Simulación del problema de los tres cuerpos

Manuel Delgado[a], Josué Juárez[b], Isaac Caballero[c], Héctor Lozano[d], Rogelio Márquez[e]

[a] *lo.gogomd@gmail.com*
[b] *juarezjosue.997@gmail.com*
[c] *eisaacjc8@gmail.com*
[d] *dan$_1$5ochoa@hotmail.com*
[e] *roronoamihaw3@gmail.com*

Abstract

El objetivo de este proyecto es hacer una simulación del problema de los 3 cuerpos que son atraídos gravitacionalmente entre ellos, usando unicamente las leyes de Newton, obviamente en mecánica clásica. Para esta simulación solo se ha de hacer uso de la versión de Python 2.7 y la librería VPython haciendo uso de métodos iterativos y las condiciones aprendidas en clase.

Keywords: Gravitación; Leyes de Newton; Python; Simulación; 3 cuerpos, etc.

Objetivo

Hacer una simulación que aproxime el cálculo de las trayectorias que siguen 3 cuerpos atraídos gravitacionalmente entre ellos haciendo uso de las Leyes de Newton y el lenguaje de programación Python.

Introducción

El problema de los 3 cuerpos es un problema de mecánica clásica que se basa en el poder descifrar el comportamiento de las trayectorias que siguen 3 cuerpos de masas $m1, m2, m3$ bajo la atracción gravitacional. Este es un problema que en un principio fue estudiado por Newton en "$Inequalitiesofthelunarmotion$". En los años 1740's la búsqueda de soluciones analíticas para poder predecir las trayectorias de los cuerpos sufrió un gran adelanto con las contribuciones de Euler, Clairut y d'Alembert, la mayoría de estas soluciones son sistemas de ecuaciones diferenciales fueron desarrolladas por Lagrange y Laplace, la búsqueda entró en

una nueva era con el trabajó de Poincaré
Nuestra manera de solucionar este problema fue hacer un enfoque iterativo que de entrada solicitara al usuario las condiciones iniciales del sistema y nos retornara una aproximación de las trayectorias del sistema.
Nosotros recurrimos a la formula de gravitación universal que conocemos desde el bachillerato y la cual todavía manejamos en nuestro primer curso de mecánica en la facultad de física, de dónde básicamente lo que sabemos es que la fuerza de atracción o repulsión entre dos cuerpos que son atraídos gravitacionalmente entre ellos es directamente proporcional al producto de las masas multiplicadas por el vector unitario de la posición e inversamente proporcional al cubo de la magnitud del vector posición que las separa(i). $\vec{F} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{\vec{r}^3}\hat{r}$ (i)
Dónde G es una constante que para el propósito del proyecto tendrá las unidades; $G; [\frac{Km^3}{día^2 \cdot Kg}]$
La distancia se calculó usando geometría analítica básica, de donde sabemos que la distancia de los cuerpos en 3 dimensiones es básicamente:
$\|r\| = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ Es aquí donde hemos de hacer mención que se toman las 3 distancias, todas las que se ven relacionadas (r_{12}, r_{13}, r_{23})
Ahora una vez observado esto, propusimos una serie de condiciones que regularan lo anterior, por ejemplo;
(i) La distancia entre los radios de los cuerpos no puede ser menor que la suma de cualquier radio, si esto sucede, automáticamente decidimos convertir las velocidades a 0, esto es es $\vec{v} = 0$
(ii)Si estas condiciones no son "violadas", el programa seguirá ejecutándose de manera adecuada, donde encontramos que:
$a_{1x} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (x_3 - x_1)}{(r_{13})^3}$
$a_{1y} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (y_3 - y_1)}{(r_{13})^3}$
$a_{1z} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (z_2 - z_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot Gm3 \cdot (z_3 - z_1)}{(r_{13})^3}$
De manera análoga realizamos lo mismo para los demás cuerpos es decir.
Para el cuerpo 2:
$a_{2x} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (x_1 - x_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (x_3 - x_2)}{(r_{23})^3}$
$a_{2y} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (y_1 - y_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (y_3 - y_2)}{(r_{23})^3}$
$a_{2z} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (z_1 - z_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot Gm3 \cdot (z_3 - z_2)}{(r_{23})^3}$
Para el tercer cuerpo:
$a_{3x} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_1 \cdot (x_1 - x_3)}{(r_{13})^3}$
$a_{3y} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (y_2 - y_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_1 \cdot (y_1 - y_3)}{(r_{13})^3}$
$a_{3z} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (z_2 - z_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot Gm_1 \cdot (z_1 - z_3)}{(r_{13})^3}$

De manera similar hicimos el mismo procedimiento para las posiciones de los cuerpos actualizando las posiciones con las ecuaciones conocidas de cinemática;

$x_{f1} = x_1 + v_{i1x} \cdot dt + \frac{a_{x1} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f1} = x_1 + v_{i1y} \cdot dt + \frac{a_{y1} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f1} = x_1 + v_{i1z} \cdot dt + \frac{a_{z1} \cdot dt^2}{2}$
$x_{f1} = x_1 + v_{i1x} \cdot dt + \frac{a_{x2} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f1} = y_1 + v_{i1y} \cdot dt + \frac{a_{y2} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f1} = z_1 + v_{i1z} \cdot dt + \frac{a_{z2} \cdot dt^2}{2}$
$x_{f3} = x_3 + v_{i3x} \cdot dt + \frac{a_{x3} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f3} = y_3 + v_{i3y} \cdot dt + \frac{a_{y3} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f3} = z_3 + v_{i3x} \cdot dt + \frac{a_{z3} \cdot dt^2}{2}$
Ahora para modificar las velocidades en cada instante de iteración:
$v_{1x} = v_{i1x} + a_{x1} \cdot dt$
$v_{1y} = v_{i2y} + a_{y1} \cdot dt$
$v_{1y} = v_{i3z} + a_{z1} \cdot dt$
$v_{2x} = v_{i2x} + a_{x2} \cdot dt$
$v_{2y} = v_{i2y} + a_{y2} \cdot dt$
$v_{2z} = v_{i2z} + a_{z2} \cdot dt$
$v_{3x} = v_{i3x} + a_{x3} \cdot dt$
$v_{3y} = v_{i3y} + a_{y3} \cdot dt$
$v_{3z} = v_{i3z} + a_{z3} \cdot dt$

Deducción de las ecuaciones, de manera alternativa

Para calcular los componentes del vector aceleracion de la masa 1, donde sea $M1$ la masa de la partícula ubicada en $r =< x_1, y_1, z_1 >$ tenemos:

$(i) a_{1x} = \|a\| Cos(\beta) Cos(\alpha)$ $(ii) a_{1y} = \|a\| Cos(\beta) Sin(\alpha)$

$(iii) a_{1z} = \|a\| Sin(\beta)$

De donde:

$\text{Cos}(\beta) = \frac{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}{\|r_{12}\|}$

$\text{Cos}(\alpha) = \frac{\Delta x}{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}$

$\text{Sin}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}$

$\text{a}_{1y} = G \frac{m_2 \Delta y}{(\|r_{12}\|)^3}$

Entonces;

La magnitud $\|r_{12}\|$ se obtiene de la siguiente manera:

$F = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}$, $F = ma (iv)...$

$\therefore \|r_{12}\| = G \frac{m_2}{\|(r_{12}\|)^2}$

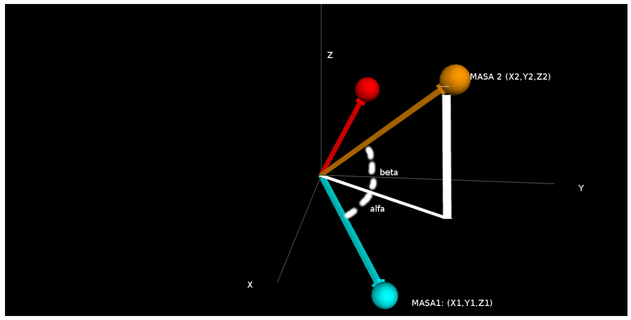

Figure 1: Modelo de un sistema de dos partículas en 3 dimensiones.

$$\text{de } (iv) \text{ combinando con } (i), (ii), (iii), \text{ obtenemos ;}$$
$$a_{1x} = G\frac{m2}{\|(r_{12}\|)^2} \cdot \frac{\sqrt[2]{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}}{r_{12}} \cdot \frac{\Delta x_1}{\sqrt[2]{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}}$$
$$a_{1x} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta x_1$$
$$a_{1y} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta y_1$$
$$a_{1z} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta z_1$$
$$\therefore \Delta x_1 = x_2 - x_1, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta z_2 - z1$$

1. Descripción del Software:

Simulación del problema de los 3 cuerpos *Título: Simulación del problema de los 3 cuerpos*
Autores: José Manuel Delgado González, Josué Juárez Morales, Emmanuel Isaac Juárez Caballero, Héctor Daniel Lozano Ochoa, David Rogelio Márquez Castillo
Título del programa: 3cuerpos simulacion
Licensing provisions: none
Lenguaje de programación: Python, version 2.7
Computadora (modelo):HP notebook G4 (2017)
Sistema Operativo: Windows, MAC OS, Linux, (soporte de Vpython)
RAM: 77,000 bytes
Número de núcleos del procesador usados: 1 de 4 con los que contaba el procesador.

```python
p1=sphere(pos=(x1,y1,z1), radius=radio1,color=color.orange, make_trail=true)
p2=sphere(pos=(x2,y2,z2), color=color.cyan, make_trail=true,radius=radio2)
p3=sphere(pos=(x3,y3,z3), radius=radio3,color=color.red, make_trail=true)

while(t<ttotal):
    rate(1e308)

    r12=sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2+(z2-z1)**2)
    r13=sqrt((x3-x1)**2+(y3-y1)**2+(z3-z1)**2)
    r23=sqrt((x2-x3)**2+(y2-y3)**2+(z2-z3)**2)
    if (r12<=(radio1+radio2)):
        vi1x=0
        vi1y=0
        vi1z=0
        vi2x=0
        vi2y=0
        vi2z=0
    if (r13<=(radio1+radio3)):
        vi1x=0
        vi1y=0
        vi1z=0
        vi3x=0
        vi3y=0
        vi3z=0
    if (r23<=(radio3+radio2)):
        vi3x=0
        vi3y=0
        vi3z=0
        vi2x=0
        vi2y=0
        vi2z=0
    ax1=G*(((m2*(x2-x1))/r12**3)+(m3*(x3-x1))/r13**3)
    ay1=G*(((m2*(y2-y1))/r12**3)+(m3*(y3-y1))/r13**3)
    az1=G*(((m2*(z2-z1))/r12**3)+(m3*(z3-z1))/r13**3)

    ax2=G*(((m1*(x1-x2))/r12**3)+(m3*(x3-x2))/r23**3)
    ay2=G*(((m1*(y1-y2))/r12**3)+(m3*(y3-y2))/r23**3)
    az2=G*(((m1*(z1-z2))/r12**3)+(m3*(z3-z2))/r23**3)

```

Figure 2: Segmento de código utilizado.

Material de descripción: El programa es un simulador que ocupa la librería de Vpython para poder modelar trayectorias de los cuerpos que so atraídos
Keywords: Python, 3 body-problem, VPython , etc.
Método de solución: Método de iteraciones a partir de las leyes de Newton
Restricciones:
No se puede animar a una velocidad mayor que 1e38 cuadros por segundo.
Running time:
Depende de la simulación, pero si el programa permite imprimir coordenadas, se aproxima que tarda entre 5 y 6 minutos en simular.

2. Resultados

Nosotros para realizar el análisis de las soluciones numéricas que alcanzamos decidimos ir en la búsqueda de algún otro programa que hiciera algo similar a lo que nosotros estamos buscando y después de verificar que el código que tomaríamos de guía fue validado antes lo que procedimos a hacer fue tomar los mismos valores de referencia que había utilizado el diseñador del otro software para posteriormente hacer una comparación directa de los resultados;
De donde:
Dadas las siguientes condiciones iniciales;
$m = 6.0E30, 2.0E30, 1.0E27$

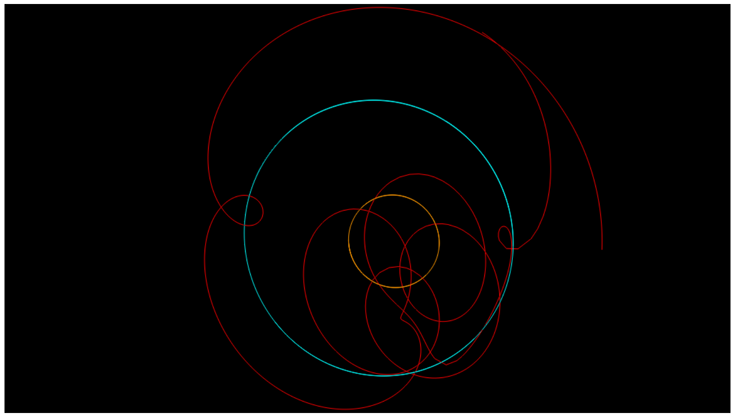

Figure 3: Imagen de las trayectorias seguidas por los cuerpos dadas las condiciones anteriores.

$r = -1.0E8, 0, 0, 3.0E8, 0, 0, 5.0E8, 0, 0$
$v = 0, -789035.908, 0, 0, 2367107.724, 0, 0, 4070000, 0$

3. Conclusiones

Como conclusión hemos de decir que el programa aporta soluciones aproximadas fidedignas en la resolución del problema de los tres cuerpos usando únicamente mecánica newtoniana, dicho esto hemos de puntualizar en que es sólo una aproximación fidedigna de las trayectorias descritas por tres cuerpos que son atraídos gravitacionalmente. Hemos de hacer mención que en la etapa de investigación para la resolución del problema nos topamos con métodos más sofisticados que sin duda alguna parecían ser más precisos, pero contábamos con el inconveniente de no tener actualmente las herramientas matemáticas suficientes para desarrollar dichos métodos, por lo que no descartamos que en un futuro podamos actualizar el programa actual con una nueva versión que resuelva el problema de manera más sofisticada.

References

[1] Reference 1 Resnick, R., Halliday, D. Krane, K. (1992). Physics. New York: Wiley.

[2] Reference 2 Serway, R. Jewett, J. (2006). Physics for scientists and engineers. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole.

References

MSDN. (2016). Fsicia y ecuaciones de los problemas de los dos y tres cuerpos. 1/Jun/2017, de MICROSOFT Sitio web: https://msdn.microsoft.com/es-es/library/dn528554(v=vs.85).aspx

Volker Dörr. (2013). The differential equations describing the 3 body of classical celestial mechaics. 1/Jun/2017, de Volker Dörr Sitio web: https://plus.google.com/b/10942