# 复变函数期末复习

一 知识点

1 第一章主要掌握复数的四则运算，复数的代数形式、三角形式、指数形式及其运算。

2 第二章主要掌握函数的解析性，会判断函数是否是解析函数，会求解析函数的导数。

3 第三章掌握复变函数积分的计算，掌握柯西积分公式，掌握解析函数与调和级数的关系。

4 第四章掌握复数项级数的有关性质，会把一个函数展开成泰勒级数。

5 第五章掌握将函数展开为洛朗级数，掌握孤立奇点的分类及判断。

6 第六章掌握留数的计算，掌握用留数计算积分，掌握利用留数计算三类实积分。

二 例题选讲

1 **求 $3^i$ 的值。** 知识点：利用定义 $a^b = e^{bLna}$。

解 $3^i = e^{iLn3} = e^{i(\ln 3 + i2k\pi)} = e^{-2k\pi + i\ln 3} = e^{-2k\pi}(\cos\ln 3 + i\sin\ln 3)$。

2 **设 $|z|=1$，试证：** $\left|\dfrac{\overline{b}z+\overline{a}}{az+b}\right| = 1$。知识点：复数，复数的模，共轭复数之间的关系。$z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

证明：由 $|z|=1$ 得，$z\overline{z}=1$，$\left|\dfrac{\overline{b}z+\overline{a}}{az+b}\right| = \left|\dfrac{\overline{b}z+\overline{a}z\overline{z}}{az+b}\right| = \left|\dfrac{(\overline{b}+\overline{a}\,\overline{z})z}{az+b}\right| = \left|\dfrac{(\overline{b}+\overline{a}\,\overline{z})z}{az+b}\right| = \left|\dfrac{(\overline{b+az})z}{az+b}\right| = 1$

3 **求 $Arc\sin 2$ 的值。** 知识点：初等函数的定义，函数值的计算，$Arc\sin z = -iLn(iz+\sqrt{1-z^2})$，$Arc\cos z = -iLn(z+i\sqrt{1-z^2})$

解：$Arc\sin 2 = -iLn(2i \pm i\sqrt{3}) = -iLn(2\pm\sqrt{3})i = -i[\ln(2\pm\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$

$= 2k\pi - \frac{\pi}{2} - i\ln(2\pm\sqrt{3})$，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4 **证明** $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。

证明 $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。

知识点：复数模的计算，复数模共轭复数的关系 $|z|^2 = z\overline{z}$。

证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_{21}}$ $= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。

5 **设 $z_1, z_2, z_3$ 三点适合条件 $z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，试证明 $z_1, z_2, z_3$ 三点是一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点。**

知识点：利用平行四边形公式 $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。

解：由 $z_1+z_2+z_3=0$ 得 $z_1+z_2=-z_3$，$|z_2-z_1|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_1+z_2|^2=2(1+1)-1=3$

所以 $|z_2-z_1|=\sqrt{3}$，同理 $|z_3-z_1|=\sqrt{3}$，$|z_3-z_2|=\sqrt{3}$，所以 $z_1,z_2,z_3$ 三点是一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点。

**6 求极限** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-z\cos z}{z-\sin z}$。知识点：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型，用洛必达法则。

解

$$\lim_{z\to 0}\frac{z-z\cos z}{z-\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{(z-z\cos z)'}{(z-\sin z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z+z\sin z}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{(1-\cos z+z\sin z)'}{(1-\cos z)'}=$$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin z+z\cos z}{\sin z}$=3。

**7 试证明** $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ **在** $z$ **平面上解析，并求导其导数。**

知识点：利用柯西—黎曼条件，利用双曲函数的定义。

$$\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2},\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

解：$u(x,y)=\cos x\cosh y, v(x,y)=-\sin x\sinh y$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\cosh y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos x\sinh y$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\cos x\sinh y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\sin x\cosh y$，以上四个偏导数在复平面上连续，且满足柯西—黎曼条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ 在 $z$ 平面上解析，其导数为

$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y)$。

**8 验证** $u(x,y)=x^3-3xy^2$ **是** $z$ **平面上的调和函数，并求以** $u(x,y)$ **为实部的解析函数** $f(z)$**，使得** $f(0)=i$。知识点：调和函数的定义，调和函数和解析函数的关系。

解 由 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，所以 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 是 $z$ 平面上的调和函数.由柯西—黎曼条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 得

$v(x,y)=\int\dfrac{\partial v}{\partial x}dx=-\int\dfrac{\partial u}{\partial y}dx=\int 6xydx=3x^2y+\phi(y)$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2+\phi'(y)$ 所以 $\phi'(y)=-3y^2$，

$\phi(y)=-y^3+C$，从而 $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C)$，由 $f(0)=i$ 得 $C=1$，所以

$f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+1)$。

**9 设函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，试证：$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$**

知识点：解析函数的导数的计算。

解：设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$|f(z)|^2=u^2(x,y)+v^2(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}$，

$\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2=2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}$，

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2(\frac{\partial v}{\partial x})^2$ $\frac{\partial}{\partial y^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(\frac{\partial u}{\partial y})^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2(\frac{\partial v}{\partial y})^2$

而解析函数的实部与虚部是调和函数，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ 所以有

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$。

**11 试证 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在复平面上解析，并求其导数。**

知识点：利用柯西—黎曼条件判断函数的可导性与解析性。

证明：$u(x,y)=e^x\cos y, v(x,y)=e^x\sin y$，$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$，

$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$，以上四个偏导数在复平面上连续，且满足柯西—黎曼条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，所以

$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在复平面上解析，其导数为 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y+i\sin y)$。

**12 验证 $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ 在右半平面内是调和函数，其中 $x>0$。**

知识点：调和函数的定义，解析函数和调和函数的关系。

解：$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，于是

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，因此 $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ 在右半平面内是调和函数。

**13 设函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析,并且它不恒为常数.证明：若 $z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件是 $z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.** 知识点；极点和零点的关系。

证明：若 $z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，其中 $g(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内解析且 $g(z_0)\neq 0$，所以 $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{g(z)}$， $\frac{1}{g(z)}$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内解析且 $\frac{1}{g(z_0)}\neq 0$，所以 $z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

**14 将 $f(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开成罗朗级数。**

知识点：利用 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,|z|<1$，以及逐项求导，将分式写成部分分式的和。

解 设 $f(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{z}{z-2}=\frac{1}{(z-1)^2}(1+\frac{2}{z-2})$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}(1-\frac{2}{1-(z-1)})=\frac{1}{(z-1)^2}(1+2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$$

**15 将 $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}$ 按 $z-1$ 的幂展开成幂级数。**知识点：把函数展开成泰勒级数和洛朗级数。

解： $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}=\frac{1}{4+(z-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{(z-1)^2}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}$， $|z-1|<2$

**16 将 $f(z)=\frac{z}{(z-2)^2(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 内展开成幂级数**

知识点：利用 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,|z|<1$，以及逐项求导，将分式写成部分分式的和。

解 设 $f(z)=\frac{z}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{(z-2)^2}$,

去分母得 $z=A(z-2)^2+B(z-2)(z-1)+C(z-1)$， 取 $z=1$，得 $A=1$

取 $z=2$，得 $C=2$， 取 $z=0$，得 $B=-1$，所以

$$f(z)=\frac{z}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}-\frac{2}{(z-2)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{z}{2})^{n-1}$$

**17** $\int_{|z|=2}\frac{e^{zi}}{1+z^2}dz$ 知识点：利用留数定理或柯西积分公式。

解；由 $1+z^2=0$ 得 $z=\pm i$，这些点都是函数的一阶极点，都在 $|z|=2$ 内。

$\int_{|z|=2} \frac{e^{zi}}{1+z^2}dz = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z))$ 而 $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{zi}}{2z}|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$

$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{e^{zi}}{2z}|_{z=-i} = -\frac{e}{2i}$ 所以 $\int_{|z|=2} \frac{e^{zi}}{1+z^2}dz = \frac{e^{-1}}{2i} - \frac{e}{2i}$

18 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z\sin z}dz$ 知识点：利用留数定理或柯西积分公式。

解；由 $z\sin z = 0$ 得 $z=0$，这是函数的二阶极点，而且在 $|z|=1$ 内。$\int_{|z|=1} \frac{1}{z\sin z}dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$

而 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}(z^2\frac{1}{z\sin z})' = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$

$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2\sin z\cos z} = 0$，所以 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z\sin z}dz = 0.$

19 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta, a>1$ 知识点；令 $z = e^{i\theta}$，则 $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}), \cos\theta = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$，

$d\theta = \frac{1}{iz}dz$，然后化成复变函数沿闭曲线的积分，用留数定理来计算。

解 令 $z = e^{i\theta}$，则 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2az+1}dz$，被积函数 $\frac{2}{z^2+2az+1}$ 有两个一级极点，

$z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}, z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$，因为只有 $|z_1|<1$，所以只有 $z_1$ 在单位圆内

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{2}{z^2+2az+1} = \frac{2}{2z+2ia}|_{z=z_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$，所以 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

**20 计算积分** $\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$ 知识点：利用留数定理或柯西积分公式。

解：被积函数 $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}$ 有两个极点 $z=1, z=-1$，这两个极点都在圆周内，因此

$\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z))$ 而 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

同理 $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \sqrt{2}\pi i.$

**21 计算积分** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx, m>0$。 知识点：利用留数定理计算实的积分。

解：被积函数是偶函数，所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx$，而

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{imz}}{z^2+1}=2\pi i\frac{e^{-m}}{2i}=\pi e^{-m}$，于是有 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\pi e^{-m}$。

**22 计算积分** $\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$． 知识点：利用留数定理

解：被积函数 $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 有两个极点 $z=1,z=0$，这两个极点都在圆周内

因此 $\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1}f(z))$，而 $\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to0}zf(z)=-2$

而 $\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=(\frac{5z-2}{z})'|_{z=1}=\frac{2}{z^2}|_{z=1}=2$，所以 $\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz=0$。

**23 计算积分** $\int_{|z|=2}\frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}dz$ 知识点：利用留数定理或柯西积分公式。

解；由 $\frac{1}{2}-\sin^2 z=0$ 得 $z=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，这些点都是函数的一阶极点，而只有 $k=0$ 时奇点才在 $|z|=2$ 内。

$\int_{|z|=2}\frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}dz=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}}f(z))$，而 $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}}f(z)=\frac{z}{-2\sin z\cos z}|_{z=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}$，

$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}}f(z)=\frac{z}{-2\sin z\cos z}|_{z=-\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}$，所以 $\int_{|z|=2}\frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}dz=2\pi i\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2 i$

**24 计算积分** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 知识点：利用留数定理计算实的积分。

解：被积函数 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 有两个极点 $z=i,z=-i$，只有极点 $z=i$ 在上半平面内

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)$，$=2\pi i(\frac{z^2}{(z+i)^2})'|_{z=i}=2\pi i\frac{2zi}{(z+i)^3}|_{z=i}=\frac{\pi}{2}$

**25 求方程** $z^5+7z^4-3z^2+z+1=0$ **在** $|z|<1$ **内根的个数**。知识点，利用儒歇定理。

解：设 $f(z)=7z^4,g(z)=z^5-3z^2+z+1$，在 $f(z),g(z)$ 在 $|z|<1$，内解析，在 $|z|=1$ 上连续，且在 $|z|=1$ 上，

$|f(z)|=|7z^4|=7$，$|g(z)|=|z^5-3z^2+z+1|\le|z^5|+|-3z^2|+|z|+1=6$，所以在 $|z|=1$ 上，

$|f(z)|>|g(z)|$，因此 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$，在 $|z|<1$ 内有相同的零点个数，所以 $z^5+7z^4-3z^2+z+1=0$ 在

$|z|<1$ 内有 4 个根。

26 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析，在边界上 $|f(z)| < 1$， 证明在 $D$ 内存在一点 $z_0$ 使得 $f(z_0) = z_0$ 。