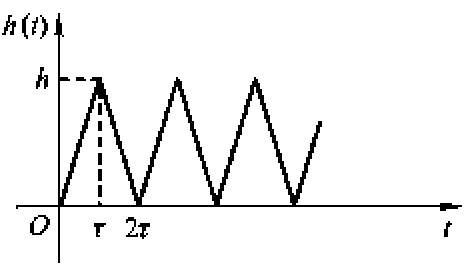

图 2.2.4

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 2k\pi \leqslant t \leqslant (2k+1)\pi \\ 0, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi \end{cases} \qquad k = 0,1,2\cdots;$$

(b) 周期为 2τ，齿高为 h 的三角冲击波函数 $h(t)$ (图 2.2.4).

解：应用公式 $\mathscr{L}[f_T(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$ 求解.

(a) $$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\,\frac{-\cos t-\sin t}{1+s^2}e^{-st}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}.$$

(b) $$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\tau s}}\int_0^{2\tau} f(t)e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2\tau s}}\left[\int_0^{\tau}\frac{h}{\tau}te^{-st}dt + \int_{\tau}^{2\tau}\frac{h}{\tau}(2\tau-t)e^{-st}dt\right]$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2\tau s}}\left[\frac{h}{\tau s^2}e^{-2\tau s} - \frac{2h}{\tau s^2}e^{-\tau s} + \frac{h}{\tau s^2}\right]$$
$$= \frac{h}{\tau s^2}\operatorname{th}\frac{s\tau}{2}.$$

2.3.11　求下列函数的拉氏逆变换.

(a) $\dfrac{s}{s+2}$;　　(b) $\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$;

(c) $\dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$;　　(d) $\dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$.

解：(a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s+2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[1-\dfrac{2}{s+2}\right] = \delta(t) - 2e^{-2t}$;

(b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = \dfrac{1}{a^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-a^2} - \dfrac{1}{s}\right] = \dfrac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at - 1)$;

(c) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right]^2 = e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]^2$$
$$\xlongequal{\text{查表}} \frac{e^{-2t}}{6}(\sin 3t + 3t\cos 3t);$$

(d) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+5s^2+4}\right] = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s^2+4)(s^2+1)}\right]$$
$$\xlongequal{\text{查表}} \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

2.3.12　求下列函数的卷积.

(a) $e^{at}*(1-at)$;　(b) $t^m * t^n$ (m,n 为整数);　(c) $\sin t * \cos t$;

(d) $t * \operatorname{sh} t$;　(e) $u(t-a)*f(t)$;　(f) $\delta(t-a)*f(t)$;

解：(a) $$e^{at}*(1-at) = \int_0^t e^{a\tau}(1-at+a\tau)d\tau$$
$$= \frac{e^{a\tau}}{a}(1-at)\Big|_0^t + \frac{e^{a\tau}}{a}(a^{\tau}-1)\Big|_0^t = t.$$

(b) $$t^m * t^n = \int_0^t (t-\tau)^m\tau^n d\tau = \int_0^t\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-1)^{m-k}t^k\tau^{m-k+n}d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{(-1)^{m-k} t^{m+n+1}}{m-k+n+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1}.$$

(c) $$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau \, d\tau$$

$$= \int_0^t (\sin t \cos\tau - \cos t \sin\tau)\cos\tau \, d\tau$$

$$= \sin t \int_0^t \frac{1+\cos 2\tau}{2} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin 2\tau}{2} d\tau$$

$$= \frac{t}{2}\sin t.$$

(d) $$t * \operatorname{sh} t = \int_0^t (t-\tau)\operatorname{sh}\tau \, d\tau = t\operatorname{ch}\tau\Big|_0^t - \int_0^t \tau\sin\tau \, d\tau = \operatorname{sh} t - 1.$$

(e) $$u(t-a) * f(t) = \int_0^t u(\tau - a) f(t-\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} 0, & t < a, \\ \int_a^t f(t-\tau) d\tau, & t \geqslant a \geqslant 0. \end{cases}$$

(f) $$\delta(t-a) * f(t) = \int_0^t \delta(\tau - a) f(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < a, \\ f(t-a), & t \geqslant a. \end{cases}$$

2.3.13　利用卷积定理,求下列各函数的拉氏逆变换.

(a) $\dfrac{a}{(a^2+s^2)s}$;　　(b) $\dfrac{s}{(s-a)^2(s-b)}$;　　(c) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$.

解: (a) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{(a^2+s^2)s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{a^2+s^2}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$= \sin at * u(t) = \int_0^t \sin a(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{a}(1-\cos at).$$

(b) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)^2(s-b)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)^2}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]$$

$$= (1+at)e^{at} * e^{bt}$$

$$= \int_0^t (1+a\tau)e^{a\tau}e^{b(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{bt}\int_0^t (1+a\tau)e^{(a-b)\tau} d\tau$$

$$= \frac{at(a-b)-b}{(a-b)^2}e^{at} + \frac{b}{(a-b)^2}e^{bt}.$$

(c) $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^3}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right] * \frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$\xlongequal{\text{查表}} \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at) * \frac{1}{a}\sin at$$

$$= \frac{1}{2a^4}\int_0^t (\sin a\tau - a\tau\cos a\tau)\sin a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{8a^4}\int_0^t \sin 2a\tau(\sin at + a\tau\cos at)\,\mathrm{d}\tau$$

$$+ \frac{1}{8a^4}\int_0^t \cos 2a\tau(\cos at - a\tau\sin at)\,\mathrm{d}\tau$$

$$- \frac{1}{8a^4}\int_0^t (\cos at + a\tau\sin at)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{3}{8a^5}(\sin at - at\cos at) - \frac{1}{8a^3}t^2\sin at.$$

2.3.14 利用卷积定理证明:

(a) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \dfrac{F(s)}{s}$; (b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \dfrac{t}{2a}\sin at.$

证: (a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s}\right] = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] * \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = f(t) * u(t)$

$$= \int_0^t u(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+a^2}\right]$

$$= \cos at * \frac{1}{a}\sin at$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \cos a\tau \sin a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{2a}\sin at.$$

2.4.1 求下列常微分方程的解:

(a) $y' - y = e^{2t} + t$, $y(0) = 0$;

(b) $y - y = 4\sin t + 5\cos 2t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;

(c) $y + 3y' + 2y = u(t-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

(d) $y''' + y' = 1$, $y(0) = y'(0) = y(0) = 0$;

(e) $y''' + 3y + 3y' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = y(0) = 0$;

(f) $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = \delta(t)$, $y(0) = y'(0) = y(0) = y'''(0) = 0$;

(g) $y^{(4)} + 2y + y = t\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 2$, $y'''(0) = \dfrac{1}{4}$.

解: (a)—(g)都采用等式两边同时实施拉氏变换得像方程,应用性质,带入初始条件求出 $Y(s)$,再通过逆变换求出 $y(t)$ 的方法.

(a) $\because$ $sY(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s^2}$,

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}+\frac{1}{s^2(s-1)}$$

$$=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s},$$

$$\therefore \quad y(t)=e^{2t}-t-u(t).$$

(b) $\because \quad s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Y(s)=\dfrac{4}{s^2+1}+\dfrac{5s}{s^2+4},$

$$\therefore \quad Y(s)=\left(\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+4}-2-s\right)\frac{1}{s^2-1}$$

$$=\frac{4}{(s^2+1)(s^2-1)}+\frac{s}{s^2-1}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2-1}-\frac{s}{s^2-1},$$

$$\therefore \quad y(t)\xlongequal{\text{查表}}2(\mathrm{sh}t-\sin t)+\mathrm{ch}t-\cos 2t-2\mathrm{sh}t-\mathrm{ch}t$$

$$=-2\sin t-\cos 2t.$$

(c) $\because \quad s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=\dfrac{e^{-s}}{s},$

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\left(\frac{e^{-s}}{s}+1\right)$$

$$=\frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$\therefore \quad y(t)\xlongequal{\text{查表}}\left[\frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{e^{-2(t-1)}}{2}+e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t-1)$$

$$=\left[\frac{1}{2}+(1-e)e^{-t}+\left(\frac{e^2}{2}-1\right)e^{-2t}\right]u(t-1).$$

(d) $\because \quad s^3Y(s)+sY(s)=\dfrac{1}{s},$

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)},$$

$$\therefore \quad y(t)=t-\sin t.$$

(e) $\because \quad s^3Y(s)+3Y^2(s)+3sY(s)+Y(s)=\dfrac{6}{s+1},$

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{6}{(s+1)^4},$$

$$\therefore \quad y(t)=t^3e^{-t}.$$

(f) $\because \quad s^4Y(s)+2Y^3(s)-2sY(s)-Y(s)=1,$

$$\therefore \quad Y(s)=\frac{1}{s^4+2s^3-2s-1}=\frac{1}{(s-1)(s+1)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{4}{(s+1)^3}\right],$$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{1}{8}[e^t-e^{-t}-2te^{-t}-2t^2e^{-t}]$$

$$= \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}(1 + 2t + 2t^2)e^{-t}.$$

(g) $\because \quad s^4Y(s) + 2s^2Y(s) + Y(s) = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$,(查表)

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^4} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\cdot\frac{1}{(s^2+1)^2},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$\xlongequal{\text{查表}} t\cos t * \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)\cos(t-\tau)(\sin\tau - \tau\cos\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)}{4}[\sin t + \sin(2\tau - t)]\mathrm{d}\tau -$$

$$\int_0^t \frac{\tau(t-\tau)}{4}[\cos t + \cos(2\tau - t)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{\sin t}{4}\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]\Bigg|_0^t + \frac{1}{4}\int_0^t (t-\tau)\sin(2\tau - t)\mathrm{d}\tau +$$

$$\frac{\cos t}{4}\left[-\frac{t\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3}\right]\Bigg|_0^t - \frac{1}{4}\int_0^t (t\tau - \tau^2)\cos(2\tau - t)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t^2\sin t}{8} - \frac{t^3\cos t}{24} + \frac{1}{4}\int_0^t (t-\tau)\sin(2\tau - t)\mathrm{d}\tau -$$

$$\frac{1}{4}\left[(t\tau - \tau^2)\frac{\sin(2\tau - t)}{2}\right]\Bigg|_0^t + \frac{1}{4}\int_0^t (t - 2\tau)\frac{\sin(2\tau - t)}{2}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t^2\sin t}{8} - \frac{t^3\cos t}{24} + \frac{1}{4}\int_0^t\left(\frac{3}{2}t - 2\tau\right)\sin(2\tau - t)\mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{t^3}{24}\cos t + \frac{t^2}{8}\sin t + \frac{t}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t.$$

2.4.2 求下列常微分方程组的解:

(a) $\begin{cases} x' + 2x + b\int_0^t y\mathrm{d}t = -2u(t), \\ x' + y' + y = 0, \end{cases}$

$x(0) = -5$, $y(0) = 6$;

(b) $\begin{cases} x - x - 2y' = e^t, \\ x' - y - 2y = t^2, \end{cases}$

$x(0) = -\dfrac{3}{2}$, $x'(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\dfrac{1}{2}$;

(c) $\begin{cases} (2x - x' + 9x) - (y + y' + 3y) = 0, \\ (2x + x' + 7x) - (y - y' + 5y) = 0, \end{cases}$

$x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$;

$$(d)\ \begin{cases} x \quad - x + y + z = 0, \\ x + y \quad - y + z = 0, \\ x + y + z \quad - z = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.$$

解：方程组 (a)—(d) 均由拉氏变换得到像方程组，解之，再求逆变换得解.

$$(a)\ \because\ \begin{cases} sX(s) - x(0) + 2X(s) + \dfrac{Y(s)}{s} = -\dfrac{2}{s}, \\ sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) - Y(s) = 0, \end{cases}$$

$$\therefore\quad X(s) = -\frac{5s^2 + 7s + 8}{s(s^2 + 3s - 4)},\ Y(s) = \frac{2(3s + 2)}{s^2 + 3s - 4},$$

$$\therefore\quad x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{4}{s-1} - \frac{3}{s+4}\right] = 2u(t) - 4e^t - 3e^{-4t},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1} + \frac{4}{s+4}\right] = 2e^t + 4e^{-4t}.$$

$$(b)\ \because\ \begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) - 2[sY(s) - y(0)] = \dfrac{1}{s-1}, \\ sX(s) - x(0) - [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2Y(s) = \dfrac{2}{s^3}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s^2 - 1)X(s) - 2sY(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{3}{2}(s+1), \\ sX(s) - (s^2 + 2)Y(s) = \dfrac{2}{s^3} - s - 1, \end{cases}$$

$$\therefore\quad X(s) = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2},\ Y(s) = -\frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s^3} + \frac{3}{2s},$$

$$\therefore\quad x(t) = -\frac{3}{2}e^t + 2t,\ y(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}.$$

$$(c)\ \because\ \begin{cases} (2s^2 - s + 9)X(s) - (s^2 + s + 3)Y(s) = 2s + 1, \\ (2s^2 + s + 7)X(s) - (s^2 - s + 5)Y(s) = 2s + 3, \end{cases}$$

$$\therefore\quad X(s) = \frac{3s^2 + 2}{3(s^2 + 4)(s - 1)} = \frac{2}{3}\,\frac{s+1}{s^2+4} + \frac{1}{3(s-1)},$$

$$Y(s) = \frac{10}{3}\,\frac{1}{(s^2 + 4)(s - 1)} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{s-1} - \frac{2}{3}\,\frac{s+1}{s^2+4},$$

$$\therefore\quad x(t) = \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}e^t,$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{2}{3}e^t.$$

$$(d)\ \because\ \begin{cases} s^2X(s) - X(s) + Y(s) + Z(s) = s, \\ X(s) + s^2Y(s) - Y(s) + Z(s) = 0, \\ X(s) + Y(s) + s^2Z(s) - Z(s) = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \quad X(s) = \frac{s^3}{(s^2-2)(s^2+1)} = \frac{2}{3}\frac{s}{s^2-2} + \frac{s}{3(s^2+1)},$$

$$Y(s) = Z(s) = \frac{-s}{(s^2-2)(s^2+1)} = \frac{s}{3(s^2+1)} - \frac{s}{3(s^2-2)},$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{2}{3}\mathrm{ch}\sqrt{2}t + \frac{1}{3}\cos t,$$

$$y(t) = z(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\mathrm{ch}\sqrt{2}t.$$

2.4.3 解下列微分积分方程:

(a) $y(t) + \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t}$;

(b) $y'(t) + \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$, $y(0) = 0$;

(c) $y(t) = at^2 + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$.

解:方程两边同时实施拉氏变换得像方程解之,再求逆变换得解.

(a) $\because \quad Y(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1},$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2},$$

$$\therefore \quad y(t) = \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} = (1-t)\mathrm{e}^{-t}.$$

(b) $\because \quad sY(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s},$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

$$\therefore \quad y(t) = \sin t.$$

(c) $\because \quad Y(s) = \frac{2a}{s^3} + \mathscr{L}[\sin t * y(t)],$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{2a}{s^3} + \frac{1}{s^2+1}Y(s),$$

$$Y(s) = \frac{2a(s^2+1)}{s^5},$$

$$\therefore \quad y(t) = a\left(t^2 + \frac{t^4}{12}\right).$$

2.4.4 设在原点处质量为 m 的一质点,在 $t=0$ 时在 x 方向上受到冲击力 $k\delta(t)$ 的作用,其中 k 为常数,假定质点的初速度为零,求其运动规律.

解:依题意得:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = k\delta(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$\therefore \quad m[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] = k, X(s) = \frac{k}{m}\cdot\frac{1}{s^2},$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{k}{m}t.$$

2.4.5　设有如图2.2.5所示的 RL 串联电路，在 $t = t_0$ 时接入直流电源 E，求电路中的电流 $i(t)$.

解：依题意得：

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = E,$$

$$\therefore \quad RI(s) + LsI(s) = \frac{E}{s},$$

$$\therefore \quad I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right),$$

$$\therefore \quad i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right).$$

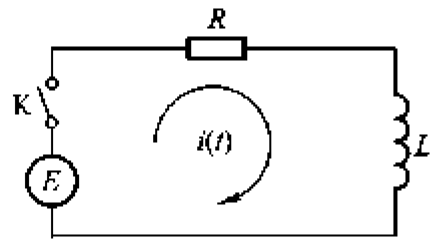

图 2.2.5

2.4.6　利用拉氏变换求解下列边值问题.

(a) $\begin{cases} y \quad - y = 0, \\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1; \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x \quad (t) + x(t) = 10\sin 2t, \\ x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

解：(a) $\because \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = 0,$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{y'(0)}{s^2 - 1}, \qquad y(t) = y'(0)\,\mathrm{sh}\ t,$$

$$\because \quad y(2\pi) = 1, y'(0) = \frac{1}{\mathrm{sh}\ 2\pi},$$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{sh}\ 2\pi}.$$

(b) $\because \quad s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{20}{s^2 + 4},$

$$\therefore \quad X(s) = \left[\frac{20}{s^2 + 4} + x'(0)\right]\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{20}{3}\left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 4}\right) + \frac{x'(0)}{s^2 + 1},$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{20}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + x'(0)\sin t$$

$$\because \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad x'(0) = -\frac{17}{3},$$

$$\therefore \quad x(t) = \sin t - \frac{10}{3}\sin 2t.$$

0. 欧拉

欧拉(Euler Léonhard, 1707—1783), 1707 年 4 月出生于瑞士的巴塞尔. 1720 年入读巴塞尔大学, 1726 年大学毕业. 1727 年到俄国的彼得堡科学院从事研究工作, 并被聘为副教授, 1730 年晋升为教授. 1733 年担任该院高等数学教研室的领导工作. 1741—1766 年应邀到柏林科学院工作, 1766 年又回到彼得堡科学院, 于 1783 年 9 月去世.

在复变函数方面, 欧拉把数学中最重要、最常用和最基本的五个常数: 1, 0, i, π, e 用一个简单的等式 $e^{i\pi}+1=0$ 联系了起来. 他在初等数学中引入了复变数, 并推出了著名的欧拉公式: $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

欧拉是 18 世纪的数学巨星. 他的最大功绩是扩展了微积分的领域, 为微分几何及分析学的一些重要分支的产生与发展奠定了基础. 在微分几何方面, 欧拉引入了空间曲线的参数方程, 给出了空间曲线曲率半径的解析表达方式. 1766 年, 他出版了《关于曲面上曲线的研究》一书, 这是微分几何发展史上的一个里程碑. 在该著作中, 他得到了曲面在任意截面上截线的曲率公式. 欧拉在分析学上的贡献不胜枚举, 如他证明了椭圆积分的加法定理, 以及最早引入二重积分等等. 欧拉把无穷级数由一般的运算工具转变为一个重要的研究科目. 欧拉和其他数学家在解决物理方面问题的过程中, 创立了微分方程学. 欧拉所写的《方程的积分法研究》是偏微分方程在纯数学研究中的第一篇论文. 在代数学方面, 他发现了每个实系数多项式必可分解为一次或二次因式之积. 给出了费马小定理的三个证明. 并引入了数论中重要的欧拉函数 $\varphi(n)$. 他研究数论的一系列成果奠定了数论成为数学中的一个独立分支, 而且还解决了著名的柯尼斯堡七桥问题.

欧拉是数学史上最多产的数学家, 一生共发表论文 856 篇, 专著 31 部. 欧拉是 18 世纪数学界最杰出的人物之一, 他不但为数学界作出了巨大贡献, 更把数学推至几乎整个物理学的领域.

1. 柯西

柯西(Cauchy, Augustin Louis, 1789—1857), 1789 年 8 月生于法国巴黎, 1810 年毕业于道路桥梁工程学校. 1811 年开始学习拉格朗日的《解析函数》等书并着手研究数学经典问题. 1816 年因其数学上的成就成为法国巴黎科学院院士, 同

时任工科大学教授.1848年成为巴黎大学教授.1857年5月逝世.

柯西最重要和最有首创性的工作是关于单复变函数论.在他的第一篇复变函数论文《关于定积分理论的报告》中导出了柯西定理;1831年在他的另一篇论文中推出了柯西公式;关于函数在孤立奇点的留数方面,1841年他证明了 $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z$;1846年他证明了留数定理.柯西首先阐明了上、下限是虚数的定积分的有关概念,并且用这种积分来研究多种多样的问题,如实定积分的计算,用含参变量的积分表示微分方程的解等等.

他在学术上成果相当丰硕,他的研究是多方面的.在代数学上,他有行列式论和群论的创造性的功绩;在理论物理学、光学、弹性理论等方面,也有显著的贡献.他的特长是在分析学方面,他提出了极限的 ε 方法,他使得微积分的一系列概念建立在严密的基础上.他还证明了在实变数和复变数的情况下微分方程解的存在定理,这些都是很重要的.他的全集26卷,数量上仅次于欧拉,居第二位.

2. 黎曼

黎曼(Riemann, Goerg Friedrich Bernhard, 1826—1866),1826年9月生于德国汉诺威布列谢连兹,1845年在哥廷根大学师从高斯学习数学,1851年完成博士论文,1859年成为该校教授,同年被选为伦敦皇家学会会员和巴黎科学院院士,1866年7月病逝于意大利.

19世纪数学最具独特的创造是复变函数理论的创立,它是18世纪人们对复数及复函数理论研究的延续.1851年,黎曼在高斯的指导下完成题为《单复变函数的一般理论的基础》的博士论文,在该论文中,他引入了解析函数的概念,注重一般性原理,他把复变函数的解析性建立于柯西-黎曼方程的基础上.后来又在《数学杂志》上发表了四篇重要文章,一方面总结前人关于单值解析函数的成果,并用新的工具予以处理.同时对于多值复变函数,他巧妙地引入一种特殊曲面——黎曼曲面,利用这种曲面不仅可以描述多值函数的性质,而且可以有效地使多值函数在曲面上单值化,从而把一些单值函数的结论推广到多值函数,确立了复变函数的几何理论基础,并由此为几个不同方向的进展铺平了道路.

在黎曼短短的一生中,他在数学的许多领域都做出了划时代的贡献.他奠定了几何函数论的基础,定义了黎曼积分,给出了关于三角级数收敛的黎曼条件.1854年,他在一篇题目是《在几何学基础上的假设》的论文中,开创了非欧几何的另一片新天地——黎曼几何学.在此引入了 n 维流形和黎曼空间的概念,并定义了黎曼几何的曲率,为以后爱因斯坦的广义相对论提供了合适的数学基础.他还是解析数论的先驱,1859年他在论文《在给定大小之下的素数个数》中提出了黎曼猜想.

3. 魏尔斯特拉斯

魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815—1897),1815 年 10 月生于德国亚伐利亚.1834 年进入波恩大学学习商业和法律.1839 年,师从古德曼学习数学.由于库麦尔的推荐,魏尔斯特拉斯 1856 年成为柏林大学的助理教授,1864 年成为正教授.因魏尔斯特拉斯的学术成就,格尼斯堡大学授予他名誉博士学位.1868 年成为法国巴黎科学院院士.1897 年 2 月在柏林去世.

魏尔斯特拉斯与柯西、黎曼一起被称为是复变函数论的主要奠基人.他用幂级数来定义解析函数,并建立了一整套解析函数理论,他关于解析函数的研究成果,成了复变函数论的主要内容.

魏尔斯特拉斯在许多数学领域都作出了重大贡献.他证明了每个椭圆函数均可用一个基本椭圆函数和它的导函数简单地表示出来.他把椭圆函数论的研究推到了一个新的水平.他在代数学领域和变分学中都有许多重要的研究成果.他还是数学分析的主要奠基者之一.他给出了数学分析教材中一直沿用的连续函数的定义,他是将严格的论证引入分析学的一位大师.1872 年,他发现了一个连续函数,但它却是处处不可微的函数,从而推动了函数论的发展.

4. 古尔萨

古尔萨(Goursat, Eouard – Jean – Baptiste, 1858—1936),1858 年生于法国洛特省兰萨茨,1876 年进入高等师范学校学习.1881 年获理学博士学位,1897 年任巴黎大学教授.1919 年当选为法国科学院院士,曾任法国数学会主席.

古尔萨是法国研究数学分析的先驱.1900 年在《关于柯西解析函数的一般定义》一文中改进了柯西解析函数的定义,用更优的方法证明了柯西定理.

他还对偏微分方程中存在性定理的证明做了改进.在超椭圆积分、不变量理论和曲面理论等方面得到大量成果.他编著的《数学分析教程》长期被许多国家用作高校教材.

5. 阿贝尔

阿贝尔(Abel, Niels Henrik, 1802—1829),1802 年 8 月生于挪威芬岛.1821 年在洪堡老师的帮助下进入克里斯蒂安尼亚大学.1823 年,他发表了第一篇论文,是关于用积分方程求解古老的"等时线"问题的.这是对这类方程的第一个解法,开创了研究积分方程的先河.1824 年,他解决了用根式求解五次方程的不可能性问题.1826 年,阿贝尔来到巴黎,仍然坚持数学的研究工作.撰写了《关于一类极广泛的超越函数的一般性质》的论文,提交给巴黎科学院.1829 年 4 月逝世于弗鲁兰.

阿贝尔和雅可比(Carl Gustav Jacobi, 1804—1851)是公认的椭圆函数论的创始人.1827 年他的论文《关于椭圆函数的研究》中把椭圆函数积分的理论归结为椭圆函数的理论,使这一理论成为十九世纪分析中的重要领域之一.他当年研究方程式论时发现的交换群,即阿贝尔群今天仍然是代数学的一个重要研究领域.他发现了椭圆函数的加法定理、双周期性.此外,在交换群、二项级数的严格理论、级数求和等方面都做出了巨大的贡献.

6. 阿达玛

阿达玛(Hadamard Jacques, 1865—1963),1865 年 12 月生于法国凡尔赛.1888 年毕业于巴黎高等师范学校.先后在巴黎布丰中学、波尔多理学院和巴黎大学理学院任职.1892 年获科学博士学位.1909 年到法兰西学院任教,一直到退休(1937).1912 年被选为法国科学院院士.他还是前苏联、美国、英国、意大利等国的科学院院士或皇家学会的会员以及许多国家的名誉博士.1963 年 10 月于巴黎逝世.

在复变函数方面.他致力于把 A. – L.柯西在分析学上的局部理论推广到全局.在论文《泰勒级数所定义的函数的解析开拓》中首次把集合论引进复变函数论,更简单地重证了柯西有关收敛半径的结果;并探索了奇点在收敛圆上的位置及其性质.这些成果至今仍是复变函数论的基本内容.他和学生合著的《泰勒级数及其解析开拓》成为了经典著作.他在研究函数的极大模时得到了著名的三圆定理,并应用到整函数的泰勒级数系数极大模的衰减和这个函数的亏格间的关系上,完善了(J. –)H.庞加莱的结果,获得了 1892 年法国科学院大奖.

在其他领域,他的贡献体现在常微分方程定性理论、泛函分析、微分几何、数论、集合论、函数论、线性二阶偏微分方程定解问题和流体力学上.阿达玛曾在 1936 年来中国清华大学讲学三个多月,1964 年中国出版了他的著作《偏微分方程论》.

7. 泰勒

泰勒(Brook Taylor, 1685—1731),1685 年 8 月生于英国米德尔塞克斯.1701 年进入剑桥大学圣约翰学院学习,1709 年获法学硕士学位,1712 年当选为英国皇家学会会员,1714 年获法学博士学位.1714—1718 年出任英国皇家学会秘书,1731 年 12 月于伦敦逝世.

泰勒的主要著作是 1715 年出版的《正的和反的增量方法》,书内给出了著名定理——泰勒定理.1717 年,他以泰勒定理求解了数值方程.1772 年,拉格朗日强调了此公式的重要性,而且称之为微分学基本定理,但泰勒于证明当中并没有考虑级数的收敛性,因而使证明不严谨,这工作直至 19 世纪 20 年代才由柯西完

成.泰勒定理开创了有限差分理论,使任何单变量函数都可展成幂级数;同时亦使泰勒成了有限差分理论的奠基者.此书还包括了他于数学上的其他创造性工作,如论述常微分方程的奇异解,曲率问题的研究等.

8. 麦克劳林

麦克劳林(Maclaurin Colin,1698—1746),1698年2月生于苏格兰.11岁进入格拉斯哥大学学习.17岁时以有关引力问题的论文获硕士学位.19岁担任苏格兰阿伯丁市玛利查尔大学数学教授.1722年赴法国巴黎从事研究工作.1724年以《物体碰撞》荣获巴黎科学院奖金.1725年在牛顿的推荐下又受聘于爱丁堡大学任数学教授.1746年1月逝世.

麦克劳林是牛顿流数理论的继承者.他的名作《流数论》是最早为牛顿流数方法做出系统逻辑阐述的著作.麦克劳林以熟练的几何方法和穷竭法论证了流数学说.同时,还把级数用作求积分的方法,以几何形式给出无穷级数收敛的积分判别法,领先于柯西对同一结果的发现.在讨论无穷级数时,他得到数学分析中著名的麦克劳林级数展开式并用待定系数法给予了证明.

他在代数学中的主要贡献是在1729年创立了用行列式方法求解多个未知数的联立线性方程,这一结果收入其遗作《代数论》中,后来由另一位数学家克拉默(Cramer)于1750年再次得到.他还探讨过垂足曲线问题和蜂房结构理论,并以有关潮汐研究的成果与欧拉等人共同荣获1740年巴黎科学院奖金.麦克劳林的其他论述涉及天文学、地图测绘学以及保险统计等学科.众多的创造性成就使他成为18世纪英国最有影响的数学家之一.

9. 罗朗

罗朗(Laurent P.A,1813—1854),1813年9月生于法国巴黎.早年是理工科大学的高材生,1854年逝世.

在复变函数方面,1843年在论文《柯西定理的推广》中独立给出柯西正在研究的复变函数论中的一些结果,包括著名的"罗朗级数展开式",受到普遍关注和重视.同年他向巴黎科学院递交了另一篇有影响的论文《变分计算》.他的研究工作对幂级数理论的发展以及解决固体热平衡问题和弹性现象具有非常的价值.

此外,他曾花费6年的时间探讨液压工程结构,为该结构理论上的研究奠定了基础.他的研究领域还涉足过光波现象及偏振理论等.

10. 若尔当

若尔当(Jordan,Camille,1838—1922),1838年1月生于法国里昂.毕业于综合工科学校,先后在综合工科学校和法兰西学院任教.1881年被选为法兰西科学

院院士.1885年至1921年担任法国数学杂志《纯粹数学与应用数学》的主编及发行人.1922年1月逝世.

若尔当的数学研究的内容非常广泛,主要涉及代数学、几何学、拓扑学、数论、函数论、微分方程和理论物理等.此外,若尔当与19世纪其他数学家共同建立起来的傅里叶级数理论,对于应用数学而言,当时已是一个相当令人满意的工具.1881年若尔当给出函数收敛到它的傅里叶级数的充分条件.在现代数学中还有许多结果都冠上了他的名字,如若尔当代数、若尔当标准型等等.

11. 傅里叶

傅里叶(Fourier, Jean Baptiste Joseph, 1768—1830),1768年3月生于法国奥塞尔.12岁由一主教送入地方军事学校读书.17岁回乡教数学.1794到巴黎高等师范学校学习,次年到巴黎综合工科学校执教.1798年随拿破仑远征埃及,1801年回国后任伊泽尔地区地方长官.1817年当选为科学院院士,1822年任该院终身秘书,后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席,1830年5月于巴黎逝世.

傅里叶的主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论.1807年他在向巴黎科学院呈交的《热的传播》论文中,推导出著名的热传导方程,并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示,从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数.

1822年他在代表作《热的解析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播的问题,成为分析学在物理中应用的最早例证之一.傅里叶级数(即三角级数)、傅里叶分析等理论均由此创始.

12. 拉普拉斯

拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace, 1749—1827),1749年3月生于法国诺曼底的博蒙昂诺日.1767年获得巴黎陆军学校数学教授职位.1785年当选为法国科学院院士.1795年任综合工科学校教授,后又在高等师范学校任教授.1816年成为法兰西学院院士,次年任该院院长.1827年3月于巴黎逝世.

拉普拉斯主要研究天体力学和物理学,认为数学只是一种解决问题的工具,但在运用数学时创造和发展了许多新的数学方法.尤其是拉普拉斯变换,导致了后来赫维塞德发现运算微积分在电工理论中的应用.不能不说后来的傅里叶变换、梅林变换、Z变换和小波变换也受它的影响.

拉普拉斯对于概率论也有很大的贡献,他的《概率的分析理论》这本七百万字巨著把自己的发现以及前人的所有发现统归一处.今天我们使用的那些名词,诸如随机变量、数字特征、特征函数、拉普拉斯变换和拉普拉斯中心极限定律等

等都可以说是拉普拉斯引入或者经他改进的.

13. 华罗庚

华罗庚(1910—1985),1910年11月生于中国江苏省金坛县.1930年在《科学》杂志上发表《苏家驹之代数五次方程式不能成立的理由》的论文,被熊庆来教授推荐到清华大学数学系任教.1934年成为文化基金会研究员.1936年作为访问学者到英国剑桥大学进修.1938年回国受聘为昆明西南联大教授.1946年及其后在前苏联、美国等地访问讲学.1950年回国,先任清华大学数学系教授,后任中国科学院数学研究所所长,中国数学会理事长,中国科学院数理化学部委员,中国科学院副院长等职.1979年先后到英、法、德、荷、美和日本等地讲学与访问.1982年华罗庚被选为美国国家科学院院士,是美国科学院历史上第一个当选为外籍院士的中国人.还先后当选为第三世界科学院院士,德国巴伐利亚科学院院士,并获多个大学的荣誉博士学位.1985年6月在日本因病去世.

在复变函数中,他所著的《多个复变数典型域上的调和分析》给出了典型域的完全正交系,得到柯西与泊松核的表达式,广泛影响到调和分析、复分析、微分方程等领域,该成果于1956年获中国首届国家自然科学一等奖.

华罗庚对数学的贡献是多方面的,他在数论中解决了有广泛应用的高斯完整三角和的估计.他的《堆垒素数论》系统总结和发展了圆法与三角和估计法.他的专著还有《数论导引》、《数论在近似分析中的应用》、《典型群》、《高等数学引论》等.他一生共发表200余篇学术论文、10部专著.培养出陈景润、王元、陆启铿等一批优秀的数学家,形成了中国数学学派.

14. 杨乐

杨乐(1939—),1939年生于中国江苏省南通市.1956年进入北京大学数学系.1962年毕业后考入中国科学院数学所当研究生,在导师熊庆来指导下从事数学研究.1980年被选为中国科学院(数学)学部委员.曾任中国科学院数学与系统科学研究院院长、数学研究所研究员.

杨乐主要从事复分析研究.对整函数与亚纯函数亏值与波莱尔方向间的联系作了深入研究,他与张广厚合作取得了许多创造性的成果.他们在20世纪60年代中期到80年代初,共同发表了十多篇这方面的论文.解决了整函数和亚纯函数理论中许多重大问题.包括他们各自个人的工作在内,共同解决了6个方面的重大问题;一是在亏值与奇异方向间建立了简单、紧密的联系;二是在普遍的情况下对亏值数目得到了准确的估计;三是解决了奇异方向的分布问题;四是对渐近值与渐近路径作了系统研究;五是证明了某些新类型奇异方向的存在性;六是对函数结合导数的值分布问题作了深入研究.与英国学者合作解决了著名数

学家立特沃德的一个猜想.对整函数及其导数的总亏量与亏值数目作出了精确估计.1982 年他单独出版了《值分布理论及其新研究》一书.

杨乐、张广厚因《整函数和亚纯函数的值分布理论》的研究成果于 1978 年获全国科学大会奖.1982 年又获中国国家自然科学二等奖.

15. 张广厚

张广厚(1937—1987),1937 年 1 月生于中国河北省唐山市.1956 年 9 月考入北京大学数学系.1962 年成为中国科学院数学研究所熊庆来的研究生.1966 年毕业留所工作.1979 年升任研究员.1978 年赴瑞士苏黎世参加国际函数论会议,并作学术报告.1979 年、1980 年分别应邀去美国康乃尔大学、普渡大学作访问教授.1983 年任中国科协书记处书记.1987 年 1 月病逝,终年 50 岁.

张广厚在函数论领域内一直从事整函数和亚纯函数论的研究工作.1977 年在《中国科学》上发表了著名论文《整函数和亚纯函数的亏值、渐近值和茹利雅方向的关系研究》,文中成功地建立了亏值、渐近值和茹利雅方向 3 个重要概念间的深刻关系,取得了突破性进展,被国际上同行誉为是近几年这一领域最重要的成果之一.1977 年他还在《中国科学》外文版上发表了这个领域的重要论文《整函数和亚纯函数的渐近值》、《关于整函数渐近路径的长度》,回答了 1964 年、1973 年两次国际函数论会议上提出的关于渐近值方面的 5 个问题.这些成就被誉为是“惊人的成果”.已被整理成专著《整函数和亚纯函数理论》于 1986 年由科学出版社出版.

张广厚和杨乐长期合作研究,解决了整函数和亚纯函数理论中许多重大问题,包括他们各自个人的工作在内,共同解决了 6 个方面的重大问题:一是在亏值与奇异方向间建立了简单、紧密的联系;二是在普遍的情况下对亏值数目得到了准确的估计;三是解决了奇异方向的分布问题;四是对渐近值与渐近路径作了系统研究;五是证明了某些新类型奇异方向的存在性;六是对函数结合导数的值分布问题作了深入研究.

数学是研究事物的数量关系和空间形式的一门科学.

数学的产生和发展始终围绕着数和形这两个基本概念不断地深化和演变.大体上说,凡是研究数和它的关系的部分,划为代数学的范畴;凡是研究形和它的关系的部分,划为几何学的范畴.但同时数和形也是相互联系的有机整体.

数学是一门高度概括性的科学,具有自己的特征.抽象性是它的第一特征;精确性是它的第二特征;应用的广泛性是它的第三特征.

一切科学技术的发展都需要数学,这是因为数学的抽象,使外表完全不同的

问题之间有了深刻的联系.因此数学是自然科学中最基础的学科,常被誉为科学的皇后.

数学在提出问题和解答问题方面,已经形成了一门特殊的科学.在数学的发展史上,有很多的例子可以说明,数学问题是数学发展的主要源泉.数学家们为了解答这些问题,要花费较大力量和时间.尽管还有一些问题仍然没有得到解答,然而在这个过程中,他们创立了不少的新概念、新理论、新方法,这些才是数学中最有价值的东西.

1. 复变函数论

复变函数论是数学中一个基本的分支学科,它的研究对象是复变函数.复变函数论产生于18世纪,它的内容丰富,理论十分完美.它在数学许多分支、力学以及工程技术科学中有着广泛的应用.

复数的概念起源于求方程的根,在二次、三次代数方程求根的公式中就出现了形为 $a+b\sqrt{-1}$的一类数,其中 a,b 是实数.$\sqrt{-1}$在实数范围内是没有意义的,因此在很长时间里这类数不能为人们所理解.R.笛卡儿曾称之为虚数.但是随着数学的发展,这类数的重要性就日益显现出来.例如,每一个代数方程在此数域内至少有一个根,这就是代数学的基本定理.有时也称它为达朗贝尔定理,而最初的严格证明则是由C.F.高斯给出的.后来人们习惯以 i 表示$\sqrt{-1}$,并且称 $a+b\mathrm{i}$ 为复数.在复数 $a+b\mathrm{i}$ 与平面上的点(a,b)之间可以建立一一对应.

复变函数论产生于18世纪.L.欧拉在初等函数中引进了复变数,并给出了著名的欧拉公式

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x.$$

欧拉公式指出了三角函数与指数函数间的联系.

一些实际问题也推动着复变函数理论的产生与发展.早在1752年,法国数学家J.le R.达朗贝尔在他的关于流体力学的研究中,便考虑在什么条件下当平面上的点(x,y)趋于一点时复值函数 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$存在导数.这里要求导数与(x,y)所沿的路径无关.这个问题的答案是:若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在域 D 内定义,且 u,v 作为 x,y 的函数在 D 内可微,则 $f(z)$可导的必要与充分条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

这个条件称为"柯西-黎曼条件".在域 D 内可导的函数称为解析函数或全纯函数.由条件(1)易知,若 u,v 存在连续的二阶偏导数,则 u,v 应满足拉普拉斯方程.由(1)联系的两个调和函数称为共轭调和函数.

19世纪前半叶,柯西为复变函数理论的建立奠定了基础.他定义了复变函数的积分,并证明了下述柯西积分定理:若 $f(z)$在区域 D 内解析,C 为可求长的

简单闭曲线，且 C 及其内部均含于 D 内，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 .$$

从柯西积分定理可以得出一系列重要结论，诸如柯西积分公式、柯西不等式、惟一性定理、最大模原理等．特别地，若 $f(z)$ 在域 D 内解析，则它在 D 内任意阶导数存在，并且在 D 内每点 a 的邻域内 $f(z)$ 可展为 $z-a$ 的幂级数．作为柯西积分定理的推广，则有应用广泛的留数定理．代数学基本定理就是留数定理的一个简单推论．应用它还可计算一些较复杂的定积分．

从几何观点看，定义在域 D 内的一个解析函数 $w=f(z)$，把 D 映为 w 平面的一个区域．这样的映射具有保持角度的性质，所以称为保角映射，又称共形映射．19 世纪中叶，黎曼对此作了很多研究．他首先提出了如下的原理（狄利克雷原理）：在简单闭曲线 C 上给了一个连续函数 φ，则必存在于 C 内调和且连续到 C 上的函数 u，u 在 C 上的值与 φ 相同．在此基础上，黎曼得出共形映射的基本定理：若单连通域 D 的边界多于一点，z_0 为 D 内一点且 θ_0 为一实数，则存在惟一的单叶解析函数 $w=f(z)$ 将 D 映为 w 平面上的单位圆 $|w|<1$，且满足

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)>0.$$

这个定理称为黎曼映射定理，它是复变函数几何理论的基础．根据这个定理，对于单连通区域内解析函数常常可以化到单位圆内去研究．

后来 C.卡拉西奥多里进一步指出，在黎曼映射定理中，若域 D 的边界为一简单闭曲线 C，则 C 上的点与圆周 $|w|=1$ 上的点也一一对应．

如前所述，解析函数在每点邻域内可以展为幂级数，所以幂级数是研究解析函数的有力工具．这也是 K.魏尔斯特拉斯从事研究的出发点．若幂级数．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

的收敛半径 R 为有穷正数，则 $f(z)$ 在 Γ_λ $|z|<R$ 内解析，而在圆周 $|z|=R$ 上 $f(z)$ 至少有一个奇点 z_0，即不存在以 z_0 为心的圆 γ 和在 γ 内解析的函数 $g(z)$，使在 Γ 与 γ 的交内有 $g(z)=f(z)$．

当 $|z|=R$ 上所有的点都是 $f(z)$ 的奇点时，$f(z)$ 就不能从 Γ 内解析开拓出去，这时 $|z|=R$ 称为 $f(z)$ 的自然边界．关于收敛圆周上的奇点及自然边界的研究，J.阿达玛等人均有很好的工作．

若 $|z|=R$ 上的点 z_0 不是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 可以经过 z_0 利用幂级数开拓到 $|z|=R$ 以外的部分．从幂级数(2)出发，向各个方向尽量进行解析开拓，所得的全体幂级数构成一个集合．这个集合定义了一个完全解析函数．关于完全解析函数，H.庞加莱和 V.沃尔泰拉等人有重要工作．

完全解析函数可以是单值的或多值的．对于多值函数，自变量 z 绕某些点一

圈后函数从一个值变为另一个值，这些点称为分支点．黎曼曲面是表示多值函数的具体的几何方法，它是由一些互相适当连接的重叠的平面构成的．一个多值函数的重要例子是代数函数，即由代数方程 $P(z,w)=0$ 确定的函数．这种函数的黎曼曲面恒可连续变形到球面或带有若干个环柄的球面．环柄的个数称为黎曼曲面的亏格，它决定了该曲面的很多重要性质．

总之，复变函数的主要研究对象是解析函数，包括单值函数、多值函数以及几何理论三大部分．在近三个世纪的历史进程中，经过许多学者的努力，使得复变函数论获得了巨大发展，并且形成了一些专门的研究领域．

单值函数中最基本的两类函数是整函数和亚纯函数，它们分别是多项式和有理函数的发展．魏尔斯特拉斯多项式的因式分解定理推广到整函数，而 G. 米塔－列夫勒则将有理函数分解为部分分式的定理推广到亚纯函数．E. 皮卡、E. 波莱尔等进一步发现了整函数的取值与多项式的取值之间有着很大的相似性．在此基础上，1925 年 R. 奈望林纳建立了亚纯函数值分布的近代理论，对函数论的发展产生了重要影响．从 19 世纪末一直到现在，有很多学者从事函数值分布论的研究，特别是 50 年代对奈望林纳逆问题(即已知函数的值分布性质再求该函数)的研究有所突破后，发展的更快，更为突出的成果是德森在 1978 年彻底解决了奈望林纳于 1925 年提出的逆问题和 1984 年彻底解决了奈望林纳于 1928 年提出的猜想．我国的值分布研究处于国际前沿，熊庆来、庄圻泰、杨乐、张广厚等的研究成果都是国际上公认的重大成就．20 世纪 80 年代，值分布论正在不断地开拓应用课题．例如随机幂级数值分布性质的研究，特别是复分析动力系统的研究近年来获得了很大发展．函数值分布论和复变函数论与其他领域也存在着密切联系．例如，1973 年 A. 伯恩斯坦应用实变函数的思想引进 T^* 函数，它在值分布论的亏量问题、整函数的最小模问题以及单叶函数的研究中都发挥了显著效用．

关于多值函数的研究主要是围绕着黎曼曲面及单值化的问题来进行的．1913 的 H. 魏尔在其经典著作《黎曼曲面概念》中首先给出了抽象黎曼曲面的定义，它是流形这个现代数学基本概念的雏形．黎曼曲面的研究不仅使自身形成了完美的理论，而且它为代数几何、自守函数、复流形、代数数论等近代数学重要分支的研究提供了简单、明了的模型．多值函数论是一门综合性的现代数学，在它的研究中几乎使用了所有现代数学的概念和方法，如微分几何、代数几何、李群、拓扑学、偏微分方程、泛函分析等．由于它的强大生命力，它的发展反过来又促进了其他学科的发展．半个世纪以来，许多著名数学家都从事过多复变函数论的研究．我国数学家华罗庚、陆启铿、龚升、钟家庆等人在这方面作了很多的研究，并取得了显著的成绩，在国际上有一定影响．

在复变函数论的应用上，共形映射具有重要的地位．H. E. 茹柯夫斯基通过共形映射研究绕机翼的流动便是著名的例子．实际应用中，常常要借助近似方法

具体地构造出映射函数.这方面有不少研究工作.当然,有时并不需要知道具体的映射函数,只是应用其几何性质.这就推动了复变函数几何理论的发展.

单叶函数的研究是复变函数几何理论的一个重要组成部分,特别是1916年L.比伯巴赫提出的单位圆内形如 $z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 的单叶解析函数应有 $|a_n|\leqslant n$ 的猜测引起了许多学者的注意.近70年来,围绕着比伯巴赫猜想曾有不少研究工作,但是直到1984年,L.de布朗基才完全证实了这个猜想.证明中主要应用了莱伯德-米林的工作,C.勒夫纳的参数表示法以及关于雅可比多项式的结果.

柯西-黎曼方程表明了解析函数与椭圆型偏微分方程组之间的联系,20世纪50年代以来,L.伯斯,И.Н韦夸等考虑较为一般的椭圆型偏微分方程组,并引入广义解析函数的概念.解析函数决定的映射为共形映射,它把无穷小圆映为无穷小圆;而广义解析函数则决定了拟共形映射,它把无穷小圆映为无穷小椭圆.L.V.阿尔福斯,M.A.拉夫连季耶夫为拟共形映射的理论奠定了基础.

解析函数虽然在区域内部有很好的性质,但是当自变量 z 趋向于边界时,函数的变化情况常常十分复杂.关于这方面的研究就形成了一个专门的领域,称为解析函数边界性质.经典的结果有法图定理,Н.Н.卢津和 И.И.普里瓦洛夫在这方面也有系统的研究.近年来,出现了聚集合的概念,进一步将研究引向深入.

近代还有些函数论研究工作不再是考虑个别的函数,而是把具有某种性质的一族函数合在一起研究.事实上,P.蒙泰尔的解析函数正规族就应属于这种类型的研究,并且显示了其威力.近年来从这种观点出发的研究有了很大发展.例如 H^p 空间,它与其他数学分支产生了较密切的联系.

复变函数理论从一个变数推广到多个变数是十分自然的想法,总称为复分析.但是在多变数时,定义域的复杂性大大增加了,函数的性质较之单变数时也有显著的差异,它的研究需要借助更多的近代数学工具.

从柯西算起,复变函数论已有近二百多年的历史了.它以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分.它曾经推动过一些学科的发展,并且常常作为一个有力的工具被应用在实际问题中,它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程.现在,复变函数论中仍然有不少尚待研究的课题,所以它将继续向前发展,并将取得更多应用.

2. 积分变换

在自然科学和工程技术中,为把较复杂的运算简单化,人们常常采用所谓变换的方法来达到目的.18世纪,微积分学中,人们通过微分、积分运算求解物体的运动方程.到了19世纪,英国著名的无线电工程师赫维赛德(Heaviside)为了求解电工学、物理学领域中的线性微分方程,逐步形成了一种所谓的符号法.后

来就演变成了今天的积分变换法.

所谓积分变换,就是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换,一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\,\mathrm{d}t \qquad (a,b\text{ 可为无穷}).$$

它的实质就是把某函数类中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类中的函数 $F(\alpha)$,这里 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数,称为积分变换的核.当选取不同的积分域和变换核时,就得到不同名称的积分变换.$f(t)$ 称为像原函数,$F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的像函数,在一定条件下,它们是一一对应而变换是可逆的.

积分变换可将函数的微积分运算转化为代数运算,把复杂,耗时的运算简单、快速完成.积分变换无论在数学理论或其应用中都是一种非常有用的工具.最重要的积分变换有傅里叶变换、拉普拉斯变换.这两种积分变换不仅在数学的许多分支中,而且在其他学科如振动力学,电工学,无线电技术领域中都有着广泛的应用,它们已成为这些学科领域中不可缺少的运算工具.由于不同应用的需要,还有其他一些积分变换,其中应用较为广泛的有梅林变换和快速傅里叶变换、沃尔什变换.

[redacted]

1.MATLAB 语言

(1)MATLAB 语言简介

MATLAB 语言是当今国际上科学界(尤其是自动控制领域)最具影响力、也是最有活力的软件.它起源于矩阵运算,并已经发展成一种高度集成的计算机语言.它提供了强大的科学运算、灵活的程序设计流程、高质量的图形可视化与界面设计、便捷的与其他程序和语言接口的功能.MATLAB 语言在各国高校与研究单位起着重大的作用.

MATLAB 语言由美国 The Mathworks 公司开发,2002 年 9 月推出了其全新的 MATLAB7.0 正式版(Release 13).

(2)MATLAB 语言的发展

MATLAB 语言的首创者 Cleve Moler 教授在数值分析,特别是在数值线性代数的领域中很有影响,他参与编写了数值分析领域一些著名的著作和两个重要的 Fortran 程序 EISPACK 和 LINPACK.他曾在密西根大学、斯坦福大学和新墨西哥大学任数学与计算机科学教授.1980 年前后,当时的新墨西哥大学计算机系主任 Moler 教授在讲授线性代数课程时,发现了用其他高级语言编程极为不便,便构思并开发了 MATLAB(MATrix LABoratory,即矩阵实验室),这一软件利用了当时数值线性代数领域最高水平的 EISPACK 和 LINPACK 两大软件包中可靠的

子程序，用 Fortran 语言编写了集命令翻译、科学计算于一身的一套交互式软件系统.

所谓交互式语言，是指人们给出一条命令，立即就可以得出该命令的结果.该语言无需像 C 和 Fortran 语言那样，首先要求使用者去编写源程序，然后对之进行编译、连接，最终形成可执行文件.这无疑会给使用者带来了极大的方便.早期的 MATLAB 是用 Fortran 语言编写的，只能作矩阵运算；绘图也只能用极其原始的方法，即用星号描点的形式画图；内部函数也只提供了几十个.但即使其当时的功能十分简单，当它作为免费软件出现以来，还是吸引了大批的使用者.

Cleve Moler 和 John Little 等人成立了一个名叫 The MathWorks 的公司，Cleve Moler 一直任该公司的首席科学家.该公司于 1984 年推出了第一个 MATLAB 的商业版本.当时的 MATLAB 版本已经用 C 语言作了完全的改写，其后又增添了丰富多彩的图形图像处理、多媒体功能、符号运算和它与其他流行软件的接口功能，使得 MATLAB 的功能越来越强大.

The MathWorks 公司于 1992 年推出了具有划时代意义的 MATLAB 4.0 版本，并于 1993 年推出了其微机版，可以配合 Microsoft Windows 一起使用，使之应用范围越来越广.1994 年推出的 4.2 版本扩充了 4.0 版本的功能，尤其在图形界面设计方面更提供了新的方法.

1997 年推出的 MATLAB 5.0 版允许了更多的数据结构，如单元数据、数据结构体、多维矩阵、对象与类等，使其成为一种更方便编程的语言.1999 年初推出的 MATLAB 5.3 版在很多方面又进一步改进了 MATLAB 语言的功能.

2000 年 10 月底推出了 MATLAB 6.0 正式版(Release 12)，在核心数值算法、界面设计、外部接口、应用桌面等诸多方面有了极大的改进.

2002 年 9 月又推出了其全新的 MATLAB 7.0 正式版(Release 13)，对其作了进一步改进和完善.

虽然 MATLAB 语言是计算数学专家倡导并开发的，但其普及和发展离不开自动控制领域学者的贡献.甚至可以说，MATLAB 语言是自动控制领域学者和工程技术人员捧红的，因为在 MATLAB 语言的发展进程中，许多有代表性的成就和控制界的要求与贡献是分不开的.迄今为止，大多数工具箱也都是控制方面的.MATLAB 具有强大的数学运算能力、方便实用的绘图功能及语言的高度集成性，它在其他科学与工程领域的应用也是越来越广，并且有着更广阔的应用前景和无穷无尽的潜能.

如果有一种十分有效的工具能解决在教学与研究中遇到的问题，那么 MATLAB 语言正是这样的一种工具.它可以将使用者从繁琐、无谓的底层编程中解放出来，把有限的宝贵时间更多地花在解决问题中，这样无疑会提高工作效率.

目前，MATLAB 已经成为国际上最流行的科学与工程计算的软件工具，现在的 MATLAB 已经不仅仅是一个“矩阵实验室”了，它已经成为了一种具有广泛应用前景的全新的计算机高级编程语言了，有人称它为“第四代”计算机语言，它在国内外高校和研究部门正扮演着重要的角色，MATLAB 语言的功能也越来越强大，不断适应新的要求提出新的解决方法.可以预见，在科学运算、自动控制与科学绘图领域 MATLAB 语言将长期保持其独一无二的地位.

2.MATHEMATICA 语言

(1)MATHEMATICA 语言简介

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研究开发的一个著名的数学软件.它能够完成符号运算，数学图形绘制，甚至动画制作等多种工作.与其他同类软件相比，Mathematica 要小巧得多.Mathematica 的基本系统主要由 C 语言开发，因而可以比较容易地移植到各种平台上.Mathematica 的优势主要是符号运算和强大的图形处理功能，Mathematica 处理的图形质量好，而且自成一体.Mathematica 是一种强大的数学计算，处理和分析的工具.主要用于理论研究和工程计算领域中的问题，也可处理一些比较基本的数学计算.因为 Mathematica 主要是面向有一定数学知识但并不具有较多的计算机知识的用户，所以在科学研究单位和学校中有广泛的应用，Mathematica 已经成为研究人员以及学生们最得力的助手.

Mathematica 是一种应用广泛的数学软件包.这里我们就 Mathematica 的主要功能作一介绍.

①Mathematica 具有突出的符号运算功能；在微积分中它能求函数的极限、导数以及积分，也能进行幂级数展开，求解微分方程，在线性代数中可进行向量、矩阵的各种计算，包括矩阵的线性运算、矩阵的乘积、求特征多项式和特征值等.由于 Mathematica 具备符号运算功能，上述运算都能进行精确运算；

②Mathematica 有精确的数值计算功能：可以做任意位数的整数或分子分母为任意大整数的有理数的精确计算，做具有任意位精度的数值(实、复数)的计算；

③Mathematica 有快捷的数学作图功能：它可进行二维平面图形与全方位的三维立体图形的描绘；

④Mathematica 有各种各样软件包，比如拉普拉斯变换软件包，需要时可装入它来进行拉普拉斯变换；

⑤Mathematica 有简单的命令操作功能：它不但具有上述功能，而且只需要简单的命令即可实现这些功能，免去了复杂的编程.

(2)MATHEMATICA 语言的发展

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研究开发的符号计算系统，1988 年发布

Mathematica 系统的 1.0 版，因系统精致的结构和强大的计算能力而广为流传，经不断扩充和修改后，在 1991 年和 1997 年推出了功能更加充实和完善的 Mathematica 2.0 版和 3.0 版，在 1999 年推出了 Mathematica 4.0 版.

人们常说 Mathematica 的发布标志着现代科技计算的开始.虽然从 20 世纪 60 年代开始，用于特定的数值、代数、图形及其他一些工作的软件包已经存在.但 Mathematica 的理想是一劳永逸地建立一个能统一地处理科技计算所有问题的单一系统.使这个梦想得以实现的重要一步是一种新的计算机符号语言的发明.Mathematica 是最大的单应用程序之一，它内容丰富，功能强大的函数覆盖了初等数学、微积分和线性代数等众多数学领域.它包含了数学多方向的新方法和新技术；它包含的近百个作图函数，是数据可视化的最好工具；它的编辑功能完备的工作平台 Notebooks 已成为许多报告论文的通用标准.

当 Mathematica 1.0 发布时，纽约时代杂志称其为"不容忽视的重要软件"，而商业周报后来将 Mathematica 列在那年最重要的十大新产品的名单中.Mathematica 作为一项理论和实践的革新，在技术领域迅速流行开来.

现在 Mathematica 在世界上拥有超过 100 万的用户.它已在工程领域、计算机科学、生物医学、金融和经济、数理化和社会科学等范围得到应用.尤其在科学院所和高等院校广为流行.

Mathematica 的用户大部分是科技人员.但 Mathematica 也被大量地用于教育，在英国和日本都有大学将 Mathematica 作为理工科学生必修的计算机课程之一.它也是"数学模型"和"数学实验"课程最好的工具之一.随着各种学生版的发布，Mathematica 也已成为全世界各种不同专业学生的重要工具.

主要参考书

1. 苏变萍,陈东立.复变函数与积分变换.北京:高等教育出版社,2003
2. 梁宗巨等.数学家传略辞典.济南:山东教育出版社,1989
3. 邓宗琦等.数学家辞典.武汉:湖北教育出版社,1990
4. 中国大百科全书(数学卷).北京,上海:中国大百科全书出版社,1988