Simulación del problema de los tres cuerpos

Manuel Delgado[a], Josué Juárez[b], Isaac Caballero[c], Héctor Lozano[d], Rogelio Márquez[e]

[a] *lo.gogomd@gmail.com*
[b] *juarezjosue.997@gmail.com*
[c] *eisaacjc8@gmail.com*
[d] *dan15ochoa@hotmail.com*
[e] *roronoamihaw3@gmail.com*

Abstract

The objective of this project is make a simulation of the three body problem in classical mechanics who are atracted each other due to gravitacional force using the laws of Newton. For this simulation we use Python 2.7 and the Vpython library,using only iterative methods for this.

It's important to say that this project it's only an approximation of the numeric solutions.

Keywords: Gravitacional interaction; Laws Of Newton; Python; Simulation; Three Body Problem, etc.

1. Resumen

El objetivo de este proyecto es hacer una simulación del problema de los 3 cuerpos que son atraídos gravitacionalmente entre ellos, usando únicamente las leyes de Newton, obviamente en mecánica clásica. Para esta simulación solo se ha de hacer uso de la versión de Python 2.7 y la librería VPython haciendo uso de métodos iterativos y las condiciones aprendidas en clase.

Objetivo

Hacer una simulación que aproxime el cálculo de las trayectorias que siguen 3 cuerpos atraídos gravitacionalmente entre ellos haciendo uso de las Leyes de Newton y el lenguaje de programación Python.

Introducción

El problema de los 3 cuerpos es un problema de mecánica clásica que se basa en el poder descifrar el comportamiento de las trayectorias que siguen 3 cuerpos de masas $m1, m2, m3$ bajo la atracción gravitacional. Este es un problema que en un principio fue estudiado por Newton en "$Inequalities of the lunar motion$". En los años 1740's la búsqueda de soluciones analíticas para poder predecir las trayectorias de los cuerpos sufrió un gran adelanto con las contribuciones de Euler, Clairut y d'Alembert, la mayoría de estas soluciones son sistemas de ecuaciones diferenciales fueron desarrolladas por Lagrange y Laplace, la búsqueda entró en una nueva era con el trabajó de Poincaré

2. Desarrollo de la problemática

Nuestra manera de solucionar este problema fue hacer un enfoque iterativo que de entrada solicitara al usuario las condiciones iniciales del sistema y nos retornara una aproximación de las trayectorias del sistema.
Nosotros recurrimos a la formula de gravitación universal que conocemos desde el bachillerato y la cual todavía manejamos en nuestro primer curso de mecánica en la facultad de física, de dónde básicamente lo que sabemos es que la fuerza de atracción o repulsión entre dos cuerpos que son atraídos gravitacionalmente entre ellos es directamente proporcional al producto de las masas multiplicadas por el vector unitario de la posición e inversamente proporcional al cuadrado de la magnitud del vector posición que las separa(i). $\vec{F} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{\vec{r}^2}\hat{r}$ (i)
Dónde G es una constante que para el propósito del proyecto tendrá las unidades; $G; [\frac{Km^3}{día^2 \cdot Kg}]$
La distancia se calculó usando geometría analítica básica, de donde sabemos que la distancia de los cuerpos en 3 dimensiones es básicamente:
$\|r\| = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Es aquí donde hemos de hacer mención que se toman las 3 distancias, todas las que se ven relacionadas (r_{12}, r_{13}, r_{23})
Ahora una vez observado esto, propusimos una serie de condiciones que regularan lo anterior, por ejemplo;
(i) La distancia entre los radios de los cuerpos no puede ser menor que la suma de cualquier radio, si esto sucede, automáticamente decidimos convertir las velocidades a 0, esto es es $\vec{v} = 0$
(ii)Si estas condiciones no son "violadas", el programa seguirá ejecutándose de manera adecuada, donde encontramos que:

$a_{1x} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (x_3 - x_1)}{(r_{13})^3}$
$a_{1y} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (y_3 - y_1)}{(r_{13})^3}$
$a_{1z} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (z_2 - z_1)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot Gm3 \cdot (z_3 - z_1)}{(r_{13})^3}$
De manera análoga realizamos lo mismo para los demás cuerpos es decir.
Para el cuerpo 2:
$a_{2x} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (x_1 - x_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (x_3 - x_2)}{(r_{23})^3}$
$a_{2y} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (y_1 - y_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_3 \cdot (y_3 - y_2)}{(r_{23})^3}$
$a_{2z} = \frac{G \cdot m_1 \cdot (z_1 - z_2)}{(r_{12})^3} + \frac{\cdot Gm3 \cdot (z_3 - z_2)}{(r_{23})^3}$
Para el tercer cuerpo:
$a_{3x} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_1 \cdot (x_1 - x_3)}{(r_{13})^3}$
$a_{3y} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (y_2 - y_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot G \cdot m_1 \cdot (y_1 - y_3)}{(r_{13})^3}$
$a_{3z} = \frac{G \cdot m_2 \cdot (z_2 - z_3)}{(r_{23})^3} + \frac{\cdot Gm_1 \cdot (z_1 - z_3)}{(r_{13})^3}$

De manera similar hicimos el mismo procedimiento para las posiciones de los cuerpos actualizando las posiciones con las ecuaciones conocidas de cinemática;

$x_{f1} = x_1 + v_{i1x} \cdot dt + \frac{a_{x1} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f1} = x_1 + v_{i1y} \cdot dt + \frac{a_{y1} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f1} = x_1 + v_{i1z} \cdot dt + \frac{a_{z1} \cdot dt^2}{2}$
$x_{f1} = x_1 + v_{i1x} \cdot dt + \frac{a_{x2} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f1} = y_1 + v_{i1y} \cdot dt + \frac{a_{y2} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f1} = z_1 + v_{i1z} \cdot dt + \frac{a_{z2} \cdot dt^2}{2}$
$x_{f3} = x_3 + v_{i3x} \cdot dt + \frac{a_{x3} \cdot dt^2}{2}$
$y_{f3} = y_3 + v_{i3y} \cdot dt + \frac{a_{y3} \cdot dt^2}{2}$
$z_{f3} = z_3 + v_{i3x} \cdot dt + \frac{a_{z3} \cdot dt^2}{2}$
Ahora para modificar las velocidades en cada instante de iteración:
$v_{1x} = v_{i1x} + a_{x1} \cdot dt$
$v_{1y} = v_{i2y} + a_{y1} \cdot dt$
$v_{1y} = v_{i3z} + a_{z1} \cdot dt$
$v_{2x} = v_{i2x} + a_{x2} \cdot dt$
$v_{2y} = v_{i2y} + a_{y2} \cdot dt$
$v_{2z} = v_{i2z} + a_{z2} \cdot dt$
$v_{3x} = v_{i3x} + a_{x3} \cdot dt$
$v_{3y} = v_{i3y} + a_{y3} \cdot dt$
$v_{3z} = v_{i3z} + a_{z3} \cdot dt$

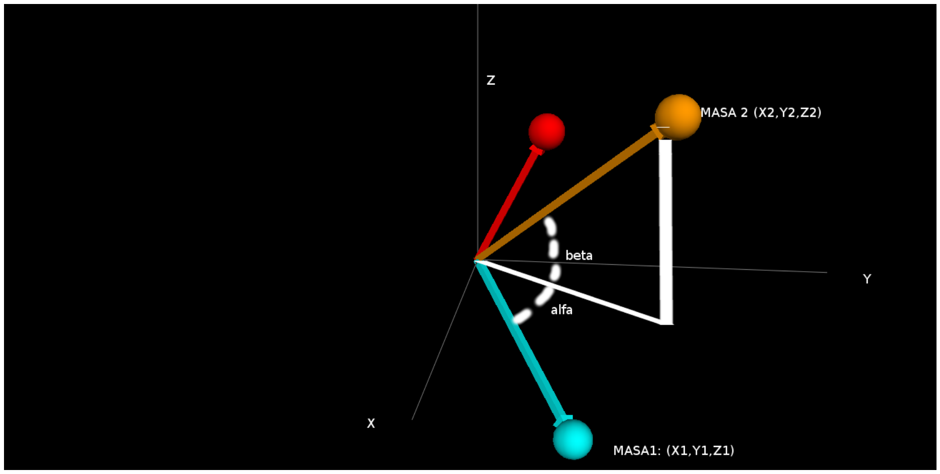

Figure 1: Modelo de un sistema de dos partículas en 3 dimensiones.

Deducción de las ecuaciones

Para calcular los componentes del vector aceleracion de la masa 1, donde sea $M1$ la masa de la partícula ubicada en $r =< x_1, y_1, z_1 >$ tenemos :
a_1 que será la representación de las aceleraciones que sufre el cuerpo uno en los tres ejes (x, y, z)

$$(i)a_{1x} = \|a\| \, Cos(\beta)Cos(\alpha)$$
$$(ii)a_{1y} = \|a\| \, Cos(\beta)Sin(\alpha)$$
$$(iii)a_{1z} = \|a\| \, Sin(\beta)$$

De donde observando la figura (i) se tiene que:

$$Cos(\beta) = \frac{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}{\|r_{12}\|}$$
$$Cos(\alpha) = \frac{\Delta x}{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}$$
$$Sin(\alpha) = \frac{\Delta y}{\sqrt[2]{(\Delta x)^2 + ((\Delta y)^2}}$$

La magnitud $\|r_{12}\|$ se obtiene de la siguiente manera:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}, \; F = ma(iv)...$$

Por lo tanto igualando estas ecuaciones, se puede calcular la magnitud de la aceleración, la cual, posteriormente se remplaza en las ecuaciones $(i), (ii), (iii)$

$$\|a_{12}\| = G\frac{m_2}{\|(r_{12}\|)^2}$$

de (iv) combinando con $(i), (ii), (iii)$, obtenemos ;

$$a_{1x} = G\frac{m2}{\|(r_{12}\|)^2} \cdot \frac{\sqrt[2]{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}}{r_{12}} \cdot \frac{\Delta x_1}{\sqrt[2]{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}}$$
$$a_{1x} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta x_1$$

$$a_{1y} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta y_1$$
$$a_{1z} = G\frac{m_2}{(\|r_{12}\|)^3} \cdot \Delta z_1$$

Se hace el mismo razonamiento para las demás combinaciones de partículas, es decir, la interacción entre m1 y m3 y la interacción entre m2 y m3, finalmente se terminan haciendo sumas de los vectores aceleración con sus respectivos componentes, dando lugar a las ecuaciones de (i)

Donde los deltas (x,y,z) en este caso , tendrán este valor.

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta z_2 - z1$$

3. Descripción del Software:

Simulación del problema de los 3 cuerpos *Título: Simulación del problema de los 3 cuerpos*
Autores: José Manuel Delgado González, Josué Juárez Morales, Emmanuel Isaac Juárez Caballero, Héctor Daniel Lozano Ochoa, David Rogelio Márquez Castillo
Título del programa: 3cuerpos simulacion
Licensing provisions: none
Lenguaje de programación: Python, version 2.7
Computadora (modelo):HP notebook G4 (2017)
Sistema Operativo: Windows, MAC OS, Linux, (soporte de Vpython)
RAM: 77,000 bytes
Número de núcleos del procesador usados: 1 de 4 con los que contaba el procesador.
Material de descripción: El programa es un simulador que ocupa la librería de Vpython para poder modelar trayectorias de los cuerpos que so atraídos
Keywords: Python, 3 body-problem, VPython , etc.
Método de solución: Método de iteraciones a partir de las leyes de Newton
Restricciones:
No se puede animar a una velocidad mayor que 1e308 cuadros por segundo.
Running time:
Depende de la simulación, pero si el programa permite imprimir coordenadas, se aproxima que tarda entre 5 y 6 minutos en simular.

```
p1=sphere(pos=(x1,y1,z1), radius=radio1,color=color.orange, make_trail=true)
p2=sphere(pos=(x2,y2,z2), color=color.cyan, make_trail=true,radius=radio2)
p3=sphere(pos=(x3,y3,z3), radius=radio3,color=color.red, make_trail=true)

while(t<ttotal):
    rate(1e308)

    r12=sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2+(z2-z1)**2)
    r13=sqrt((x3-x1)**2+(y3-y1)**2+(z3-z1)**2)
    r23=sqrt((x2-x3)**2+(y2-y3)**2+(z2-z3)**2)
    if (r12<=(radio1+radio2)):
        vi1x=0
        vi1y=0
        vi1z=0
        vi2x=0
        vi2y=0
        vi2z=0
    if (r13<=(radio1+radio3)):
        vi1x=0
        vi1y=0
        vi1z=0
        vi3x=0
        vi3y=0
        vi3z=0
    if (r23<=(radio3+radio2)):
        vi3x=0
        vi3y=0
        vi3z=0
        vi2x=0
        vi2y=0
        vi2z=0
    ax1=G*(((m2*(x2-x1))/r12**3)+(m3*(x3-x1))/r13**3)
    ay1=G*(((m2*(y2-y1))/r12**3)+(m3*(y3-y1))/r13**3)
    az1=G*(((m2*(z2-z1))/r12**3)+(m3*(z3-z1))/r13**3)

    ax2=G*(((m1*(x1-x2))/r12**3)+(m3*(x3-x2))/r23**3)
    ay2=G*(((m1*(y1-y2))/r12**3)+(m3*(y3-y2))/r23**3)
    az2=G*(((m1*(z1-z2))/r12**3)+(m3*(z3-z2))/r23**3)

```

Figure 2: Segmento de código utilizado.

4. Resultados

Nosotros tomamos algunos valores de masas, distancias y velocidades, de un programa que simula la atracción gravitacional de tres cuerpos el cual utiliza métodos más sofisticados. Las cuales se muestran a continuación:
$m = 6.0E30, 2.0E30, 1.0E27$
$r = -1.0E8, 0, 0, 3.0E8, 0, 0, 5.0E8, 0, 0$
$v = 0, -789035.908, 0, 0, 2367107.724, 0, 0, 4070000, 0$
Al introducir dichos valores en nuestro programa pudimos observar que la simulación que nuestro programa genera es muy aproximada al programa del cual rescatamos los valores de masas, distancias y velocidades. Sin embargo con el transcurso del tiempo si podría notar una ligera desviación en las trayectorias.
A pesar de ello fue una aproximación exitosa para los primeros intervalos de tiempo. Esto se debe al dt que se utilizó para realizar la simulación, pues mientras menor sea el diferencial del tiempo, la trayectoria de los cuerpos en la simulación es más precisa en un intervalo de tiempo más grande.

5. Conclusiones

Las simulaciones realizadas por nuestro programa son fidedignas pues las trayectorias de los cuerpos son muy aproximadas a las "reales" en un intervalo de tiempo

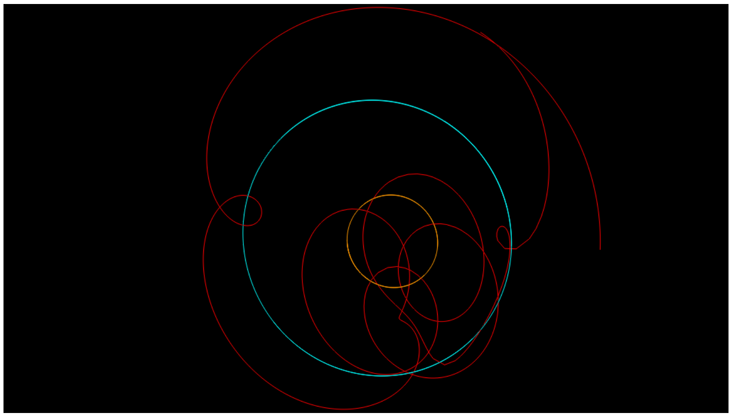

Figure 3: Imagen de las trayectorias seguidas por los cuerpos dadas las condiciones anteriores.

inicial. La precisión de las trayectorias depende del incremento infinitesimal del tiempo, pues mientras el incremento sea más pequeño (*tienda* a 0) las trayectorias se asemejan más a las trayectorias reales en un intervalo de tiempo más grande.

References

[1] Reference 1 Resnick, R., Halliday, D. Krane, K. (1992). Physics. New York: Wiley.

[2] Reference 2 Serway, R. Jewett, J. (2006). Physics for scientists and engineers. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole.

MSDN. (2016). Física y ecuaciones de los problemas de los dos y tres cuerpos. 1/Jun/2017, de MICROSOFT Sitio web: https://msdn.microsoft.com/es-es/library/dn528554(v=vs.85).aspx

Volker Dörr. (2013). The differential equations describing the 3 body of classical celestial mechaics. 1/Jun/2017, de Volker Dörr Sitio web: https://plus.google.com/b/109426957106475312285/+vdoerr/posts/TrH7MMDwEGX?pageId=109426957106475312285