数字信号处理教程
课后习题及答案

目录

第一章 离散时间信号与系统

1．直接计算下面两个序列的卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$

$$h(n)=\begin{cases} a^n & ,\ 0\le n\le N-1 \\ 0 & ,\ 其他\ n \end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases} \beta^{n-n_0} & ,\ n_0\le n \\ 0 & ,\ n<n_0 \end{cases}$$

请用公式表示。

分析：

①注意卷积和公式中求和式中是哑变量 m（ n 看作参量），
结果 $y(n)$ 中变量是 n，

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)\ ;$$

②分为四步 （1）翻褶（ $-m$ ），（2）移位（ n ），（3）相乘，
（4）相加，求得一个 n 的 $y(n)$ 值，如此可求得所有 n 值的 $y(n)$；

③ 一定要注意某些题中在 n 的不同时间段上求和范围的不同

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

(1) 当$n<n_0$时 $y(n)=0$

(2) 当 $n_0\le n\le n_0+N-1$ 时，部分重叠

$$y(n)=\sum_{m=n_0}^{n}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=n_0}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m$$

$$=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n_0}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1-n_0}-\beta^{n+1-n_0}}{\alpha-\beta}\ ,\ \alpha\neq\beta$$

$$y(n)=\alpha^{n-n_0}\left(n+1-n_0\right)\ ,\ \ (\alpha=\beta)$$

(3) 当 $n\ge n_0+N-1$ 时，全重叠

$$y(n)=\sum_{m=n\text{-N}+1}^{n}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=n-N+1}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n-N+1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m$$

$$=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-N+1}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}=\beta^{n+1-N-n_0}\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta}\quad ,\ \left(\alpha\neq\beta\right)$$

$$y(n)=N\alpha^{n-n_0}\ ,\qquad \left(\alpha=\beta\right)$$

如此题所示，因而要分段求解。

2．已知线性移不变系统的输入为 $x(n)$，系统的单位抽样响应为 $h(n)$，试求系统的输出 $y(n)$，并画图。

(1)$x(n)=\delta(n)$, $h(n)=R_5(n)$
(2)$x(n)=R_3(n)$, $h(n)=R_4(n)$
(3)$x(n)=\delta(n-2)$, $h(n)=0.5^nR_3(n)$
(4)$x(n)=2^nu(-n-1)$, $h(n)=0.5^nu(n)$

分析：

①如果是因果序列 $y(n)$ 可表示成 $y(n)$={ $y(0)$， $y(1)$， $y(2)$……}，例如小题（2）为 $y(n)$={1，2，3，3，2，1}；

②$\delta(n)*x(n)=x(n)$ ， $\delta(n-m)*x(n)=x(n-m)$ ；

③卷积和求解时，n 的分段处理。

解：(1) $y(n)=x(n)*h(n)=R_5(n)$

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$

(3) $y(n)=\delta(n-2)*0.5^n R_3(n)=0.5^{n-2}R_3(n-2)$

(4) $x(n)=2^n u(-n-1) \quad h(n)=0.5^n u(n)$

当$n\ge 0$ $\quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}0.5^{n-m}2^m=\frac{1}{3}\cdot 2^{-n}$

当$n\le -1$ $\quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}0.5^{n-m}2^m=\frac{4}{3}\cdot 2^{n}$

3．已知 $h(n)=a^{-n}u(-n-1)$ ，$0<a<1$ ，通过直接计算卷积和的办法，试确定单位抽样响应为 $h(n)$ 的线性移不变系统的阶跃响应。

解: $\quad x(n)=u(n)$

$$h(n)=a^{-n}u(-n-1) \quad , \quad 0<a<1$$

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

当$n\le -1$时 $\quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}a^{-m}=\frac{a^{-n}}{1-a}$

当$n>-1$时 $\quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}a^{-m}=\frac{a}{1-a}$

4. 判断下列每个序列是否是周期性的, 若是周期性的, 试确定其周期：

$(a)\quad x(n)=A\cos(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8})$

$(b)\quad x(n)=A\sin(\frac{13}{3}\pi n) \qquad (c)\quad x(n)=e^{j(\frac{n}{6}-\pi)}$

分析：

序列为$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\psi)$或$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\psi)$时，不一定是周期序列，

①当$2\pi/\omega_0=$整数，则周期为$2\pi/\omega_0$；

②当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{P}{Q}$,（有理数 P、Q为互素的整数）则周期 为Q；

③当 $2\pi/\omega_0=$ 无理数 ，则 $x(n)$ 不是周期序列。

解：$(a)\,x(n)=A\cos(\dfrac{3\pi}{7}n-\dfrac{\pi}{8})$

$$2\pi/\omega_0=2\pi/\frac{3\pi}{7}=\frac{14}{3}$$

$\therefore$ 是周期的 ,周期为 14 。

$(b)\,x(n)=A\sin(\dfrac{13}{3}\pi n)$

$$2\pi/\omega_0=2\pi/\frac{13}{3}\pi=\frac{6}{13}$$

$\therefore$ 是周期的，周期是 6。

$(c)\,x(n)=e^{j(\frac{n}{6}-\pi)}=\cos(\dfrac{n}{6}-\pi)+j\sin(\dfrac{n}{6}-\pi)$

$$=-\cos\frac{n}{6}-j\sin\frac{n}{6}$$

$2\pi/\omega_0=12\pi$ T 是无理数

$\therefore$ 是非周期的。

5. 设系统差分方程为:

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

其中 $x(n)$ 为输入, $y(n)$ 为输出。当边界条件选为

(1) $y(0)=0$

(2) $y(-1)=0$

试判断系统是否是线性的?是否是移不变的?

分析：已知边界条件，如果没有限定序列类型（例如因果序列、反因果序列等），则递推求解必须向两个方向进行（n ≥ 0 及 n ＜ 0）。

解：(1) $y_1(0)=0$ 时，

(a) 设 $x_1(n)=\delta(n)$，

按 $y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$

$i)$ 向 $n>0$ 处递推，

$$y_1(1)=ay_1(0)+x_1(1)=0$$

$$y_1(2)=ay_1(1)+x_1(2)=0$$

$$\vdots$$

$y_1(n) = ay_1(n-1) + x_1(n) = 0$

$\therefore y_1(n) = 0 \quad , \quad n \ge 0$

$ii)$ 向 $n < 0$ 处递推，将原方程加以变换

$y_1(n+1) = ay_1(n) + x_1(n+1)$

则 $y_1(n) = \frac{1}{a}[y_1(n+1) - x_1(n+1)]$

因而 $y_1(-1) = \frac{1}{a}[y_1(0) - x_1(0)] = -a^{-1}$

$y_1(-2) = \frac{1}{a}[y_1(-1) - x_1(-1)] = -a^{-2}$

$y_1(-3) = \frac{1}{a}[y_1(-2) - x_1(-2)] = -a^{-3}$

$\vdots$

$y_1(n) = \frac{1}{a}[y_1(n+1) - x_1(n+1)] = -a^n$

综上 $i)$, $ii)$ 可知： $y_1(n) = -a^n u(-n-1)$

(b) 设 $x(n) = \delta(n-1)$

$i)$ 向 $n > 0$ 处递推，

按 $y_2(n) = ay_2(n-1) + x_2(n)$

$y_2(1) = ay_2(0) + x_2(1) = 1$

$y_2(2) = ay_2(1) + x_2(2) = a$

$\vdots$

$y_2(n) = ay_2(n-1) + x_2(n) = a^{n-1}$

$\therefore y_2(n) = a^{n-1} \quad , n \ge 1$

$ii)$ 向 $n < 0$ 处递推，按变换后的 $y_2(n)$

$y_2(n) = \frac{1}{a}[y_2(n+1) - x_2(n+1)]$

$y_2(-1) = \frac{1}{a}[y_2(0) - x_2(0)] = 0$

$y_2(-2) = \frac{1}{a}[y_2(-1) - x_2(-1)] = 0$

$\vdots$

$y_2(n) = \frac{1}{a}[y_2(n+1) - x_2(n+1)] = 0$

综上 $i)$, $ii)$ 可得： $y_2(n) = a^{n-1}u(n-1)$

由 (a) , (b) 结果可知，

$x(n)$ 与 $x_2(n)$ 是移一位的关系，但

$y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 不是移一位的关系，所以在

$y(0) = 0$ 条件下，系统不是移不变系统。

$c)$ 设 $x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$

$i)$ 向 $n>0$ 处递推

$$y_3(1)=ay_3(0)+x_3(1)=1$$

$$y_3(2)=ay_3(1)+x_3(2)=a$$

$$y_3(3)=ay_3(2)+x_3(3)=a^2$$

$$\vdots$$

$$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)=a^{n-1}$$

$$\therefore y_3(n)=a^{n-1} \quad ,n\geq 1$$

$ii)$ 向 $n<0$ 处递推

$$y_3(-1)=\frac{1}{a}[y_3(0)-x_3(0)]=-a^{-1}$$

$$y_3(-2)=\frac{1}{a}[y_3(-1)-x_3(-1)]=-a^{-2}$$

$$\vdots$$

$$y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]$$

$$=-a^n \quad , \qquad n\leq -1$$

综上 $i),ii)$ 可得：

$$y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)-a^n u(-n-1)$$

$$=y_1(n)+y_2(n)$$

$\therefore$ 所给系统在 $y(0)=0$ 条件下是线性系统。

6. 试判断:

是否是线性系统?并判断(2),(3)是否是移不变系统?

分析：利用定义来证明线性：满足可加性和比例性，

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$$

移不变性：输入与输出的移位应相同 T[x(n-m)]=y(n-m)。

解：(1)

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m)$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}[ax_1(m)+bx_2(n)]$$

$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=\sum_{m=-\infty}^{n}\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]$$

$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=ay_1(n)+by_2(n)$$

$\therefore$ 系统是线性系统

解:(2)

$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right]=\left[x_1(n)\right]^2$

$y(n)=\left[x(n)\right]^2$

$y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]=\left[x_2(n)\right]^2$

$ay_1(n)+by_2(n)=\left[ax_1(n)\right]^2+\left[bx_1(n)\right]^2$

$\therefore$ 系统不是线性系统

$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]$

$=\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]^2$

$=\left[ax_1(n)\right]^2+\left[bx_2(n)\right]^2+2abx_1(n)x_2(n)$

即 $T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]\neq ay_1(n)+by_2(n)$

$T\left[x(n-m)\right]=\left[x(n-m)\right]^2$

$y(n-m)=\left[x(n-m)\right]^2$

即 $T\left[x(n-m)\right]=y(n-m)$

$\therefore$ 系统是移不变的

$$y_1(n)=x_1(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$y_2(n)=x_2(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7}\right)$$

解：(3)

$$y(n)=x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)$$
$$=ax_1(n)\sin(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7})+$$
$$bx_2(n)\sin(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7})$$

7. 试判断以下每一系统是否是(1)线性,(2)移不变的？

$$T[x(n-m)]=x(n-m)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7}\right)$$
$$y(n-m)=x(n-m)\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7}\right)$$

即 $T[x(n-m)]=y(n-m)$

$\therefore$系统是移不变的

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$
$$=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{7})$$

即有 $T[ax_1(n)+bx_2(n)]$
$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

$\therefore$系统是线性系统

(1) $T[x(n)]=g(n)x(n)$　　(2) $T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

(3) $T[x(n)]=x(n-n_0)$　　(4) $T[x(n)]=e^{x(n)}$

分析：
注意：T [x(n)] = g(n) x(n)　这一类表达式，若输入移位 m,则有 x(n)移位变成 x(n-m),而 g(n)并不移位，但 y（n）移位 m 则 x（n）和 g(n)均要移位 m 。

解：(1)

$$T[x(n)] = g(n)x(n)$$

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$

$$= g(n)[ax_1(n)+bx_2(n)]$$

$$= g(n)\times ax_1(n)+g(n)\times bx_2(n)$$

$$= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

$\therefore$ 系统是线性系统。

$$T[x(n-m)] = g(n)x(n-m)$$

$$y(n-m) = g(n-m)x(n-m)$$

即 $T[x(n-m)] \neq y(n-m)$

$\therefore$ 系统不是移不变的。

$$T[x(n-m)] = e^{x(n-m)}$$

$$y(n-m) = e^{x(n-m)}$$

即 $T[x(n-m)]$

$= y(n-m)$

$\therefore$ 系统是移不变的。

解：(2)

$$T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$$

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} [ax_1(k)+bx_2(k)]$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} ax_1(k) + \sum_{k=n_0}^{n} bx_2(k)$$

$$= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

$\therefore$ 系统是线性系统。

$$T\left[x(n-m)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)$$

$$=\sum_{k=n_0-m}^{n-m}x(k)$$

$$y(n-m)=\sum_{k=n_0}^{n-m}x(k)$$

即 $T\left[x(n-m)\right]\neq y(n-m)$

∴系统不是移不变的。

解：(3)

$$T\left[x(n)\right]=x(n-n_0)$$

$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]$$

$$=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)$$

$$=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$$

8. 以下序列是系统的单位抽样响应 $h(n)$，试说明系统是否是

(1)因果的，(2)稳定的？

(1) $\frac{1}{n^2}u(n)$ (2) $\frac{1}{n!}u(n)$

(3) $3^n u(n)$ (4) $3^n u(-n)$

(5) $0.3^n u(n)$ (6) $0.3^n u(-n-1)$

(7) $\delta(n+4)$

分析：

注意：0！=1，已知 LSI 系统的单位抽样响应，可用 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|=M<\infty$ 来判断稳定性，用 h（n）=0，n<0 来判断因果性。

解：

(1) 当 $n<0$ 时，$h(n)=0$，

∴ 是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{0^2}+\frac{1}{1^2}+\cdots\Rightarrow\infty,$$

∴ 不稳定。

(2) 当 $n<0$ 时， $h(n)=0,$

$\therefore$ 是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$$

$$=1+1+\frac{1}{2*1}+\frac{1}{3*2*1}+\cdots$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=3$$

$\therefore$ 稳定。

(3) 当 $n<0$ 时， $h(n)=0,$

$\therefore$ 是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=3^0+3^1+3^2+\cdots\Rightarrow\infty$$

$\therefore$ 不稳定。

(4)当 $n<0$ 时， $h(n)\neq 0,$

$\therefore$ 是非因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=3^0+3^{-1}+3^{-2}+\cdots=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ 稳定。

(5) 当 $n<0$ 时，$h(n)=0,$

$\therefore$ 系统是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=0.3^0+0.3^1+0.3^2+\cdots=\frac{10}{7}$$

$\therefore$ 系统是稳定的。

(6) 当 $n<0$ 时，$h(n)\neq 0$

$\therefore$ 系统是非因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=0.3^{-1}+0.3^{-2}+\cdots\Rightarrow\infty$$

$\therefore$ 系统不稳定。

(7) 当 $n<0$ 时， $h(n)\neq 0$

$\therefore$ 系统是非因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1$$

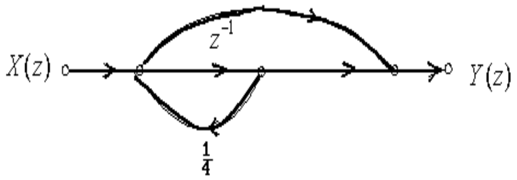
$\therefore$ 系统稳定。

9．列出下图系统的差分方程, 并按初始条件 $y(n)=0$，$n<0$，求输入为 $x(n)=u(n)$ 时的输出序列 $y(n)$, 并画图表示。

分析：

“信号与系统”课中已学过双边 Z 变换，此题先写出 H(z) 然后利用 Z 反变换（利用移位定理）在时域递推求解；也可直接求出序列域的差分方程再递推求

解[注意输入为 u(n)]。



解：系统的等效信号流图为：

则由梅逊公式可得：$\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

$$4y(n)-y(n-1)=4x(n)+4x(n-1)$$

$$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1)$$

$$y(0)=\frac{1}{4}y(-1)+x(0)+x(-1)=1$$

$$y(1)=\frac{1}{4}y(0)+x(1)+x(0)=2+\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}y(2)&=\frac{1}{4}y(1)+x(2)+x(1)\\&=2(1+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(3)&=\frac{1}{4}y(2)+x(3)+x(2)\\&=2(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2})+(\frac{1}{4})^3\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}y(n)&=\frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1)\\&=2(1+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1})+(\frac{1}{4})^n\\&=\left[\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)\end{aligned}$$

10. 设有一系统,其输入输出关系由以下差分方程确定

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。 试求：

(a) 该系统的单位抽样响应；

(b) 由(a)的结果,利用卷积和求输入 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)$的响应 。

分析：小题(a)可用迭代法求解

小题(b)要特别注意卷积后的结果其存在的 n 值范围。

解：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

$(a)\ x(n)=\delta(n)$

$$y(n)=h(n)=0 \qquad (n<0)$$

$$h(0)=\frac{1}{2}y(-1)+x(0)+\frac{1}{2}x(-1)=1$$

$$h(1)=\frac{1}{2}y(0)+x(1)+\frac{1}{2}x(0)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$h(2)=\frac{1}{2}y(1)+x(2)+\frac{1}{2}x(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(3)=\frac{1}{2}y(2)+x(3)+\frac{1}{2}x(2)=(\frac{1}{2})^2$$

$$\vdots$$

$$h(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$

(b)

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$=\left[(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)+\delta(n)\right]*e^{j\omega n}u(n)$$

$$=\left[(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)\right]*e^{j\omega n}u(n)+e^{j\omega n}u(n)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}(\frac{1}{2})^{(m-1)}e^{j\omega(n-m)}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$$

$$=2e^{j\omega n}\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n}e^{-j\omega(n+1)}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}u(n-1)$$

$$+e^{j\omega n}u(n)$$

$$=\frac{e^{j\omega(n-1)}-(\frac{1}{2})^{n}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$$

$$=\frac{e^{j\omega n}-(\frac{1}{2})^{n}}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$$

11. 有一理想抽样系统,抽样频率为$\Omega_s = 6\pi$,抽样后经

理想低通滤波器$H_a(j\Omega)$还原,其中:

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

今有两个输入$x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t$,

问输出信号$y_{a_1}(t), y_{a_2}(t)$有无失真?为什么?

分析：要想时域抽样后不产生失真的还原出原信号，则抽样频率（f_s）必须大于最高信号频率（ f_h ）的 2 倍，即满足$f_s > 2f_h$。

解：根据奈奎斯特定理可知：

$\because x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t$，频谱中最高频率$\Omega_{a_1} = 2\pi < \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

$\therefore y_{a_1}(t)$无失真。

$\because x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t$，频谱中最高频率$\Omega_{a_2} = 5\pi > \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

$\therefore y_{a_2}(t)$失真。

12．已知一个线性时不变系统的单位抽样响应$h(n)$除了区间$N_0 \le n \le N_1$之外皆为零；又已知输入信号$x(n)$除了区间$N_2 \le n \le N_3$之外皆为零；如果假设输出信号$y(n)$除区间$N_4 \le n \le N_5$之外皆为零，试以N_0，N_1，N_2，N_3表示N_4，N_5。

分析：由于$y(n) = \sum_m x(m)h(n-m)$可知$x(n)$的非零范围为$N_2 \le m \le N_3$，h(n-m) 的非零范围为$N_0 \le m \le N_1$。

解：按照题意，在区间$N_0 \le n \le N_1$之外单位抽样响应$h(n)$皆为零；在区间$N_2 \le n \le N_3$之外输入$x(n)$皆为零，

因此 $y(n)=\sum_{m} x(m)h(n-m)$，由 $x(m)$ 的非零空间为

$N_2 \le m \le N_3$ $h(n-m)$ 的非零空间为 $N_0 \le n-m \le N_1$

将两不等式相加可得：$N_0+N_2 \le n \le N_1+N_3$，在此区间之外，$h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的非零抽样互不重叠，故输出皆为零。由于题中给出输出除了区间 $N_4 \le n \le N_5$ 之外皆为零，所以有：$N_4=N_0+N_2$ $N_5=N_1+N_3$

13. 一个具有下列有限长单位抽样响应 $h(n)$ 的系统：$h(n)=0$，$n<0$ 或 $n \ge N, (N>0)$，请证明：如果 $|x(n)| \le B$，则输出的界值为 $|y(n)| \le B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$，同时请证明 $|y(n)|$ 可能达到这个界值，即寻找一个满足 $|x(n)| \le B$ 的序列 $x(n)$，使 $y(n)$ 对某些 n 值有 $|y(n)| = B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$。

分析：题中要求某些 n 值使 $\left|y(n)\right| = B\sum_{k=0}^{N-1}\left|h(k)\right|$，最方便的是 $n=0$ 时满足 $\left|y(0)\right| = B\sum_{k=0}^{N-1}\left|h(k)\right|$，进一步看只要 $y(0) = B\sum_{k=0}^{N-1}\left|h(k)\right|$ 满足即可，

由卷积和公式有 $y(0)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(-k)$，即要求 $x(-k) = B\dfrac{h^*(k)}{\left|h(k)\right|}$，

也就是要求满足

$$x(n)=\begin{cases} B\dfrac{h^*(-n)}{\left|h(-n)\right|}, & \text{当 } h(-n)\ne 0 \\ 0, & \text{当 } h(-n)=0 \end{cases}$$

。

证明：由于题中给出 $h(n)=0$,$(n<0$ ，$N\le n)$

式中 $N>0$ 因此，可以把 $y(n)$ 写成

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)$$ ，而

$$|y(n)|\le\sum_{k=0}^{N-1}\left(|h(k)|\cdot|x(n-k)|\right)$$ ，

若 $|x(n-k)|\le B$ 则输出的界值

$$|y(n)|\le B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$ ，为达到这个界值我们

凑一个序列

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}B, & h(-n)\ne 0\\ 0, & h(-n)=0\end{cases}$$

于是 $$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\frac{h^*(k-n)}{|h(k-n)|}B$$

因此 $$y(0)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{|h(k)|^2}{|h(k)|}B=B\sum_{k=0}^{N-1}|h(k)|$$

第二章　Z 变换

1．求以下序列的 z 变换，并画出零极点图和收敛域。

(1) $x(n) = a^{|n|} \quad (|a| < 1)$　　(2) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(3) $x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$　　(4) $x(n) = \frac{1}{n}$，$(n \ge 1)$

(5) $x(n) = n\sin(\omega_0 n)$，$n \ge 0$（ω_0为常数）

(6) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \Phi)\, u(n)$，$0 < r < 1$

分析：

Z 变换定义 $Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$，

n 的取值是 $x(n)$ 的有值范围。Z 变换的收敛域是满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = M < \infty$$

的 z 值范围。

解：(1) 由 Z 变换的定义可知：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

$$= \frac{(a^2-1)z}{a\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}$$

收敛域：$|az|<1$，且$\left|\frac{a}{z}\right|<1$ 即：$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$

极点为：$z=a,\ z=\frac{1}{a}$ 零点为：$z=0, z=\infty$

解：(2) 由 z 变换的定义可知：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n u(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}$$

$(2)x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

收敛域：$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right|<1$ 即：$|z|>\frac{1}{2}$

极点为：$z=\frac{1}{2}$ 零点为：$z=0$

$(3)x(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

解：（3）

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)\,z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-(\frac{1}{2})^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-2^n z^n \quad =-\frac{2z}{1-2z}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

收敛域：$|2z|<1$ 即：$|z|<\frac{1}{2}$

极点为：$z=\frac{1}{2}$ 零点为：$z=0$

$(4)x(n)=\frac{1}{n},(n\geq 1)$

解：(4) $X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot z^{-n}$

$$\because \frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-n)z^{-n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-z^{-n-1})=\frac{1}{z-z^{2}} \quad ,\ |z|>1$$

$$\therefore X(z)=\ln z-\ln(1-z)=\ln\frac{z}{1-z}$$

因为 $X(z)$ 的收敛域和 $\frac{dX(z)}{dz}$ 的收敛域相同，

故 $X(z)$ 的收敛域为 $|z|>1$。

极点为：$z=0,\ z=1$　　零点为：$\mathrm{z}=\infty$

$(5)x(n)=n\sin\omega_0 n, n\geq 0(\omega_0$为常数）

解：(5) 设 $y(n)=\sin(\omega_0 n)\cdot u(n)$

则有 $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\cdot z^{-n}=\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$ ，$|z|>1$

而　$x(n)=n\cdot y(n)$

$$\therefore X(z)=-z\frac{d}{dz}\cdot Y(z)=\frac{z^{-1}(1-z^{-2})\sin\omega_0}{(1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2})^{2}} \quad ,\ |z|>1$$

因此，收敛域为 ：$|z|>1$

极点为：$z=e^{j\omega_0}, z=e^{-j\omega_0}$　（极点为二阶）

零点为：$z=1, z=-1, z=0, z=\infty$

$(6)x(n)=Ar^{n}\cos(\omega_0 n+\phi)u(n), 0<r<1$

解：(6)

设 $y(n)=\cos(\omega_0 n+\phi)\cdot u(n)$

$$=[(\cos(\omega_0 n)\cdot\cos\phi-\sin(\omega_0 n)\cdot\sin\phi]u(n)$$

$$=\cos\phi\cdot\cos(\omega_0 n)\cdot u(n)-\sin\phi\cdot\sin(\omega_0 n)\cdot u(n)$$

$$\therefore\ Y(z)=\cos\phi\cdot\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}-\sin\phi\cdot\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

$$=\frac{\cos\phi-z^{-1}\cos(\phi-\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}\quad,\ |z|>1$$

则 $Y(z)$ 的收敛域为 $|z|>1$ 而 $x(n)=Ar^n\cdot y(n)$

$$\therefore\ X(z)=A\cdot Y(\frac{z}{r})=\frac{A\left[\cos\phi-z^{-1}r\cos(\phi-\omega_0)\right]}{1-2z^{-1}r\cos\omega_0+r^2z^{-2}}$$

则 $X(z)$ 的收敛域为：$|z|>|r|$。

2．假如 $x(n)$ 的 z 变换代数表示式是下式，问 $X(z)$ 可能有多少不同的收敛域。

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{(1+\frac{1}{4}z^{-2})(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2})}$$

分析：

有限长序列的收敛域为：$0<|z|<\infty$ ，$n_1\le n\le n_2$

特殊情况有：$0<|z|\le\infty$ ，$n_1\ge 0$

$0\le|z|<\infty$ ，$n_2\le 0$

右边序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|<\infty$，$n\ge n_1$

因果序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|\le\infty$，$n\ge n_1\ge 0$

左边序列的收敛域为：$0<|z|<R_{x+}$，$n\le n_2$

特殊情况有：$|z|<R_{x+}$，$n\le n_2\le 0$

双边序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

有三种收敛域：圆内、圆外、环状（$=0$，$z=\infty$ 要单独讨论）

解 ：对 X(Z)的分子和分母进行因式分解得

$$X(Z)=\frac{(1-\frac{1}{2}Z^{-1})(1+\frac{1}{2}Z^{-1})}{(1+\frac{1}{4}Z^{-2})(1+\frac{1}{2}Z^{-1})(1+\frac{3}{4}Z^{-1})}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}jZ^{-1})(1-\frac{1}{2}jZ^{-1})(1+\frac{3}{4}Z^{-1})}$$

X(Z)的零点为 ： 1/2 ， 极点为 ： j/2 , -j/2 , -3/4

∴ X(Z)的收敛域为 ：

(1)　1/2 < | Z | < 3/4 , 为双边序列，　请看　<图形一>

(2)　　| Z | < 1/2 ，　　　　为左边序列，请看　<图形二>

(3)　　| Z | > 3/4 ，　　　　为右边序列，　请看　<图形三>

3.用长除法,留数定理,部分分式法求以下 $X(z)$的z反变换

$$(1)\ X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}},\quad |z|>\frac{1}{2}\qquad (2)\ X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\quad |z|<\frac{1}{4}$$

$$(3)X(z)=\frac{z-a}{1-az},\qquad |z|>\left|\frac{1}{a}\right|$$

分析：

长除法：对右边序列（包括因果序列）H（z）的分子、分母都要按 z 的降幂排列，对左边序列（包括反因果序列）H（z）的分子、分母都要按 z 的升幂排列。

部分分式法：若 X（z）用 z 的正幂表示，则按 $X(z)/z$ 写成部分分式，然后求各极点的留数，最后利用已知变换关系求 z 反变换可得 x（n）。

留数定理法：

⑴ 注意留数表示是 $\mathrm{Res}\,(X(z)z^{n-1})\Big|_{z=z_k}=(z-z_k)X(z)z^{n-1}\Big|_{z=z_k}$

因而$X(z)z^{n-1}$的表达式中也要化成$1/(z-z_k)$的形式才能相抵消，不能用$1/(1-z_kz^{-1})$ 来和（$z-z_k$）相抵消，这是常出现的错误。

⑵用围线内极点留数时不必取 "–" 号（负号），用围线外极点留数时要取 "–" 号（负号）。

（1）（i）长除法：

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

极点为 $z=-1/2$, 而收敛域为: $|z|>1/2$,

因而知$x(n)$为因果序列，所以分子分母要按降幂排列

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\cdots \\
\hline
1+\frac{1}{2}z^{-1} & 1 \\
 & \underline{1+\frac{1}{2}z^{-1}}
\end{array}$$

$$-\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}{\qquad\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$X(z)=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot z^{-n}$$

所以： $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n)$

（1）(ii)留数定理法：

$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}z^{n-1}dz$，设 c 为

$|z|>\frac{1}{2}$内的逆时针方向闭合曲线：

当$n\geq 0$时，

$\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}z^{n-1}=\frac{1}{z+\frac{1}{2}}z^{n}$在 c 内有

$z=-\frac{1}{2}$一个单极点

$$则\ x(n)=\mathrm{Res}\left[\frac{z^{n}}{z+\frac{1}{2}}\right]_{z=-\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n},\ n\geq 0$$

由于$x(n)$是因果序列，

故 $n<0$时，$x(n)=0$

所以 $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n)$

（1）(iii)部分分式法：

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

因为 $|z| > \frac{1}{2}$

所以 $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$

（2）(i). 长除法：

由于极点为 $z = \frac{1}{4}$,而收敛域为 $|z| < \frac{1}{4}$ ，

因而 $x(n)$ 是左边序列,所以要按 z 的

升幂排列：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8 + 28z + 112z^2 + \cdots \\
\hline
\frac{1}{4} - z & 2 - z \\
 & \underline{2 - 8z} \\
 & \quad 7z \\
 & \quad \underline{7z - 28z^2} \\
 & \qquad 28z^2 \\
 & \qquad \underline{28z^2 - 112z^3}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= 8 + 28z + 112z^2 + \cdots \\
&= 8 + \sum_{n=1}^{\infty} 7 \cdot 4^n \cdot z^n \\
&= 8 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 7 \cdot 4^{-n} \cdot z^{-n}
\end{aligned}
$$

所以 $x(n) = 8 \cdot \delta(n) + 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(-n-1)$

（2）(ii)留数定理法:

$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$ 设 c 为 $|z| < \frac{1}{4}$， 内的逆时针方向闭合曲线

当 $n < 0$ 时：

$X(z) z^{n-1}$ 在 c 外有一个单极点 $z = \frac{1}{4}$

$$\therefore x(n) = -\mathrm{Re}\,s[X(z)z^{n-1}]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$= 7\cdot(\frac{1}{4})^n, \qquad (n<0)$$

当 $n=0$ 时：

$X(z)z^{n-1}$ 在 c 内有一个单极点 $z=0$

$$\therefore x(n) = \mathrm{Re}\,s[X(z)z^{n-1}]_{z=0} = 8,\ \ n=0$$

当 $n>0$ 时：$X(z)z^{n-1}$ 在 c 内无极点

则：$x(n)=0, n>0$

综上所述，有：

$$x(n) = 8\delta(n) + 7(\frac{1}{4})^n u(-n-1)$$

(2)(iii). 部分分式法：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-2}{z(z-\frac{1}{4})} = \frac{8}{z} + \frac{-7}{z-\frac{1}{4}}$$

则 $\quad X(z) = 8 - \dfrac{7z}{z-\frac{1}{4}} = 8 - \dfrac{7}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

因为 $|z| < \dfrac{1}{4}$ 　则 $x(n)$ 是左边序列

所以 $\quad x(n) = 8\delta(n) + 7(\frac{1}{4})^n u(-n-1)$

(3)(i). 长除法：

因为极点为 $z=\dfrac{1}{a}$，由 $|z| > \left|\dfrac{1}{a}\right|$ 可知, $x(n)$ 为

因果序列, 因而要按 z 的降幂排列:

$$\begin{array}{r l}
 & -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})z^{-1} + \frac{1}{a^2}(a-\frac{1}{a})z^{-2} + \cdots \\
-az+1 \big) & z-a \\
 & \underline{z-\frac{1}{a}} \\
 & -(a-\frac{1}{a}) \\
 & \underline{-(a-\frac{1}{a}) + \frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})z^{-1}}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
-\frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})z^{-1} \\
-\frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})z^{-1}+\frac{1}{a^2}(a-\frac{1}{a})z^{-2} \\
\hline
\qquad\cdots\cdots
\end{array}
$$

则 $X(z)=-\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{a})\left(\frac{1}{a}\right)^n\cdot z^{-n}$

所以

$$x(n)=-\frac{1}{a}\cdot\delta(n)+(a-\frac{1}{a})\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n\cdot u(n-1)$$

(3)(ii). 留数定理法:

$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$，设 c 为 $|z|>\left|\frac{1}{a}\right|$

内的逆时针方向闭合曲线。

当 $n>0$ 时：

$X(z)z^{n-1}$在 c 内有 $z=\frac{1}{a}$ 一个单极点

$$x(n)=\mathrm{Re}\,s\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=\frac{1}{a}}$$

$$=\left[-\frac{1}{a}\frac{z-a}{z-\frac{1}{a}}\cdot z^{n-1}\right]_{z=\frac{1}{a}}$$

$$=(a-\frac{1}{a})\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n,\quad (n>0)$$

当 $n=0$ 时：$X(z)z^{n-1}$ 在c内有

$z=0, z=\frac{1}{a}$ 两个单极点

$$x(0)=\mathrm{Re}\,s\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=\frac{1}{a}}+\mathrm{Re}\,s\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=0}$$

$$=a-\frac{1}{a}-a=-\frac{1}{a}$$

当$n<0$时：由于$x(n)$是因果序列，

此时 $x(n)=0$。所以

$$x(n)=-\frac{1}{a}\cdot\delta(n)+(a-\frac{1}{a})\left(\frac{1}{a}\right)^n\cdot u(n-1)$$

(3)(iii). 部分分式法:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-a}{z(1-az)}=\frac{-a}{z}+\frac{1-a^2}{1-az}$$

则 $X(z)=-a+(a-\frac{1}{a})\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$

所以

$$x(n)=(-a)\cdot\delta(n)+(a-\frac{1}{a})\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{n}\cdot u(n)$$

$$=-\frac{1}{a}\cdot\delta(n)+(a-\frac{1}{a})\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{n}\cdot u(n-1)$$

4. 有一右边序列 $x(n)$，其 z 变换为 $X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$

(a) 将上式作部分分式展开(用 z^{-1} 表示)，由展开式求 $x(n)$ 。

(b) 将上式表示成 z 的多项式之比，再作部分分式展开，由展开式求 $x(n)$,并说明所得到的序列与(a)所得的是一样的。

注意：不管哪种表示法最后求出 x（n）应该是相同的。

解：(a)

因为 $X(z)=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-z^{-1}}$

且 x(n)是右边序列

所以 $x(n)=(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n})u(n)$

(b)

$$X(z)=\frac{z^{2}}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}$$

$$=1+\frac{\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}$$

$$=1+\frac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2}{z-1}$$

则 $x(n)=\delta(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-1)+2u(n-1)$

$$=(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n})u(n)$$

5．对因果序列,初值定理是 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$,如果序列为 $n>0$ 时 $x(n)=0$,问相应的定理是什么?

$$X(z)=\frac{\frac{7}{12}-\frac{19}{24}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

讨论一个序列 $x(n)$,其 z 变换为:

$X(z)$的收敛域包括单位圆，试求其 $x(0)$ 值。

分析：

这道题讨论如何由双边序列 Z变换 $X(z)$ 来求序列初值 $x(0)$，把序列分成因果序列和反因果序列两部分，[它们各自由 $X(z)$ 求 $x(0)$ 表达式是不同的]，将它们各自的 $x(0)$ 相加即得所求。

解：当序列满足 $n>0$, $x(n)=0$ 时 ,有:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}$$

$$=x(0)+x(-1)z+x(-2)z^{-2}+\cdots$$

所以此时有: $\lim_{z\to 0}X(z)=x(0)$

若序列 $x(n)$ 的 Z 变换为：

$$X(z)=\frac{\frac{7}{12}-\frac{19}{24}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{\frac{7}{12}z^{2}-\frac{19}{24}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{z}{4（z-2）}+\frac{z}{3（z-\frac{1}{2}）}=X_1(z)+X_2(z)$$

$\therefore$ $X(z)$ 的极点为 $z_1=2$, $z_2=\frac{1}{2}$

由题意可知：X(Z)的收敛域包括单位圆

则其收敛域应该为：$\frac{1}{2}<|z|<2$

则 $x_1(n)$为 $n \le 0$ 时为有值左边序列，

$x_2(n)$ 为因果序列：

$$x_1(0) = \lim_{z \to 0} X_1(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{4(z-2)} = 0$$

$$x_2(0) = \lim_{z \to \infty} X_2(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{3(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x(0) = x_1(0) + x_2(0) = \frac{1}{3}$$

6. 有一信号 $y(n)$,它与另两个信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的

关系是: $y(n) = x_1(n+3) * x_2(-n+1)$

其中 $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ ， $x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

已知 $Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ， $|z| > |a|$

利用z变换性质求 $y(n)$ 的z变换$Y(z)$。

分析：

(1) 注意移位定理：

$x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$

$x(n+m) \leftrightarrow z^m X(z) \quad x(-n+m) \leftrightarrow z^{-m} X(z^{-1})$

(2) $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 则 $Y(z) = X_1(z) X_2(z)$ 。

解：根据题目所给条件可得：

$$x_1(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow x_1(n+3) \xleftrightarrow{Z} \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2(-n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z^{-1}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} \quad |z^{-1}| > \frac{1}{3}$$

$$x_2(-n+1) \xleftrightarrow{Z} \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z} \qquad |z| < 3$$

而 $y(n) = x_1(n+3) * x_2(-n+1)$

所以 $Y(z)=Z[x_1(n+3)]\cdot Z[x_2(-n+1)]$

$$=\frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$=-\frac{3z^3}{(z-3)(z-\frac{1}{2})}$$

7. 求以下序列 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$。

（1） $\delta(n-n_0)$ （2） $e^{-an}u(n)$

（3） $e^{-(\alpha+j\omega_0)n}u(n)$ （4） $e^{-an}u(n)\cos(\omega_0 n)$

分析：

可以先求序列的 Z 变换 $X(z)$ 再求频率

$$X(e^{j\omega})\quad X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

即 $X(e^{j\omega})$ 为单位圆上的 Z 变换，或者直接求序列的

傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$

解：

对题中所给的 $x(n)$ 先进行 z 变换

再求频谱得：

(1) $\because X(z)=Z[x(n)]$

$=Z[\delta(n-n_0)]$

$=z^{-n_0}$

$$\therefore X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$=e^{-jn_0\omega}$$

(2) $\because X(z)=Z[e^{-an}u(n)]$

$$=\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-a}e^{-j\omega}}$$

(3)$\because X(z) = Z\left[e^{-(\alpha+j\omega_0)n}u(n)\right]$

$$= \frac{1}{1-e^{-(\alpha+j\omega_0)}z^{-1}}$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\alpha}\cdot e^{-j(\omega+\omega_0)}}$$

(4)

$\because X(z) = Z\left[e^{-an}u(n)\cos(\omega_0 n)\right]$

$$= \frac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0 + z^{-2}e^{-2a}}$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2e^{-j\omega}e^{-a}\cos\omega_0 + e^{-2j\omega}e^{-2a}}$$

8. 若 $x_1(n), x_2(n)$ 是因果稳定序列，求证：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega = \{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})d\omega\}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(e^{j\omega})d\omega\}$$

分析：

利用时域卷积则频域是相乘的关系来求解

$$x_1(n) * x_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

而 $x_1(n) * x_2(n)\Big|_{n=0} = x_1(0)x_2(0)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega,$$

再利用 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 的傅里叶反变换，代入 $n = 0$ 即可得所需结果。

证明：

设 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 则

$$Y(z) = X_1(z)\cdot X_2(z)$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$=y(n)$$
$$=x_1(n)*x_2(n)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega$$
$$=x_1(n)*x_2(n)|_{n=0}$$
$$=\left[\sum_{k=0}^{n}x_1(k)x_2(n-k)\right]_{n=0}$$
$$=x_1(0)\cdot x_2(0)$$

$$\because x_1(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$x_2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$\therefore\ x_1(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})d\omega$$
$$x_2(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(e^{j\omega})d\omega$$

$$\therefore\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega$$
$$=\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega})d\omega\}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(e^{j\omega})d\omega\}$$

9．求 $x(n)=R_5(n)$ 的傅里叶变换。

分析:

这道题利用傅里叶变换的定义即可求解，但最后结果应化为模和相角的关系。

解：根据傅里叶变换的概念可得：

$$X(e^{j\omega})=DTFT\left[R_N(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}1\cdot e^{-j\omega n}$$
$$=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\cdot\frac{e^{j\frac{N}{2}\omega}-e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}$$
$$=\begin{cases}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\cdot\sin\left(N\omega/2\right)/\sin\left(\omega/2\right), & \omega\neq 2k\pi, k\text{为整数}\\ N, & \omega=2k\pi\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\omega \neq 2k\pi$ 时，

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\sin\left(N\omega/2\right) / \sin\left(\omega/2\right)\right|$$

$$\arg X(e^{j\omega})$$

$$= -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega + \arg\left[\sin\left(N\omega/2\right)/\sin\left(\omega/2\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega + n\pi \ , \quad \frac{2\pi}{\mathrm{N}} n \le \omega < \frac{2\pi}{\mathrm{N}}(n+1)$$

当 $N = 5$ 时，即可得到所需的 $\left|X(e^{j\omega})\right|$ 和 $\arg X(e^{j\omega})$ 。

10\. 设 $X(e^{j\omega})$ 是如下图所示的 $x(n)$ 信号的傅里叶变换，

不必求出 $X(e^{j\omega})$，试完成下列计算：

(a) $X(e^{j0})$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$ (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

分析：

利用序列傅里叶变换的定义、它的导数以及帕塞瓦公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|x(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 \ 。$$

解：

$$(a)\ X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j0\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 6$$

$$(b)\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j0} d\omega$$

$$= 2\pi\, x(0)$$

$$= 4\pi$$

(c) 由帕塞瓦尔公式可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 = 28\pi$$

$$(d) \because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\therefore \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-jn)x(n)e^{-j\omega n}$$

即 $DTFT[(-jn)x(n)] = \dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

由帕塞瓦尔公式可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|(-jn)x(n)|^2$$

$$= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2x^2(n)$$

$$= 2\pi(9+1+0+1+9+64+25+0+49)$$

$$= 316\pi$$

11．已知 $x(n)$ 有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$，用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的傅里叶变换。

(a) $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$ (b) $x_3(n) = \dfrac{x^*(-n)+x(n)}{2}$

(c) $x_2(n) = (n-1)^2x(n)$

分析：

利用序列翻褶后移位关系以及频域的取导数关系式来求解。

$$x(n) \Leftrightarrow X(e^{j\omega}),\ x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$x(m-n) \Leftrightarrow e^{-j\omega m}X(e^{-j\omega})\ ,$$

$$-\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega} = DTFT[nx(n)]$$ 。

解：

(a) $DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega})$

$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$

$DTFT[x(1-n)] = e^{-j\omega}X(e^{-j\omega})$

$DTFT[x(-1-n)] = e^{j\omega}X(e^{-j\omega})$

$$DTFT[x_1(n)] = X(e^{-j\omega} + e^{j\omega}]$$

$$= 2X(e^{-j\omega})\cos\omega$$

$(b)\quad DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$

因而：$DTFT[x_2(n) = \dfrac{X^*(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})}{2}$

$= \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$

(c) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

则 $\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn) x(n) e^{-j\omega n}$

即 $DTFT\left[nx(n)\right] = \dfrac{dX(e^{j\omega})}{(-j)d\omega}$

$= j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

同理 : $DTFT\left[n^2 x(n)\right]$

$= j \cdot \dfrac{d}{d\omega}(\dfrac{jdX(e^{j\omega})}{d\omega})$

$= -\dfrac{d^2 X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$

而 $x_3(n) = n^2 x(n) - 2nx(n) + x(n)$

所以

$DTFT\left[x_3(n)\right]$

$= DTFT\left[n^2 x(n)\right] - 2DTFT\left[nx(n)\right]$
$\quad + DTFT\left[x(n)\right]$

$= -\dfrac{d^2 X(e^{j\omega})}{d\omega^2} - 2j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} + X(e^{j\omega})$

12. 已知用下列差分方程描述的一个线性移不变因果系统

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(a) 求这个系统的系统函数，画出其零极点图并指出其收敛区域;
(b) 求此系统的单位抽样响应;
(c) 此系统是一个不稳定系统，请找一个满足上述差分方程的稳定的（非因果）系统的单位抽样响应。

分析：

$x(n) \leftrightarrow X(z)$, $h(n) \leftrightarrow H(z)$, y(n) $\leftrightarrow$ Y(z)

则　$H(z)=Y(z)/X(z)=Z[h(n)]$，

要求收敛域必须知道零点、极点 。收敛域为 Z 平面某个圆以外，则为因果系统（不一定稳定），收敛域若包括单位圆，则为稳定系统（不一定因果）。

(a)　对题中给出的差分方程的两边作 Z 变换，得：

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z)$$

所以 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{z}{(z-a_1)(z-a_2)}$

零点为 z=0，极点为 $z=a_1=0.5\left(1+\sqrt{5}\right)=1.62$

$z=\infty$　　　　$z=a_2=0.5\left(1-\sqrt{5}\right)=-0.62$

因为是因果系统，所以|z|>1.62 是其收敛区域。
零极点图如右图所示。

右边是本题的零极点图。

（b）因为　$H(z)=\dfrac{z}{(z-a_1)(z-a_2)}=\dfrac{1}{a_1-a_2}\left[\dfrac{z}{z-a_1}-\dfrac{z}{z-a_2}\right]$

$$=\frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{1-a_1z^{-1}}-\frac{1}{1-a_2z^{-1}}\right]$$
$$=\frac{1}{a_1-a_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_1{}^nz^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_2{}^nz^{-n}\right]$$

所以　$h(n)=\dfrac{1}{a_1-a_2}\left(a_1{}^n-a_2{}^n\right)u(n)$

式中　$a_1=1.62$，$a_2=-0.62$

由于 $H(z)$ 的收敛区域不包括单位圆，故这是个不稳定系统。

(c)　若要使系统稳定，则收敛区域应包括单位圆,因此选 $H(z)$ 的收敛区域为　$|a_2|<|z|<a_1$，即　$0.62<|z|<1.62$，则

$$H(z)=\frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{z}{z-a_1}-\frac{z}{z-a_2}\right]$$

中第一项对应一个非因果序列，而第二项对应一个因果序列。

所以　$H(z)=\dfrac{1}{a_1-a_2}\left[-\sum_{n=-\infty}^{-1}a_1{}^nz^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_2{}^nz^{-n}\right]$

则有 $h(n)=\frac{1}{a_2-a_1}\left(a_1{}^n\ u(-n-1)+a_2{}^n\ u(n)\right)$

$$=-0.447\times\left[(1.62)^n\ u(-n-1)+(-0.62)^n\ u(n)\right]$$

从结果可以看出此系统是稳定的，但不是因果的。

13. 研究一个输入为 $x(n)$ 和输出为 $y(n)$ 的时域线性离散移不变系统，已知它满足 $y(n-1)-\frac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n)$

并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。

分析：

在 Z 变换域中求出 $H(z)=Y(z)/X(z)$，

然后和题 12（c）一样分解成部分分式分别

求 Z 反变换。

解：

对给定的差分方程两边作 Z 变换，得：

$$z^{-1}Y(z)-\frac{10}{3}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

则：$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

$$=\frac{1}{z^{-1}-\frac{10}{3}+z}$$

$$=\frac{z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

极点为 $z_1=3, z_2=\frac{1}{3}$，

为了使它是稳定的，收敛区域必须包括

单位圆，故取 $1/3<|z|<3$。

利用第十二题(c)的结果，$a_1=3, a_2=1/3$

即可求得

$$h(n)=-\frac{3}{8}\left[3^n u(-n-1)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right]$$

14.研究一个满足下列差分方程的线性移不变系统，该系统不限定为因果、稳定系统。利用方程的零极点图，试求系统单位抽样响应的三种可能选择方案。

$$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

解 :

对题中给定的差分方程的两边

作 Z 变 换，得：

$$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

因此 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$$=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}$$

$$=\frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

其零点为 $z=0$

极点为 $z_1=2$ ， $z_2=\frac{1}{2}$

因为该系统不限定为因果，稳定系统,所以其收敛域情况有三种，分别如左图所示。

收敛域情况有：

零极点图一： $|z|>2$

零极点图二： $\frac{1}{2}<|z|<2$

零极点图三： $|z|<\frac{1}{2}$

注：如果想要参看具体题解，请先选择方案，然后单击 解答 按键即可。

(1)按 12 题结果(此处 z1=2, z2=1/2),

可知当收敛区域为$|z|>2$,则系统是非稳定的，但是因果的。其单位抽样响应为：

$$h(n)=\frac{1}{z_1-z_2}(z_1{}^n-z_2{}^n)u(n)$$

$$=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(n)$$

(2) 同样按 12 题，当收敛区域为

$$\frac{1}{2}<|z|<2$$
，

则系统是稳定的但是非因果的。

其单位抽样响应为：

$$h(n)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[z_1{}^n u(-n-1)+z_2{}^n u(n)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\left[2^n u(-n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]$$

$(|z_2|<|z|<|z_1|)$

(其中 $z_1=2$ $z_2=\frac{1}{2}$)

(3)

类似，当收敛区域为$|z|<\frac{1}{2}$时，

则统是非稳定的，又是非因果的。

其单位抽样响应为：

$$h(n)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[z_1{}^n u(-n-1)-z_2{}^n u(-n-1)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(-n-1)$$

(其中 $z_1=2$, $z_2=\frac{1}{2}$)

15. 有一个用以下差分方程表示的线性移不变因果系统

$$y(n)-2ry(n-1)\cos\theta+r^2y(n-2)=x(n)$$

当激励 $x(n)=a^n u(n)$ 时,求系统的响应。请用 z 变换来求解。

分析：

两种解法：

①直接由 Z 变换 Y（z）的关系可得到 y（n），

②由 Y（z）用留数法可求得 y（n）。

解法一:

已知 $x(n)=a^n u(n)$,

则 $y(n)-2ry(n-1)\cos\theta+r^2y(n-2)$

$=a^n u(n)$

将上式进行 Z 变换，得：

$$Y(z)-2rz^{-1}Y(z)\cos\theta+r^2z^{-2}Y(z)$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

因此

$Y(z)=$

$$\frac{1}{(1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2})(1-az^{-1})}$$

$$=\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})(1-az^{-1})}$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(re^{j\theta})^m z^{-m}\right]\cdot\left[\sum_{l=0}^{\infty}(re^{-j\theta})^l z^{-l}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}r^{m+l}$$

$$e^{j(m-l)\theta}a^k z^{-(l+m+k)}$$

令 $n=m+l+k$，

则 $Y(z)=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}r^{n-k}e^{j(n-2l-k)\theta}a^k z^{-n}$$

所以 $y(n)=$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}r^{n-k}e^{j(n-2l-k)\theta}a^k$$

解法二：

差分方程进行 Z 变换后得:

$$H(z)=\frac{1}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$$

$$=\frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

其中 $z_1=re^{j\theta}=r(\cos\theta+j\sin\theta)$

$$z_2=re^{-j\theta}=r(\cos\theta-j\sin\theta)$$

故 $Y(z)=H(z)X(z)$

$$=\frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)(z-a)}$$

其收敛区域为 $|z|>\max\left[r,|a|\right]$。因为是因果系统，且当 $n<0$ 时 $x(n)$ 等于零，所以 $y(n)=0, n<0$ 当 $n>0$ 时，采用围线积分法，其中围线 C 包围 z_1, z_2, a 三个极点，所以

$$y(n)=\sum_{p=1}^{3}\left[Y(z)z^{n-1},z=z_p\right]\ =\frac{(z_2-a)z_1{}^{n+2}-(z_1-a)z_2{}^{n+2}+(z_1-z_2)a^{n+2}}{(z_1-z_2)(z_1-a)(z_2-a)}u(n)$$

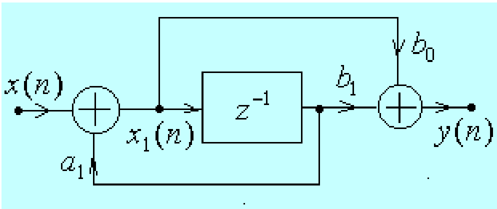
将$z_1=re^{j\theta},z_2=re^{-j\theta}$代入上式，即可得到

$y(n)$

16. 下图是一个因果稳定系统的结构，试列出系统差分方程，

求系统函数。当 $b_0=0.5$， $b_1=1$， $a_1=0.5$时，求系统单

位冲激响应，画出系统零极点图和频率响应曲线。



分析：

解法一：利用此系统是一阶系统写出差分方程，令其二阶项系统为零，可得一阶差分方程，取 Z 变换求得 H（z）从而求得 h（n）。

解法二：将系统用流图表示，改变流图中两个一阶节的级联次序（线性系统服从交换定理），然后写出差分方程，再取 Z 变换求得 H（z）从而求得 h（n）。

解法一:由图示可得

$$x_1(n)=x(n)+a_1x_1(n-1)$$

$$y(n)=b_0x_1(n)+b_1x_1(n-1)$$

则 $y(n)+ky(n-1)$

$=b_0x_1(n)+b_1x_1(n-1)+kb_0x_1(n-1)+kb_1x_1(n-2)$

$=b_0x(n)+(a_1b_0+b_1+kb_0)x_1(n-1)+kb_1x_1(n-2)$

$=b_0x(n)+(a_1b_0+b_1+kb_0)x(n-1)$

$\quad+a_1(a_1b_0+b_1+kb_0)x_1(n-2)+kb_1x_1(n-2)$

由方框图可看出：差分方程应该是一阶的

所以 $a_1{}^2b_0+a_1b_1+ka_1b_0+kb_1=0\Rightarrow k=-a_1$

则有

$$y(n)-a_1y(n-1)=b_0x(n)+(a_1b_0+b_1-a_1b_0)x(n-1)$$

$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

即 $Y(z)(1-a_1z^{-1})=(b_0+b_1z^{-1})X(z)$

所以 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}$

当 $b_0=0.5, b_1=1, a_1=0.5$ 时：

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}=\frac{0.5+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

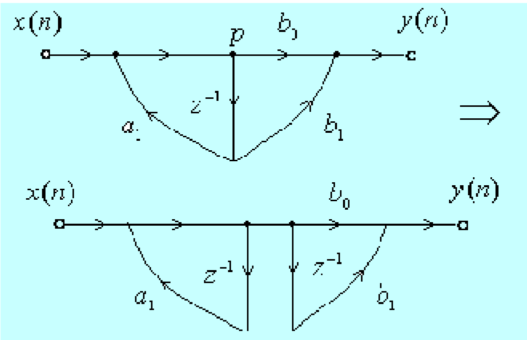
$$=\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

因为此系统是一个因果稳定系统 ；所以其收敛

域为 $|z|>0.5$

$$\Rightarrow h(n)=0.5\cdot(0.5)^n u(n)+(0.5)^{n-1}u(n-1)$$

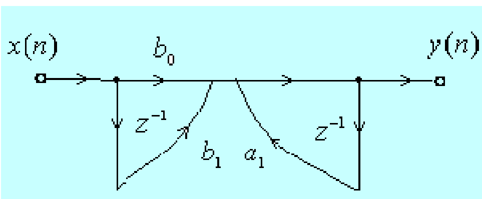
解法二： 将图 P2-11 画成流图结构，并化简如下：



由于线性流图的级联结构可以改变级联次序，因而上图又可化成：

由这个流图即可很方便地写出其线性差分方程：

$$y(n)=a_1y(n-1)+b_0x(n)+b_1x(n-1)$$



取 z 变换可得：

$Y(z)(1-a_1z^{-1})=(b_0+b_1z^{-1})X(z)$

所以

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}$$

将 $b_0=0.5, b_1=1, a_1=0.5$ 代入，可得：

$$H(z)=\frac{0.5+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{1+0.5z}{z-0.5}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1+0.5z}{z(z-0.5)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-0.5}\ ,$$

其中 $A=-2$, $B=2.5$

因而 $H(z)=-2+\dfrac{2.5z}{z-0.5}\quad ,|z|>0.5$

(由于系统是因果稳定的)

所以 $h(n)=-2\delta(n)+2.5\times(0.5)^n u(n)$

17．设 $x(n)$ 是一离散时间信号，其 z 变换为 $X(z)$，对下列信号利用 $X(z)$ 求它们的 z 变换：

(a) $x_1(n)=\Delta x(n)$，这里△记作一次差分算子，定义为：

$$\Delta x(n)=x(n)-x(n-1)$$

(b) $x_2(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2}), & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$

(c) $x_3(n)=x(2n)$

分析：

$x_2(n)$ 式序列的抽取序列，$x_3(n)$ 是内插零值序列（不是内插序列），解题的关键是要进行变量变换，以得到与 $x(n)$ 的 Z 变换相似的表达式。

解：

(a) $Z[\Delta x(n)]=Z[x(n)]-Z[x(n-1)]\qquad =X(z)-z^{-1}X(z)=(1-z^{-1})X(z)$

(b) $Z[x_2(n)] = \sum_{n=even} x\left(\frac{n}{2}\right) z^{-n}$,

令 $m = \frac{n}{2}$ 则

上式 $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-2m} = X(z^2)$

(c) 令 $m = 2n$ 则 $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) z^{-n} = \sum_{m=even} x(m) z^{-\frac{m}{2}}$ 由此可设

$x(m) = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^m\right] x(m)$ 　　　则：$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^m\right] x(m) \cdot z^{-\frac{m}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot \left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-m} = \frac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})\right]$

第三章 离散傅立叶变换

1. 如下图，序列 x(n)是周期为 6 的周期性序列，试求其傅立叶级数的系数。

$$解:\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

$$=14+12e^{-j\frac{2\pi}{6}k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}+6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

计算求得:

$\tilde{X}(0)=60$ ； $\tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3}$ ； $\tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$；

$\tilde{X}(3)=0$ ； $\tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3}$ ； $\tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$。

2. 设$x(n)=R_4(n)$, $\tilde{x}(n)=x((n))_6$.

试求$\tilde{X}(k)$并作图表示$\tilde{x}(n),\tilde{X}(k)$。

$$解:\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

$$=1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\pi k}$$

计算求得：$\tilde{X}(0)=4$ ； $\tilde{X}(1)=-j\sqrt{3}$； $\tilde{X}(2)=1$ ；

$\tilde{X}(3)=0$ ； $\tilde{X}(4)=1$ ； $\tilde{X}(5)=j\sqrt{3}$。

3. 设$x(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 4\\ 0, & 其它n\end{cases}$，$h(n)=R_4(n-2)$，

令 $\tilde{x}(n)=x((n))_6$， $\tilde{h}(n)=h((n))_4$,

试求$\tilde{x}(n)$与$\tilde{h}(n)$ 的周期卷积并作图。

解：在一个周期内的计算值

n \ $\tilde{h}(n-m)$ \ $\tilde{x}(m)$	1	2	3	4	5	0	$\tilde{y}(n)$
0	0	1	1	1	1	0	14
1	0	0	1	1	1	1	12
2	1	0	0	1	1	1	10
3	1	1	0	0	1	1	8
4	1	1	1	0	0	1	6
5	1	1	1	1	0	0	10

4. 已知$x(n)$如图$P3-1$所示,试画出

$x((-n))_5$, $x((-n))_6 R_6(n)$, $x((n))_3 R_3(n)$

$x((n))_6$, $x((n-3))_5 R_5(n)$, $x((n))_7 R_7(n)$

等各序列。

解: $x(n) = a(\cos\omega_0 n)R_N(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(\cos\omega_0 n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k)$$

$$= \tfrac{1}{2}a[\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n})e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}]R_N(k)$$

$$= \tfrac{1}{2}a[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)n} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N}-\omega_0)n}]R_N(k)$$

$$= \tfrac{1}{2}a[\frac{1-e^{-j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}} + \frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}}]R_N(k)$$

$$= \frac{1}{2}a[\frac{e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}}(e^{j\frac{\varpi_0 N}{2}} - e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\varpi_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\varpi_0)} - e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\varpi_0)})} + \frac{e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}}(e^{j\frac{\varpi_0 N}{2}} - e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\varpi_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\varpi_0)} - e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\varpi_0)})}]$$

$$= \frac{1}{2}a[\frac{e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}} \cdot \sin(\frac{\varpi_0 N}{2})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\varpi_0)} \sin(\frac{\pi}{N}k + \frac{1}{2}\varpi_0)} + \frac{e^{-j\frac{\varpi_0 N}{2}} \sin(\frac{\varpi_0 N}{2})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\varpi_0)} \sin(\frac{\pi}{N}k - \frac{1}{2}\varpi_0)}]$$

5 试求以下有限长序列的N点DFT(闭合形式表达式)

(1) $x(n) = a(\cos\omega_0 n)R_N(n)$

(2) $x(n) = a^n R_N(n)$

(3) $x(n) = \delta(\mathrm{n}-\mathrm{n}_0)$, $0 < \mathrm{n}_0 < \mathrm{N}$

(4) $\mathrm{x(n)} = nR_N(n)$

(5) $x(n) = n^2 R_N(n)$

解:(1) $x(n)=a(\cos\omega_0 n)R_N(n)$

$$X(k)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}a(\cos\omega_0 n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega_0 n}+e^{j\omega_0 n})e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)n}+\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\frac{2\pi}{N}-\omega_0)n}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{1-e^{-j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}}+\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}}(e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}-e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}-e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)})}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}(e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}-e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}-e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)})}\right]$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}}\cdot\sin(\frac{\omega_0 N}{2})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}\sin(\frac{\pi}{N}k+\frac{1}{2}\omega_0)}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}\sin(\frac{\omega_0 N}{2})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}\sin(\frac{\pi}{N}k-\frac{1}{2}\omega_0)}\right]$$

(2) $x(n)=a^n R_N(n)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

(3) $x(n)=\delta(n-n_0)$, $0<n_0<N$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n-n_0)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$
$$=e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}R_N(k)$$

（4）$x(n)=nR_N(n)$

$$\therefore\quad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}R_N(k)$$

$$W_N^kX(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{(n+1)k}R_N(k)$$

$$X(k)(1-W_N^k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}-\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{(n+1)k}$$

$$=(W_N^k+2W_N^{2k}+3W_N^{3k}+\cdots+$$
$$(N-1)W_N^{(N-1)k}-[W_N^{2k}+2W_N^{3k}+\cdots+$$
$$(N-2)W_N^{(N-1)k}+N-1])R_N(k)$$

$$=(-(N-1)+\sum_{n=1}^{N-1}W_N^{nk})R_N(k)$$

$$=-(N-1)+\frac{W_N^k-1}{1-W_N^k}=-N$$

$$\therefore\quad X(k)=\frac{-N}{1-W_N^k}R_N(k)$$

（5）$x(n)=n^2R_N(n)$ $\therefore X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}n^2W_N^{nk}$

根据第 (4) 小题的结论

$x_1(n)=nR_N(n)$，则 $X_1(k)=\dfrac{-N}{1-W_N^k}$

$$W_N^k X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{(n+1)k}$$

$$X(k)(1-W_N^k)=\sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{nk} - \sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{(n+1)k}$$

$$=W_N^k+4W_N^{2k}+9W_N^{3k}+\cdots+$$

$$(N-1)^2 W_N^{(N-1)k}-[W_N^{2k}+4W_N^{3k}$$

$$+\cdots+(N-2)^2 W_N^{(N-1)k}+(N-1)^2]$$

$$=-(N-1)^2+\sum_{n=1}^{N-1}(2n-1)W_N^{nk}$$

$$=-N(N-2)+2\sum_{n=1}^{N-1} nW_N^{nk}$$

$$=-N(N-2)+2X_1(k)$$

$$=-N(N-2)-\frac{2N}{1-W_N^k}$$

$$\therefore X(k)=\frac{N(N-2)W_N^k-N^2}{(1-W_N^k)^2}$$

6. 如图画出了几个周期序列$\tilde{x}(n)$.这些序列可以表示成

傅里叶级数 $\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)nk}$;问:

(1) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $X(k)$成为实数?

(2) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $X(k)$ [除 $X(0)$ 外] 成虚数?

(3) 哪些序列列能做到 $\tilde{x}(k)=0,\qquad k=\pm2,\pm4,\pm6,\cdots$

解:(1)要使$\tilde{X}(k)$为实数,即要求:

$\tilde{X}^*(k)=\tilde{X}(k)$

根据DFT的性质可知:$\tilde{x}(n)$在其

一个周期内 应满足实部偶对称,

虚部奇对称 (关于$n=0$为轴),又

由图知:$\tilde{x}(n)$为实序列,虚部为零,

故$x(n)$应满足偶对称:

$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(-n)$,

即$\tilde{x}(n)$以$n=0$为对称轴偶对称,

故第二个序列满足这个 条件。

(2) 要使$\tilde{X}(k)$为虚数,即要求:

$$\tilde{X}^*(k) = -\tilde{X}(k)$$

根据DFT的性质可知:$\tilde{x}(n)$在其
一个周期内应满足:实部奇对称,
虚部偶对称(关于$n=0$为轴)。
又已知　$\tilde{x}(n)$为实序列
故　$\tilde{x}(n) = -\tilde{x}(-n)$
即在一个周期内,$\tilde{x}(n)$在一圆周上
以$n=0$为对称轴奇对称
故这三个序列都不满足这个条件。

(3) 由于是8点周期序列
对于第一个序列:

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当$k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$时,$\tilde{X}_1(k) = 0$

对于第二个序列:

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{2} e^{-j\frac{\pi}{4}nk} = \frac{1-e^{-j\frac{3}{4}\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当$k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$时,$\tilde{X}_1(k) \neq 0$

对于第三个序列:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) - \tilde{x}_1(n+4)$$

根据序列移位性质可知:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) - e^{j\pi k}\tilde{X}_1(k)$$

$$= (1-e^{j\pi k})\frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当$k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$时,$\tilde{X}_3(k) = 0$
$\therefore$ 第一,第三个序列满足
$\tilde{X}\ (k) = 0\ ,k = \pm 2, \pm 4, \ldots$

7 在下图中画出了两个有限长序列,试画出它们的六点圆周卷积。

$$y(n)=\left[\sum_{m=0}^{5}x_1(m)x_2((n-m))_6\right]R_6(n)$$

8. 如图表示一个 5 点序列 $x(n)$;

(1) 试画出 $y_1(n)=x(n)*x(n)$;

(2) 试画出 $y_2(n)=x(n)$⑤ $x(n)$; (3) 试画出 $y_3(n)=x(n)$ ⑩ $x(n)$。

9. 设有两序列 $x(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le 5\\ 0, & 其他\ n\end{cases}$

$$y(n)=\begin{cases}y(n), & 0\le n\le 14\\ 0, & 其他\ n\end{cases}$$

各作15点的 DFT,然后将两个 DFT 相乘,再求乘积的$IDFT$,设所得结果为 $f(n)$,问$f(n)$的哪些点对应于$x(n)*y(n)$应该得到的点。

解:序列$x(n)$的点数为$N_1=6$, $y(n)$的点数为$N_2=15$

故 $x(n)*y(n)$的点数应为:$N=N_1+N_2-1=20$

又 $f(n)$为$x(n)$与$y(n)$的15点的圆周卷积,即$L=15$

所以,混叠点数为$N-L=20-15=5$。用线性卷积结果以15为周期而延拓形成圆周卷积序列$f(n)$时,一个周期内在$n=0$到$n=4\ (=N-L-1)$这5点处发生混叠,即 $f(n)$中只有$n=5$到$n=14$的点对应于$x(n)*y(n)$应该得到的点。

10. 已知两个有限长序列为

$$x(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 3\\ 0\ , & 4\le n\le 6\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}-1, & 0\le n\le 4\\ 1\ , & 5\le n\le 6\end{cases}$$

试用作图表示 $x(n)$, $y(n)$以及 $f(n)=x(n)$⑦$y(n)$。

11. 已知$x(n)$是 N 点有限长序列, $X(k)=DFT[x(n)]$。现将长度变成 rN 点的有限长序列 $y(n)$

$$y(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & N\le n\le rN-1\end{cases}$$

试求 $DFT[y(n)]$(rN 点DFT)与 $X(k)$的关系。

解：$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad 0\le k\le N-1$

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)\,W_{rN}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,W_{rN}^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n\frac{k}{r}}=X(\frac{k}{r}) \qquad k=lr(l=0,1,\ldots N-1)$$

$\therefore$ 在一个周期内,$Y(k)$的抽样点数是$X(k)$的r倍($Y(k)$的周期为Nr),相当于在$X(k)$的每两个值之间插入$(r-1)$个其他的数值(不一定为零），而当k为r的整数l倍时,$Y(k)$与$X(\frac{k}{r})$相等。

12 已知$x(n)$是长为N点的有限长序列,$X(k)=DFT[x(n)]$现将$x(n)$的每两点之间补进$r-1$个零值点,得到一个长为rN点的有限长度序列$y(n)$，$y(n)=\begin{cases}x(n/r), & n=ir,\quad 0\le i<N\\ 0, & 其他\ n\end{cases}$

试求rN点$DFT[y(n)]$与$X(k)$的关系。

解：$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \quad , \qquad 0\le k\le N-1$

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{nk}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}x(ir/r)W_{rN}^{irk}=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik} \quad , \qquad 0\le k\le rN-1$$

$\therefore Y(k)=X((k))_N\,R_{rN}(k)$

$\therefore Y(k)$是将$X(k)$(周期为N)延拓r次形成的，

即$Y(k)$周期为rN。

13. 频谱分析的模拟信号以$8kHz$被抽样,计算了512个抽样的DFT,

试确定频谱抽样之间的频率间隔,并证明你的回答。

证明: $\because f_s = \dfrac{\Omega_s}{2\pi} \qquad F_0 = \dfrac{\Omega_0}{2\pi}$

$$\therefore \frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0}$$

其中Ω_s是以角频率为变量的频谱的周期,

Ω_0是频谱抽样之间的频谱间隔。

$$\therefore \frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N$$

$$\therefore F_0 = \frac{f_s}{N}$$

对于本题: $f_s = 8KHz \qquad N = 512$

$$\therefore F_0 = \frac{8000}{512} = 15.625Hz$$

14. 设有一谱分析用的信号处理器,抽样点数必须为 2 的整数幂,
假定没有采用任何殊数据处理措施,要求频率分辨力$\leq 10Hz$,
如果采用的抽样时间间隔为 $0.1ms$,试确定

(1) 最小记录长度; (2) 所允许处理的信号的最高频率;

(3) 在一个记录中的最少点数。

解:(1) $\because T_P = \dfrac{1}{F}$ 而$F \leq 10Hz$ $\therefore T_P \geq \dfrac{1}{10}s$

$\therefore$ 最小纪录长度为 $0.1s$

(2) $f_s = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.1} \times 10^3 = 10KHz$

$\because f_s > 2f_h \qquad \therefore f_h < \dfrac{1}{2} f_s = 5KHz$

$\therefore$ 允许处理的信号的最高频率为$5KHz$

(3) $N \geq \dfrac{T_P}{T} = \dfrac{0.1}{0.1} \times 10^3 = 1000$, 又因N必须为2的整数幂

$\therefore$ 一个纪录中的最少点数为: $N = 2^{10} = 1024$

15.序列 $x(n)$ 的共轭对称和共轭反对 称分量为：

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)] \qquad x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ $(0\le n\le N-1)$ 的圆周共轭对称和圆周共轭反对称 分量定义如下：

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((-n))_N]R_N(n)$$

(a) 证明：

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=[x_o(n)+x_o(n-N)]R_N(n)$$

(b) 把 $x(n)$ 看作长度为N的序列，一般来说，不能从 $x_{ep}(n)$ 恢复$x_e(n)$，也不能从$x_{op}(n)$恢复 $x_o(n)$，试证明若把$x(n)$ 看作长度为N的序列(N 为偶数) 且 $n\ge N/2$ 时 $x=0$，则可从 $x_{ep}(n)$恢复 $x_e(n)$，从 $x_{op}(n)$恢复 $x_o(n)$。

解: (a)

方法一：

证明：由于 $x(n)$ 只在 $0\le n\le N-1$

的范围内有值，则有：

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}x^*(N-n)$$

$n=0$ 时，$x^*(N-n)=x^*(0)$

$(1) < n \le N-1$ 时，

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]=\frac{1}{2}x(n)$$

$$x_e(n-N)=\frac{1}{2}\left[x(n-N)+x^*(N-n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^*(N-n)$$

$$\therefore x_{ep}(n)=\left[x_e(n)+x_e(n-N)\right]R_N(n)$$

方法二证明

(α)：

1) $x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$

$$x_e(n)R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(0)\delta(n)]\ldots(1)$$

$$x_e(n-N)R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x(n-N)+x^*(N-n)]\,R_N(n)$$

因为：$x(n-N)R_N(n)=0$

所以：

$$x_e(n-N)R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x^*(N-n)-x^*(0)\delta(n-N)]$$

$$\ldots\ldots(2)$$

(1)+(2) 得：

$$[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)+x^*(0)\delta(n)$$

$$-x^*(0)\delta(n-N)] \quad \ldots\ldots(3)$$

2) 由于：

$$x_e((n))_N=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]$$

$$x((n))_N R_N(n)=x(n)\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$x^*((-n))_N R_N(n)$$

$$=x^*(N-n)+x^*(0)\delta(n)$$

$$-x^*(0)\delta(n-N)\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(4)+(5)得：

$$x_{ep}(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)+x^*(0)\delta(n)$$

$$-x^*(0)\delta(n-N)]\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

(3)与(6)比较可知：

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

同理可证：

$$x_{op}(n)=[x_o(n)+x_o(n-N)]R_N(n)$$

(b) 利用（a）的结果:

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

$$x_e(n-N)=\frac{1}{2}[x(n-N)+x*(-n+N)]$$

(1) 按照题意，

当 $0\le n<N/2$ 时，$x(n)\neq 0$,

此时 $-N\le n-N<-N/2$

$N/2<-n+N\le N$

所以当 $0\le n<N/2$ 时，

$x(n-N)=0$ ，$x^*(-n+N)=0$,

故 $x_e(n-N)=0$

所以:当 $0\le n<N/2$ 时，$x_{ep}(n)=x_e(n)$

(2) 当 $-N/2<n\le -1$ 时，按共轭对称有：

$$x_e^*(-n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]=x_e(n)$$

且由 (a) 的结论知:

$$x_{ep}^*(-n)=\left[x_e^*(-n)+x_e^*(-n-N)\right]R_N(-n)$$

当 $-N/2<n\le -1$ 时，

$$x_e^*(-n-N)R_N(-n)=0$$

所以 $x_{ep}^*(-n)=x_e^*(-n)R_N(-n)$

$=x_e(n)$）$R_N(-n)$

综上(1)、(2)可得

$$xe(n)=\begin{cases} x_{ep}(n) \quad , & 0\le n<\dfrac{N}{2} \\ x^{*}{}_{ep}(-n)\ , & -\dfrac{N}{2}\le n\le -1 \end{cases}$$

同理可证

$$x_o(n)=\begin{cases} x_{op}(n) \quad , & 0\le n<\dfrac{N}{2} \\ x^{*}{}_{op}(n) \quad , & -\dfrac{N}{2}\le n\le -1 \end{cases}$$

16. 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换

 (a) 证明：如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n)=-x(N-1-n)$ ，

 则 $X(0)=0$ ；

 (b) 证明：当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n)$ ，

 则 $X(\frac{N}{2})=0$ 。

证明：

(a) 如果 $X(k)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$， $0\le k\le N-1$

当 $x(n)=-x(N-1-n)$ 时

$$\begin{aligned} X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}[-x(N-1-n)R_N(n)\,W_N^{nk} \\ &=-\sum_{n=0}^{N-1}[x((N-1-n))_N R_N(n)\,W_N^{-k(N-1-n)}\ W_N^{k(N-1)}\ ] \\ &=-\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,W_N^{-nk}\ W_N^{k(N-1)} \end{aligned}$$

$\therefore\ X(k)=-X((-k))_N R_N(k)\,W_N^{k(N-1)}$

$\therefore$ 当 $k=0$ 时 $\quad X(0)=-X(-0)=-X(0)$

$\therefore\quad X(0)=0$

(b) 仿照 (a) 当 $x(n)=x(N-1-n)$ 时，可得：

$$\begin{aligned} X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}[x((N-1-n))_N R_N(n)W_N^{nk}\,] \\ &=X((-k))_N R_N(k)W_N^{k(N-1)} \end{aligned}$$

当 $n=\dfrac{N}{2}$ (N 为偶数) 时，

$$X(\tfrac{N}{2})=X((-\tfrac{N}{2}))_N R_N(\tfrac{N}{2})e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(N-1)}$$

由 N 为偶数，则有 $e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(N-1)}=e^{-j\pi(N-1)}=-1$

所以 $X(\tfrac{N}{2})=-X(-\tfrac{N}{2})=-X(N-\tfrac{N}{2})=-X(\tfrac{N}{2})$

所以 $X(\tfrac{N}{2})=0$

第四章　快速傅立叶变换

1. 如果一台通用计算机的　速度为平均每次复乘需　50μs 每次复加 5μs，用它来计算 512点的DFT[x(n)]，问直拉计算需要多少时间，用　FFT运算需要多少时间。

解:　解:⑴ 直接计算:

复乘所需时间:

$$T_1 = 5\times10^{-6}\times N^2$$
$$= 5\times\times10^{-6}512^2$$
$$= 1.31072s$$

复加所需时间:

⑵用 FFT 计算:

复乘所需时间:

$$T_1 = 5\times10^{-6}\times\tfrac{N}{2}\log_2 N$$
$$= 5\times10^{-6}\times\tfrac{512}{2}\times\log_2 512$$
$$= 0.01152s$$

$$T_2 = 0.5\times10^{-6}\times N\times(N-1)$$
$$= 0.5\times10^{-6}\times512\times(512-1)$$
$$= 0.130816s$$
$$\therefore T = T_1 + T_2 = 1.441536s$$

$$T_2 = 0.5\times10^{-6}\times N\times\log_2 N$$
$$= 0.5\times10^{-6}\times512\times\log_2 512$$
$$= 0.002304s$$
$$\therefore T = T_1 + T_2 = 0.013824s$$

复加所需时间:

2. 已知$X(k), Y(k)$是两个N点实序列$x(n), y(n)$的DFT值,今需要从$X(k), Y(k)$求$x(n), y(n)$值,为了提高运算效率,试用一个N点$IFFT$运算一次完成。

解：依据题意 ：

$x(n) \Leftrightarrow X(k);\ \ y(n) \Leftrightarrow Y(k)$

取序列 $Z(k) = X(k) + jY(k)$

对$Z(k)$作N点$IFFT$可得序列 $z(n)$.

又根据 DFT性质：

$IDFT[X(k) + jY(k)]$

$= IDFT[(X(k)] + jIDFT[Y(k)]$

$= x(n) + jy(n)$

由原题可知： $x(n)$， $y(n)$

都是实序列，

再根据 $z(n) = x(n) + jy(n)$

可得： $x(n) = \mathrm{Re}[z(n)]$

$y(n) = \mathrm{Im}[z(n)]$

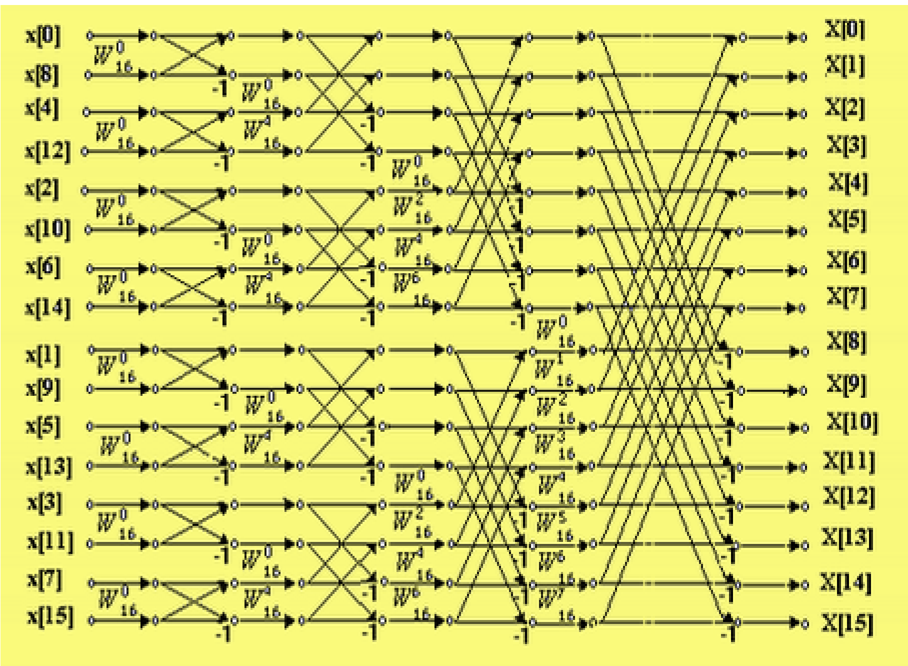
综上所述，构造序列

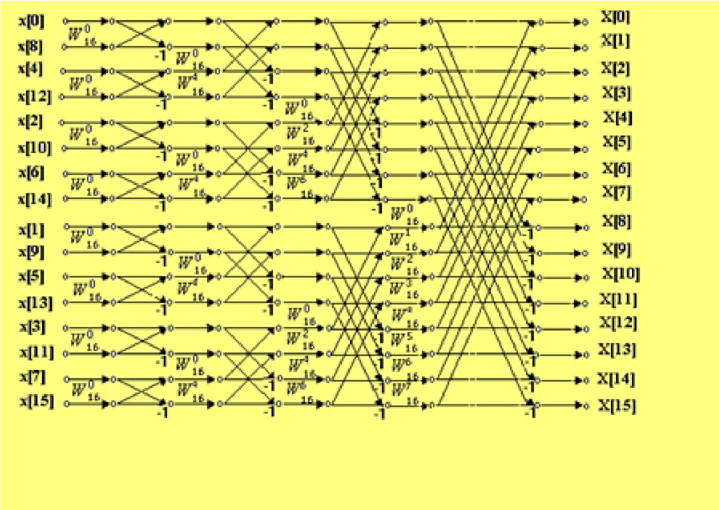
$Z(k) = X(k) + jY(k)$ 可用一次

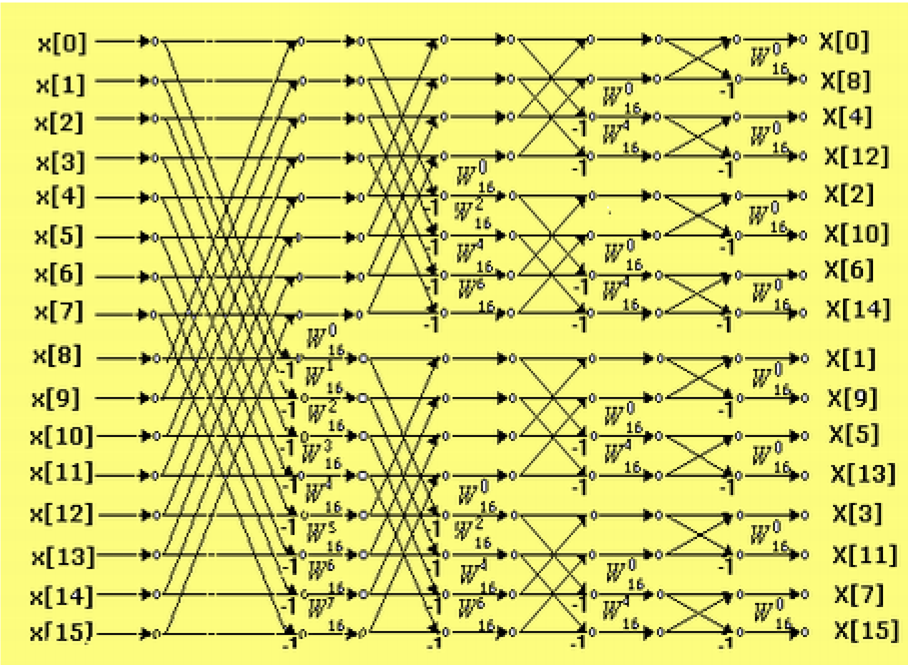
N点$IFFT$完成计算 $x(n)$， $y(n)$

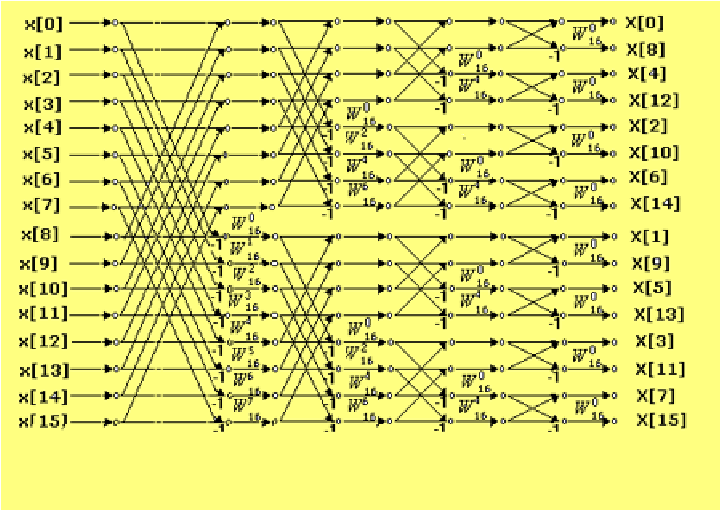
值的过程。

3．$N = 16$时，画出基-2按时间抽取法及按频率 抽取法的 FFT 流图(时间抽取采用输入倒位 序，输出自然数顺序，频率抽取采用输入自然 顺序，输出倒位序)。




x[0]
x[8]
x[4]
x[12]
x[2]
x[10]
x[6]
x[14]
x[1]
x[9]
x[5]
x[13]
x[3]
x[11]
x[7]
x[15]
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]
X[8]
X[9]
X[10]
X[11]
X[12]
X[13]
X[14]
X[15]


x[0]
x[1]
x[2]
x[3]
x[4]
x[5]
x[6]
x[7]
x[8]
x[9]
x[10]
x[11]
x[12]
x[13]
x[14]
x[15]
X[0]
X[8]
X[4]
X[12]
X[2]
X[10]
X[6]
X[14]
X[1]
X[9]
X[5]
X[13]
X[3]
X[11]
X[7]
X[15]



4. $N=16$时，导出 基-4 FFT公式并画出流图，并就运算量与基-2的FFT相比较(不计乘$\pm j$及乘$\pm j$的运算量)。

解：依题意：$N=4\times 4=r_1 r_2$

$\therefore$ 对于$n<N$，有$n=n_1 r_2+n_0$；

$$\begin{cases} n_1=0,1,2,3 \\ n_0=0,1,2,3 \end{cases}$$

同样令$N=r_2 r_1$，对于频率变量k

$(k<N)$有

$$k=k_1 r_1+k_0,\quad \begin{cases} k_1=0,1,2,3 \\ k_0=0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\therefore x(n)=x(n_1 r_2+n_0)=x(4n_1+n_0)$$

$$=x(n_1,n_0)$$

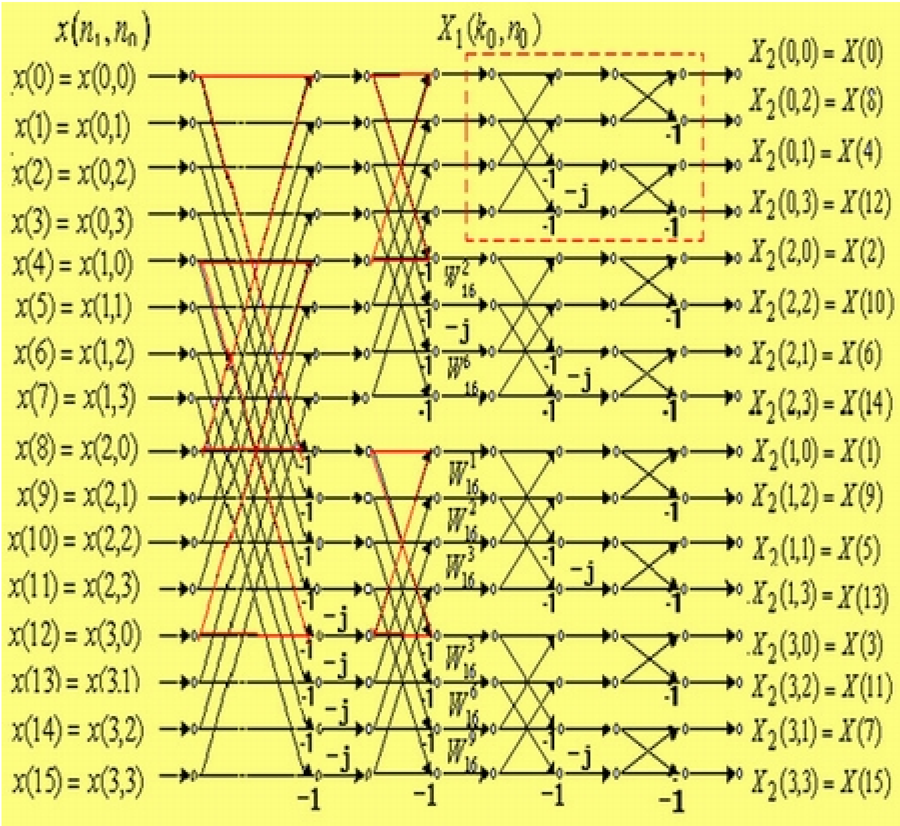
$$X(k)=X(k_1 r_1+k_0)=X(4k_1+k_0)$$

$$=X(k_1,k_0)$$

$$\therefore X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{nk}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{3}\sum_{n_1=0}^{3}x(4n_1+n_0)\,W_{16}^{(4n_1+n_0)(4k_1+k_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{3}\sum_{n_1=0}^{3}x(4n_1+n_0)\,W_{16}^{4n_1k_0}\,W_{16}^{4n_0k_1}\,W_{16}^{n_0k_0}$$



5. 试用N为组合数时的FFT算法求$N=12$的结果(采用基-3×4)，并画出流图。

解：依题意： $N=3\times 4=r_1 r_2$，

$\therefore$ 对于$0\le n<N$，有

$$n=n_1 r_2+n_0, \qquad \begin{cases} n_1=0,1,2 \\ n_0=0,1,2,3 \end{cases}$$

同样： 令 $N=r_2 r_1$

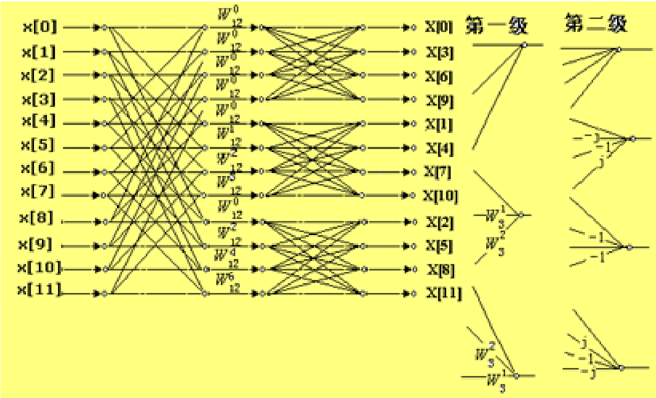
对于频率变量$k(0\le k<N)$有

$$k=k_1 r_1+k_0, \qquad \begin{cases} k_1=0,1,2,3 \\ k_0=0,1,2 \end{cases}$$

$$\therefore x(n)=x(n_1 r_2+n_0)=x(4n_1+n_0)$$
$$=x(n_1,n_0)$$
$$X(k)=X(k_1 r_1+k_0)=X(3k_1+k_0)$$
$$=X(k_1,k_0)$$

$$\therefore X(k)=\sum_{n=0}^{11}x(n)W_{12}^{nk}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{3}\sum_{n_1=0}^{2}x(n_1,n_0)W_{12}^{(4n_1+n_0)(3k_1+k_0)}$$



6. 同上题导出 $N=30=3\times2\times5$ 的结果,并画出流图。

解：依题意：$N=3\times2\times5=r_1r_2r_3$

$\therefore$ 对于$n<N$,

有$n=n_2r_2r_3+n_1r_3+n_0=10n_2+5n_1+n_0$;

$$\begin{cases} n_2=0,1,2 \\ n_1=0,1 \\ n_0=0,1,2,3,4 \end{cases}$$

同样:令$N=r_3r_2r_1$,对于频率变量$k(0\le k<30)$有

$$k=k_2r_2r_1+k_1r_1+k_0=6k_2+3k_1+k_0; \quad \begin{cases} k_2=0,1,2,3,4 \\ k_1=0,1 \\ k_0=0,1,2 \end{cases}$$

令 $$X_1(k_0,n_1,n_0)=\sum_{n_2=0}^{2}x(n_2,n_1,n_0)W_3^{n_2k_0}, \qquad k_0=0,1,2$$

$$X_1^{'}(k_0,n_1,n_0)=X_1(k_0,n_1,n_0)W_6^{n_1k_0}$$

$$X_2(k_0,k_1,n_0)=\sum_{n_1=0}^{1}X_1^{'}(k_0,n_1,n_0)W_2^{n_1k_1}, \qquad k_1=0,1$$

$$X_2^{'}(k_0,k_1,n_0)=X_2(k_0,k_1,n_0)W_{30}^{(3k_1+k_0)n_0}$$

则 $$X_3(k_0,k_1,k_2)=\sum_{n_0=0}^{4}X_2^{'}(k_0,k_1,n_0)W_5^{n_0k_2}, k_2=0,1,2,3,4$$

$$\therefore X(k)=X(k_2,k_1,k_0)=X_3(k_0,k_1,k_2)=X_3(6k_2+3k_1+k_0)$$

$$\therefore x(n)=x(10n_2+5n_1+n_0)=x(n_2,n_1,n_0)$$

$$X(k)=X(6k_2+3k_1+k_0)=X(k_2,k_1,k_0)$$

$$\therefore X(k)=\sum_{n=0}^{29}x(n)W_{30}^{nk}$$

$$= \sum_{n_2=0}^{2}\sum_{n_1=0}^{1}\sum_{n_0=0}^{4} x(n_2,n_1,n_0) W_{30}^{(10n_2+5n_1+n_0)(6k_2+3k_1+k_0)}$$

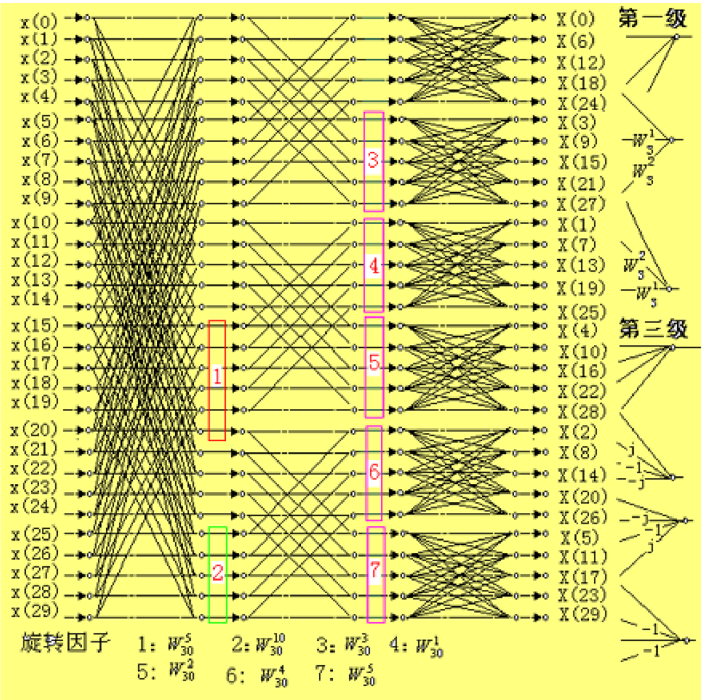
$$= \sum_{n_2=0}^{2}\sum_{n_1=0}^{1}\sum_{n_0=0}^{4} x(n_2,n_1,n_0) W_{30}^{10n_2k_0} W_{30}^{15n_1k_1} W_{30}^{5n_1k_0}$$

$$\times W_{30}^{6n_0k_2} W_{30}^{3n_0k_1} W_{30}^{n_0k_0}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{4}\left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{1}\left[\left(\sum_{n_2=0}^{2} x(n_2,n_1,n_0) W_3^{n_2k_0} \right) W_6^{n_1k_0}\right] W_2^{n_1k_1} \right] \right.$$

$$\left. \times W_{30}^{(3k_1+k_0)n_0} \right\} W_5^{n_0k_2}$$

流图如下图所示:



7. 研究一个长度为 M 点的有限长序列 $x(n)$,

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & 其他\ n \end{cases}$$

我们希望计算求 z 变换 $X(z)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$ 在单位圆上 N 个等间隔点上的抽样,即在 $z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0,1,\ldots,N-1$ 上的抽样,试对下列情况,找出用一个 N 点 DFT 就能计算 $X(z)$ 的 N个抽样的方法，并证明之:

(a) $N \le M$;　　(b) $N > M$

解：(a)

若 $N \le M$ ，依题意

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

设 $(l-1)N \le M < lN$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} +$$

$$\sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \ldots +$$

$$\sum_{n=(l-1)N}^{M-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} +$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n+N) e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+N)k} +$$

$$\cdots +$$

$$\sum_{n=0}^{M-(l-1)N-1} x[n+(l-1)N] e^{-j\frac{2\pi}{N}[n+(l-1)N]k}$$

$$\because e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+lN)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

且令： $y_0(n) = x(n),\ y_1(n) = x(n+N),$

$\cdots y_{l-2}(n) = x[n+(l-2)N]$

$(0 \le n \le N-1)$

$y_{l-1}(n) = x[n+(l-1)N]$

$(0 \le n \le M-(l-1)N-1)$

$$\therefore X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} [\sum_{m=0}^{l-1} y_m(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

由此可见，对于 $N \le M$，可先计算 $\sum_{m=0}^{l-1} y_m(n)$，然后对它求一次 N 点 DFT，即可计算 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点抽样

(b) 若： $N > M$，可将 $x(n)$ 补零到 N 点，即

$$x_0(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & M \le n \le N-1 \end{cases}$$

则： $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$，

$0 \le k \le N-1$

8. 已知一个 8 点序列 $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le \mathrm{n} \le 7 \\ 0, & 其他\mathrm{n} \end{cases}$ 试用 CZT 法求其前面 10 点的复频谱 $X(z_k)$。已知 z 平面路径为 $A_0 = 0.8,\ \theta_0 = \pi/3,$ $\mathrm{W}_0 = 1.2,\ \phi_0 = 2\pi/20$； 画出 z_k 的路径及 CZT 实现过程示意图。

解：依题意：$A=A_0e^{j\theta_0}=0.8e^{j\frac{\pi}{3}}$ ；$W=W_0e^{-j\varphi_0}=1.2e^{-j\frac{2\pi}{20}}$

则 $z_k=AW^{-k}=0.8\times(1.2)^{-k}e^{j(\frac{\pi}{10}k+\frac{\pi}{3})},\quad 0\le k\le 9$ (1)

$$\therefore\ X(z_k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)z_k^{-n}=\sum_{n=0}^{7}(0.8)^{-n}\times(1.2)^{nk}e^{-j(\frac{\pi}{10}k+\frac{\pi}{3})n},0\le k\le 9$$

$$\because nk=\tfrac{1}{2}[n^2+k^2-(k-n)^2]$$

$$\therefore X(z_k)=(1.2)^{\frac{k^2}{2}}e^{-j\frac{\pi}{20}k^2}\sum_{n=0}^{7}\{0.8^{-n}\times 1.2^{\frac{n^2}{2}}\times 1.2^{\frac{-1}{2}(k-n)^2}\times e^{-j[\frac{\pi}{20}n^2-\frac{\pi}{20}(k-n)^2+\frac{\pi}{3}n]}\}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{7}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

令: $g(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}};\quad n=0,1,\cdots,7\qquad h(n)=W^{\frac{-n^2}{2}}\quad n=0,1,\cdots,7$

则：$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}[g(k)*h(k)]\quad ,\ k=0,1,\cdots,9$

由（1）式可得 z_k 的路径，如下表所示:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_k	0.8	0.67	0.56	0.46	0.39	0.32	0.27	0.22	0.19	0.16
arg [z_k]	$\frac{\pi}{3}$ $\frac{37\pi}{30}$	$\frac{13\pi}{30}$	$\frac{16\pi}{30}$	$\frac{19\pi}{30}$	$\frac{22\pi}{30}$	$\frac{25\pi}{30}$	$\frac{28\pi}{30}$	$\frac{31\pi}{30}$	$\frac{34\pi}{30}$	

9.在下列说法中选择正确 的结论.线性调频z变换(CZT)可以用来计算一个M点有限长序列 $h(n)$ 在 z 平面 z 的实轴上各点 $\{z_k\}$ 的 z 变换$H(z)$,使:

(a) $z_k=a^k$, k = 0,1,…, N -1, a为实数, a ≠ ±1

(b) $z_k=ak$, k = 0,1,…, N -1, a为实数, a ≠ 0

(c) (a)和(b)两者都行

(b) 两者都不行 ,即线性调频z变换不能计算 H(z) 在 z 为实数时的抽样。

解：(a) 是正确的。

$$\because H(z_k)=\sum_{n=0}^{M-1}h(n)z_k^{-n}$$

其中： $z_k=AW^{-k}=A_0W_0^{-k}e^{j(\theta_0+k\varphi_0)}$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$

$A_0,W_0,\theta_0,\varphi_0$ 都是任意实数

$\therefore$ 若求有限长序列 $h(n)$ 在 z 平面实轴上各点的 z 变换，只需取

$A_0=1$，$W_0=a^{-1}$，$\theta_0=0$，$\varphi_0=0$ 即可

此时 $z_k=a^k \quad (a\neq\pm1)$

$$H(z_k)=\sum_{n=0}^{M-1}h(n)a^{-nk}$$

$$=a^{-k^2/2}\sum_{n=0}^{M-1}h(n)a^{-n^2/2}a^{(k-n)^2/2}$$

$$=a^{-k^2/2}\sum_{n=0}^{M-1}g(n)p(k-n),\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

为了用 FFT 计算，式中取

$$L=2^J\geq N+M-1$$

计算时可先求出

$G(k)=FFT[g(n)]$， L点

$p(k)=FFT[p(n)]$， L点

$R(k)=G(k)\cdot p(k)$

$r(n)=IFFT[R(k)]$， L点

则 $H(z_k)=a^{-k^2/2}\cdot r(k)$，$0\leq k\leq N-1$

10. 当实现按时间抽取快速傅立叶变换算法时，基本的蝶形计算

$$X_{m+1}(p)=X_m(p)+W_N^rX_m(q)$$
$$X_{m+1}(q)=X_m(p)-W_N^rX_m(q)$$

利用定点算术运算实现该蝶形计算时，通常假设所有数字都已按一定比例因子化为小于 1。因此在蝶形计算的过程中还必须关心溢出问题。

(a) 证明如果我们要求 $|X_m(p)|<1/2$ 和 $|X_m(q)|<1/2$

则在蝶形计算中不可能出现溢出，即

$\mathrm{Re}[X_{m+1}(p)]<1$， $\mathrm{Im}[X_{m+1}(p)]<1$

$\mathrm{Re}[X_{m+1}(q)]<1$， $\mathrm{Im}[X_{m+1}(q)]<1$

（b） 实际上要求 $|\mathrm{Re}[X_m(p)]|<1/2$， $|\mathrm{Im}[X_m(p)]|<1/2$

$|\mathrm{Re}[X_m(q)]|<1/2$， $|\mathrm{Im}[X_m(q)]|<1/2$

似乎更容易些，也更适合些。问这些条件是否足以保证在蝶形计算中不会出现溢出？请证明你的回答。

证明：(a)

$|X_m(p)|<1/2 \quad |X_m(q)|<1/2$

$$|X_{m+1}(p)|=|X_m(p)+W_N^r X_m(q)| \qquad |X_{m+1}(q)|=|X_m(p)-W_N^r X_m(q)|$$

$$\le|X_m(p)|+|W_N^r|\cdot|X_m(q)| \qquad \le|X_m(p)|+|W_N^r|\cdot|X_m(q)|$$

$$<1 \qquad <1$$

故可用 $X_{m+1}(p)$ 证明，$X_{m+1}(q)$ 同理可证。

即 $|X_{m+1}(p)|<1$　故 $|X_{m+1}(p)|^2<1$

因此 $\mathrm{Re}^2[X_{m+1}(p)]+\mathrm{Im}^2[X_{m+1}(p)]<1$

$\mathrm{Re}^2[X_{m+1}(p)]<1$

$\mathrm{Im}^2[X_{m+1}(p)]<1$

所以 $\mathrm{Re}[X_{m+1}(p)]<1$

$\mathrm{Im}[X_{m+1}(p)]<1$

同理可证 $\mathrm{Re}[X_{m+1}(q)]<1$

$\mathrm{Im}[X_{m+1}(q)]<1$

证明:(b)

因为 $|\mathrm{Re}[X_m(p)]|<1/2$

$|\mathrm{Im}[X_m(p)]|<1/2$

所以 $|\mathrm{Re}[X_m(p)]|^2<1/4$

$|\mathrm{Im}[X_m(p)]|^2<1/4$

$|\mathrm{Re}[X_m(p)]|^2+|\mathrm{Im}[X_m(p)]|^2<1/2$

即 $|X_m(p)|^2<1/2$ 或 $|X_m(p)|<\sqrt{2}/2$

因此 $|X_m(p)|$ 不一定小于 $1/2$ ，
故利用 (a) 的结果可以得出 $|\mathrm{Re}[X_{m+1}(p)]|$ 及 $|\mathrm{Im}[X_{m+1}(p)]|$ 不一定小于1 。
同理可得出:$|\mathrm{Re}[X_{m+1}(q)]|$ 及 $|\mathrm{Im}[X_{m+1}(q)]|$ 不一定小于1 。
所以上述条件不足以保证在蝶形运算中不出现溢出 。

11. $X(e^{j\omega})$ 表示长度为10的有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换，我们希望　计算 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = \left(2\pi k^2/100\right)$ $(k=0,1,\ldots,9)$ 时的10个抽样。计算时不能采用先算出比要求点数多的抽样然后再丢掉一些　的办法。讨论下列各方法的可能行：

(a)　直接利用10 点快速傅里叶变换算法。

(b)　利用线性调频 z 变换算法。

解：(a)

若直接利用 10 点快速傅立叶变换算法，则：

$$X(e^{j\omega k}) = \sum_{n=0}^{9} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{9} x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}}$$

将 n 为偶数与 n 为奇数的部分分开，可得：

$$X(e^{j\omega k})$$

$$= \sum_{n\text{为偶数}} x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}} + \sum_{n\text{为奇数}} x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}}$$

$$= \sum_{r=0}^{4} x(2r)e^{-j\frac{2\pi k^2 2r}{100}} +$$

$$\sum_{r=0}^{4} x(2r+1)e^{-j\frac{2\pi k^2(2r+1)}{100}}$$

$$= \sum_{r=0}^{4} x(2r)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}} +$$

$$e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}} \sum_{r=0}^{4} x(2r+1)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}$$

$$= G_0(k) + e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}} G_1(k), k = 0,1,\ldots,9$$

式中：

$$G_l(k) = \sum_{r=0}^{4} x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}$$

$$= \sum_{r\text{为偶数}} x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}} +$$

$$\sum_{r\text{为奇数}} x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}$$

$$=\sum_{s=0}^{2} x(2(2s)+l)\, e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}2s} +$$

$$\sum_{s=0}^{1} x(2(2s+1)+l)\, e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}(2s+1)}$$

$$=\sum_{s=0}^{2} x(4s+l)\, e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}} +$$

$$e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}} \sum_{s=0}^{1} x(4s+2+l)\, e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}}$$

$$(l=0,1)$$

(b) 如考虑利用线性调频 z 变换算法，则

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{9} x(n) A^{-n} W^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{9} x(n)(e^{-j2\pi k/100})^{nk}$$

在应用这种算法时， W 必须不是 k 的函数。因为这里 W 是 k 的函数，所以不能利用线性调频 z 变换算法。

12. 我们希望利用一个单位抽样响应为 N=50 个抽样的有限冲激响应滤波器来过滤一串很长的数据。要求利用重叠保留法通过快速傅立叶变换来实现这种滤波器，为了做到这一点 ,则:

(1) 输入各段必须重叠 P 个抽样点 ；

(2) 我们必须从每一段产生的输出中取出 Q 个抽样点，使这些从每一段得到的抽样连接在一起时，得到的序列就是所要求的滤波输出。假设输入的各段长度为 100 个抽样点，而离散傅立叶变换的长度为 128 点。进一步假设，圆周卷积的输出序列标号是从 n=0 到 n=127。

则：(a)求 P ； (b)求 Q； (c)求取出来的 Q 个点之起点和终点的标号，即确定从圆周卷积的 128 点中要取出哪些点，去和前一段的点衔接起来。

解：

(a)由于用重叠保留法，如果冲激响应 h(n) 的点数为 N 点，则圆周卷积结果的前面的(N-1)个点不代表线性卷积结果。故每段重叠点数 P 为

P=N － 1 =50 － 1=49

(b) 每段点数为 2^7=128，但其中只有 100 个是有效输入数据，其余

28 个点为补充的零值点。因而
各段的重叠而又有效的点数 Q 为
Q=100 － P=100 － 49 =51

(c) 每段 128 个数据点中，取出来的 Q 个点的序号为 n=49 到 n=99。用这些点和前后段取出的相应点连接起来，即可得到原来的长输入序列。 另外，对于第一段数据不存在前一 段问题，故在数据之前必须加上 P=N － 1 =49 个零值点，以免丢失数据。

13. 请用 C 语言编写程序:

(1) 按频率抽取的 FFT 算法 (2) 分裂基 FFT 算法

解：（1）

```
/*Free_Copy*/
/*   C语言编写的频率抽取FFT算法(最大计算64点）*/
/*   输入: 序列点数、序列值   * /
/*   输出: 序列FFT变换后的数值及反变换(应与原序列相同 )   */

#include "conio.h"
#include "math.h"
#include "stdio.h"

#define N 64
#define PI 3.1415926
#define w0 (0.125*PI)
#define Cmul(a,b,c) a.x=b.x*c.x-b.y*c.y;a.y=b.x*c.y+b.y*c.x;
#define     Cequal(a,b) a.x=b.x;a.y=b.y;
#define Cadd(a,b,c) a.x=b.x+c.x;a.y=b.y+c.y;
#define Csub(a,b,c) a.x=b.x-c.x;a.y=b.y-c.y;
#define Wn(w,r) w.x=cos(2.0*PI*r/n);w.y=-sin(2.0*PI*r/n);
struct comp
{
   float x;
   float y;
};
void main()
{
   int i,j,nu2,nm1,n,m,le,le1,k,ip,z;
   int flag,f,n1;
   struct comp a[N],t,t1,w,d;
   float a_ipx,m1;
   printf("\nThis program is about   FFT by DIF way.   ");
```

```
printf("\nplease enter    N : ");
scanf("%d",&n1);
n=n1;
m1=log(n1)/log(2);
m=log(n1)/log(2);
if (m!=m1)    n=pow(2,m+1);
for(i=0;i<n;i++) {a[i].x=a[i].y=0.0;}
printf("\n");
for(i=0;i<n1;i++)
  {
    printf("\nplease enter    data(%d)_[Re]: ",i);
    scanf("%f",&a[i].x);
    printf("\nplease enter    data(%d)_[Im]: ",i);
    scanf("%f",&a[i].y);
  }
for(z=0;z<=1;z++)
{
  flag=-1;
  for (m=(log(n)/log(2));m>=1;m--)
      {
      le=pow(2,m);
      flag++;
      le1=le/2;
      for( j=0;j<le1;j++)
            {
              for (i=j;i<=(n-1);i+=le)
                    {
                      ip=i+le1;
                      Cequal(t,a[i]);
                      Cequal(t1,a[ip]);
                      f=(int) (i*pow(2,flag))%n;
                      Wn(w,f);
                      Cadd(a[i],t,t1);
                      Csub(a[ip],t,t1);
                      a_ipx=a[ip].x;
                      if (z==1)
                          {
                            w.y*=-1;
                          }
                    a[ip].x=a[ip].x*w.x-a[ip].y*w.y;
                    a[ip].y=a_ipx*w.y+a[ip].y*w.x;
                    }
              }
      }
```

```
 nu2=n/2;
 nm1=n-2;
 j=0;i=0;
while(i<=nm1)
    {
     if (i<j)
        {
         Cequal(d,a[j]);
         Cequal(a[j],a[i]);
         Cequal(a[i],d);
        }
     k=nu2;
     while(k<=j)
        {
         j=j-k;k=k/2;
        }
      j=j+k;
      i=i+1;
     }
 if(z==0)
     {
      printf("\n序列的fft是:\n\n");
     }
 else
      printf("\n用ifft计算出的原序列是:\n\n"    ) ;
 for(i=0;i<n;i++)
     if(z==0)
         {
          printf("        %7.3f",a[i].x);
          if (a[i].y>=0)
          printf("    + %7.3f j \n",a[i].y);
          else
          printf("    - %7.3f j \n",fabs(a[i].y));
          a[i].y= -a[i].y;
          }
     else
         {
          printf("      %7.3f",a[i].x/n);
          a[i].y=-a[i].y/n;
          if (a[i].y>=0)
          printf("    + %7.3f j \n",a[i].y);
          else
          printf("    - %7.3f j \n",fabs(a[i].y));
         }
```

```
    }
  printf("\n");
}
```

（2）;分 裂 基 FFT 算 法 程 序

```
/*Free_Copy*/
/*主程序:64点分裂基FFT算法*/
/*输入: 64点任意序列*/
/*输出:  序列的FFT变换*/

#include "conio.h";
#include"math.h"
#include"stdio.h"
#define PI 3.1415926
#define N 128

void main()
{
    float x[N],y[N],xt;
    float cc1,cc3,ss1,ss3;
    float r1,r2,r3,s1,s2,a,a3,e,m1;
    int n,n1,m,j,k,i;
    int is,id,i0,i1,i2,i3,n2,n4;

    printf("\nThis program is about    FFT by SPEFT way.    ");
    printf("\nplease enter    n : ");
    scanf("%d",&n1);
    n=n1;
    m1=log(n1)/log(2);
    m=log(n1)/log(2);
    if (m!=m1)    n=pow(2,m+1);
    for(i=0;i<=N;i++)
          {
            x[i]=y[i]=0.0;
          }
    printf("\n");
    for(i=1;i<=n1;i++)
          {
            printf("\nplease enter    data(%d)_[Re]: ",i);
            scanf("%f",&x[i]);
            printf("\nplease enter    data(%d)_[Im]: ",i);
            scanf("%f",&y[i]);
          }
    j=1;
```

```
for (i=1;i<=n-1;i++)
   {
     if (i<j)
        {
          xt=x[j];
          x[j]=x[i];
          x[i]=xt;
          xt=y[j];
          y[j]=y[i];
          y[i]=xt;
        }
     k=n/2;
     while (k<j)
        {
           j=j-k;
           k=k/2;
        }
       j=j+k;
   }
is=1;
id=4;
while (is<n)
  {
     for (i0=is;i0<=n;i0+=id)
          {
            i1=i0+1;
            r1=x[i0];
            x[i0]=r1+x[i1];
            x[i1]=r1-x[i1];
            r1=y[i0];
            y[i0]=r1+y[i1];
            y[i1]=r1-y[i1];
          }
       is=2*id-1;
       id=4*id;
  }
n2=2;
for (k=2;k<=m;k++)
  {
    n2=n2*2;
    n4=n2/4;
    e=2.0*PI/n2;
    a=0.0;
    for (j=1;j<=n4;j++)
```

```
{
 a3=3.0*a;
 cc1=cos(a);
 ss1=sin(a);
 cc3=cos(a3);
 ss3=sin(a3);
 a=j*e;
 is=j;
 id=2*n2;
 while (is<n)
     {
       for (i0=is;i0<=n-1;i0+=id)
{
           i1=i0+n4;
  i2=i1+n4;
  i3=i2+n4;
  r1=x[i2]*cc1+y[i2]*ss1;
  s1=y[i2]*cc1-x[i2]*ss1;
  r2=x[i3]*cc3+y[i3]*ss3;
  s2=y   [i3]*cc3-x[i3]*ss3;
  r3=r1+r2;
  r2=r1-r2;
  r1=s1+s2;
  s2=s1-s2;
  x[i2]=x[i0]-r3;
  x[i0]=x[i0]+r3;
  x[i3]=x[i1]-s2;
  x[i1]=x[i1]+s2;
  y[i2]=y[i0]-r1;
  y[i0]=y[i0]+r1;
  y[i3]=y[i1]+r2;
  y[i1]=y[i1]-r2;
 }
       is=2*id-n2+j;
       id=4*id;
     }
 }
 }
printf("\n分裂基fft结果是：  \n ");
for (i=1;i<=n;i++)
 {
  printf("\n %7.3f, %7.3fj",x[i],y[i]);
  y[i]=-y[i];
 }
```

```
    getch();
    printf("\n\n");
}
```

第五章　　数字滤波器的基本结构

1.用直接 I 型及典范型结构实现以下系统函数

$$H(z)=\frac{3+4.2z^{-1}+0.8z^{-2}}{2+0.6z^{-1}-0.4z^{-2}}$$

分析：①注意系统函数 $H(z)$ 分母的　z^0 项的系数应该化简为 1。

②分母 z^{-i} $(i=1,2,\ldots\ldots)$ 的系数取负号，即为反馈链的系数。

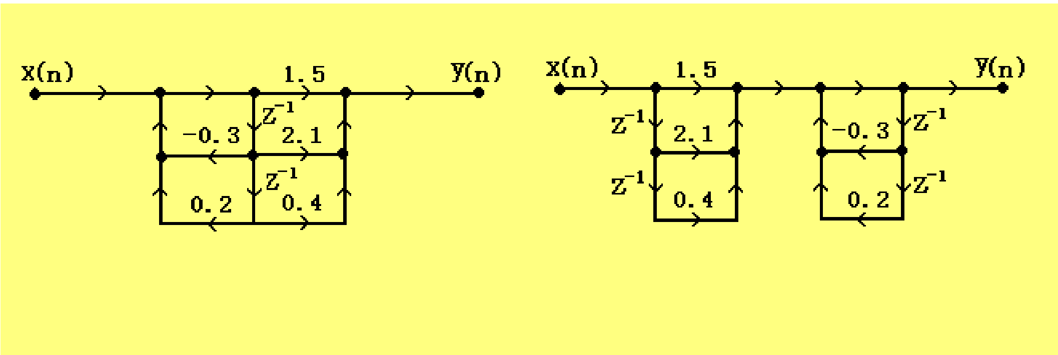
解：

$$H(z)=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1+0.3z^{-1}-0.2z^{-2}}=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1-(-0.3z^{-1}+0.2z^{-2})}$$

$$\because\ H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_n z^{-m}}{1-\sum_{n=1}^{N}a_n z^{-n}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$\therefore\ a_1=-0.3$ ， $a_2=0.2$

$b_0=1.5$ ， $b_1=2.1$ ， $b_2=0.4$



2.用级联型结构实现以下系统函数 $H(z)=\dfrac{4(z+1)(z^2-1.4z+1)}{(z-0.5)(z^2+0.9z+0.8)}$

试问一共能构成几种级联型网络。

分析：用二阶基本节的级联来表达（某些节可能是一阶的）。

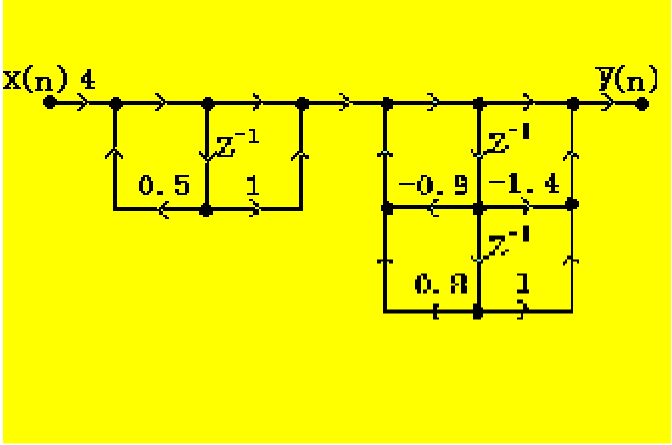
解： $$H(z)=A\prod_k\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

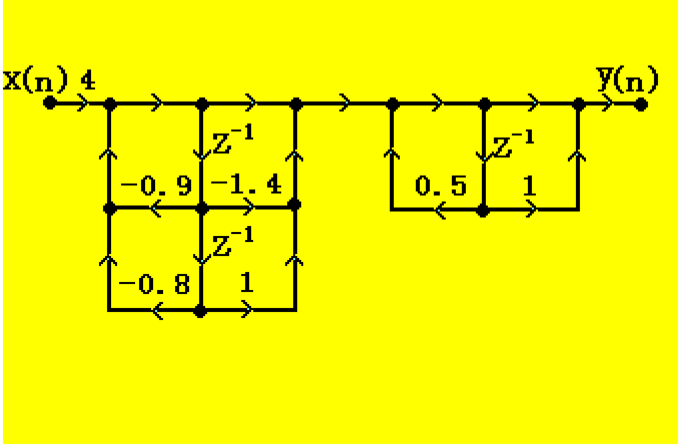
$$=\frac{4(1+z^{-1})(1-1.4z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

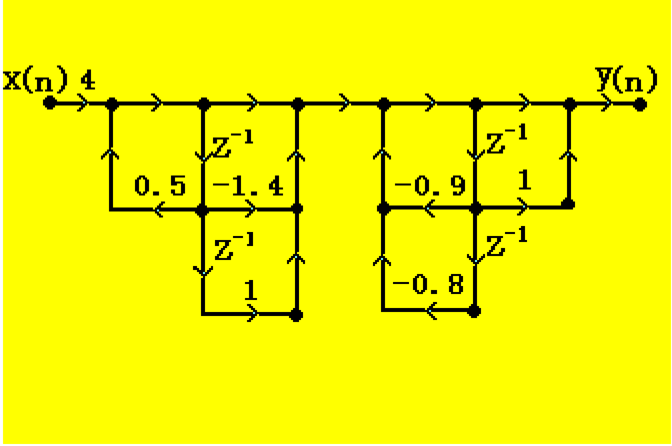
$\therefore\ A=4$

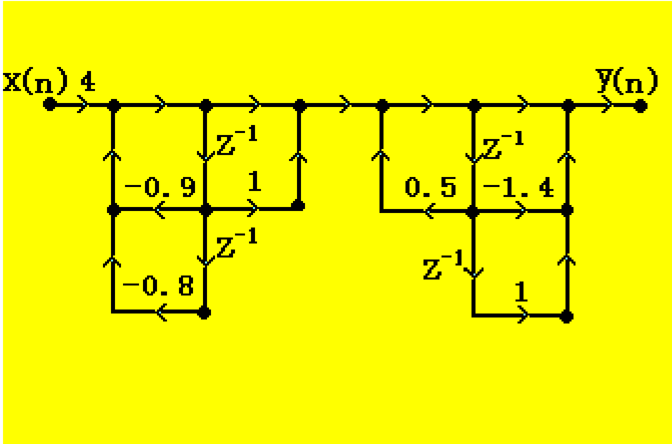
$\beta_{11}=1$, $\beta_{21}=0$, $\beta_{12}=-1.4$, $\beta_{22}=1$

$\alpha_{11}=0.5$, $\alpha_{21}=0$, $\alpha_{12}=-0.9$, $\alpha_{22}=-0.8$









由此可得：采用二阶节实现，还考虑分子分母组合成二阶（一阶）基本节的方式，则有四种实现形式。

3. 给出以下系统函数的并联型实现。

$$H(z)=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

分析：注意并联的基本二阶节和级联的基本二阶节是不一样的，这是因为系统函数化为部分分式之和，分子的 z^{-1} 的最高阶数比分母 z^{-1} 的最高阶数要低一阶，如果分子、分母多项式的 z^{-1} 的最高阶数相同，则必然会分解出一个常数项的相加（并联）因子。

解：对此系统函数进行因式分解并展成部分分式得：

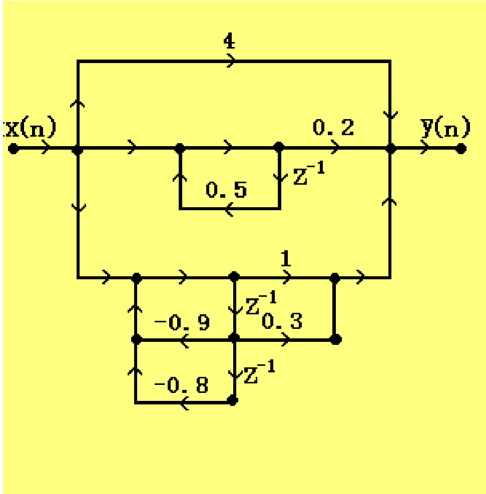
$$H(z)=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

$$=4+\frac{0.2}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1+0.3z^{-1}}{1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

$$\therefore G_0=4$$

$$\alpha_{11}=0.5,\quad \alpha_{21}=0\quad ,\quad \alpha_{12}=-0.9,\quad \alpha_{22}=-0.8$$

$$\gamma_{01}=0.2,\quad \gamma_{11}=0\quad ,\quad \gamma_{02}=1\quad ,\quad \gamma_{12}=0.3$$



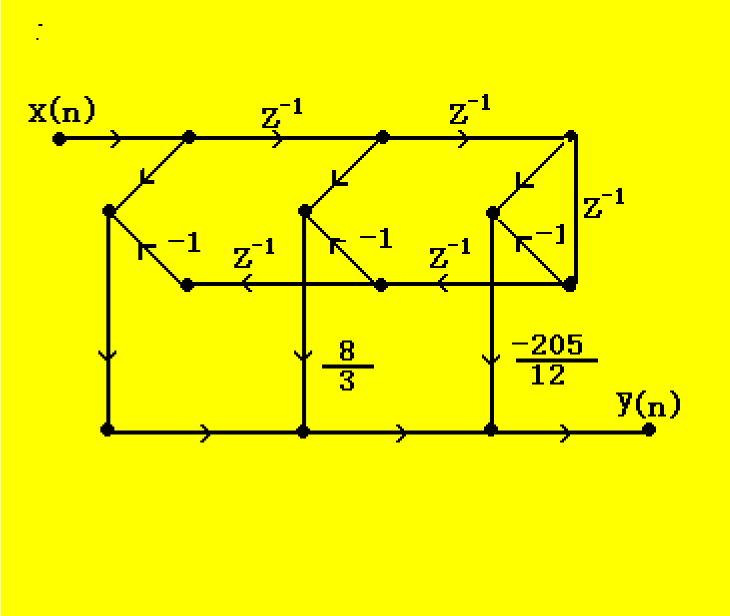
4．用横截型结构实现以下系统函数：

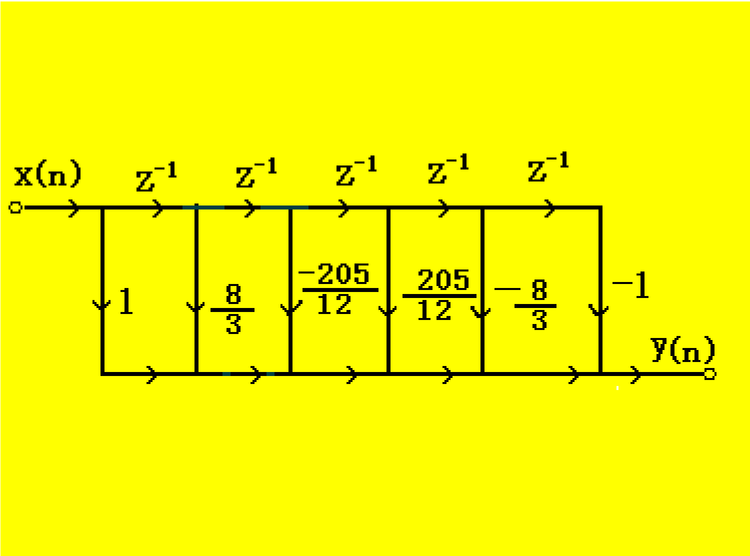
$$H(z)=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+6z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

分析：FIR 滤波器的横截型又称横向型，也就是直接型。

解：

$$\begin{aligned}H(z)&=(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+6z^{-1})(1-2z^{-1})\\&\quad\times(1+\frac{1}{6}z^{-1})(1-z^{-1})\\&=(1-\frac{1}{2}z^{-1}-2z^{-1}+z^{-2})\\&\quad\times(1+\frac{1}{6}z^{-1}+6z^{-1}+z^{-2})(1-z^{-1})\\&=(1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2})\\&\quad\times(1+\frac{37}{6}z^{-1}+z^{-2})(1-z^{-1})\\&=1+\frac{8}{3}z^{-1}-\frac{205}{12}z^{-2}+\frac{205}{12}z^{-3}\\&\quad-\frac{8}{3}z^{-4}-z^{-5}\end{aligned}$$





5．已知 FIR 滤波器的单位冲击响应为

$$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$$

试画出其级联型结构实现。

分析：级联型是用二阶节的因式乘积表示。

解：

根据 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$ 得：

$$H(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.11z^{-3} + 0.12z^{-4}$$

$$=(1+0.2z^{-1}+0.3z^{-2})$$
$$\times(1+0.1z^{-1}+0.4z^{-2})$$

而 FIR 级联型结构的模型公式为：

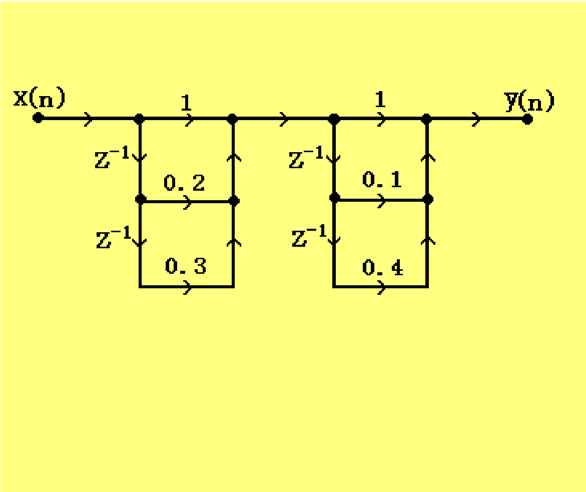
$$H(z)=\prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$$

对照上式可得此题的参数为：

$$\beta_{01}=1\ ,\ \beta_{02}=1,$$

$$\beta_{11}=0.2\ ,\ \beta_{12}=0.1$$

$$\beta_{21}=0.3\ ,\ \beta_{22}=0.4$$



6．用频率抽样结构实现以下系统函数：

$$H(z)=\frac{5-2z^{-3}-3z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

抽样点数 N = 6，修正半径 $r=0.9$ 。

分析： FIR 滤波器的修正的频率抽样结构

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}\ ,\quad H_{N/2}(z)=\frac{H(\frac{n}{2})}{1+rz^{-1}},$$

$$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos(\frac{2\pi}{N}k)+r^2z^{-2}}\begin{cases}k=1,2,\ \ldots\ldots\frac{N\text{-}1}{2}, & N=\text{奇数}\\ k=1,2,\ \ldots\ldots\frac{N}{2}-1, & N=\text{偶数}\end{cases}$$

其中 $\beta_{0k}=2\mathrm{Re}[H(k)]$, $\beta_{1k}=-2r\mathrm{Re}[H(k)W_N^k]$

解； 因为 N=6，所以根据公式可得：

$H(z)=$

$$\frac{1}{6}(1-r^6z^{-6})\left[H_0(z)+H_3(z)+\sum_{k=1}^{2}H_k(z)\right]$$

$$H(z)=\frac{(5+3z^{-3})(1-z^{-3})}{1-z^{-1}}$$

$$=(5+3z^{-3})(1+z^{-1}+z^{-2})$$

故 $H(k)=H(Z)|_{Z=2\pi k/N}$

$$=(5+3e^{-j\pi k})(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k})$$

因而

$H(0)=24$，$H(1)=2-2\sqrt{3}j$，$H(2)=0$

$H(3)=2$，$H(4)=0$，$H(5)=2+2\sqrt{3}j$

则 $H_0(z)=\dfrac{H(0)}{1-rz^{-1}}=\dfrac{24}{1-0.9z^{-1}}$

$H_3(z)=\dfrac{H(3)}{1+rz^{-1}}=\dfrac{2}{1+0.9z^{-1}}$

求：$H_k(z)$

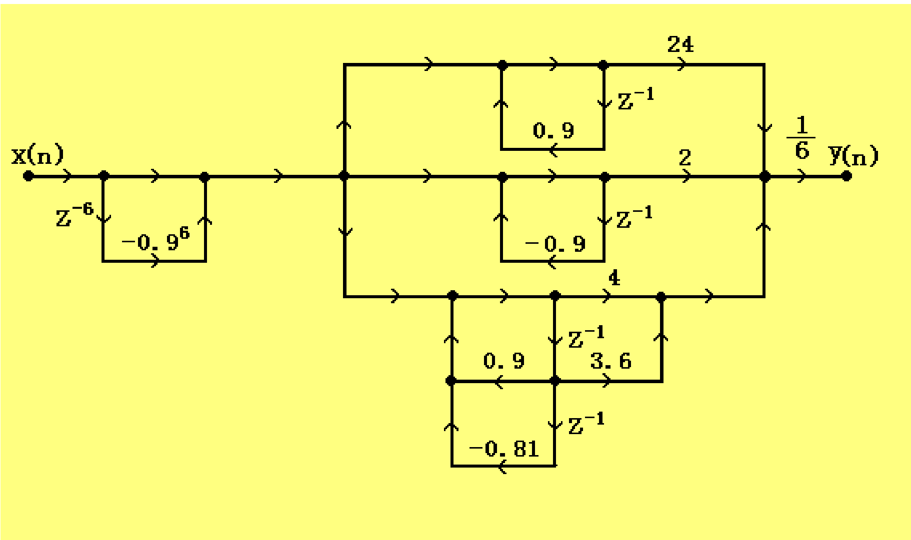
$k=1$ 时：$H_1(z)=\dfrac{\beta_{01}+\beta_{11}z^{-1}}{1-2z^{-1}r\cos\left(\dfrac{2\pi}{N}\right)+r^2z^{-2}}$

$\beta_{01}=2\operatorname{Re}[H(1)]=2\operatorname{Re}[2-2\sqrt{3}j]=4$

$\beta_{11}=(-2)\cdot(0.9)\cdot\operatorname{Re}[H(1)W_6^1]=3.6$

$H_1(z)=\dfrac{4+3.6z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$

$k=2$ 时：$\beta_{02}=\beta_{12}=0$，$H_2(z)=0$



7．设某 FIR 数字滤波器的系统函数为：$H(z)=\frac{1}{5}(1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4})$

试画出此滤波器的线性相位结构。

分析：FIR 线性相位滤波器满足 $h(n)=\pm h(N-1-n)$，即对 $n=(N-1)/2$ 呈现偶对称或奇对称，因而可简化结构。

解：由题中所给条件可知：

$$h(n)=\frac{1}{5}\delta(n)+\frac{3}{5}\delta(n-1)+\delta(n-2)$$
$$+\frac{3}{5}\delta(n-3)+\frac{1}{5}\delta(n-4)$$

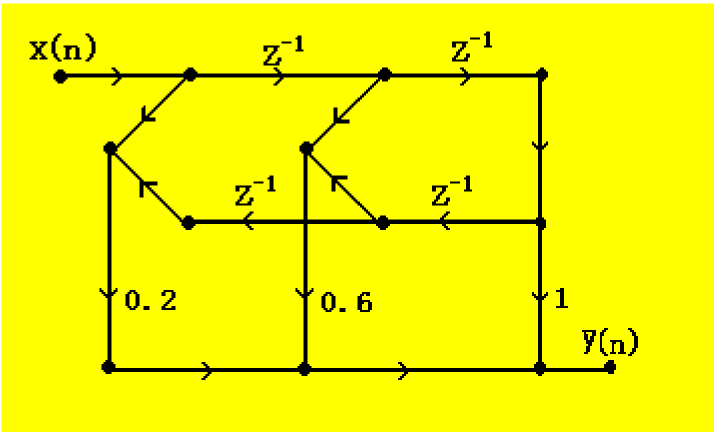
则 $h(0)=h(4)=\frac{1}{5}=0.2$

$h(1)=h(3)=\frac{3}{5}=0.6$

$h(2)=1$

即$h(n)$偶对称，对称中心在 $n=\frac{N-1}{2}=2$

处，N 为奇数($N=5$)。



8．设滤波器差分方程为：$y(n)=x(n)+x(n-1)+\frac{1}{3}y(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)$

⑴试用直接 I 型、典范型及一阶节的级联型、一阶节的并联型结构实现此差分方程。

⑵求系统的频率响应（幅度及相位）。

⑶设抽样频率为 10kHz，输入正弦波幅度为 5，频率为 1kHz，试求稳态输出。

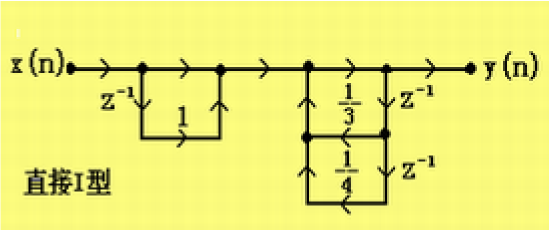
分析： (1) 此题分子 z^{-1} 的阶次低于分母 z^{-1} 的阶次，故一阶节的并联结构没有常数项

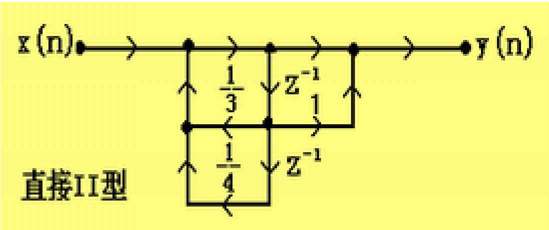
(2) 由 $H(z)\Rightarrow H(e^{j\omega})$，且要用模和相角表示 ，

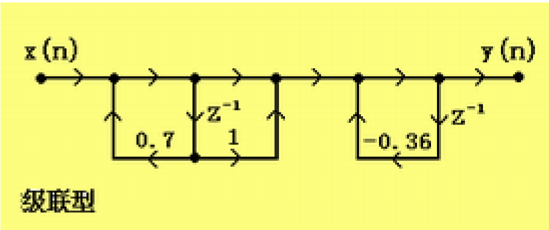
$H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$

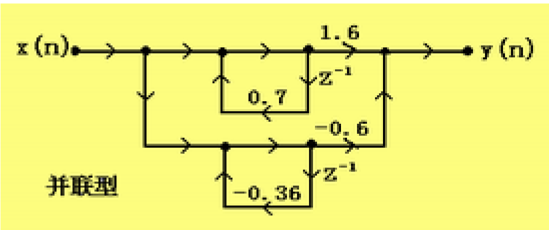
(3) 正弦输入 $x(t)$ 情况下要先化成 $x(n)=x(t)|_{t=nT}$ 输出信号幅度等于输入 信号幅度与 $|H(e^{j\omega})|$ 的乘积，频率即为输入的数字频 率 ω_0，相角为输入相角加上系统频率响应在 ω_0 处的相角 $\arg[H(e^{j\omega_0})]$

解：









(1)直接Ⅰ型及直接Ⅱ：

根据 $y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$ 可得：

$$a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{1}{4} \quad ; \quad b_0=1, b_1=1$$

一阶节级联型：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1})}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{(1-0.7z^{-1})(1+0.36z^{-1})}$$

一阶节并联型：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}}$$

$$=\frac{1.6}{1-0.7z^{-1}}-\frac{0.6}{1+0.36z^{-1}}$$

(2)由题意可知 $H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}=$$

$$\frac{(1+\cos\omega)-j\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega+j\left[\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega\right]}$$

幅度为：

$$\Rightarrow\left|H(e^{j\omega})\right|=$$

$$\frac{\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega)^2+(\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega)^2}}$$

相位为：

$$\Rightarrow \arg\left[H(e^{j\omega})\right] = -\arg\left(tg(\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega})\right)$$

$$-\arg\left(tg(\frac{\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin 2\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos 2\omega})\right)$$

(3)输入正弦波为： $x(t)=5\sin(2\pi t\cdot 10^3)$

由 $\Omega T = 2\pi\times 10^3 T_1 = 2\pi$ 可得：

周期为： $T_1=\frac{1}{1000}=10^{-3}s=1ms$

又抽样频率为 10kHz，即抽样周期为

$$T=\frac{1}{10\times 10^3}=0.1\times 10^{-3}=0.1ms$$

∴在 x(t)的一个周期内，采样点数为 10 个，且在下一周期内的采样值与 $(0,2\pi)$ 间的采样值完全一样。所以我们可以将输入看为

$$x(n)=5\sin\left(2\pi\times 10^3\times nT\right)$$

$$=5\sin\left[10^3\cdot 2\pi\cdot 10^{-4}n\right]$$

$$=5\sin\left[\frac{1}{5}n\pi\right] \quad (\mathrm{n}=0,1,\cdots,9)$$

由此看出 $\omega_0 = 0.2\pi$

根据公式可得此稳态输出为：

$$y(n)=5\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\left[\omega_0 n+\arg\left[H(e^{j\omega_0})\right]\right]$$

$$=12.13\cos\left[0.2\pi n-51.6^\circ\right]$$

(2)由题意可知 $H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}=$$

$$\frac{(1+\cos\omega)-j\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos 2\omega+j\left[\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin 2\omega\right]}$$

幅度为：

$$\Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| =$$

$$\frac{\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega)^2+(\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega)^2}}$$

相位为：

$$\Rightarrow \arg\left[H(e^{j\omega})\right] = -\arg\left(tg(\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega})\right)$$

$$-\arg\left(tg(\frac{\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega})\right)$$

(3) 输入正弦波为： $x(t) = 5\sin(2\pi t\cdot 10^3)$

由 $\Omega T = 2\pi\times10^3 T_1 = 2\pi$ 可得：

周期为： $T_1 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}s = 1ms$

又抽样频率为 10kHz，即抽样周期为

$$T = \frac{1}{10\times10^3} = 0.1\times10^{-3} = 0.1ms$$

∴在 x(t) 的一个周期内，采样点数为 10 个，且在下一周期内的采样值与 $(0,2\pi)$ 间的采样值完全一样。所以我们可以将输入看为

$$\begin{aligned} x(n) &= 5\sin\left(2\pi\times10^3\times nT\right) \\ &= 5\sin\left[10^3\cdot 2\pi\cdot 10^{-4}n\right] \\ &= 5\sin\left[\frac{1}{5}n\pi\right] \quad (\mathrm{n}=0,1,\cdots,9) \end{aligned}$$

由此看出 $\omega_0 = 0.2\pi$

根据公式可得此稳态输出为：

$$y(n) = 5\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\left[\omega_0 n + \arg\left[H(e^{j\omega_0})\right]\right]$$

$$= 12.13\cos\left[0.2\pi n - 51.6^\circ\right]$$

9．写出右图所示结构的系统函数及差分方程。

对此题的分析：

(a) 第一题图结构的左边是一个典范型结构的转置，右边是一个并联型结构。

所以此结构是两者的级联。

可遵循并联相加，级联相乘的原则求得此结构的系统函数。

(b) 第二题图结构的求解，可通过对各结点的求解来获得：将输入结点和输出结点分别用中间结点表示，然后将中间结点消去，即可得到输入结点与输出结点之间的关系，从而求得此结构的系统函数

解：

(1)根据图中结构，可直接写出此结构的系统函数为：

$$H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}+2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2}} \times \left[\frac{2}{1+0.2z^{-1}} + \frac{4+z^{-1}+2z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}}\right]$$

$$= \frac{6+4.4z^{-1}+16.5z^{-2}+5.1z^{-3}+7.8z^{-4}+0.8z^{-5}}{1-1.5z^{-1}+0.26z^{-2}-0.98z^{-3}-0.62z^{-4}-0.08z^{-5}}$$

由此可得此系统的差分方程为：

$$\begin{aligned} y(n) &= 6x(n)+4.4x(n-1)+16.5x(n-2) \\ &\quad +5.1x(n-3)+7.8x(n-4)+0.8x(n-5) \\ &\quad +1.5y(n-1)-0.26y(n-2)+0.98y(n-3) \\ &\quad +0.62y(n-4)+0.08y(n-5) \end{aligned}$$

⑵根据图中所设结点可得：

$$X_1(z) = X(z) - rz^{-1}Y(z)\sin\theta + rz^{-1}X_1(z)\cos\theta$$

$$\therefore X_1(z) = \frac{X(z)-rz^{-1}Y(z)\sin\theta}{1-rz^{-1}\cos\theta}$$

而 $Y(z) = rz^{-1}X_1(z)\sin\theta + rz^{-1}Y(z)\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad Y(z)(1-rz^{-1}\cos\theta) = rz^{-1}\sin\theta \cdot \frac{X(z)-rz^{-1}Y(z)\sin\theta}{1-rz^{-1}\cos\theta}$$

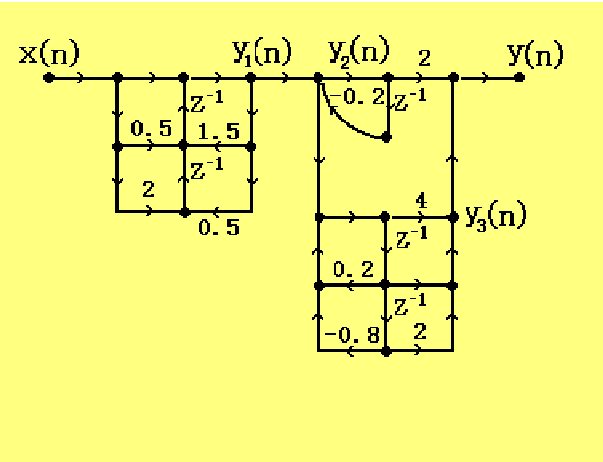
$$Y(z)\cdot[1-2rz^{-1}\cos\theta + r^2z^{-2}] = rz^{-1}X(z)\sin\theta$$

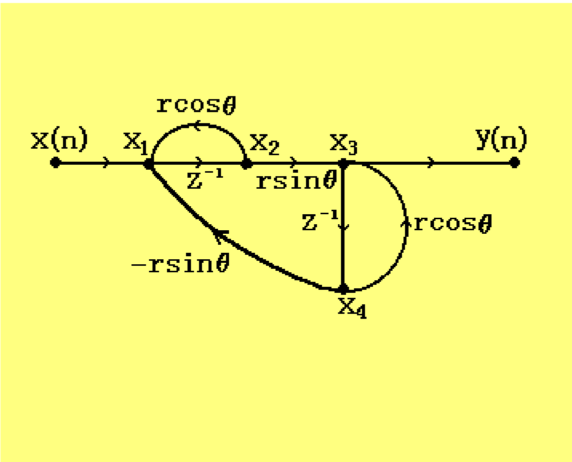
所以此结构的系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{rz^{-1}\sin\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$$

其差分方程为：

$$y(n)=r\sin\theta x(n-1)+2r\cos\theta y(n-1)-r^2y(n-2)$$





第六章 无限长单位冲激响应（IIR）数字滤波器的设计方法

1.用冲激响应不变法将以下 $H_a(s)$ 变换为 $H(z)$，抽样周期为 T

(1) $H_a(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

(2) $H_a(s)=\dfrac{A}{(s-s_0)^n}$ ，n 为任意正整数。

分析：

①冲激响应不变法满足 $h(n)=h_a(t)\big|_{t=nT}=h_a(nT)$，

T 为抽样间隔。这种变换法必须 $H_a(s)$ 先用部分分式展开。

②第（2）小题要复习拉普拉斯变换公式

$$L[t^n]=\frac{n!}{S^{n+1}},$$

$$h_a(t)=\frac{Ae^{s_0t}t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)\Leftrightarrow H_a(s)=\frac{A}{(S-S_0)^n},$$

可求出 $h(k)=Th_a(t)\big|_{t=kT}=Th_a(kT)$，

又 $kx(k)\Leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$，则可递推求解。

解: (1)

$$\begin{aligned}H_a(s)&=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a+jb}+\frac{1}{s+a-jb}\right]\end{aligned}$$

$$h_a(t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(a+jb)t}+e^{-(a-jb)t}\right]u(t)$$

由冲激响应不变法可得：

$$\begin{aligned}h(n)&=Th_a(nT)\\&=\frac{T}{2}\left[e^{-(a+jb)nT}+e^{-(a-jb)nT}\right]u(n)\end{aligned}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)\,z^{-n}$$

$$=\frac{T}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-aT}e^{-jbT}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-aT}e^{jbT}z^{-1}}\right]$$

$$=T\cdot\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos bT}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos bT+e^{-2aT}z^{-2}}$$

(2) 先引用拉氏变换的结论 $L\left[t^{n}\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$

可得： $H_a(s)=\frac{A}{(s-s_0)^n}$

$$则h_a(t)=\frac{Ae^{s_0t}t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$

$$h(k)=Th_a(Tk)=T\cdot\frac{Ae^{s_0kT}(kT)^{n-1}}{(n-1)!}u(k)$$

按 $a^k u(k)\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{1-az^{-1}}$，

且 $kx(k)\xleftrightarrow{Z}-z\frac{dX(z)}{dz}$

$$可得H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k}$$

$$=TA\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}k^{n-1}(z^{-1}e^{s_0T})^k$$

$$=\frac{AT^n}{(n-1)!}(-z\frac{d}{dz})^{n-1}(\frac{1}{1-e^{s_0T}z^{-1}})$$

可以递推求得：

$$H(z)=\begin{cases}\dfrac{AT}{1-e^{s_0T}z^{-1}}, & n=1\\[2ex] \dfrac{AT^n e^{S_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^n}, & n=2,3,\ldots\end{cases}$$

2. 已知模拟二阶巴特沃思低通滤波器的归一化系统函数为：

$$H_a{}'(s)=\frac{1}{1+1.4142136\ s+s^2}$$

而 **3dB** 截止频率为 50Hz 的模拟滤波器，需将归一化的 $H_a{}'(s)$ 中的 s 变量用 $\frac{s}{2\pi\times 50}$ 来代替

$$H_a(s)=H_a{}'(\frac{s}{100\pi})=\frac{9.8696044\ \times 10^4}{s^2+444.28830\,s+9.8696044\ \times 10^4}$$

设系统抽样频率为 $f_s=500Hz$，要求从这一低通模拟滤波器设计一个低通数字滤波器，采用阶跃响应不变法。

分析：

阶跃响应不变法，使离散系统的阶跃响应等于连续系统阶跃响应的等间隔抽样，

$g(n)=g_a(t)\big|_{t=nT}=g_a(nT)$，

由模拟系统函数 $H_a(s)$ 变换成数字系统函数的关系式为：

$$H(z)=\frac{z-1}{z}Z\{[L^{-1}[\frac{H_a(s)}{s}]]_{t=nT}\}，$$

还要用到一些变换关系式。

解:

根据书上公式可得模拟滤波器阶跃响应的拉普拉斯变换为：

$$G_a(s)=\frac{1}{s}H_a(s)$$

$$=\frac{9.8696044\ \times 10^4}{s(s^2+444.28830\,s+9.8696044\ \times 10^4)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{(s+222.14415)+222.14415}{(s+222.14415)^2+(222.14415)^2}$$

由于

$$L\left[e^{-at}(\sin\Omega_0 t)u(t)\right]=\frac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0{}^2}$$

$$L\left[e^{-at}(\cos\Omega_0 t)u(t)\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0{}^2}$$

$$L\left[u(t)\right]=\frac{1}{s}$$

故 $g_a(t)=L^{-1}\left[G_a(s)\right]$

$$=\{1-e^{-222.14415\,t}[\sin(222.14415\,t)+\cos(222.14415\,t)]\}\,u(t)$$

则 $g(n)=g_a(nT)$

$$=\{1-e^{-222.14415\,nT}[\sin(222.14415\,n\mathrm{T})+\cos(222.14415\,n\mathrm{T})]\}\,u(n)$$

利用以下 **z** 变换关系：

$$Z\left[x(n)\right]=X(z)$$

$$Z\left[e^{-naT}x(n)\right]=X(e^{aT}z) \qquad Z\left[(\sin naT)u(n)\right]=\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$$

$$Z\left[(\cos naT)u(n)\right]=\frac{z^2-z\cos aT}{z^2-2z\cos aT+1}$$

$$Z\left[u(n)\right]=\frac{z}{z-1}$$

且代入 a=222.14415

$$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{500}=2\times10^{-3}s$$

可得阶跃响应的 z 变换

$$G(z)=Z\left[g(n)\right]$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z^2-0.30339071z}{z^2-1.1580459z+0.41124070}$$

$$=\frac{0.14534481z^2+0.10784999z}{(z-1)(z^2-1.1580459z+0.41124070)}$$

由此可得数字低通滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{z-1}{z}G(z)$$

$$=\frac{0.14534481z^{-1}+0.10784999z^{-2}}{1-1.1580459z^{-1}+0.41124070z^{-2}}$$

3. 设有一模拟滤波器 $H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$ 抽样周期 T = 2，试用双线性变换法将它转变为数字系统函数 $H(z)$。

分析：

双线性变换法将模拟系统函数的 S 平面和离散的系统函数的 Z 平面之间是一一对应的关系，消除了频谱的混叠现象，变换关系为 $s=c\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$。

解：

由变换公式 $s=c\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 及 $c=\dfrac{2}{T}$ 可得：

T = 2 时：

$$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\therefore\ H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1}$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{3+z^{-2}}$$

4. 要求从二阶巴特沃思模拟滤波器用双线性变换导出一低通数字滤波器，已知 3dB 截止频率为 100Hz，系统抽样频率为 1kHz。

分析：

双线性变换关系同上题，先要用归一化的巴特沃思滤波器（$\Omega_c=1$）。利用 $s=s/\Omega_c$ 关系代入其中得到截止频率为 Ω_c 的模拟巴特沃思滤波器，然后变换成数字巴特沃思滤波器。

解:

归一化的二阶巴特沃思滤波器的系统函数为：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$
$$=\frac{1}{s^2+1.4142136s+1}$$

则将 $s=s/\Omega_c$ 代入得出截止频率

为 Ω_c 的模拟原型为

$$H_a(s)=\frac{1}{(\frac{s}{200\pi})^2+1.4142136(\frac{s}{200\pi})+1}$$
$$=\frac{394784.18}{s^2+888.58s+394784.18}$$

由双线性变换公式可得：

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{394784.18}{(2\times10^3\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+888.58\times(2\times10^3\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})+394784.18}=\frac{0.064(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-1.1683z^{-1}+0.4241z^{-2}}$$

5.　试导出二阶巴特沃思低通滤波器的系统函数（设 $\Omega_c=1rad/s$）。

分析：

巴特沃思逼近或称最平幅度逼近，其幅度平方函数定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\frac{j\Omega}{j\Omega_c})^{2N}}$$

在上式中代入　$j\Omega=s$　可得：

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}}$$

而　$H_a(s)H_a(-s)$ 在左半平面的极点即为

$H_a(s)$ 的极点　，因而

$$H_a(s)=\frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)}\ ,$$

其中　$s_k=\Omega_c e^{j[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]\pi}$　，$k=1,2,....N$

K_0由$s_0=0$时$H_a(s)=1$来确定。

此题利用幅度平方函数求出其左半平面极点而求得系统函数，

注意 Ω c = 3 (不是归一化滤波器）。

解:

幅度平方函数为：

$$|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^4}$$

令 $\Omega^2=-s^2$，则有

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(s/\Omega_c)^4}$$

各极点满足下式：

$s_k=\Omega_c e^{j[\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{4}\pi]}$，k=1,2,3,4

则 k=1,2 时，所得的 s_k 即为 $H_a(s)$ 的极点：

$$s_1=\Omega_c e^{j\frac{3}{4}\pi}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$s_2=\Omega_c e^{j\frac{5}{4}\pi}$$
$$=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-j\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

由以上两个极点构成的系统函数为

$$H_a(s)=\frac{k_0}{(s-s_1)(s-s_2)}$$
$$=\frac{k_0}{s^2+3\sqrt{2}s+3}$$

代入 $s=0$ 时 $H_a(s)=1$, 可得 $k_0=3$

所以 $H_a(s)=\dfrac{3}{s^2+3\sqrt{2}s+3}$

6.　试导出二阶切贝雪夫低通滤波器的系统函数。已知通带波纹为 2dB，归一化截止频率为 $\Omega_c=1rad/s$ 。(试用不同于书本的解法解答）

分析：

切贝雪夫滤波器的幅度特性就是在一个频带中(通带或阻带)具有等波纹特性；一种是在通带中是等波纹的，在阻带中是单调的，称为切贝雪夫 I 型；一种是在通带内是单调的，在阻带内是等波纹的，称为切贝雪夫 II 型。切贝雪夫 I 型滤

波器的幅度平方函数为：

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$$

由上式可以看出切贝雪夫滤波器有三个参数：ε，Ω_c，N。此三个参数给定后，可以求得滤波器的系统函数 $H_a(s)$。可以证明，I 型切贝雪夫滤波器的幅

度平方函数的极点为： $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$

其中 （$k=1, 2, \ldots, 2N$）

$$\sigma_k = -\Omega_c a \sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right]$$

$$\Omega_k = \Omega_c b \cos\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right]$$

其中 $a = sh\left[\frac{1}{N} sh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right]$, $b = ch\left[\frac{1}{N} sh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right]$

注意在求系统函数分子的系数时，对切贝雪夫滤波器，对 $N=$ 偶数，当 $s=0(\Omega=0)$ 时，

有 $H_a(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ (是通带的极小值，而不是1)，

对 $N=$ 奇数时 $H_a(0)=1$ 为通带的极大值。

解:

由于 $\delta_1 = 2dB$，则

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1 = 10^{0.2} - 1$$
$$= 0.5848932$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{0.5848932} = 0.7647831$$

因为截止频率为

$\Omega_c = 2\, rad/s$，则

$$\sigma_1 = -a\Omega_c \sin(\frac{\pi}{4})$$
$$= -sh\left[\frac{1}{N} sh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right]\cdot \Omega_c \cdot \sin(\frac{\pi}{4})$$
$$= -sh\left[\frac{1}{2} sh^{-1}(\frac{1}{0.765})\right]\cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= -0.804$$

$$\Omega_1 = b\Omega_c \cos(\frac{\pi}{4})$$
$$= ch\left[\frac{1}{N} sh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right]\cdot \Omega_c \cdot \cos(\frac{\pi}{4})$$
$$= ch\left[\frac{1}{2} sh^{-1}(\frac{1}{0.765})\right]\cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 1.378$$

则 $s_1 = -0.804 + j1.378$

$s_2 = s_1^* = -0.804 - j1.378$

则 $H_a(s) = \dfrac{A}{(s-s_1)(s-s_2)}$

$$= \frac{1.0116057}{s^2 + 1.608s + 1.2735362}$$

因为 $N=2$ 是偶数，

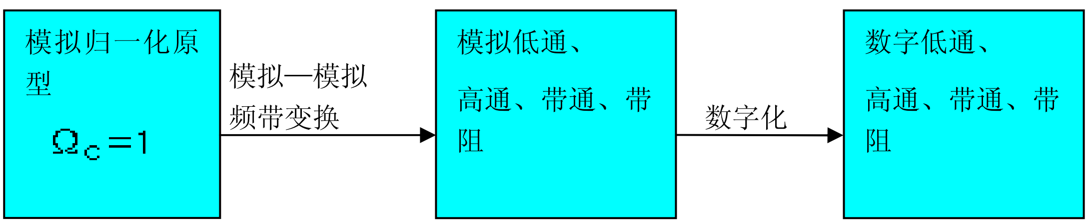
故 $s=0$ $(\Omega=0)$ 时，有

$$H_a(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0.7943282$$

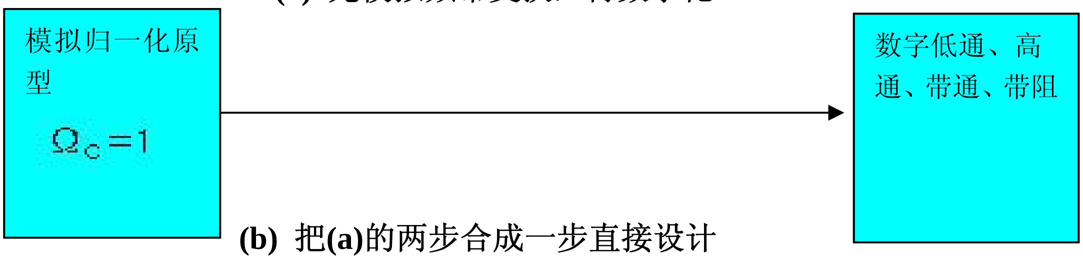
可求得 $A = 1.2735362 \times 0.7943282$

$= 1.0116057$

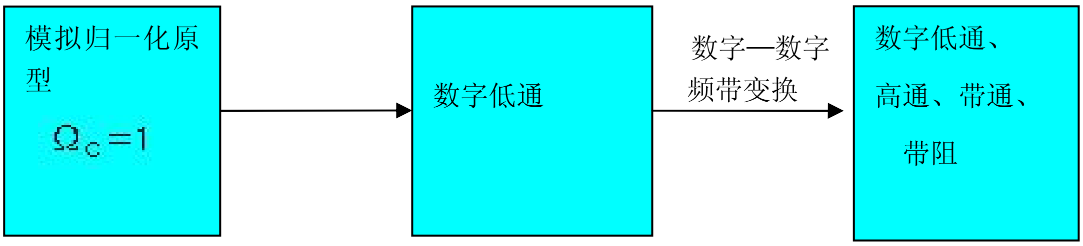
7.已知模拟滤波器有低通、高通、带通、带阻等类型，而实际应用中的数字滤波器有低通、高通、带通、带阻等类型。则设计各类型数字滤波器可以有哪些方法？试画出这些方法的结构表示图并注 明其变换方法。



(a) 先模拟频带变换，再数字化



(b) 把(a)的两步合成一步直接设计



(c) 先数字化，再进行数字频带变换

8. 某一低通滤波器的各种指标和参量要求如下：

(1) **巴特沃思**频率响应，采用**双线性变换法**设计；

(2) 当 $0 \le f \le 2.5Hz$ 时， 衰减小于 3dB；

(3) 当 $f \ge 50Hz$ 时， 衰减大于或等于 40dB；

(4) 抽样频率 $f_s = 200Hz$ 。

试确定系统函数 $H(z)$,并求每级阶数不超过二阶的级联系统函数。

分析：

由模拟角频率先用线性变换变成数字角频率（$\omega = \Omega T$），

然后采用频率预畸法 $(\Omega_i = \frac{2}{T} tg \frac{\omega_i}{2})$, 将数字滤波器

各临界频率 ω_i 变换成样本模拟滤波器的各临界频率 Ω_i 。

用这些 Ω_i 来设计“样本”模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$，

然后再用双线性变换得到数字滤波器的系统函数。

解：

$$T = \frac{1}{f_s} = 5 \times 10^{-3}$$

$$\omega_c = 2\pi\ f_c T = 2\pi \times 2.5 \times \frac{1}{200} = \frac{\pi}{40}$$

$$\omega_{st} = 2\pi f_{st} T = 2\pi \times 50 \times \frac{1}{200} = \frac{\pi}{2}$$

采用双线性变换法:

$$\Omega = \frac{2}{T} tg(\frac{\omega}{2})$$

由指标要求得：

$$20\log_{10} | H_a(j400\, tg(\frac{\pi}{80}) | \ge -3$$

$$20\log_{10} | H_a(j400\, tg(\frac{\pi}{4}) | \le -40$$

又 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \dfrac{1}{1+(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$

故

$$20\log_{10} | H_a(j\Omega) | = -10\log_{10}[1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}]$$

因而

$$-10\log_{10}\left[1+\left(\frac{j400tg(\frac{\pi}{80})}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3$$

$$-10\log_{10}\left[1+\left(\frac{j400tg(\frac{\pi}{4})}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -40$$

取等号计算，则有：

$$1+[400tg(\pi/80)/\Omega_c]^{2N} = 10^{0.3}$$

.... (1)

$$1+[(400tg(\pi/4)/\Omega_c]^{2N} = 10^{4}$$

.............(2)

得

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log[(10^4-1)/(10^{0.3}-1)]}{\log[1/tg(\pi/80)]} = 1.42$$

取 N=2，代入(1)式使通带边沿满足要求，

可得 $\Omega_c = 15.7$

又二阶归一化巴特沃思滤波器为：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+1.4142136s+1}$$

代入 $s=s/\Omega_c$ ：

$$H_a(s)=\frac{246.5}{s^2+22.2s+246.5}$$

由双线性变换

$$H(z)=H_a(s)\big|_{s=400\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{246.5\cdot(1+z^{-1})^2}{[400(1-z^{-1})]^2+22.2\times400(1-z^{-2})+246.5(1+z^{-1})^2}=\frac{246.5\cdot(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1.691265\times10^5-3.19507\times10^5z^{-1}+1.513665\times10^5z^{-2}}$$

$$=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{686.11(1-1.889z^{-1}+0.895z^{-2})}$$

或者也可将 N=2 代入(2)中使阻带边沿满足要求，可得 $\Omega_c=40$，这样可得：

$$H_a(s)=\frac{1600}{s^2+40\sqrt{2}s+1600}$$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{86.86z^{-2}-198z^{-1}+115.14}$$

为了满足通带、阻带不同的指标要求，Ω_c 先后两次取不同的值，故得到不同的系统传输函数 $H(z)$，Ω_c 具体取值应看题目要求。

9. 用双线性变换法设计一个六阶巴特沃思数字带通滤波器，抽样频率为 $f_s=500Hz$，上、下边带截止频率分别为 $f_2=150Hz$， $f_1=30Hz$。

分析：

设计数字带通滤波器可用归一化原型（Ω_c=1）的模拟滤波器作为“样本低通滤波器”（查表即可得其系统函数的系数），然后一次变换到数字带通滤波器。

变换关系为：

数字滤波器类型	频率变换式	设计参量的表达式

带　通	$s = D\left[\dfrac{1-Ez^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}\right]$ $\Omega = D\dfrac{\cos\omega_0 - \cos\omega}{\sin\omega}$	$D = \Omega_c \cot(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2})$ $E = \dfrac{2\cos[(\omega_2+\omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2-\omega_1)/2]}$ $= 2\cos\omega_0$

解：

由模拟低通→数字带通

$$\omega_1 = \Omega_1 T = \frac{\Omega_1}{f_s} = \frac{30\times 2\pi}{500} = \frac{3}{25}\pi$$

$$\omega_2 = \Omega_2 T = \frac{\Omega_2}{f_s} = \frac{150\times 2\pi}{500} = \frac{3}{5}\pi$$

取归一化原型，$\Omega_c = 1$，则有：

$$D = \Omega_c ctg(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}) = ctg(\frac{6\pi}{25}) = 1.0649$$

$$E = 2\frac{cos[(\omega_1+\omega_2)/2]}{cos[(\omega_2-\omega_1)/2]} = 2\frac{cos(\frac{9\pi}{25})}{cos(\frac{6\pi}{25})} = 1.1682$$

查表得三阶归一化巴特沃思低通滤波器的系统函数为：

$$H_{Lp}(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$H(z) = H_{Lp}(s)|_{s=D\frac{1-Ez^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}}$$

$$= \frac{1}{A^3+2B^2+2\times 1.0649C+1}$$

其中$A = B = C$

$$= 1.0649\cdot\frac{1-1.1682Z^{-1}+Z^{-2}}{1-Z^{-2}}$$

代入后整理可得：

$$H(z)=\frac{1-3z^{-2}}{H+I\,z^{-1}+J\,z^{-2}+K\,z^{-3}}\frac{+3z^{-4}-z^{-6}}{+L\,z^{-4}+M\,z^{-5}+N\,z^{-6}}$$

其中 $H=D^3+2D^2+2D\ +1$

$=6.60535$,

$I=-3ED^3-4ED^2-2ED$

$=-12.01872$

$J=(3E^2+3)D^3+2(E^2+1)D^2-2D-3$

$=8.79956$

$K=-(6E+E^3)D^3+4ED$

$=-5.41307$

$L=(3E^2+3)D^3-2(E^2+1)D^2-2D+3$

$=4.07370$

$M=-3ED^3+4ED^2-2ED$

$=-1.42114$

$N=D^3-2D^2+2D-1$

$=0.06938$

将分母中 z^0 的系数归一化，可得：

$$H(z)=\frac{0.15139}{1-1.81954z^{-1}+1.33219z^{-2}-0.81950z^{-3}}\frac{(1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6})}{+0.61673z^{-4}-0.21515z^{-5}+0.01050z^{-6}}$$

10. **要设计一个二阶巴特沃思带阻数字滤波器，其阻带 3dB 的边带频率分别为 40kHz，20kHz，抽样频率** $f_s=200kHz$ 。

分析：

同样利用归一化原型低通滤波器作为“样本” 一次变换成数字带阻滤波器。

变换关系为：

数字滤波器类型	频率变换式	设计参量的表达式

带　阻	$s = D_1 \dfrac{1-z^{-2}}{1-E_1 z^{-1}+z^{-2}}$ $\Omega = D_1 \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos\omega_0}$	$D_1 = \Omega_c \tan(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2})$ $E_1 = \dfrac{2\cos[(\omega_2+\omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2-\omega_1)/2]} = 2\cos\omega_0$

解：

由于设计的是二阶数字带阻滤波器，故原型低通应是一阶的，一节巴特沃思归一化原型低通滤波器的系统函数可以查表求得：

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{1+s}$$

其$3dB$截止频率$\Omega = 1\ rad/s$，则低通变到带阻的变换中所需常数分别为：

$$\begin{aligned} D_1 &= \Omega_c \tan(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}) \\ &= \tan(\frac{40-20}{2}\times 10^3 \times 2\pi \times \frac{1}{200\times 10^3}) \\ &= 0.3249197 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2\cos\left(\dfrac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos(0.3\pi)}{\cos(0.1\pi)} \\ &= 1.236068 \end{aligned}$$

根据变换公式，将$H_{LP}(s)$的表达式代入，并代入D_1、E_1，可得数字带阻滤波器系统函数$H(z)$为：

$$H(z) = H_{LP}(s)\,\Big|_{s=\frac{D_1(1-z^{-2})}{1-E_1 z^{-1}+z^{-2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{1+D_1}(1-E_1 z^{-1}+z^{-2})}{1-\dfrac{E_1}{1+D_1}z^{-1}+\dfrac{1-D_1}{1+D_1}z^{-2}}$$

$$= \frac{0.7547627(1-1.236068z^{-1}+z^{-2})}{1-0.9329381z^{-1}+0.5095255z^{-2}}$$

11．用双线性变换法设计一个六阶切贝雪夫数字高通滤波器，抽样频率为 $f_s = 8kHz$，截止频率为 $f_c = 2kHz$。

(不计 4kHz 以上的频率分量)

分析：

同样利用归一化原型低通滤波器作为“样本” 一次变换成数字高通滤波器。

变换关系为：

数字滤波器类型	频率变换式	设计参量的表达式
高　通	$s = C_1 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ $\Omega = C_1 \cot\frac{\omega}{2}$	$C_1 = \Omega_c \tan\frac{\omega_c}{2}$

解：

不妨用 $\delta_1 = 3dB$ 的三阶切比雪夫低通系统函数，查表得：

$$H_{Lp}(s) = \frac{0.2505943}{0.2505943 + 0.92834805s + 0.5972404s^2 + s^3}$$

又 $\omega_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 0.5\pi$

$$c_1 = \Omega_c tg\frac{\omega_c}{2} = 1 \qquad (\Omega_c = 1rad/s)$$

而由变换关系式 $s = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$

故可得到数字高通滤波器的系统函数 $H(z)$ 为：

$$H(z) = \frac{1\times}{0.2505943 + 0.9283480\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} \frac{0.2505943}{+0.5972404(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}})^2 + (\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}})^3}$$

化简可得：

$$H(z)=\frac{0.0902658}{1+0.6905560z^{-1}+0.8018905z^{-2}}$$
$$\frac{\cdot(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})}{+0.3892083z^{-3}}$$

12. 试导出从低通数字滤波器变为高通数字滤波器的设计公式。

分析：

数字低通 $\longrightarrow$ 数字高通只需将低频变成高频，即将频率响应旋转180°，也就是将 z 换成 $-z$ 即可(z^{-1} 用 $-z^{-1}$ 代替）。

变换类型	变换公式	变换参数的公式
低通—高通	$z^{-1}=-(\frac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}})$	$\alpha=-\frac{\cos(\frac{\theta_c+\omega_c}{2})}{\cos(\frac{\theta_c-\omega_c}{2})}$

解：

低通变成高通，只需将频率响应旋转 180 度， 即将 Z 变换成--Z 即可，所以我们只需将 低通---低通变换公式中得 Z^{-1} 用 $-Z^{-1}$ 代替，就完成了低通到高通的变换，由此可得：

$$z^{-1}=G(Z^{-1})=\frac{-Z^{-1}-\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}=\frac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$$

由于此时得对应关系为 $\theta_c\to-\omega_c$，故
所需 α 值为：

$$e^{-j\theta_c}=-\frac{e^{j\omega_c}+\alpha}{1+\alpha e^{j\omega_c}}\quad ===>$$

$$\alpha=-\frac{\cos\left(\frac{\theta_c+\omega_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_c-\omega_c}{2}\right)}$$

13. 试导出从低通数字滤波器变为带通数字滤波器的设计公式。

分析：

数字低通 $\rightarrow$ 数字带通变换关系为：

变换类型	变换公式	变换参数的公式

低通—带通	$z^{-1}=-\dfrac{Z^{-2}-\dfrac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+\dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{k-1}{k+1}Z^{-2}-\dfrac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+1}$	$\alpha=\dfrac{\cos(\dfrac{\omega_2+\omega_1}{2})}{\cos(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2})}$ $=\cos\omega_0$ $k=\cot(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2})\tan\dfrac{\theta_c}{2}$ ω_2,ω_1为要求的上、下截止频率,ω_0为带通中心频率

解：

低通与带通间的关系可以查看《数字信号处理教程》,其中ω_2,ω_1分别为带通滤波器通带的上、下截止频率，ω_0为带通中心频率。

所以当低通数字频率 θ 由 $0\to\pi$ 时，带通数字频率ω由 $\omega_0\to\pi$;当低通数字频率 θ 由 $-\pi\to 0$时，带通数字频率ω由$0\to\omega_0$，因而当ω由0变化到 π 则相应的θ必须变化2π，因而全通函数的阶数应为 $N=2$，则有：

$$
\begin{aligned}
z^{-1}&=G(Z^{-1})\\
&=\pm\frac{Z^{-1}-\alpha^*}{1-\alpha Z^{-1}}\cdot\frac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha^* Z^{-1}}\\
&=\pm\frac{Z^{-2}+D_1Z^{-1}+D_2}{D_2Z^{-2}+D_1Z^{-1}+1}
\end{aligned}
$$

由于$\omega=0$（或$\omega=\pi$) 对应于$\theta=\pi$，故有 $Z^{-1}=1$时，$z^{-1}=G(1)=-1$，代入上式，并由γ_1,γ_2都是实数，则

$$
\begin{aligned}
z^{-1}&=G(Z^{-1})\\
&=-\frac{Z^{-2}+D_1Z^{-1}+D_2}{D_2Z^{-2}+D_1Z^{-1}+1}\ldots\ldots(*)
\end{aligned}
$$

将低通的频率 $0, -\theta_c$，θ_c 及分别与其对应的 ω_0，ω_1，ω_2 代入(*)式得：

$$z^{-1} = G(Z^{-1})$$

$$= -\left(\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}\right)$$

其中 $\alpha = \dfrac{\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})} = \cos\omega_0$

$$k = \cot(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\tan(\frac{\theta_c}{2})$$

ω_2，ω_1为要求的上、下截止频率，ω_0为通带中心频率，θ_c 为低通的截止频率

14. 试导出从低通数字滤波器变为带阻数字滤波器的设计公式。

分析：

数字低通 $\rightarrow$ 数字带阻变换关系为：

变换类型	变换公式	变换参数的公式
低通—带阻	$z^{-1} = \dfrac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} Z^{-1} + \frac{1-k}{k+1}}{\frac{1-k}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \dfrac{\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})} = \cos\omega_0$ $k = \tan(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\tan\frac{\theta_c}{2}$ ω_2, ω_1为要求的上、下截止频率，ω_0为带通中心频率

解：

低通与带通滤波器之间的变换关系见《数字信号处理教程》，由表可知：

ω变化量为π时，θ变化量为2π，故全通函数阶数$N=2$,则有：

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= G\left(Z^{-1}\right) \\
&= \pm\frac{Z^{-1}-\alpha^{*}}{1-\alpha Z^{-1}}\cdot\frac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha^{*}Z^{-1}}
\end{aligned}
$$

又由$Z^{-1}=-1$（对应带阻的$\omega=0$）时，

$Z^{-1}=G(1)=1$　(对应低通的$\theta=0$)

可得

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= G\left(Z^{-1}\right) \\
&= \pm\frac{Z^{-1}-\alpha^{*}}{1-\alpha Z^{-1}}\cdot\frac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha^{*}Z^{-1}} \\
&= \frac{Z^{-2}+D_1Z^{-1}+D_2}{D_2Z^{-2}+D_1Z^{-1}+1}
\end{aligned}
$$

把低通的频率$-\theta_c$，θ_c，π 及分别对应的带阻的频率ω_2，ω_1，ω_0代入上式，则有：

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= G(Z^{-1}) \\
&= \frac{Z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}Z^{-1}+\dfrac{1-k}{1+k}}{\dfrac{1-k}{1+k}Z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}Z^{-1}+1}
\end{aligned}
$$

其中$\alpha=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)}=\cos\omega_0$

$$k=\tan\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right)$$

(ω_2,ω_1为要求的上，下截止频率，ω_0为阻带中心频率）

15. 令$h_a(t),s_a(t)$和$H_a(s)$分别表示一个时域连续的线性时不变

滤波器的单位冲激响应,单位阶跃响应和系统函数。令

$h(n), s(n)$ 和 $H(z)$ 分别表示时域离散线性移不变数字滤波器

的单位抽样响应，单位阶跃响应和系统函数。

(1) 如果 $h(n)=h_a(nT)$，是否 $s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h_a(kT)$？

(2) 如果 $s(n)=s_a(nT)$，是否 $h(n)=h_a(nT)$？

分析：

本题解题关键知识点：

由 $h(n)$ 导出 $s(n)$： $s(n)=u(n)*h(n)$

由 $s(n)$ 导出 $h(n)$： $h(n)=s(n)-s(n-1)$

解：(1)

因为 $s(n)=u(n)*h(n)$

其中 $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$

故

$$s(n)=[\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)]*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)$$

又 $h(n)=h_a(nT)$

所以有 $s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h_a(kT)$

解:（2）

$$由\ s(n)=[\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)]*h(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)\ ,$$

有：$s(n)-s(n-1)=h(n)$

若 $s(n)=s_a(nT)$

则 $s_a(nT)-s_a[(n-1)T]=h(n)$

$\cdots\cdots$ (1)

又 $s_a(nT)-s_a[(n-1)T]=\int_{(n-1)T}^{nT}h_a(t)dt$

$\cdots\cdots$（2）

由（1),(2)两式可得：

$h(n)=\int_{(n-1)T}^{nT}h_a(t)dt \neq h_a(nT)$

16. 假设$H_a(s)$在$s=s_0$处有一个 r阶极点，则 $H_a(s)$可以表示成

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{(s-s_0)^k}+G_a(s)$$

式中 $G_a(s)$ 只有一阶极点。

(1) 写出由$H_a(s)$计算常数A_k的公式

(2) 求出用s_0及$g_a(t)$[$G_a(s)$的拉普拉斯反变换]表示的冲激响应$h_a(t)$ 的表示式。

(3) 假设我们定义$h(n)=h_a(nT)$ 为某一数字滤波器的单位冲激响应试利用⑵的结果写出系统函数$H(z)$的表示式。

(4) 导出直接从$H_a(s)$得到$H(z)$的方法。

分析：

(1) $A_k=\frac{1}{(r-k)!}\frac{d^{(r-k)}}{ds^{(r-k)}}[(s-s_0)^r H_a(s)]$

⑵利用本章第 1 题的结论：

$h_a(t)=L[H_a(s)]=\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{s_0t}}{(k-1)!}t^{(k-1)}A_k u(t)+g_a(t)$

(3) 由 $h(n)=Th_a(nT)$ 可求得 $H(z)=Z[Th_a(nT)]$

（4）按第一题的讨论可得：

$$H(z)=\frac{A_1T}{1-e^{s_0T}z^{-1}}+\sum_{k=2}^{r}\frac{A_kT^k e^{s_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^k}+G(z)$$

这是由 $G_a(s)$ 和 $H_a(s)$ 得到 $H(z)$ 的公式

解：(1)

由$H_a(s)=\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{(s-s_0)^k}+G_a(s)$

故由拉氏变换两边乘 $(s-s_0)^r$,再求导数得：**(2)**可利用本章第 1 题的结论得：

$$A_k=\frac{1}{(r-k)!}\cdot\frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}}\left[(s-s_0)^r H_a(s)\right]$$

$$h_a(t)=L^{-1}\left[H_a(s)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{s_0 t}}{(k-1)!}t^{(k-1)}A_k u(t)+g_a(t)$$

(3)第一题是 $H_a(s)=A/(s-s_0)^k$ 这里 A 是一个常数。此题是

$H_a(s)=\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{(s-s_0)^k}$,是求和表示式，

且对 $k=1,2,.....,r$, A_k 是不同的常数。

(a)由 $H_a(s)$ 计算各常数 A_k 的方法为：

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{(s-s_0)^k}+G_a(s)$$
$$=\frac{\mathrm{A}_1}{s-s_0}+\frac{\mathrm{A}_2}{(s-s_0)^2}+.....+\frac{A_r}{(s-s_0)^r}+G_a(s)$$

则有：

$$(s-s_0)^r H_a(s)$$
$$=\sum_{k=1}^{r}A_k(s-s_0)^{r-k}+(s-s_0)^r G_a(s)$$
$$=\mathrm{A}_1(s-s_0)^{r-1}+\mathrm{A}_2(s-s_0)^{r-2}+.....$$
$$+A_r+(s-s_0)^r G_a(s) \qquad \cdots(\mathrm{I})$$

由于 $(s-s_0)^r H_a(s)$ 在 $s=s_0$ 处没有极点，

因而可在 s_0 周围展成台劳级数，即：

$$(s-s_0)^r H_a(s)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p\,!}\{\frac{d^p}{ds^p}[(s-s_0)^r$$
$$H_a(s)]\}_{s=s_0}\cdot(s-s_0)^p \quad \cdots(\Pi)$$

(II) 式与 (I) 相比较，看出

$P=0$ 时 $A_r=[(s-s_0)^r H_a(s)]\Big|_{s=s_0}$

$P=1$ 时 $A_{r-1}=\dfrac{d}{ds}[(s-s_0)H_a(s)]\Big|_{s=s_0}$ ⋮

$P=2$ 时 $A_{r-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{ds^2}[(s-s_0)H_a(s)]\Big|_{s=s_0}$

$P=P$ 时 $A_{r-p}=\dfrac{1}{p\,!}\dfrac{d^p}{ds^p}[(s-s_0)H_a(s)]\Big|_{s=s_0}$

令 $r-p=k$,即 $p=r-k$

可得 $A_k=A_{r-p}$

即 $A_k=\dfrac{1}{(r-k)!}\dfrac{d^{r-k}}{ds^{r-k}}[(s-s_0)^r H_a(s)]\Big|_{s=s_0}$

(b)与第 1 题的讨论相似，可得：

$$h_a(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{s_0 t}}{(k-1)!}t^{k-1}A_k u(t)+g_a(t)u(t)$$

c)求$H(z)$,先求

$$h(n)=h_a(nT)=$$

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{s_0 nT}}{(k-1)!}T_{k-1}n^{k-1}A_k u(n)+g_a(nT)u(n)$$

则 $H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}Th_a(nT)z^{-n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Th(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r}\frac{Te^{s_0 Tn}}{(k-1)!}T^{k-1}n^{k-1}A_k z^{-n}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}T\cdot g_a(nT)z^{-n}$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\frac{T^k A_k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}(e^{s_0 T}z^{-1})^n+G(z)$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\frac{T^k A_k}{(k-1)!}(-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[\frac{1}{1-e^{s_0 T}z^{-1}}]$$

$$+G(z)$$

按第 1 题讨论知：

$$H(z)=\frac{A_1T}{1-e^{s_0T}z^{-1}}+$$
$$\sum_{k=2}^{r}\frac{T^kA_k}{(k-1)!}\frac{(k-1)!e^{s_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^k}+G(z)$$
$$=\frac{A_1T}{1-e^{s_0T}z^{-1}}+\sum_{k=2}^{r}\frac{A_kT^ke^{s_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^k}+G(z)$$

(3) $H_a(s)$ 和 $H(z)$ 的对应关系：

（a）$(s-s_0)^k \to (1-e^{s_0T}z^{-1})^k$

即 $s=s_0$ 的 k 阶极点变成 $z=e^{s_0T}$ 的 k 阶极点

(b)系数：$A_1 \to A_1T$

$A_k \to A_kT^ke^{s_0T}z^{-1}$，$(k=2,3,\cdots,r)$ 点的变换方法一样。

(c) $G_a(s)\to G(z)$ 的方法与一阶极

17. 图 P5-17 表示一个数字滤波器的频率响应。

(1) 用冲激响应不变法，试求原型模拟频率响应。

(2) 当采用双线性变换法时，试求原型模拟频率响应。

(3) 分析：

注意冲击响应不变法用 $H(e^{j\omega})=T\times\frac{1}{T}H_a(j\frac{\omega}{T})$

(4) 来进行变换，Ω 用 ω/T 代替，幅度乘上 T；

双线性变换法采用 $\Omega=c\cdot tg(\omega/2)$

即 $\omega=2\,arctg(\Omega/c)$

解: (1) 冲激响应不变法：

因为 ω 大于折叠频率时 $H(e^{j\omega})$ 为零，故用此法无失真。

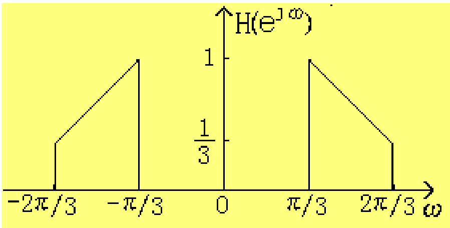
故 $H(e^{j\omega})=T\times\frac{1}{T}H_a(j\frac{\omega}{T})=H_a(j\omega)$,

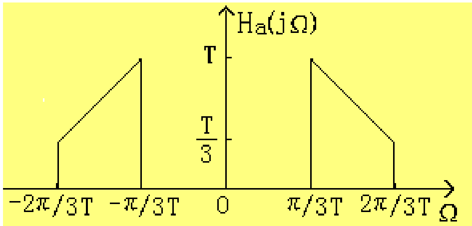
由图 $P6-17$ 可得：

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\omega+\frac{5}{3} & ,-\frac{2\pi}{3}\le\omega\le-\frac{\pi}{3}\\ -\frac{2}{\pi}\omega+\frac{5}{3} & ,\frac{\pi}{3}\le\omega\le\frac{2\pi}{3}\\ 0 & ，[-\pi,\pi]\ \text{之间的其他}\omega\end{cases}$$

又由 $\Omega=\frac{\omega}{T}$，则有

$$H_a(j\Omega)=H(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\Omega T+\frac{5}{3}\ , & -\frac{2\pi}{3T}\le\Omega\le-\frac{\pi}{3T}\\ -\frac{2}{\pi}\Omega T+\frac{5}{3}\ , & \frac{\pi}{3T}\le\Omega\le\frac{2\pi}{3T}\\ 0\ , & \text{其他}\ \Omega\end{cases}$$





(2) 双线性变换法

根据双线性变换公式可得：

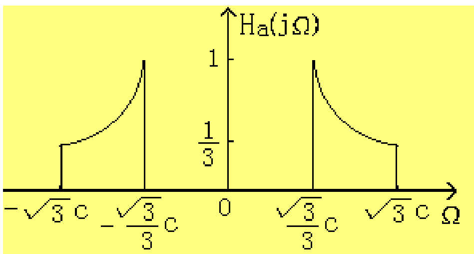
$$H_a(j\Omega)=H_a(jc\cdot tg\frac{\omega}{2})$$

$$\Rightarrow \Omega=c\cdot tg(\frac{\omega}{2})$$

$$\Rightarrow \quad \omega=arctg\ (\frac{\Omega}{c})$$

故

$$H_a(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}arctg\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} \quad , & -\sqrt{3}c\le\Omega\le-\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\\ -\dfrac{4}{\pi}arctg\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} \quad , & \dfrac{\sqrt{3}}{3}c\le\Omega\le\sqrt{3}c\\ 0 \quad , & 其它\Omega\end{cases}$$



18. 需设计一个数字低通滤波器,通带内幅度特性在低于 $\omega=0.3\pi$ 的频率衰减在 0.75dB 内，阻带在 $\omega=0.5\pi$ 到 π 之间的频率上衰减至少为 25dB。采用冲激响应不变法及双线性变换法,试确定模拟系统函数及其极点，请指出如何得到数字滤波器的系统函数。(设抽样周期 T=1)。

解: (1) 以巴特沃思滤波器为原型

(a) 冲激响应不变法

根据体意有：$20\log\left|H(e^{j0.3\pi})\right| \ge -0.75$

$$20\log\left|H(e^{j0.5\pi})\right| \le -25$$

又 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \dfrac{1}{1+(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$

则有临界条件为(注意$T=1, \Omega=\omega/T=\omega$):

则有临界条件为：

$$1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.075}$$

$$1+\left(\frac{0.5\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{2.5}$$

以上两式联解得：$N=8$，$\Omega_c = 1.047$

根据极点公式

$$S_k = \Omega_c e^{j[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]\pi}, k=1,2,.....,8$$

可以求得此系统函数的极点为：

$s_{1,8} = -0.204 \pm j1.027$ $s_{2,7} = -0.582 \pm j0.871$

$s_{3,6} = -0.871 \pm j0.582$ $s_{4,5} = -1.027 \pm j0.204$

由此可以得出系统函数的表示式为：

$$H_a(s) = \frac{1.2}{(s^2+1.742s+1.047)(s^2+0.408s+1.047)} \times \frac{1}{(s^2+1.164s+1.047)(s^2+2.054s+1.047)}$$

将此系统函数展成部分分式：

(若 S_k 极点的留数为 A_k，则 S_k^* 极点的留数为 A_k^*）

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{8}\frac{A_k}{s-s_k} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{8}\frac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

(b) 双线性变换法

$$\Omega = \frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

由题目所给指标可得：

$$20\log_{10}\left|H_a(j2tg\left(\frac{0.3\pi}{2}\right))\right| \geq -0.75$$

$$20\log_{10}\left|H_a(j2tg\left(\frac{0.5\pi}{2}\right))\right| \leq -25$$

由此可得临界条件为：

$$1+\left[2\cdot\frac{tg(0.15\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{0..075} \qquad (1)$$

$$1+\left[2\cdot\frac{tg(0.25\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{2.5} \qquad (2)$$

以上两式联解得：N=5.524　　可取 N=6

(i)　将 $N=6$ 代入 (2) 式中，使阻带边沿满足要求，可得：$\Omega_c=1.238$

根据极点公式

$S_k=\Omega_c e^{j[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]\pi}$，$(k=1,2,.....,6)$ 可得：

$$s_{1,6}=-0.32\pm j1.196$$

$$s_{2,5}=-0.875\pm j0.875$$

$$s_{3,4}=-1.196\pm j0.32$$

(ii) 将 $N=6$ 代入 (1) 式中，使通带边沿满足要求，可得：$\Omega_c=1.171$

此时极点应为：

$$s_{1,6}=-0.303\pm j1.131$$

$$s_{2,5}=-0.828\pm j0.828$$

$$s_{3,4}=-1.131\pm j0.303$$

查表得归一化原型巴特沃思滤波器的系统函数为：

$$H_{a_6}(s) = 1/(1+3.8637033\,s+7.4641016\,s^2+9.1416202\,s^3+7.4641016\,s^4+3.8637033\,s^5+s^6)$$

则 $H_a(s) = H_{a_6}(s)|_{s=\frac{s}{\Omega_c}}$ (取$\Omega_c = 1.171$)

则可求得

$$H(z) = H_a(s)|_{s=2\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{G（1+z^{-1})^6}{1+Az^{-1}+Bz^{-2}+Cz^{-3}+Dz^{-4}+Ez^{-5}+Fz^{-6}}$$

其中：$A = -3.0932801$ $B = 6.8156311$

$C = -8.3580917$ $D = 5.2010734$

$E = -1.286456$ $F = 0.0128198$

$G = 4.55775\times 10^{-3}$

(2) 以切贝雪夫滤波器为原型

(a) 冲激响应不变法

根据题目所给条件有：

$$\omega_c = 0.3\pi \quad , \quad \omega_{st} = 0.5\pi$$

$$\Rightarrow \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = 0.3\pi \quad , \quad \Omega_{st} = \frac{\omega_{st}}{T} = 0.5\pi$$

由题目所给指标可得：

$$20\log\left|H(e^{j0.3\pi})\right| \ge -0.75$$

$$20\log\left|H(e^{j0.5\pi})\right| \le -25$$

$$\delta_1 = 0.75dB \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1} = 0.4342$$

$$\left|H_a(j\Omega_{st})\right|^2 = \frac{1}{A^2} \qquad \left|H_a(j\Omega)\right|_{\max} = 1$$

则 $\log_{10} A^2 \ge \dfrac{25}{10}$

$$N \ge \frac{ch^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{A^2-1}\right]}{ch^{-1}\left[\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c}\right]} = \frac{ch^{-1}[40.8905]}{ch^{-1}[1.6667]}$$

$$= \frac{4.4039}{1.0986} = 4.0086$$

取 $N = 5$ 则可以求得：

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} = 4.8139$$

$$a = \frac{1}{2}\left[\alpha^{\frac{1}{5}} - \alpha^{-\frac{1}{5}}\right] = 0.3195$$

$$b = \frac{1}{2}\left[\alpha^{\frac{1}{5}} + \alpha^{-\frac{1}{5}}\right] = 1.0498$$

极点 $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$

$$= -\Omega_c a \sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right] + j\Omega_c b \cos\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right]$$

取左半平面极点即 $k = 1,2,3,4,5$ 可得：

$$s_{1,2} = -0.09305 \pm j0.9410$$
$$s_{3,4} = -0.2436 \pm j0.5816$$
$$s_5 = -0.3011$$

由此可以得出系统函数的表示式为：

$$H_a(s) = K\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(s-s_i)}$$

$$= \frac{K}{(s^2 + 0.1861s + 0.8941)(s^2 + 0.4872s + 0.3976)(s + 0.3011)}$$

根据 $H(j0) = \dfrac{K}{0.1070} = 1$ 可以解得$K = 0.1070$

将$H_a(s)$展成部分分式为：$H_a(s) = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{A_k}{(s-s_k)}$

则可得系统函数为：

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

(b) 双线性变换法：

由于$\Omega = \dfrac{2}{T} tg\dfrac{\omega}{2}$

则 $\Omega_c = 2tg\dfrac{0.3\pi}{2} = 1.091$，$\Omega_{st} = 2tg\dfrac{0.5\pi}{2} = 2$

根据题目所给条件有：

$$20\log_{10}\left|H_a(j2tg(0.15\pi))\right| \ge -0.75$$
$$20\log_{10}\left|H_a(j2tg(0.25\pi))\right| \le -25$$

则有：

$$\varepsilon=\sqrt{10^{\frac{\delta_1}{10}}-1}=\sqrt{10^{0.075}-1}=0.4342$$

$$\left|H_a(j\Omega_{st})\right|^2=\frac{1}{A^2}\Rightarrow A^2\geq 10^{2.5}=316.227766$$

$$\text{故}N\geq\frac{ch^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{A^2-1}\right]}{ch^{-1}\left[\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c}\right]}=\frac{ch^{-1}[40.8905]}{ch^{-1}[1.9626]}=\frac{4.4039}{1.2951}=3.4004$$

取 $N=4$ 可得：

$$\alpha=\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}=4.8139$$

$$a=\frac{1}{2}\left[\alpha^{\frac{1}{5}}-\alpha^{-\frac{1}{5}}\right]=0.4031$$

$$b=\frac{1}{2}\left[\alpha^{\frac{1}{5}}+\alpha^{-\frac{1}{5}}\right]=1.0782$$

从而可知： $a\Omega_c=0.4108$ $b\Omega_c=1.0987$

则左半平面两对极点为：

$$s_{1,4}=-0.1572\pm j1.0151$$

$$s_{2,3}=-0.3795\pm j0.4205$$

由此可得：

$$H_a(s)=\prod_{i=1}^{4}\frac{K}{s-s_i}$$

$$=\frac{K}{(s^2+0.3144s+1.0551)(s^2+0.759s+0.3208)}$$

因为 $N=4$ 为偶数，故 $\Omega=0$ 时

$$\left|H(j0)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=0.9173=\frac{K}{1.0551\times 0.3208}$$

从而得到 $K=0.3105$

则所求系统函数为：

$$H_a(s)=\frac{0.3105}{(s^2+0.3144s+1.0551)(s^2+0.759s+0.3208)}$$

利用公式 $H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 即可求得 $H(z)$：

$$
\begin{aligned}
&H(z)\\
&= \frac{0.3105(1+z^{-1})^4}{(5.6839+5.8898z^{-1}+4.4262z^{-2})(5.8388+8.6416z^{-1}+2.8028z^{-2})}\\
&= \frac{9.3560\times 10^{-3}(1+z^{-1})^4}{(1+1.0362z^{-1}+0.7787z^{-2})(1+1.4800z^{-1}+0.4800z^{-2})}
\end{aligned}
$$

第七章 有限长单位冲激响应（FIR）数字滤波器的设计方法

1． 用矩形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知 $\omega_c = 0.5\pi$，　$N = 21$。求出 $h(n)$ 并画出 $20\log\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线。

分析：此题给定的是理想线性相位低通滤波器，故

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & , -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & , \omega_c < \omega < \pi \ , -\pi < \omega < -\omega_c \end{cases} 。$$

解：

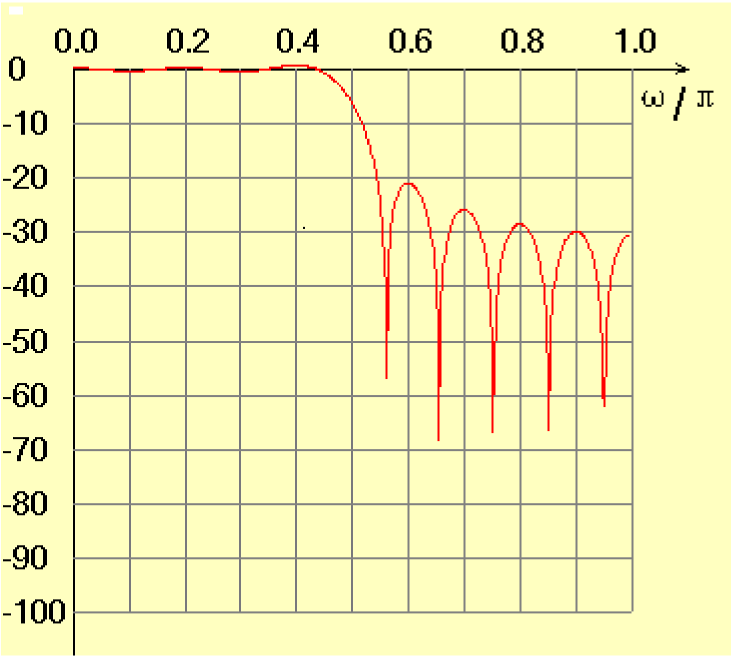
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

其中　$\alpha = (N-1)/2 = 10$　　$\omega_c = 0.5\pi$

故：$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} \dfrac{-\sin[\frac{n\pi}{2}]}{\pi(n-10)}, & 0 \le n \le 20 \\ 0, & n为其他 \end{cases}$

h(0)=　9.7654073033E-4
h(1)=　3.5358760506E-2
h(2)=　-9.7657600418E-4
h(3)=　-4.5465879142E-2
h(4)=　9.7651791293E-4
h(5)=　6.3656955957E-2
h(6)=　-9.7658322193E-4
h(7)=　-1.0610036552E-1
h(8)=　9.7643269692E-4
h(9)=　3.1830877066E-1
h(10)=　4.9902343750E-1
h(11)=　3.1830900908E-1
h(12)=　9.7669276875E-4
h(13)=　-1.0610023141E-1
h(14)=　-9.7654142883E-4
h(15)=　6.3657015562E-2
h(16)=　9.7660662141E-4
h(17)=　-4.5465819538E-2
h(18)=　-9.7654841375E-4
h(19)=　3.5358794034E-2
h(20)=　9.7658403683E-4



2．用三角形窗设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知：

$\omega_c = 0.5\pi$， $N = 21$。求出 $h(n)$ 并画出 $20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|$ 的曲线。

解：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

由题意可知： $=(N-1)/2 = 10$, $\omega_c = 0.5\pi$

因为用三角形窗设计：

$\therefore h(n) = h_d(n)w(n)$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{10}n\cdot\dfrac{-\sin[\dfrac{n\pi}{2}]}{\pi(n-10)} & ,\ 0 \le n \le 10 \\ (2-\dfrac{1}{10}n)\cdot\dfrac{-\sin[\dfrac{n\pi}{2}]}{\pi(n-10)} & ,\ 10 < n \le 20 \\ 0 & ,\ n\text{为其他} \end{cases}$$

h(0)= 0.0000000000E0
h(1)= 3.5358760506E-3
h(2)= -1.9531520957E-4
h(3)= -1.3639763929E-2
h(4)= 3.9060716517E-4
h(5)= 3.1828477979E-2
h(6)= -5.8594997972E-4

h(7)= -7.4270255864E-2
h(8)= 7.8114616917E-4
h(9)= 2.8647789359E-1
h(10)= 4.9902343750E-1
h(11)= 2.8647810221E-1
h(12)= 7.8135420335E-4
h(13)= -7.4270159006E-2
h(14)= -5.8592489222E-4
h(15)= 3.1828507781E-2
h(16)= 3.9064264274E-4
h(17)= -1.3639746234E-2
h(18)= -1.9530967984E-4
h(19)= 3.5358795431E-3
h(20)= 0.0000000000E0

3．用汉宁窗设计一个线性相位高通滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi-\omega_c \le \omega \le \pi \\ 0\quad , & 0 \le \omega < \pi-\omega_c \end{cases}$$

求出 $h(n)$ 的表达式，确定 α 与 N 的关系。写出 $h(n)$ 的值，

并画出 $20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线(设 $\omega_c=0.5\pi$, $N=51$)。

分析：此题给定的只是 $H_d(e^{j\omega})$ 在 0～π 之间的表达式，但是在求解时，必须把它看成-π～π（或 0～2π）之间的分布，不能只用 0～π 区域来求解。

解：根据题意有：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_d(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}e^{-j(\omega-\pi)\alpha}\;e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\,\frac{1}{j(n-\alpha)}\left[e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}\right]$$

$$=\frac{e^{jn\pi}}{j2\pi(n-\alpha)}[e^{j\omega_c(n-\alpha)}-e^{-j\omega_c(n-\alpha)}]$$

$$=e^{jn\pi}\,\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\omega_c}$$

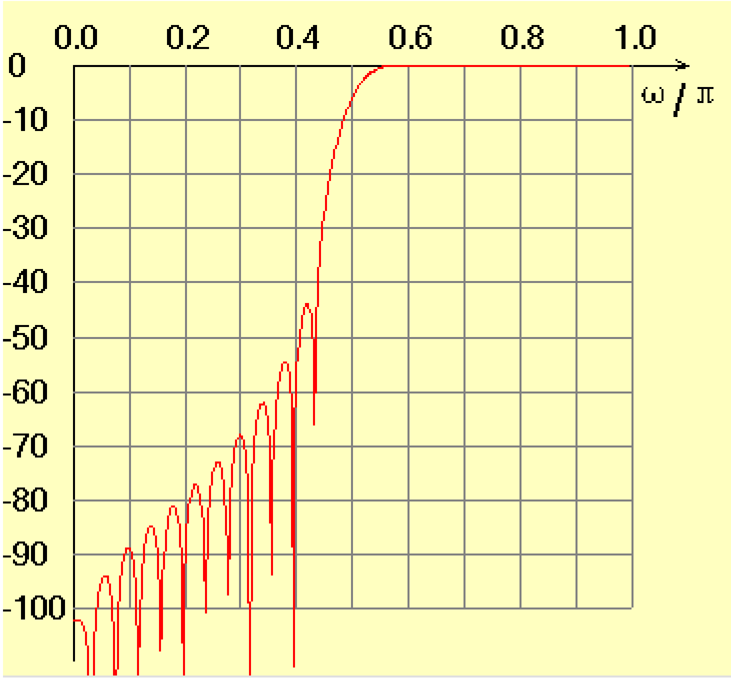
$$=(-1)^n\,\frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\omega_c}$$

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cdot(-1)^n \\ \times\dfrac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\pi(n-\alpha)}, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & n\text{为其他值}\end{cases}$$

h(0)= 0.0000000000E0
h(1)= 3.8502421376E-6
h(2)= 2.1703662060E-4
h(3)= -3.4288590541E-5
h(4)= -9.3614991056E-4
h(5)= 9.3251539511E-5
h(6)= 2.2677441593E-3
h(7)= -1.7703868798E-4
h(8)= -4.3416726403E-3
h(9)= 2.8037585435E-4
h(10)= 7.3263808154E-3
h(11)= -3.9677796303E-4
h(12)= -1.1467883363E-2
h(13)= 5.1893695490E-4
h(14)= 1.7173256725E-2
h(15)= -6.3915370265E-4
h(16)= -2.5206908584E-2
h(17)= 7.4990402209E-4

h(18)=	3.7223428488E-2
h(19)=	-8.4418745246E-4
h(20)=	-5.7578284293E-2
h(21)=	9.1610912932E-4
h(22)=	1.0237494111E-1
h(23)=	-9.6111540915E-4
h(24)=	-3.1705406308E-1
h(25)=	5.0097656250E-1
h(26)=	-3.1705376506E-1
h(27)=	-9.6132780891E-4
h(28)=	1.0237491876E-1
h(29)=	9.1622082982E-4
h(30)=	-5.7578280568E-2
h(31)=	-8.4425939713E-4
h(32)=	3.7223447114E-2
h(33)=	7.4992782902E-4
h(34)=	-2.5206902996E-2
h(35)=	-6.3918298110E-4
h(36)=	1.7173264176E-2
h(37)=	5.1894458011E-4
h(38)=	-1.1467874050E-2
h(39)=	-3.9679490146E-4
h(40)=	7.3263822123E-3
h(41)=	2.8038662276E-4
h(42)=	-4.3416772969E-3
h(43)=	-1.7703943013E-4
h(44)=	2.2677420639E-3
h(45)=	9.3255301181E-5
h(46)=	-9.3615107471E-4
h(47)=	-3.4289114410E-5
h(48)=	2.1703691164E-4
h(49)=	3.8502503230E-6
h(50)=	-3.6680953687E-17



4．用**海明窗**设计一个线性相位带通滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & -\omega_c \le \omega-\omega_0 \le \omega_c \\ 0, & 0\le\omega<\omega_0-\omega_c,\ \omega_0+\omega_c<\omega\le\pi \end{cases}$$

求出 $h(n)$ 的表达式并画出 $20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线。

（设 $\omega_c=0.2\pi$，$\omega_0=0.5\pi$，$N=51$）

解：

可求得此滤波器的时域函数为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}e^{-j\omega\alpha}e^{jn\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\omega_c}^{-\omega_0+\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{j(n-\alpha)}\cdot\left[e^{j(n-\alpha)(\omega_0+\omega_c)}-e^{j(n-\alpha)(\omega_0-\omega_c)}+e^{j(n-\alpha)(\omega_c-\omega_0)}-e^{j(n-\alpha)(-\omega_0-\omega_c)}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[(\omega_0+\omega_c)(n-\alpha)]-\sin[(\omega_0-\omega_c)(n-\alpha)]\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi(n-\alpha)}\sin[(n-\alpha)\omega_c]\cos[(n-\alpha)\omega_0]$$

采用海明窗设计时：

$$h(n)=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right]\dfrac{2}{\pi(n-\alpha)} \\ \times\sin\left[(n-\alpha)\omega_c\right]\cos\left[(n-\alpha)\omega_0\right], 0\le n\le N-1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ，n\text{为其他}\end{cases}$$

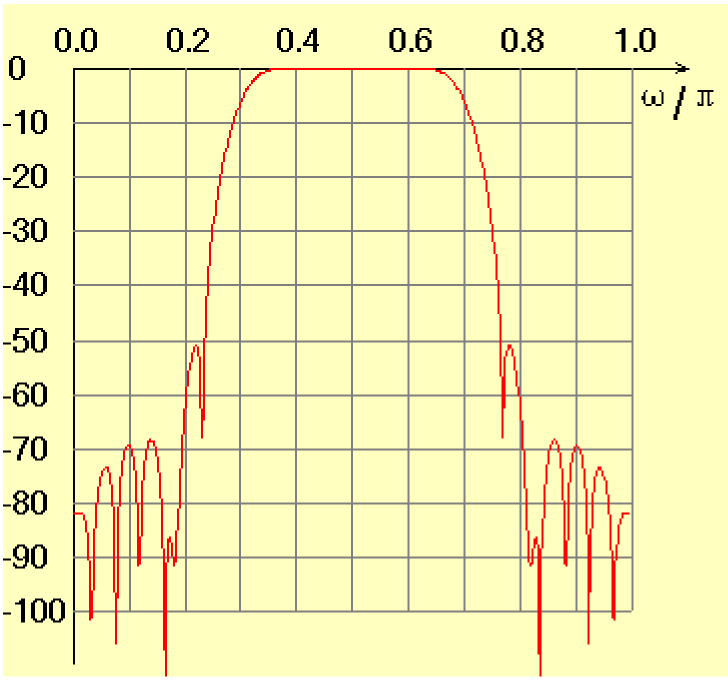
其中 $\alpha=(N-1)/2$

代入 $N=51$ 得 $\alpha=25$

$$h(n)=\begin{cases}[0.54-0.46\cos(\dfrac{\pi n}{25})]\dfrac{2}{\pi(n-25)} \\ \times\sin[(n-25)\dfrac{\pi}{5}]\cos[(n-25)\dfrac{\pi}{2}]\text{，}0\le n\le 50 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ，n\text{为其他值}\end{cases}$$

h(0)= -1.7792453066E-9
h(1)= 1.2784593273E-3
h(2)= 2.8278364095E-9
h(3)= -3.1063116621E-3
h(4)= -1.1197345273E-9
h(5)= 6.5603257099E-5
h(6)= -5.4661515314E-9
h(7)= 8.2749519497E-3
h(8)= 1.0554026986E-8
h(9)= -8.1601543352E-3
h(10)= -2.0916635091E-9
h(11)= -1.1989242397E-2
h(12)= -1.5438420320E-8
h(13)= 2.8777478263E-2
h(14)= 1.3683782996E-8
h(15)= -2.6650217478E-4
h(16)= 2.1395559102E-8
h(17)= -5.9433232993E-2
h(18)= -4.7929443525E-8
h(19)= 5.4869838059E-2
h(20)= -1.6576438000E-9
h(21)= 8.7930023670E-2
h(22)= 1.3147858624E-7
h(23)= -2.9847630858E-1
h(24)= -2.4842057655E-7
h(25)= 4.0039062500E-1
h(26)= 2.4884724326E-7
h(27)= -2.9847630858E-1

h(28)= -1.3260110165E-7
h(29)= 8.7929971516E-2
h(30)= 3.0146882768E-9
h(31)= 5.4869886488E-2
h(32)= 4.6942115972E-8
h(33)= -5.9433255345E-2
h(34)= -2.1138220063E-8
h(35)= -2.6650624932E-4
h(36)= -1.3386657116E-8
h(37)= 2.8777483851E-2
h(38)= 1.5110085627E-8
h(39)= -1.1989233084E-2
h(40)= 2.0960144731E-9
h(41)= -8.1601683050E-3
h(42)= -1.0312461107E-8
h(43)= 8.2749547437E-3
h(44)= 5.2577551202E-9
h(45)= 6.5610285674E-5
h(46)= 1.1623461083E-9
h(47)= -3.1063179485E-3
h(48)= -2.7633737520E-9
h(49)= 1.2784597930E-3
h(50)= 1.6941573699E-9



5．用布拉克曼窗设计一个线性相位的理想带通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} je^{-j\omega\alpha}, & -\omega_c \le \omega - \omega_0 \le \omega_c \\ 0, & 0 \le \omega < \pi - \omega_c,\ \omega_0 + \omega_c < \omega \le \pi \end{cases}$$

求出 $h(n)$ 序列，并画出 $20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线。

（设 $\omega_c=0.2\pi$，$\omega_0=0.4\pi$，$N=51$ ）

解:可求得此滤波器的时域函数为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}je^{-j\omega\alpha}\,e^{jn\omega}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\omega_c}^{-\omega_0+\omega_c}je^{-j\omega\alpha}\,e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{j}{j(n-\alpha)}$$

$$[e^{j(n-\alpha)(\omega_0+\omega_c)}-e^{j(n-\alpha)(\omega_0-\omega_c)}$$

$$+e^{j(n-\alpha)(\omega_c-\omega_0)}-e^{j(n-\alpha)(-\omega_c-\omega_0)}]$$

$$=\frac{j}{\pi(n-\alpha)}\begin{bmatrix}\sin(\omega_c+\omega_0)(n-\alpha)\\ \quad-\sin(\omega_0-\omega_c)(n-\alpha)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2j}{\pi(n-\alpha)}\sin\left[(n-\alpha)\omega_c\right]\cos\left[(n-\alpha)\omega_0\right]$$

采用布拉克曼窗设计时（ N =51 ）：

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

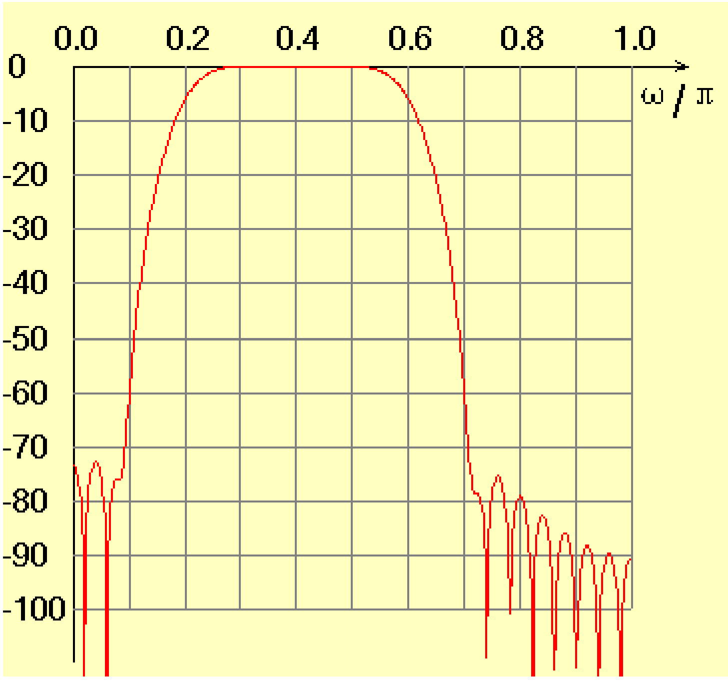
$$=\begin{cases}\left[0.42-0.5\cos(\frac{\pi n}{25})+0.08\cos(\frac{2\pi n}{25})\right]\cdot\frac{2j}{\pi(n-25)}\\ \quad\times\sin[(n-25)\frac{\pi}{5}]\cos[0.4(n-25)\pi]\ ,\ 0\le n\le N-1\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,\ n\text{为其他值}\end{cases}$$

其中　　$\alpha=(N-1)/2=25$

这个滤波器是 90°移相的线性相位带通滤波器（或称正交变换线性相位带通滤波器)。

h(0)=　5.4237784440E-21
h(1)=　7.3612609413E-6
h(2)=　-1.2074228289E-4
h(3)=　-3.0629785033E-4
h(4)=　1.2753845658E-4
h(5)=　1.5712101231E-5
h(6)=　-3.8863369264E-4
h(7)=　2.3028661963E-3
h(8)=　3.4645688720E-3
h(9)=　-1.0745652253E-3
h(10)=　-7.8437842603E-5

h(11)= 2.1651936695E-3
h(12)= -1.1488015763E-2
h(13)= -1.5386348590E-2
h(14)= 4.4676153921E-3
h(15)= 1.9913387951E-4
h(16)= -7.6720505022E-3
h(17)= 3.9686974138E-2
h(18)= 5.1031570882E-2
h(19)= -1.4946334995E-2
h(20)= -3.3170872484E-4
h(21)= 2.6351382956E-2
h(22)= -1.5350005031E-1
h(23)= -2.3916515708E-1
h(24)= 1.1454884708E-1
h(25)= 4.0039062500E-1
h(26)= 1.1454940587E-1
h(27)= -2.3916482925E-1
h(28)= -1.5350016952E-1
h(29)= 2.6351239532E-2
h(30)= -3.3176422585E-4
h(31)= -1.4946426265E-2
h(32)= 5.1031511277E-2
h(33)= 3.9687015116E-2
h(34)= -7.6719988137E-3
h(35)= 1.9916752353E-4
h(36)= 4.4676479883E-3
h(37)= -1.5386346728E-2
h(38)= -1.1488039978E-2
h(39)= 2.1651820280E-3
h(40)= -7.8440425568E-5
h(41)= -1.0745733744E-3
h(42)= 3.4645658452E-3
h(43)= 2.3028708529E-3
h(44)= -3.8862982183E-4
h(45)= 1.5713647372E-5
h(46)= 1.2753918418E-4
h(47)= -3.0629831599E-4
h(48)= -1.2074281403E-4
h(49)= 7.3612377491E-6
h(50)= -4.0414822053E-19



6．用凯泽窗设计一个**线性相位理想低通滤波器**，若输入参数为低通截止频率ω_c，冲击响应长度点数 N 以及凯泽窗系数β，求出$h(n)$，并画出$20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right|$曲线。

解：根据题意有：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

其中　$\alpha = (N-1)/2$

则所求用凯塞窗设计的低通滤波器的函数表达式为：

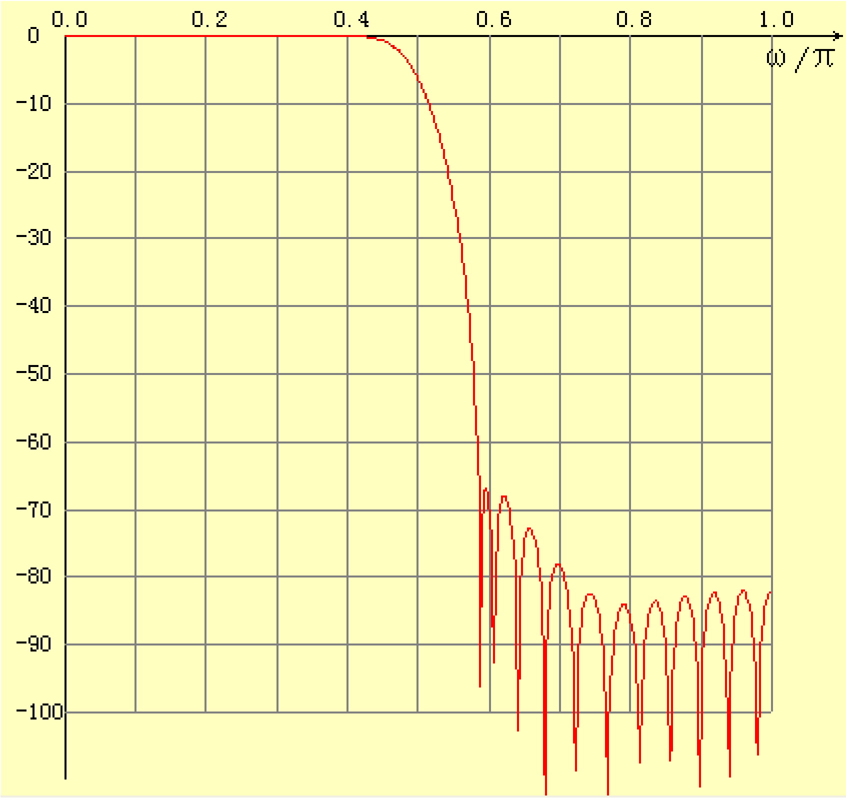
$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right)}{I_0(\beta)} \times \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & n\text{为其他值} \end{cases}$$

注：$I_0(\cdot)$ 为第一类变形零阶贝塞 尔函数

β 是一个可自由选择的参 数

($\beta = 0$时凯泽窗相当于矩形窗)



7. 试用频率抽样法设计一个 FIR 线性相位数字低通滤波器。已知 $\omega_c = 0.5\pi$，$N = 51$

分析：此题是频率抽样设计法。

解： 根据题意有：

$$\left|H_d(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & , \ 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0 & , \ \text{其他}\omega \end{cases}$$

则有

$$\left|H(k)\right| = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \le k \le Int[\dfrac{N\omega_c}{2\pi}] = 12 \\ 0 \ , \ 13 \le k \le \dfrac{N-1}{2} = 25 \end{cases}$$

所以

$$H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=e^{-j25\omega}\left\{\sum_{k=1}^{12}\left[\frac{\sin\left[51\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{51}\right)\right]}{51\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{51}\right)}+\frac{\sin\left[51\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{51}\right)\right]}{55\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{51}\right)}\right]\right.$$

$$\left.+\quad\frac{\sin\left(\frac{51}{2}\omega\right)}{51\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right\}$$

8．如果一个线性相位带通滤波器的频率响应为：

$$H_{BP}(e^{j\omega})=H_{BP}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

(1)试证明一个线性相位带阻滤波器可以表示成

$$H_{BR}(e^{j\omega})=\left[1-H_{BP}(\omega)\right]\cdot e^{j\varphi(\omega)}\qquad,\qquad 0\le\omega\le\pi$$

(2)试用带通滤波器的单位冲激响应 $h_{BP}(n)$ 来表达带阻滤

波器的单位冲激响应 $h_{BR}(n)$。

分析：此题是证明题，难度不大，但很实用。

(1) 证明：

由于 $H_{BP}(e^{j\omega})=H_{BP}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，且又是一

线性相位带通滤波器，则：

$$H_{BP}(\omega)=\begin{cases}0\quad,\ 0\le\omega<\omega_0-\omega_c\ \text{或}\\ \qquad\omega_0\ +\omega_c<\omega\le\pi\\ 1\quad,\ -\omega_c\le\omega-\omega_0\le\omega_c\end{cases}$$

且 φ（ω）也是线性相位

又因为 $H_{BR}(e^{j\omega})=H_{BR}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

$$H_{BR}(\omega)=\begin{cases}1\quad,\ 0\le\omega<\omega_0-\omega_c\ \text{或}\\ \qquad\omega_0\ +\omega_c<\omega\le\pi\\ 0\quad,\ -\omega_c\le\omega-\omega_0\le\omega_c\end{cases}$$

因而 $H_{BR}(\omega)=1-H_{BP}(\omega)$

所以带阻滤波器可以表示成：

$$H_{BR}(e^{j\omega})=\left[1-H_{BP}(\omega)\right]e^{j\varphi(\omega)}$$

(2)解：由题意可得：

$$h_{BP}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{BP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$h_{BR}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-H_{BP}(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j[\varphi(\omega)+\omega n]}d\omega-h_{BP}(n)$$

考虑到 $\varphi(\omega)$的特性，有如下结论：

$(I)\quad \varphi(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$

$$h_{BR}(n)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\sin\left(\varphi(\pi)+\pi n\right)}{\left[\varphi^{'}(\omega)+n\right]}-h_{BP}(n)$$

$$=\frac{\sin\left\{\left(-\frac{N-1}{2}+n\right)\pi\right\}}{\pi\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}-h_{BP}(n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin[(N-1)\pi/2]}{\pi[n-(N-1)/2]}-h_{Bp}(n) & ,\quad \text{N为偶数}\\ -h_{Bp}(n) & ,\quad \text{N为奇数}\end{cases}$$

(II) 当$\varphi(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega+\frac{\pi}{2}$

$$有\ \mathrm{h_{BR}}(n)=\begin{cases}j\dfrac{(-1)^{n+1}\sin[(N-1)\pi/2]}{\pi[n-(N-1)/2]}-h_{Bp}(n) & ,\quad \text{N为偶数}\\ -h_{Bp}(n) & ,\quad \text{N为奇数}\end{cases}$$

9. 已知图 P9-1 中的$h_1(n)$是偶对称序列$N=8$，图 P9-2 中的 $h_2(n)$是$h_1(n)$圆周移位$\left(移N/2=4位\right)$后的序列。设

$$H_1(k)=DFT\left[h_1(n)\right]\quad ,\quad H_2(k)=DFT\left[h_2(n)\right]$$

(1) 问$\left|H_1(k)\right|=\left|H_2(k)\right|$成立否？$\theta_1(k)$与$\theta_2(k)$有什么关系？

(2) $h_1(n)$，$h_2(n)$各构成一个低通滤波器，试问它们是否是线性相位的？延时是多少？

(3) 这两个滤波器性能是否相同？为什么？若不同，谁优谁劣？

分析：此题是分析讨论题，只要用圆周移位特性即可证明。

解: (1)根据题意可知：

$$h_2((n))_8 = h_1((n-4))_8$$

$$\Rightarrow H_2(k) = \sum_{n=0}^{7} h_1((n-4))_8 W_8^{nk} R_8(n)$$

$$\underline{\underline{i=n-4}} \sum_{i=-4}^{3} \tilde{h}_1(i) W_8^{ki} W_8^{4k}$$

$$= W_8^{4k} \sum_{i=0}^{7} \tilde{h}_1(i) W_8^{ki}$$

$$= H_1(k) W_8^{4k}$$

由上式显然可以看出：

$$|H_2(k)| = |H_1(k)|$$

$$\theta_2(k) = \theta_1(k) - \frac{2\pi}{8} \cdot 4k = \theta_1(k) - k\pi \qquad ,$$

(2) $h_1(n), h_2(n)$ 各构成低通滤波器时，由于都满足偶对称，因此都是线性相位的。

延时 $\alpha = \frac{N-1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

（3）由于 $h_2(n) = h_1((n-4))_8 R_8(n)$

故 $H_2(k) = e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 4} H_1(k)$

$$= e^{-jk\pi} H_1(k)$$

$$= (-1)^k H_1(k)$$

(a) 令 $H_1(k) = |H_1(k)| e^{j\theta_1(k)}$

$$H_2(k) = |H_2(k)| e^{j\theta_2(k)}$$

则 $|H_1(k)| = |H_2(k)|$， $\theta_2(k) = \theta_1(k) - k\pi$

(b) $h_1(n)$ 及 $h_2(n)$ 都是以 $n = (N-1)/2 = 3.5$ 为对称中心偶对称序列，故以它们为单位冲激响应构成的两个低通滤波器都是线性相位的，延迟为 $\tau = (N-1)/2$

(c) 要知两个滤波器的性能，必须求出它的各自的频率响应的幅度函数，看看它们的通带起伏以及阻带衰减的情况，由此来加以比较。$N = 8$，偶数，线性相位，故有

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos[(\frac{N-1}{2} - n)\omega]$$

$$= \sum_{n=0}^{3} 2h(n)\cos[\omega(\frac{7}{2}-n)]$$

$$= \sum_{n=1}^{N/2} 2h(\frac{N}{2}-n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

$$= \sum_{n=1}^{3} 2h(4-n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

$$= 2[h(3)\cos(\omega/2)+h(2)\cos(3\omega/2) + h(1)\cos(5\omega/2)+h(0)\cos(7\omega/2)]$$

可以令

$h_1(0)=h_1(7)=1$，$h_1(1)=h_1(6)=2$

$h_1(2)=h_1(5)=3$，$h_1(3)=h_1(4)=4$

及

$h_2(0)=h_2(7)=4$，$h_2(1)=h_2(6)=3$

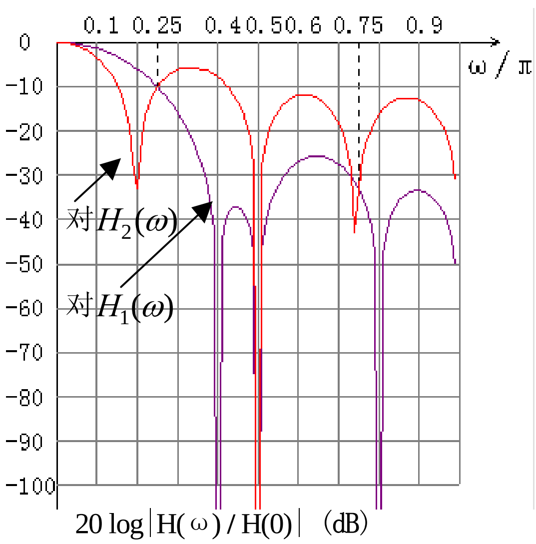
$h_2(2)=h_2(5)=2$，$h_2(3)=h_2(4)=1$

代入可得：

$$H_1(\omega) = 2[4\cos(\omega/2)+3\cos(3\omega/2) + 2\cos(5\omega/2)+\cos(7\omega/2)]$$

$$H_2(\omega) = 2[\cos(\omega/2)+2\cos(3\omega/2) + 3\cos(5\omega/2)+4\cos(7\omega/2)]$$

由以上两式可画出 $H_1(\omega)$ 及 $H_2(\omega)$的图形 如下：



可以看出 $H_1(\omega)$ 的阻带衰减大，而 $H_2(\omega)$ 的阻带衰减小，从这一点看来 $H_1(\omega)$ 优于 $H_2(\omega)$，当然从带通来看，它们都是平滑衰减。但 $H_1(\omega)$ 的带通较之 $H_2(\omega)$ 的通带要宽一些。

10. 请选择合适的窗函数及 N 来设计一个线性相位低通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & , \quad 0 \le \omega < \omega_c \\ 0 & , \quad \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$

要求其最小阻带衰减为-45dB，过渡带宽为 $8\pi/51$。

（1）求出 $h(n)$ 并画出 $20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线。（设 $\omega_c = 0.5\pi$）

（2）保留原有轨迹，画出用另几个窗函数设计时的 $20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right|$ 曲线。

分析：此题是真正实用的设计题，从中可以看到阻带衰减影响窗形状的选择（当然用凯泽窗则可改变β来满足阻带衰减的要求）而 N 的选择则影响过渡带宽。

解：

(1) 因为题目要求设计的低通滤波器的最小阻带衰减为-45dB，对照书上的表格《六种窗函数基本参数的比较》可以知道：矩形窗，三角形窗，汉宁窗都不符合条件，所以应该选择海明窗。选 $N = 43$，过渡带宽为 $\frac{6.6\pi}{N} < \frac{8\pi}{51}$，即小于所需的过渡带宽，满足要求，则有：

$w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] R_N(n)$ 又根据题目所给低通滤波器的表达式求得：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

由此可得：

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \begin{cases} \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{21}\right)\right] \cdot \frac{\sin[0.5(n-21)\pi]}{(n-21)\pi}, \\ \qquad\qquad 0 \le n \le 42 \\ 0 \qquad , \qquad n\text{为其他值} \end{cases}$$

此处 $\alpha = (N-1)/2 = 21$

第八章　　数字信号处理中有限字长效应

1. 设数字滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{0.017221333\ z^{-1}}{1-1.7235682\ z^{-1}+0.74081822\ z^{-2}}$$

现用 8 bit 字长的寄存器来存放其系数，试求此时该滤波器的实际 $\hat{H}(z)$ 表示式。

分析：

把所有正数用 b+1=8bit 寄存器长度表示，其中第一位存整数位，后七位用来存小数位。

解：

设8bit字长的寄存器存放无符 号正数，第一位用来存整数位，后七位用来存小数。

$$(0.017221333)_{10}=(0.000001000110\cdots)_2$$
$$\rightarrow(0.0000010)_2=(0.015625)_{10}$$
$$(1.7235682)_{10}=(1.101110010001\cdots)_2$$
$$\rightarrow(1.1011101)_2=(1.7265625)_{10}$$
$$(0.74081822)_{10}=(0.101111011101\cdots)_2$$
$$\rightarrow(0.1011111)_2=(0.7421875)_{10}$$

$$\therefore\hat{H}(z)=\frac{0.015625z^{-1}}{1-1.7265625z^{-1}+0.7421875z^{-2}}$$

2. 图P 8-2(a)为一阶系统的流图

(a)求系统对如下输入的响应：

$$X(n)=\begin{cases}1/2 & n>0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

n 较大时，系统的响应是什么？

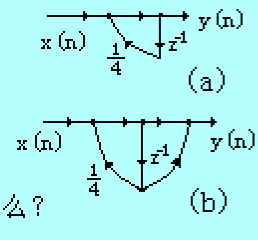


图 P 8-2

(b)系统用定点算法实现。网络中的系数和所有变量都用5位寄存器表示成原码，即 s 为符号位，寄存器值 $= a\times 2^{-1} + b\times 2^{-2} + c\times 2^{-3} + d\times 2^{-4}$，其中$a, b, c, d$ 是1或0。乘法的结果作截尾处理，即只保留符号位和前四位。试计算已量化的系统对 (a) 中输入的响应，求出未量化系统在 $0 \le n \le 5$ 时响应。

问n比较大时如何比较这两种响应？

(c)研究$P8-2(b)$所示系统，其输入为

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^n, & \text{n} \ge 0 \\ 0, & \text{n} < 0 \end{cases} \qquad \text{重作}(a),(b).$$

(d)当尾数采用舍入处理时，重作$(b),(c)$.

解：(a)

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z)\cdot H(z)$$

$$= \frac{1}{2(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\therefore\ y(n) = [\frac{2}{3} - \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^n]u(n),$$

即当 n较大时，$y(n) \to \frac{2}{3}$

解 ：(*b*)

由 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$，可得 ：

$\hat{y}(1)=0.625 \qquad y(1)=0.625$

$\hat{y}(2)=0.625 \qquad y(2)=0.65625$

$\hat{y}(3)=0.625 \qquad y(3)=0.6640625$

$\hat{y}(4)=0.625 \qquad y(4)=0.666015625$

$\hat{y}(5)=0.625 \qquad y(5)=0.666503906$

$\vdots \qquad \vdots$

当n较大时，未作量化处理时 $y(n)\to\dfrac{2}{3}$，

作截尾处理时 $\hat{y}(n)\to\dfrac{5}{8}$

$y(n)=\dfrac{1}{4}y(n-1)+x(n)$

截尾量化后，$\hat{y}(0)=x(0)=0.5$，

未量化时，$y(0)=x(0)=0.5$

解(c)：

$H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad X(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+z^{-1}}$

$\therefore Y(z)=X(z)\cdot H(z)=\dfrac{1}{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$

$y(n)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{4})^n u(n)$，当$n$较大时，$y(n)\to 0$

截尾量化后，$\hat{y}(0)=x(0)=0.5$

未量化，$y(0)=x(0)=0.5$

$\hat{y}(1)=0.125 \qquad y(1)=0.125$

$\hat{y}(2)=0 \qquad y(2)=0.03125$

$\hat{y}(3)=0 \qquad y(3)=0.0078125$

$\hat{y}(4)=0 \qquad y(4)=0.001953125$

$\hat{y}(5)=0 \qquad y(5)=0.00048828125$

$\vdots \qquad \vdots$

未作量化处理，当$n\to\infty$时，$y(n)\to 0$，

作截尾量化后，$n\geq 2$时$\hat{y}(n)=0$

解(d)：

对图 $p8-2$（a）进行舍入量化

$\hat{y}(0)=x(0)=0.5=(0.1000)_2$ ，

$\hat{y}(1)=0.625=(0.1010)_2$ ，

$\hat{y}(2)=0.6875=(0.1011)_2$ ，

$\hat{y}(3)=0.6875=(0.1011)_2, \cdots$

从 $\hat{y}(2)$以后 ，$\hat{y}(n)=0.6875$ ，

即当 n较大时 ，$\hat{y}(n)=0.6875$

对图 $p8-3$（b）进行舍入量化

$\hat{y}(0)=x(0)=0.5=(0.1000)_2$，

$\hat{y}(1)=0.125=(0.0010)_2$

$\hat{y}(2)=0.0625=(0.0001)_2$ ，

$\hat{y}(3)=0$ ，$\hat{y}(4)=0, \cdots$

$n\geq 3$ 时 ，$\hat{y}(n)=0,$

即当 n较大时 ，$\hat{y}(n)=0.$

3. A/D变换器的字长为 b,其输出端接一网络,网络的单位抽样响应为:

$$h(n)=\left[a^n+(-a)^n\right]u(n)$$

试求网络输出的A/D 量化噪声方差 σ_f^2。

分析： 量化噪声方差为 σ_e^2 通过线性系统其输出

量化噪声方差 σ_f^2 为

$$\sigma_f^2=\sigma_e^2\sum_{n=0}^{\infty}h^2(n)=\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z}。$$

解 ：

$$\sigma_f^2=\sigma_e^2\sum_{n=0}^{\infty}h^2(n)$$

$$=\sigma_e^2\sum_{n=0}^{\infty}[a^n+(-a)^n]^2$$

$$=\sigma_e^2\sum_{n=0}^{\infty}[a^{2n}+2(-a^2)^n+a^{2n}]$$

$$=2\sigma_e^2\cdot[\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1+a^2}]$$

$$=\frac{4\sigma_e^2}{1-a^4}=\frac{4}{1-a^4}\cdot\frac{\Delta^2}{12}$$

$$=\frac{2^{-2b}}{3(1-a^4)}$$

4．设数字滤波器 $H(z)=\dfrac{0.06}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}=\dfrac{0.06}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$

利用 a_1,a_2 变化造成的极点位置灵敏度，设 a_1,a_2 分别造成极点在正常值的 0.2%,0.3% 内变化，试确定所需的最小字长。

分析：

注意所给数据 0.2 %、0.3 % 分别是 a_1、a_2 变化时造成的极点位置相对变化，而不是绝对变化。例如对 z_1 极点则有 $\left|\dfrac{\Delta z_1'}{z_1}\right|=0.2\%$

（a_1 变化的影响），$\left|\dfrac{\Delta z_1''}{z_1}\right|=0.3\%$ （a_2 变化的影响）。

又 $|\Delta z_1'|=\left|\dfrac{\partial z_1}{\partial a_1}\right|\cdot|\Delta a_1|$，联立即可求得 $|\Delta a_1|$，同样可求 $|\Delta a_2|$。

取 $\min[\,|\Delta a_1|,|\Delta a_2|]=|\Delta a|$，则有字长 b 满足 $2^{-b}<2|\Delta a|$

5.一个二阶 IIR 滤波器,其差分方程：$y(n)=y(n-1)-ay(n-2)+x(n)$

现采用 $b=3$ 位的定点制运算,作舍入处理.

(a) 当系数 $a=0.75$,零输入 $x(n)=0$,初始条件为 $\hat{y}(-2)=0$，

$\hat{y}(-1)=0.5$.求 $0\le n\le 10$ 的 11 点输出 $\hat{y}(n)$ 值.

(b) 证明当 $Q_R[a\hat{y}(n-2)]=\hat{y}(n-2)$ 时发生零输入极限环振 荡,

并用等效极点迁移来解　释这个现象。

分析：

b=3 表示小数是 3 位，加整数位后为 b+1 位定点算法只有相乘才有舍入量化误差。一阶系统零输入极限环振荡发生在

$\left|Q_R[a\hat{y}(n-1)]\right| = \left|\hat{y}(n-1)\right|$ 时

对二阶系统，当$Q_R[a\hat{y}(n-2)] = \hat{y}(n-2)$　(1)

再利用原差分方程的量化关系式可得到：$\hat{y}(n+1) = -\hat{y}(n-2)$　（2）

公式(1)为进入极限环振荡的条件，公式(2)为在极限环内应满足的关系。由此看出只有在 n = 4 既满足(1)式，且在极限环内满足(2)式。

解：(a)依题意：

$$\hat{y}(n) = \hat{y}(n-1) - 0.75\hat{y}(n-2) + x(n)$$

当 $x(n) = 0$ 时有：

$$\hat{y}(n) = \hat{y}(n-1) - 0.75\hat{y}(n-2)$$

$$\therefore \hat{y}(0) = \hat{y}(-1) - Q_R[0.75\hat{y}(-2)] = 0.5$$

$$\hat{y}(1) = \hat{y}(0) - Q_R[0.75\hat{y}(-1)]$$
$$= 0.5 - Q_R[0.75\times 0.5] = 0.125$$

$$\hat{y}(2) = \hat{y}(1) - Q_R[0.75\hat{y}(0)]$$
$$= 0.125 - Q_R[0.75\times 0.5] = -0.25$$

$$\hat{y}(3) = \hat{y}(2) - Q_R[0.75\hat{y}(1)]$$
$$= -0.25 - Q_R[0.75\times 0.125] = -0.375$$

$$\hat{y}(4) = \hat{y}(3) - Q_R[0.75\hat{y}(2)]$$
$$= -0.375 - Q_R[0.75\times(-0.25)] = -0.125$$

$$\hat{y}(5) = \hat{y}(4) - Q_R[0.75\hat{y}(3)]$$
$$= -0.125 - Q_R[0.75\times(-0.375)] = 0.125$$

$$\hat{y}(6) = \hat{y}(5) - Q_R[0.75\hat{y}(4)]$$
$$= 0.125 - Q_R[0.75\times(-0.125)] = 0.25$$

$$\hat{y}(7) = \hat{y}(6) - Q_R[0.75\hat{y}(5)]$$
$$= 0.25 - Q_R[0.75\times 0.125] = 0.125$$

$$\hat{y}(8) = \hat{y}(7) - Q_R[0.75\hat{y}(6)]$$
$$= 0.125 - Q_R[0.75\times 0.25] = -0.125$$

$$\hat{y}(9) = \hat{y}(8) - Q_R[0.75\hat{y}(7)]$$
$$= -0.125 - Q_R[0.75\times 0.125] = -0.25$$

$$\hat{y}(10) = \hat{y}(9) - Q_R[0.75\hat{y}(8)]$$
$$= -0.25 - Q_R[0.75\times(-0.125)] = -0.125$$

故从 $n=4$ 进入极限环, $n=4$ 到$n=9$
为一个周期(以后每6个点为一个周期)。
$n=3$ 虽然满足(1)式条件，也就是说
好象已进入极限环，但是在极限环内
当$n=5$ 时，

$\hat{y}(n+1)=\hat{y}(6)$ 及 $\hat{y}(n-2)=\hat{y}(3)$，
这两点都在现在的所谓极限环内，

但是 $$\hat{y}(n+1)=\hat{y}(6)=0.25$$
$$\neq -\hat{y}(n-2)=-\hat{y}(3)=0.375$$
即并不满足(2)式。因而$n=3$ 时，并
未进入极限环振荡。

解:(b)

对原二阶系统,当$a=0.25$时,有共轭极点

$z_{1,2}=\frac{1\pm j\sqrt{4a-1}}{2a}$,量化后有:

$\hat{y}(n)=x(n)+\hat{y}(n-1)+Q_R[a\hat{y}(n-2)]$ (3)

根据舍入定义:

$$\left|Q_R[ay(n-2)]-a\hat{y}(n-2)\right|\le\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}$$

$x(n)=0$时,若$Q_R[a\hat{y}(n-2)]=\hat{y}(n-2)$（4）

此即发生零输入极限环振荡的条件,等效为$a=1$，代入极点$Z_{1,2}$的表达式中可知，$|Z_1|=|Z_2|=1$，即系统极点将出现在单位圆上，进入极限环振荡。将(3)代入(4)得：

$$\begin{aligned}\hat{y}(n)&=\hat{y}(n-1)-Q_R[a\hat{y}(n-2)]\\&=\hat{y}(n-1)-\hat{y}(n-2)\qquad(5)\end{aligned}$$

$$\therefore\hat{y}(n+1)=\hat{y}(n)-\hat{y}(n-1)\qquad(6)$$

$(5)+(6)$可得:$\hat{y}(n+1)=-\hat{y}(n-2)$

这就是在极限环内应满足的关系。从对(a)的结果的分析看出，当$n\ge4$以后在极限环范围内确实满足$\hat{y}(n+1)=-\hat{y}(n-2)$,因而

(a)中从$n \geq 4$就开始进入极限环振荡。

因此,当n较大时,$\hat{y}(n)$不会衰减,而在某一范围内振荡,产生零输入极限环振荡,没有舍入处理时,由系统差分方程

$y(n) = y(n-1) - 0.75y(n-2) + x(n)$,可得:

系统函数为:$H(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1} + 0.75z^{-2}}$,

极点$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}\mathrm{j}}{2}$,$z_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}\mathrm{j}}{2}$

则 $|z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$,当作舍入处理时,

在满足 $\mathrm{Q_R}[0.75\hat{\mathrm{y}}(\mathrm{n}-2)] = \hat{\mathrm{y}}(\mathrm{n}-2)$ 时,会使系数0.75失效,相当于变为1,其系统函数变为: $H'(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$

极点 $z_1' = \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}$, $z_2' = \dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}$,

因而$|z_1'| = |z_2'| = 1$。由此可看出,经过舍入处理后,极点由单位圆内迁移到单位圆上,使系统由稳定状态变成临界稳定状态,出现极限环振荡。

6. 一个一阶IIR网络,差分方程为 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$

采用定点制原码运算.尾数作截尾处理.

(a) 证明,只要系统稳定,即$|a| < 1$,就不会发生零输入极限 环振荡.

(b) 若采用定点补码运算,尾数作截尾处理,这时以上结论仍然成立吗?

分析:

(a)用绝对值来讨论,对定点制原码截尾有$|Q_T[y(n)]| \leq |y(n)|$,再结合

方程$\hat{y}(n) = Q[a\hat{y}(n-1)] \quad (x(n) = 0)$,以此为出发点来进行分析。

(b)定点制补码截尾误差总是负的:$-2^{-b} < E_T \leq 0$,(不论数是正的还是负的)。若要产生极限环振荡必须满足$Q_T[a\hat{y}(n-1)] = \hat{y}(n-1)$

(当α>0 时),此时补码截尾误差为

$$E_T = Q_T[a\hat{y}(n-1)] - a\hat{y}(n-1) = (1-a)\hat{y}(n-1),$$

然后进一步讨论 $\hat{y}(n-1)>0$与 $\hat{y}(n-1)<0$ 两种情况。注意题上给定 $|a|<1$.

证明：(a)

采用定点制原码运算，且尾数作截尾处理，

故有 $:|Q_T[y(n)]|\le|y(n)|$

又在零输入条件下，$x(n)=0$，

则$y(n)=ay(n-1)$截尾量化后，

有：$\hat{y}(n)=Q_T[a\hat{y}(n-1)]$

按$|Q_T[y(n)]|\le|y(n)|$

则 $\left|Q_T[a\hat{y}(n-1)]\right|\le\left|a\cdot\hat{y}(n-1)\right|$

因为 $|a|<1$

所以 $\left|a\hat{y}(n-1)\right|<\left|\hat{y}(n-1)\right|$

于是 $\left|Q_T[a\hat{y}(n-1)]\right|<\left|\hat{y}(n-1)\right|,$

即 $\left|\hat{y}(n)\right|<\left|\hat{y}(n-1)\right|$

$\therefore$当n较大时,

$\hat{\mathrm{y}}(n)$一直衰减而不会出现

$\left|\hat{y}(n)\right|>\left|\hat{y}(n-1)\right|$的 情况,

因此,若$|a|<1$,就不会出现零输入极限环振荡。

(i) 若 $\hat{y}(n-1)>0$，

则正数的补码截尾误差为负数，

即$-2^{-b}<E_T\le 0$　那么$(1-a)\hat{y}(n-1)\le 0$

由于 $\hat{y}(n-1)>0$，故 $1-a\le 0$，即 $a\ge 1$ 。

这与本题所给的条件$|a|<1$不相符合。

所以不可能产生极限环振荡。

(ii) 若 $\hat{y}(n-1)<0$,则负数的补码截尾误差

仍为负数，即 $-2^{-b}<E_T\le 0$

那么 $(1-a)\hat{y}(n-1)\le 0$

由于 $\hat{y}(n-1)<0$,故 $1-a\ge 0$,即 $a\le 1$ 。

这种情况下，即 $0<a\le 1$ 时,可能出现

全是负数的极限环振荡。

7. 在定点制运算中为了使输出不发生溢出,往往必须在网络的输入加一比例因子A,即网络输出为

$$y(n)=A\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

若输入$x(n)$的动态范围为$\pm x_{\max}$,则比例因子A可以这样来确定

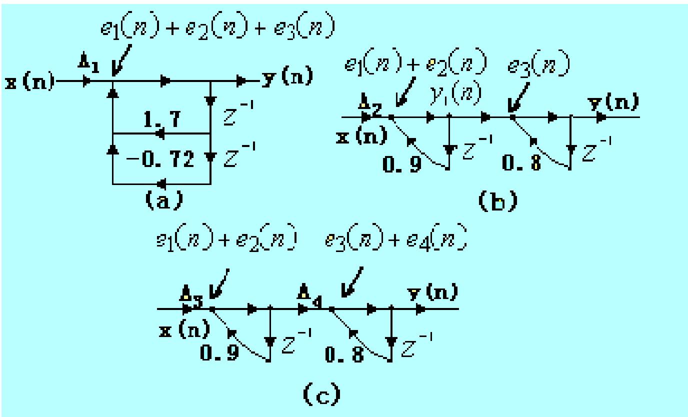
$$|y(n)|\le A\sum_{m=0}^{\infty}|h(m)|\,|x(n-m)|$$

因此 $y_{\max}\le A\,x_{\max}\sum_{m=0}^{\infty}|h(m)|$

为了保证不发生溢出,必须使$y_{\max}\le 1$,故 $A\le\dfrac{1}{x_{\max}\sum_{m=0}^{\infty}|h(m)|}$

现有二阶网络$H(z)=\dfrac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$

采用定点制运算,输入动态范围为$x_{\max}\le 1$.



(a)用直接型结构时[见图$P8-8(a)$],为使运算过程中任何地方都不出现溢出,比例因子A应该选多大?

(b)采用级联型结构[见图$P8-8(b)$],比例因子A应选多大?

(c)在级联结构中每一单元网络分别加一比例因子 [见图$P[8-8(c)]$,以使该环节不出现溢出,这时比例因子A_3, A_4,应选多大?

(d)在以上三种情况下信号的最大输出$y_{\max}$各为多少?输出信号噪声比$y^2_{\max}/\sigma^2_{\mathrm{f}}$ 谁最高谁最低？

分析：

①不溢出要求在网络的所有节点上不出现溢出才行，以此要求来选择比例因子。

②比例因子所处位置不同影响是不同的，具体情况要具体分析。

③ $A \le \dfrac{1}{x_{\max}\sum\limits_{m=0}^{\infty}|h(m)|}$ $\qquad y_{\max} \le Ax_{\max}\sum\limits_{m=0}^{\infty}|h(m)|$

解:(a)

$$H(z)=\frac{1}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

$$=\frac{9}{(1-0.9z^{-1})}-\frac{8}{(1-0.8z^{-1})}$$

$$\therefore h(n)=(9\cdot 0.9^n-8\cdot 0.8^n)\cdot u(n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|9\cdot 0.9^n-8\cdot 0.8^n\right|$$

$$=\frac{9}{1-0.9}-\frac{8}{1-0.8}$$

$$=50$$

$$\therefore A_1\le\frac{1}{50}=0.02$$

信噪比为：$\dfrac{y^2_{\max}}{\sigma^2_f}=\dfrac{y^2{}_{\max}}{\dfrac{\sigma^2_e}{2\pi j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\dfrac{dz}{z}}$

解:(b)

要$y_1(n)$处及$y(n)$处皆不溢出，

则对$y_1(n)$处有：

由$H_1(z)=\dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$

$\Rightarrow h_1(n)=0.9^n u(n)$

$\therefore A_{21}\le \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}0.9^n}=0.1$

对$y(n)$处:

由(a)的推导可知　$A_{22}\le 0.02$

$\therefore$ 取$A_2=A_{22}\le 0.02$

(c)　由 (b) 中推导可知:

$A_3=A_{21}\le 0.1$

$A_3\cdot A_4\le 0.02$

$\therefore$ 取$A_3\le 0.1,$

$A_4\le \dfrac{0.02}{A_3}=0.2$

解:(d)

第一种情况(直接型加 A_1）

$$y_{\max}=x_{\max}A_1\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=50A_1x_{\max}$$

第二种情况(加 A_2 的级联型)

$$y_{1\max}=x_{\max}A_2\sum_{n=0}^{\infty}|h_1(n)|=10A_2x_{\max}$$

$$y_{\max}=x_{\max}A_2\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=50A_2x_{\max}$$

$\therefore$ 此时信号的最大输出为:

$50A_2x_{\max}=50A_1x_{\max}$

第三种情况(加A_3 ，A_4 的级联型)

$y_{1\max}=50A_3A_4x_{\max}$

第一种情况，

$$\sigma_f^2 = 3\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}$$

$$\times \oint_c \frac{zdz}{(z-0.9)(z-0.8)(1-0.9z)(1-0.8z)}$$

$$= 3\sigma_e^2 \cdot [\frac{0.9}{(0.9-0.8)(1-0.81)(1-0.72)}$$

$$+ \frac{0.8}{(0.8-0.9)(1-0.72)(1-0.64)}]$$

$$= 22.45196324 \cdot \Delta^2$$

$$\frac{y^2{}_{\max}}{\sigma_f^2} = \frac{50^2 A_1^2 x_{\max}^2}{22.45196324\Delta^2} \le \frac{1}{22.45196324\Delta^2}$$

第二种情况，

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z}$$

$$+\sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}$$

$$= 2\sigma_e^2 \cdot 89.80785296 + \sigma_e^2 \cdot 2.77777778$$

$$= 15.19945697 \cdot \Delta^2$$

第三种情况

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \cdot [\frac{A_4^2}{2\pi\ j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z}$$

$$+\frac{1}{2\pi\ j}\oint_c \frac{dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}]$$

$$= (14.96797549A_4^2 + 0.462962963) \cdot \Delta^2$$

所以：

$$\frac{y^2{}_{\max}}{\sigma_f^2}$$

$$= \frac{50^2 A_3^2 A_4^2 x_{\max}^2}{(14.96797549A_4^2 + 0.462962963) \cdot \Delta^2}$$

$$\le \frac{1}{(14.96797549A_4^2 + 0.462962963) \cdot \Delta^2}$$

取 $A_{4.} = 0.2$ ，则有

$$\frac{y^2{}_{\max}}{\sigma_f^2} \le \frac{1}{1.061681983\Delta^2}$$

由以上推导可知，第三种情况输出信号噪声比最大，第一种情况最小。

8. 考虑离散傅里叶变换 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$ ，$0\le k\le N-1$,其中

$W_N=e^{-j2\pi/N}$,假设序列值$x(n)$是一均值为零的平稳白噪声序列

的N个相邻序列值,即 $E[x(n)x(m)]=\sigma_x^2\delta(\text{n - m})$, $\text{E[x(n)]}=0$,

(a) 试确定 $|\text{X(k)}|^2$ 的方差。

(b) 试确定离散傅里叶变换诸值间的互相关,即确定 $E[X(k)X^*(r)]$,

并把它表示为 k 和 r 的函数。

分析：

对均值为零、概率密度为高斯分布的白色随机过程有：

$$
\begin{aligned}
&E[x(n)x(m)x(i)x(j)]\\
&=E[x(n)x(m)]\cdot E[x(i)x(j)]+E[x(n)x(i)]\cdot E[x(m)x(j)]\\
&\quad+E[x(n)x(j)]\cdot E[x(m)x(i)]\\
&=\sigma_x^4[\delta(m-n)\delta(i-j)+\delta(n-i)\delta(m-j)+\delta(n-j)\delta(m-i)]\\
&=\begin{cases}\sigma_x^4\text{ , } m=n\text{且}i=j\text{ , 或}m=j\text{且}n=i\text{ , 或}n=j\text{且}m=i\\ 0\text{ ，其它}\end{cases}
\end{aligned}
$$

解:(a)

$$
\begin{aligned}
\text{令}W(k)&=|X(k)|^2\\
&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-mk}
\end{aligned}
$$

以上假定$x(n)$是实数序列，于是

$$
\begin{aligned}
E[W(k)]&=E[|X(k)|^2]\\
&=E[\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)x(m)W_N^{(n-m)k}]\\
&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}E[x(n)x(m)]W_N^{(n-m)k}\\
&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sigma_x^2\delta(n-m)W_N^{(n-m)k}\\
&=N\sigma_x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_w^2&=E\{[W(k)-E[W(k)]]^2\}\\
&=E[W^2(k)]-E^2[W(k)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[W^2(k)]=E\{&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)x(m)\\
&W_N^{k(n-m)}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}x(i)x(j)W_N^{k(i-j)}\}
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}E[x(n)x(m)x(i)x(j)]$$

$$W_N^{k(n-m)+k(i-j)}$$

如果$x(n)$是平均值为零、概率密度为高斯分布的白色随机过程，则可得到

$$E[x(n)x(m)x(i)x(j)]=$$
$$E[x(n)x(m)]E[x(i)x(j)]$$
$$+E[x(n)x(i)]E[x(m)x(j)]$$
$$+E[x(n)x(j)]E[x(i)x(m)]$$
$$=\sigma_x^4[\delta(n-m)\delta(i-j)$$
$$+\delta(n-i)\delta(m-j)$$
$$+\delta(n-j)\delta(m-i)]$$

$$=\begin{cases}\sigma_x^4 & ,\ n=m \text{ 且 } i=j\,, \\ & \text{或 } n=i \text{ 且 } m=j\,, \\ & \text{或 } n=j \text{ 且 } m=i \\ 0 & ,\ \text{其他}\end{cases}$$

因此我们得到

$$E[W^2(k)]=\sigma_x^4[\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}W_N^0$$
$$+\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}W_N^{2k(n-m)}+\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}W_N^0]$$
$$=2N^2\sigma_x^4$$

代入σ_w^2的表达式，可得

$$\sigma_w^2=2N^2\sigma_x^4-N^2\sigma_x^4=N^2\sigma_x^4$$

解：(b) 可以写出

$$E[X(k)X^*(r)]$$
$$=E[\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)x(m)W_N^{kn-rm}]$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}E[x(n)x(m)]W_N^{kn-rm}$$
$$=\sigma_x^2\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(k-r)n}$$
$$=N\sigma_x^2\delta(k-r)$$

9. 一个二阶 IIR 滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.6-0.42z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

现用 b 位字长的定点制运算实现它,尾数作舍入处理。

(1) 试计算直接 I 型及直接 II 型结构的输出舍入噪声方差。

(2) 如果用一阶网络的级联结构来实现 $H(z)$,则共有六种网络流图.试画出有运算舍入噪声时的每种网络流图,计算每种流图的输出舍入噪声方差。

(3) 用并联结构实现 $H(z)$,计算输出舍入噪声方差,几种结构相比较,运算精度哪种最高,哪种最低。

(4) 考虑动态范围,因为系统中任一节点的输出值(包括整个系统的输出节点)等于从输入到此节点的单位冲激响应与系统输入的卷积和，可以表示成

$$y_i(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_i(k)x(n-k)$$

其中 $y_i(n)$ 为第 i 个节点的输出,$h_i(n)$ 为从输入到第 i 个节点的单位抽样响应。对于输出节点来说

$$y_i(n)=y(n),\quad h_i(n)=h(n)\ 。$$

由上式可得 $|y_i(n)|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_i(k)||x(n-k)|$

也就是说,一个网络的最大输出电平不一定在输出端,可能在某一中间节点,利用这一关切系以及 $x_{\max}$,试求以上各种网络中每一个的最大 $y_{i\max}$。所谓不溢出,是要求网络的所有节点上都不发生溢出,即要最大输出 $y_{\max}<1$,这样即可求得最大的输入 $x_{\max}$(不发生溢出时)试求以上各个网络的 $x_{\max}$。

(5) 设输入信号是白噪声序列,它的幅度在 $-x_{\max}$ 到 $x_{\max}$ 之间均匀分布,按照已求出的每一滤波器结构的最大输入 $x_{\max}$,每种结构在输出端的噪声信号比值(输出噪声方差与输出信号均方值之比)。指出哪种结构输出噪声信号比值最低。

解：(1)

参照左边的信号流图，对于直接I 型结构有：

$$H(z)=\frac{0.6-0.42\,z^{-1}}{1-1.2z^{-1}+0.32\,z^{-2}}$$

$$=H_0(z)H_1(z)$$

其中 $H_0(z)$）＝ $0.64-0.42z^{-1}$,

$$H_1(z)=\frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.32z^{-2}}$$

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)+e_2(n)+e_3(n)]*h_1(n)$$

$$\therefore \sigma_f^2=4\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c H_1(z)H_1(z^{-1})\frac{dz}{z}$$

$$=4\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(1-0.4z^{-1})(1-0.8z^{-1})(1-0.4z)(1-0.8z)z}$$

$$=4\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{zdz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$

根据留数定理

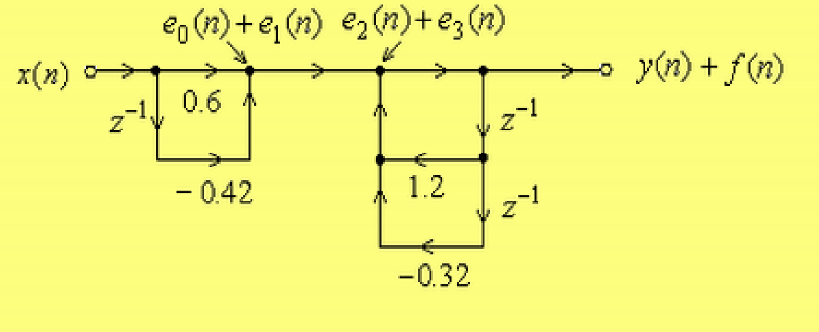
$$\sigma_f^2=4\sigma_e^2[\frac{0.4}{(0.4-0.8)(1-0.16)(1-0.32)}$$

$$+\frac{0.8}{(0.8-0.4)(1-0.32)(1-0.64)}]$$

$$=4\cdot\frac{\Delta^2}{12}\cdot 6.41923436$$

$$=2.139744787\cdot 2^{-2b}$$

直接I型结构加噪后的信号流图：



直接II型

(加噪后的信号流图见左图):

$$H(z)=\frac{0.6-0.42z^{-1}}{1-1.2z^{-1}+0.32z^{-1}}$$

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*h(n)+e_2(n)+e_3(n)$$

$$\therefore \sigma_f^2=2\sigma_e^2\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z}+1\right)$$

$$=2\sigma_e^2+2\sigma_e^2\times\frac{1}{2\pi j}\times$$

$$\oint_c\frac{(0.6z-0.42)(0.6-0.42z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$

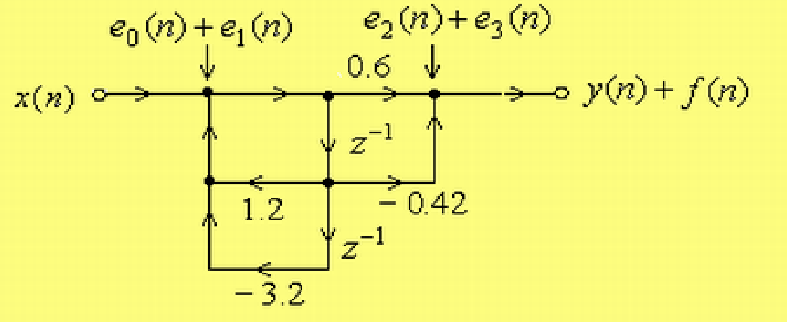
$$=2\sigma_e^2+2\sigma_e^2\cdot[\frac{(0.24-0.42)(0.6-0.168)}{(0.4-0.8)(1-0.16)(1-0.32)}$$

$$+\frac{(0.48-0.42)(0.6-0.336)}{(0.8-0.4)(1-0.32)(1-0.64)}]$$

$$=2\sigma_e^2+2\sigma_e^2\cdot 0.50210084$$

$$=0.25035014\cdot 2^{-2b}$$

直接II型结构加噪后的信号流图:



解: (2)

考虑舍入噪声后的第一种级联结构（流图见左边）

系统的单位抽样响应：

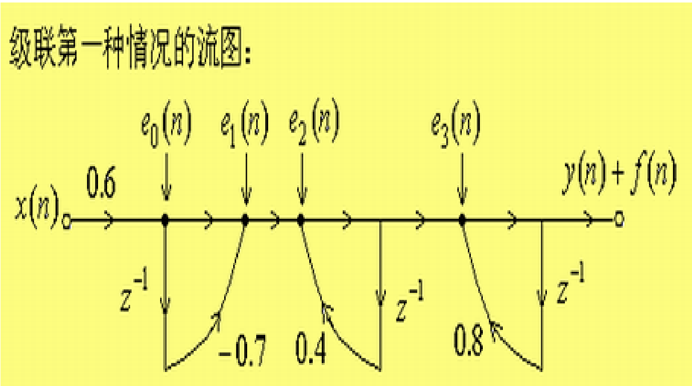
$$H(z)=0.6\cdot(1-0.7z^{-1})\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)\cdot H_2(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=e_0(n)*[h_1(n)*h_2(n)*h_0(n)]+$$
$$[e_1(n)+e_2(n)]*[h_1(n)*h_2(n)]+e_3(n)*h_2(n)$$

输出噪声的方差：

$$\therefore\sigma_f^2=\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+2\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{zdz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+\sigma_e^2\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}$$
$$=\sigma_e^2[\frac{(0.8-0.7)(1-0.56)}{(0.8-0.4)(1-0.32)(1-0.64)}+$$
$$\frac{(0.4-0.7)(1-0.28)}{(0.4-0.8)(1-0.16)(1-0.32)}]+2\sigma_e^2\cdot 6.41923436$$
$$+\sigma_e^2\cdot\frac{1}{1-0.64}$$
$$=\sigma_e^2\cdot 1.394724556+2\sigma_e^2\cdot 6.41923436$$
$$+\sigma_e^2\cdot 2.777777778$$
$$=1.417580921\cdot 2^{-2b}$$



考虑舍入噪声后的第二种级联结构

(流图见左边） :

系统的单位抽样响应：

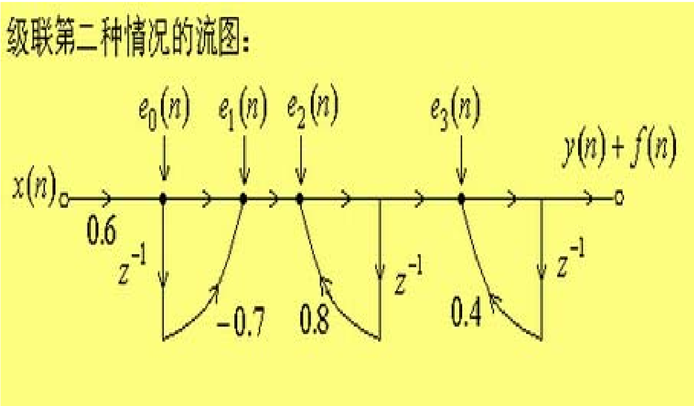
$$H(z)=0.6\cdot(1-0.7z^{-1})\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)\cdot H_2(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=e_0(n)*[h_0(n)*h_1(n)*h_2(n)]+$$
$$[e_1(n)+e_2(n)]*[h_1(n)*h_2(n)]+e_3(n)*h_2(n)$$

输出噪声的方差：

$$\sigma_f^2=\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)\,dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{zdz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.4)(1-0.4z)}$$
$$=\sigma_e^2\cdot 1.394724556\quad+2\sigma_e^2\cdot 6.41923436$$
$$+\sigma_e^2\cdot\frac{1}{1-0.16}$$
$$=1.285305789\quad\cdot\ 2^{-2b}$$



考虑舍入噪声后的第三种级联结构

(流图见左边)：

系统的单位抽样响应：

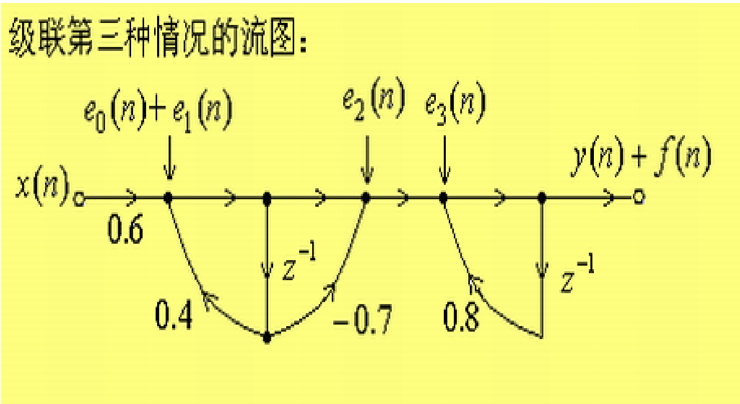
$$H(z)=0.6\cdot\frac{1-0.7z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*[h_0(n)*h_1(n)]+$$
$$[e_2(n)+e_3(n)]*h_1(n)$$

输出噪声的方差：

$$\sigma_t^2=2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}$$
$$=2\sigma_e^2\cdot 1.394724556+2\sigma_e^2\cdot 2.777777778$$
$$=0.695417055\cdot 2^{-2b}$$



考虑舍入噪声后的第四种级联结构

(流图见左边)：

系统的单位抽样响应：

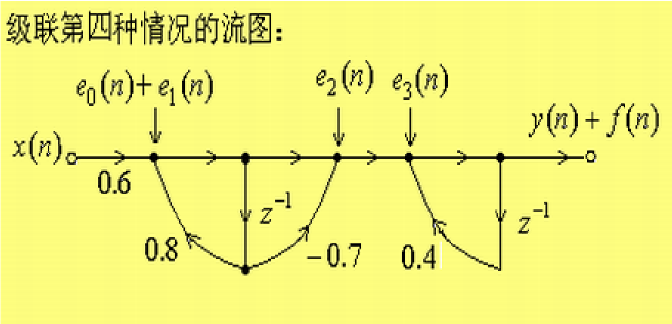
$$H(z)=0.6\cdot\frac{1-0.7z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*[h_0(n)*h_1(n)]+$$
$$[e_2(n)+e_3(n)]*h_1(n)$$

输出噪声的方差：

$$\sigma_t^2=2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.4)(1-0.4z)}$$
$$=2\sigma_e^2\cdot 1.394724556+2\sigma_e^2\cdot 1.19047619$$
$$=0.430866791\cdot 2^{-2b}$$



考虑舍入噪声后的第五种级联结构
(流图见左边):

系统的单位抽样响应：

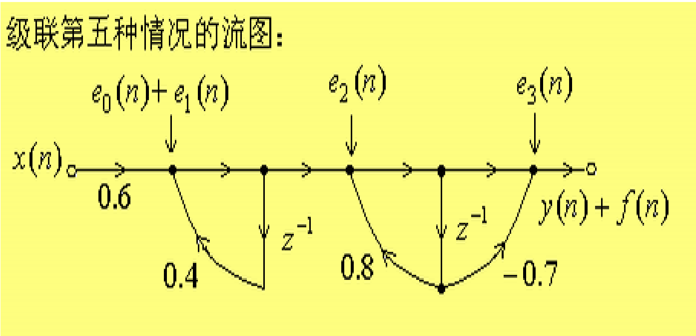
$$H(z)=0.6\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\cdot\frac{1-0.7z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*[h_0(n)*h_1(n)]+$$
$$e_2(n)*h_1(n)+e_3(n)$$

输出噪声的方差：

$$\sigma_t^2=2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}+\sigma_e^2$$
$$=2\sigma_e^2\cdot1.394724556\ +\sigma_e^2\cdot1.027777778+\sigma_e^2$$
$$=0.401435574\cdot2^{-2b}$$



考虑舍入噪声后的第六种级联结构
(流图见左边):

系统的单位抽样响应：

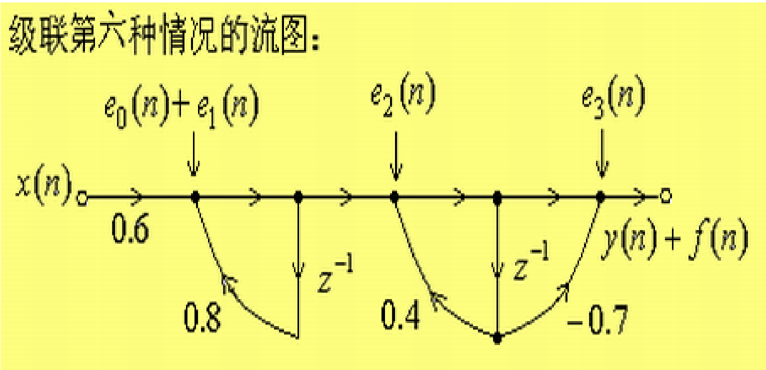
$$H(z)=0.6\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}\cdot\frac{1-0.7z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$
$$=0.6\cdot H_0(z)\cdot H_1(z)$$

输出噪声：

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*[h_0(n)*h_1(n)]+$$
$$e_2(n)*h_1(n)+e_3(n)$$

输出噪声的方差：

$$\sigma_f^2=2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(z-0.8)(1-0.4z)(1-0.8z)}$$
$$+\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(z-0.7)(1-0.7z)dz}{(z-0.4)(1-0.4z)}+\sigma_e^2$$
$$=2\sigma_e^2\cdot 1.394724556+\sigma_e^2\cdot 1.107142857+\sigma_e^2$$
$$=0.40804933\cdot 2^{-2b}$$



解:(3)

考虑舍入噪声后的并联结构

流图见左边

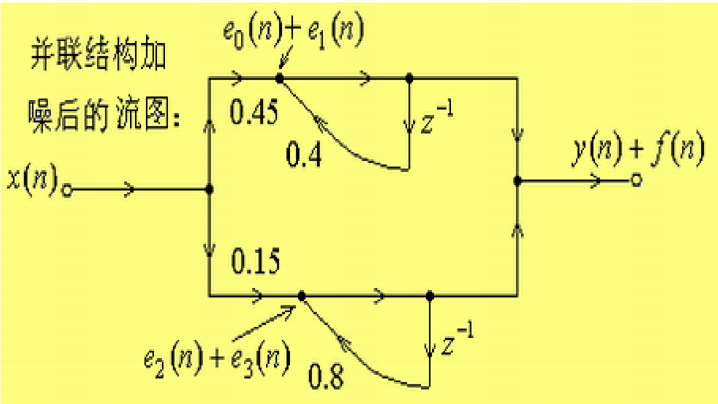
则有：

$$H(z)=0.45\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}+0.15\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=0.45\cdot H_0(z)+0.15\cdot H_1(z)$$

$$f(n)=[e_0(n)+e_1(n)]*h_0(n)$$
$$+[e_2(n)+e_3(n)]*h_1(n)$$

$$\therefore\sigma_f^2=2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.4)(1-0.4z)}$$
$$+2\sigma_e^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{dz}{(z-0.8)(1-0.8z)}$$
$$=2\sigma_e^2\cdot 1.19047619+2\sigma_e^2\cdot 2.777777778$$
$$=0.661375661\cdot 2^{-2b}$$

由以上推导可以看出,直接II型结构的运算精度最高,直接I型结构的运算精度最低。



解：(a)

$$H(z)=(0.6-0.42z^{-1})\frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.32z^{-2}}$$
$$=H_0(z)\cdot H_1(z)$$

由 $H_0(z)=0.6-0.42z^{-1}$

则 $h_0(n)=0.6\delta(n)-0.42\delta(n-1)$

$$\therefore y_{1\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|h_0(n)\right|$$
$$=(0.6+0.42)x_{\max}=1.02x_{\max}$$

由$H(z)=\dfrac{0.45}{1-0.4z^{-1}}+\dfrac{0.15}{1-0.8z^{-1}}$

则$h(n)=(0.45\cdot 0.4^n+0.15\cdot 0.8^n)\cdot u(n)$

$$\therefore y_{\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.45\cdot 0.4^n+0.15\cdot 0.8^n\right|$$
$$=x_{\max}(0.45\sum_{n=0}^{\infty}0.4^n+0.15\sum_{n=0}^{\infty}0.8^n)$$
$$=x_{\max}(0.45\frac{1}{1-0.4}+0.15\frac{1}{1-0.8})$$
$$=1.5x_{\max}$$

$\therefore$该网络的最大输出电平在输出端，

由$y_{\max}\le 1.5x_{\max}$，则有：

不溢出时,$x_{\max}<\dfrac{1}{1.5}=0.6666667$

(b)

该结构只有两个输出结点，由(a)中推导可知

$y_{\max}\le 1.5x_{\max}$，

又$H_1(z)=\dfrac{1}{1-1.2z^{-1}+0.32z^{-2}}$

$$=\frac{2}{1-0.8z^{-1}}-\frac{1}{1-0.4z^{-1}}$$

则$h_1(n)=$（$2\cdot 0.8^n-0.4^n$）$u(n)$

$$y_{1\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|\,2\cdot 0.8^n-0.4^n\,|$$
$$=x_{\max}\cdot(2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}0.8^n-\sum_{n=0}^{\infty}0.4^n)$$
$$=x_{\max}\cdot(\frac{2}{1-0.8}-\frac{1}{1-0.4})$$
$$=8.33x_{\max}$$

为了保证不溢出,由于最大输出电平出现 在$y_1(n)$,即 $y_{1\max}\le 1$，故必须使 $x_{\max}\le 1/8.33=0.12$ 。

(c)

$$H(z)=0.6(1-0.7z^{-1})\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=H_a(z)H_b(z)H_c(z)$$

由 $H_a(z)=0.6(1-0.7z^{-1})$

则 $h_a(n)=0.6\delta(n)-0.42\delta(n-1)$

$\therefore y_{\max}\le x_{\max}\cdot(0.6+0.42)=1.02x_{\max}$

由 $H_2(z)=H_a(z)\cdot H_b(z)=\dfrac{0.6-0.42z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$

$$=0.6-\frac{0.18z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

则 $h_2(n)=0.6\delta(n)-0.18\cdot0.4^{n-1}\cdot u(n-1)$

$\therefore y_{2\max}\le x_{\max}\cdot$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.6\delta(n)+0.18\cdot0.4^{n-1}u(n-1)\right|$$
$$=x_{\max}(0.6+\frac{1}{0.4}\sum_{n=1}^{\infty}0.18\cdot0.4^{n})$$
$$=x_{\max}\cdot(0.6+0.18\cdot\frac{1}{1-0.4})=0.9x_{\max}$$

由 (a) 可知 $y_{\max}\le1.5x_{\max}$

$\therefore$ 该网络最大输出电平出现在输出端，

$y_{\max}\le1.5x_{\max}$，为了不溢出，

$x_{\max}<0.6666667$

(d)

由$H_2(z)=\dfrac{0.6-0.42z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$

$$=0.6+\frac{0.06z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

则$h_2(n)=0.6\delta(n)-0.06\cdot0.8^{n-1}\cdot u(n-1)$

$\therefore y_{2\max}\le x_{\max}\cdot$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.6\delta(n)+0.06\cdot0.8^{n-1}u(n-1)\right|$$
$$=x_{\max}(0.6+0.06\sum_{n=1}^{\infty}0.8^{n-1})$$
$$=x_{\max}\cdot(0.6+0.06\cdot\frac{1}{1-0.8})=0.9x_{\max}$$

又根据(c)中推导可知，$y_{1\max}\le1.02x_{\max}$，

$y_{\max}\le1.5x_{\max}$

$\therefore$该网络最大输出电平出现在输出端，

$y_{\max}\le1.5x_{\max}$，为了保证$y_{\max}<1$，

必须使 $x_{\max}<0.6666667$。

(e)

由 (c) 中推导可知, $y_{2\max} \le 0.9x_{\max}$,

由 $H_1(z) = H_a(z) = \dfrac{0.6}{1-0.4z^{-1}}$

则 $h_1(n) = 0.6 \cdot 0.4^n u(n)$

$$\therefore y_{1\max} \le x_{\max} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|0.6 \cdot 0.4^n\right|$$

$$= x_{\max} .0.6 \cdot \frac{1}{1-0.4}$$

$$= x_{\max}$$

而 $y_{\max} \le 1.5x_{\max}$;

$\therefore$ 该网络最大输出电平出现在输出端, $y_{\max} \le 1.5x_{\max}$, 为了保证不溢出, 必须使 $x_{\max} < 0.6666667$。

(f)

由 (d) 中推导可知, $y_{2\max} \le 0.9x_{\max}$,

由 $H_1(z) = H_a(z) = \dfrac{0.6}{1-0.8z^{-1}}$

则 $h_1(n) = 0.6 \cdot 0.8^n u(n)$

$$\therefore y_{1\max} \le x_{\max} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|0.6 \cdot 0.8^n\right|$$

$$= x_{\max} .0.6 \cdot \frac{1}{1-0.8}$$

$$= 3x_{\max}$$

而 $y_{\max} \le 1.5x_{\max}$

$\therefore$ 该网络最大输出电平出现在 $y_1(n)$,

$y_{1\max} \le 3x_{\max}$, 为了不溢出,即 $y_{1\max} \le 1$,

必须使 $x_{\max} = \dfrac{1}{3} = 0.333333$

(g)

$$H(z)=\frac{0.6}{1-0.4z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.8z^{-1}}\cdot(1-0.7z^{-1})$$
$$=H_a(z)H_b(z)H_c(z)$$

由 (e) 知：

$$y_{1\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.6\cdot0.4^n\right|$$
$$=x_{\max}.0.6\cdot\frac{1}{1-0.4}$$
$$=x_{\max}$$

由$H_2(z)=H_a(z)H_b(z)$

$$=\frac{0.6}{(1-0.4z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$
$$=\frac{1.2}{1-0.8z^{-1}}-\frac{0.6}{1-0.4z^{-1}}$$

则$h_2(n)=(1.2\cdot0.8^n-0.6\cdot0.4^n)\cdot u(n)$

$$\therefore y_{2\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|1.2\cdot0.8^n-0.6\cdot0.4^n\right|$$
$$=x_{\max}\cdot(1.2\cdot\frac{1}{1-0.8}-0.6\cdot\frac{1}{1-0.4})$$
$$=5x_{\max}$$

又由(a)中推导可知　$y_{\max}\le1.5x_{\max}$

$\therefore$ 该网络最大输出电平出 现在$y_2(n)$,

$y_{2\max}\le5x_{\max}$,为了不溢出,$x_{\max}<\frac{1}{5}=0.2$

(h)

$$H(z)=\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\cdot(1-0.7z^{-1})$$
$$=H_a(z)H_b(z)H_c(z)$$

由$H_1(z)=H_a(z)=\dfrac{0.6}{1-0.8z^{-1}}$

则$h_1(n)=0.6\cdot 0.8^n u(n)$

$$\therefore y_{1\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.6\cdot 0.8^n\right|$$
$$=x_{\max}.0.6\cdot\frac{1}{1-0.8}=3x_{\max}$$

由$H_2(z)=H_a(z)H_b(z)$

$$=\frac{0.6}{(1-0.4z^{-1})(1-0.8z^{-1})},$$

根据(g)中推导可得 ： $y_{2\max}\le 5x_{\max}$ ，

且有 $y_{\max}\le 1.5x_{\max}$

$\therefore$ 该网络最大输出电平出 现在 $y_2(n)$,

$y_{2\max}\le 5x_{\max}$,为了不溢出， $x_{\max}<0.2$

(i)

$$H(z)=\frac{0.45}{1-0.4z^{-1}}+\frac{0.15}{1-0.8z^{-1}}$$
$$=H_1(z)+H_2(z)$$

由$H_1(z)=H_a(z)=\dfrac{0.45}{1-0.4z^{-1}}$

则 $h_1(n)=0.45\cdot 0.4^n u(n)$

$$\therefore y_{1\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.45\cdot 0.4^n\right|$$
$$=x_{\max}.0.45\cdot\frac{1}{1-0.4}=0.75x_{\max}$$

由$H_2(z)=\dfrac{0.15}{1-0.8z^{-1}}$

则$h_2(n)=0.15\cdot 0.8^n u(n)$,

$$\therefore y_{2\max}\le x_{\max}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|0.15\cdot 0.8^n\right|$$
$$=x_{\max}.0.15\cdot\frac{1}{1-0.8}=0.75x_{\max}$$

根据(a)中推导可得$y_{\max}\le 1.5x_{\max}$

$\therefore$ 该网络最大输出电平出 现在$y(n)$,

$y_{\max}\le 1.5x_{\max}$,为了不溢出,

必须使 $x_{\max}<0.66667$

解：(5)

$\because$输入信号$x(n)$为白噪声,且它的幅值在

$-x_{\max}$到$x_{\max}$之间均匀分布

$$\therefore \sigma_x^2 = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{1}{2x_{\max}} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} x^2{}_{\max}$$

$$\therefore \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$$

$$= \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (0.45 \cdot 0.4^n + 0.15 \cdot 0.8^n)^2$$

$$= \frac{1}{3} x^2{}_{\max} \cdot (0.45^2 \cdot \frac{1}{1-0.16} + 2 \times 0.45 \times$$

$$0.15 \times \frac{1}{1-0.32} + 0.15^2 \cdot \frac{1}{1-0.64})$$

$$= 0.167366946 x^2{}_{\max}$$

(a)直接I型 $\sigma_f^2 = 2.139744787 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 28.76569038 \cdot 2^{-2b}$$

(b)直接II型 $\sigma_f^2 = 0.25035014 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = 0.12 \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 103.8761046 \cdot 2^{-2b}$$

(c)级联型一 $\sigma_f^2 = 1.417580921 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 19.05726996 \cdot 2^{-2b}$$

(d)级联型二 $\sigma_f^2 = 1.285305789 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 17.27902728 \cdot 2^{-2b}$$

(e)级联型三 $\sigma_f^2 = 0.695417055 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 9.348849406 \cdot 2^{-2b}$$

(f)级联型四 $\sigma_f^2 = 0.430866791 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 23.16945617 \cdot 2^{-2b}$$

(g)级联型五 $\sigma_f^2 = 0.401435574 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = 0.2 \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 59.96338937 \cdot 2^{-2b}$$

(h)级联型六 $\sigma_f^2 = 0.40804933 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = 0.2 \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 60.95130188 \cdot 2^{-2b}$$

(i)并联型 $\sigma_f^2 = 0.661375661 \cdot 2^{-2b}$,

$$x_{\max} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = 8.891213426 \cdot 2^{-2b}$$

由以上分析可知,并联型结构的输出噪声信号比最小。