2.2 Programación Dinámica

La Programación Dinámica (PD) es un método de optimización aplicable a diferentes y numerosos problemas analizados por la programación lineal y la programación entera. Los parámetros usados en la PD pueden ser estocásticos o probabilísticos y determinísticos.

La idea principal de la programación dinámica (PD) es descomponer el problema en subproblemas (más manejables). Los cálculos se realizan entonces recursivamente donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada al siguiente problema. La solución para todo el problema está disponible cuando se soluciona el último subproblema. La forma en que se realizan los cálculos recursivos depende de cómo se descomponga el problema original. En particular, normalmente los subproblemas están vinculados por restricciones comunes. La factibilidad de estas restricciones comunes se mantiene en todas las iteraciones.

La solución de problemas mediante la PD se basa en el principio óptimo de Bellman (1957) y dice así: “En una secuencia de decisiones optima toda subsecuencia ha de ser también óptima”. No obstante, se deberá evaluar en cada subproblema presentado desde el principio se esté cumpliendo el principio y analizar cómo se aborda cada uno de los problemas de acuerdo a sus características propias.

Ejemplo 2.2.1 La ruta más corta
Suponga que desea seleccionar la ruta por carretera más corta entre dos ciudades, (vea la figura 2.2.1), en donde las posibles rutas entre las ciudades del nodo 1 (origen) y la ciudad del nodo 7 (destino) pasan por ciudades intermedias designadas por nodos del 2 al 6.

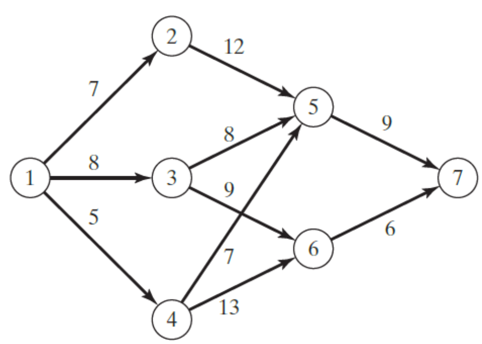

Figura 2.2.1 Ruta más corta

Para resolver el problema con programación dinámica primero se descompone en **subproblemas**, delimitadas por las líneas verticales interrumpidas de la figura 2.2.2. A continuación se hacen los cálculos para cada subproblema por separado. El concepto general es calcular las distancias (acumuladas) más cortas a todos los nodos terminales de un subproblema, para usarlas a continuación como datos del subproblema inmediato posterior.
El subproblema 1 tiene tres nodos finales, 2, 3 y 4, y sus cálculos son sencillos.

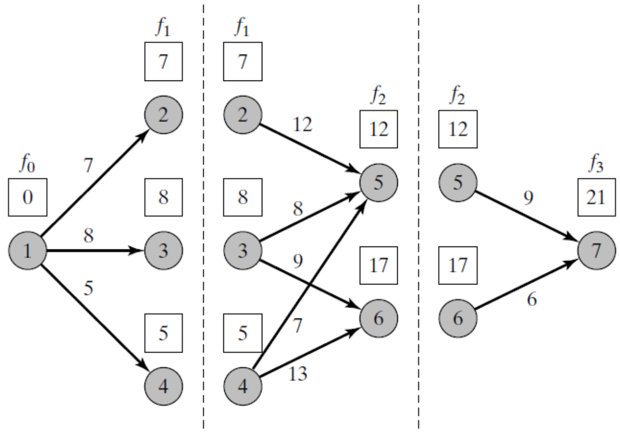

Figura 2.2.2 División en subproblemas.

Resumen de resultados del subproblema 1.

Distancia más corta al nodo 2 = 7 millas (*desde el nodo* 1)
Distancia más corta al nodo 3 = 8 millas (*desde el nodo* 1)
Distancia más corta al nodo 4 = 5 millas (*desde el nodo* 1)

A continuación, el subproblema 2 tiene dos nodos extremos, el 5 y el 6. Si se considera primero el nodo 5, se ve en la figura 2.2.2 que hay tres rutas posibles para llegar a él, que son (2, 5), (3, 5) y (4, 5). Esta información, junto con las distancias más cortas a los nodos 2, 3 y 4, determina la distancia (acumulada) más corta al nodo 5, como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo 5}\end{pmatrix} = \min_{i=2,\,3,\,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 5}\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \min\left\{\begin{matrix}7 + 12 = 19\\ 8 + 8 = 16\\ 5 + 7 = 12\end{matrix}\right\} = 12\,(\textit{del nodo } 4)$$

De igual manera, para el nodo 6 se tiene

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo 6}\end{pmatrix} = \min_{i=3,\,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 6}\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \min\left\{\begin{matrix}8 + 9 = 17\\ 5 + 13 = 18\end{matrix}\right\} = 17\,(\textit{del nodo } 3)$$

Resumen de resultados del subproblema 2.

Distancia más corta al nodo 5 = 12 millas (*desde el nodo* 4)
Distancia más corta al nodo 6 = 17 millas (*desde el nodo* 3)
El último paso es examinar el subproblema 3. El nodo de destino 7 se puede alcanzar ya sea desde el nodo 5 o desde el 6. Usando el resumen de los resultados de la etapa 2, y las distancias de los nodos 5 y 6 al nodo 7, se obtiene

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo 7}\end{pmatrix} = \text{mín}\begin{Bmatrix}12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23\end{Bmatrix} = 21 \ (\textit{del nodo } 5)$$

Resumen de resultados del subproblema 3.

Distancia más corta al nodo 7 = 21 millas (*desde el nodo* 5)
Estos cálculos indican que la distancia más corta entre los nodos 1 y 7 es 21 millas. Las ciudades que definen la ruta óptima se determinan como sigue. Según el resumen de la etapa 3, el nodo 7 está enlazado con el nodo 5. A continuación, según el resumen de la etapa 2, el nodo 4 está vinculado al nodo 5. Por último, según el resumen de la etapa 1, el nodo 4 está enlazado con el nodo 1. Así, la ruta más corta se define como $1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$.

Ahora se indicará cómo se pueden expresar matemáticamente los cálculos recursivos. Sea $f(x_i)$ la distancia más corta hasta el nodo x_i en el subproblema *i*, y defínase $d(x_{i-1}, x_i)$ como la distancia del nodo x_{i-1} hasta el nodo x_i; entonces se calcula, a partir de con la siguiente ecuación recursiva:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{todas\ las\ rutas \\ (x_{i-1}, x_i)\ viables}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_i(x_{i-1})\}, i = 1{,}2{,}3$$

Al comenzar en *i* = 1, la recursión pone $f_0(x_0) = 0$. La ecuación indica que las distancias más cortas $f_i(x_i)$ en el subproblema *i* se deben expresar en función del siguiente nodo, x_i. En la terminología de la programación dinámica, a se le llama **estado** del sistema en el subproblema *i*.

De hecho, se considera que el estado del sistema en la etapa *i* es la información que enlaza, conecta o vincula las etapas, de tal modo que se puedan tomar las decisiones para los subproblemas restantes sin volver a examinar cómo se llegó a las decisiones de las etapas anteriores. La definición correcta de *estado* permite considerar por separado cada estado, y garantiza que la solución sea factible para todos los estados. La definición de *estado* conduce al siguiente marco unificador de la programación dinámica.

Principio de optimalidad.

Las decisiones futuras para las etapas restantes formarán una política óptima independientemente de las políticas adoptadas en las etapas anteriores.

TAREA.

Dadas las siguientes ciudades de México (distancias aproximada) programe de acuerdo al ejemplo anterior la solución para que un usuario, introduzca dos ciudades como entradas, una de origen y otra de destino calcule la distancia más corta entre ellas en el recorrido por carretera. Diga porque ciudades intermedias debe pasar. (Dibuje su mapa de nodos)

Tenga cuidado, por ejemplo, Ciudad de México – Tijuana pasa por otras ciudades como León, Aguascalientes, Chihuahua, etc. Así para las demás conexiones

Distancias a ciudades de México

Distancia entre ciudades	Kilómetros	Millas
De Ciudad de México a Delegación Iztapalapa	11 km	7 mi
De Ciudad de México a Ecatepec	21 km	13 mi
De Ciudad de México a Guadalajara	466 km	290 mi
De Ciudad de México a Puebla de Zaragoza	106 km	66 mi
De Ciudad de México a Ciudad Juárez	1,549 km	963 mi
De Ciudad de México a Tijuana	2,294 km	1,425 mi
De Ciudad de México a Ciudad Neza	12 km	7 mi
De Ciudad de México a Gustavo A. Madero	7 km	4 mi
De Ciudad de México a Monterrey	704 km	437 mi
De Ciudad de México a León	326 km	203 mi
De Ciudad de México a Zapopan	467 km	290 mi
De Ciudad de México a Naucalpan de Juárez	13 km	8 mi
De Ciudad de México a Chihuahua	1,242 km	772 mi
De Ciudad de México a Alvaro Obregon	11 km	7 mi
De Ciudad de México a Guadalupe	703 km	437 mi
De Ciudad de México a Mérida	1,006 km	625 mi
De Ciudad de México a Tlanepantla de baz	14 km	9 mi
De Ciudad de México a San Luis Potosí	358 km	222 mi
De Ciudad de México a Culiacán	1,037 km	644 mi
De Ciudad de México a Aguascalientes	426 km	265 mi