

ГЛАВА 2.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ 3-ФАЗНЫХ АСИНХРОННЫХ ЧАСТОТНО-РЕГУЛИРУЕМЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

2.1. Математическая модель идеализированной трех фазной обобщенной машины

Обычно исследование ЭМ, как аналитическое, так и численное в большинстве случаев базируется на основе двух фазной прямоугольной системы координат.

Цифровое моделирование позволяет обойтись без введения искусственных координат, уравнения, описывающие поведение ЭМ могут быть записаны в естественных осях – связанных с фазами статора и ротора. Удобство такой записи системы дифференциальных уравнений состоит в следующем, при работе ЭМ от преобразователя для корректного описания режима работы необходимо постоянно преобразовывать временные зависимости напряжения, токов и потокосцеплений к искусственным прямоугольным осям, поэтому теряется непосредственная информация о токах в фазах статора и ротора. В трехфазной же системе мы имеем дело с реальными фазными величинами токов.[43]

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений ЭМ в непреобразованных фазных осях. Для этой цели рассмотрим идеализированную модель электрической машины (ЭМ) с магнитосвязанными трехфазными цепями (рис.2.1). Если рассматривается

АД с коротко замкнутым ротором, то
$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 и на роторе фазы замыкаются.

Большинство электрических машин переменного тока предназначено для работы в трехфазных сетях, поэтому они строятся с симметричными

трехфазными обмотками на статоре, причем МДС этих обмоток распределены в пространстве по закону близкому к

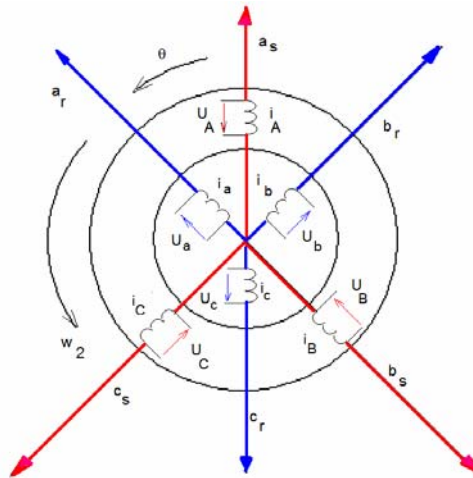


Рис.(2.1) Идеализированная модель 3 - фазной обобщенной электрической машины векторной модели асинхронного двигателя

синусоидальному, т.е. МДС, создаваемая k -й обмоткой в точке, отстоящей от оси этой обмотке на угол α_k равна - $F\alpha_k = F_{k0} \cos \alpha_k$, где F_{k0} - МДС, соответствующая оси k -й обмотки. Синусоидальность распределения позволяет представить МДС или пропорциональные им токи обобщенным пространственным вектором на комплексной плоскости, т.е. вектором, представляющим собой геометрическую сумму отрезков, построенных на пространственных осях фазных обмоток и соответствующих мгновенным значениям фазных МДС или токов. При этом проекции обобщенного вектора на оси фазных обмоток в любой момент времени будут соответствовать мгновенным значениям соответствующих величин.

При симметричной трехфазной системе обмоток обобщенный вектор тока статора и ротора можно представить в виде[29]

$$i_s = \frac{2}{3}(i_A + ai_B + a^2i_C) \text{ для статора,} \quad (2.1)$$

$$i_r = \frac{2}{3}(i_a + ai_b + a^2i_c) \text{ для ротора.} \quad (2.2)$$

где $a = e^{j120} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ - операторы поворота

где i_A, i_B, i_C - мгновенные значения токов соответствующих обмоток статора

i_a, i_b, i_c - мгновенные значения токов соответствующих обмоток ротора

Уравнения Кирхгофа

$$u_s = i_s R_s + \frac{d\psi_s}{dt} \text{ уравнение напряжения статора в векторной форме} \quad (2.3)$$

$$u_r = i_r R_r + \frac{d\psi_r}{dt} - j\omega_r \psi_r \text{ уравнение напряжения ротора в векторной форме} \quad (2.4)$$

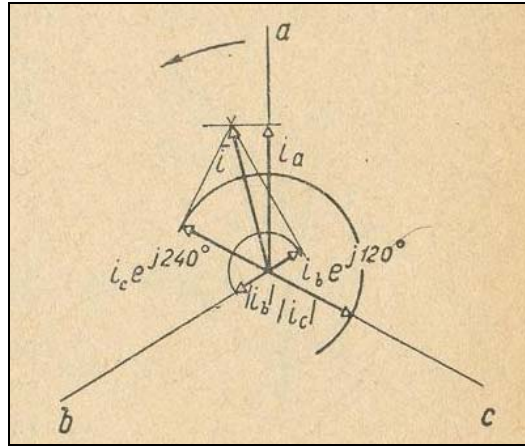


Рис.(2.2) Векторы токов трех фаз

$$L_s = L_{sl} + L_m \quad L_r = L_{rl} + L_m \quad L_m = \frac{3}{2} L_{sm} \quad (2.5)$$

Обобщенный вектор, как и любой вектор на комплексной плоскости, можно представить алгебраической формой записи комплексного числа. Обычно это делают, совмещая вещественную ось с осью обмотки **A** для статора и обмотки **a** для ротора (рис.2.2), тогда [16]

Фазные токи статора

$$i_A = \text{Re}(i_s) = \frac{2}{3} \text{Re} \left[i_A + a i_B + a^2 i_C \right] = \frac{2}{3} \left[i_A - \frac{1}{2} i_B - \frac{1}{2} i_C \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} i_A \right] = i_A \quad (2.6)$$

$$i_B = \text{Re}(a^2 i_s) = \text{Re} a^2 \frac{2}{3} \left[i_A + a i_B + a^2 i_C \right] = \frac{2}{3} \text{Re} \left[a^2 i_A + a^3 i_B + a^4 i_C \right] \quad (2.7)$$

$$i_C = \text{Re}(a i_s) = \text{Re} a \frac{2}{3} \left[i_A + a i_B + a^2 i_C \right] = \frac{2}{3} \text{Re} \left[a i_A + a^2 i_B + a^3 i_C \right] \quad (2.8)$$

аналогично получаем фазные токи ротора

$$i_a = \text{Re}(i_r) = \frac{2}{3} \text{Re} \left[i_a + a i_b + a^2 i_c \right] = \frac{2}{3} \left[i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} i_a \right] = i_a \quad (2.9)$$

$$i_b = \text{Re}(ai_s) = \text{Re} a \frac{2}{3} [i_a + ai_b + a^2 i_c] = \frac{2}{3} \text{Re} [ai_a + a^2 i_b + a^3 i_c] \quad (2.10)$$

$$i_c = \text{Re}(ai_s) = \text{Re} a \frac{2}{3} [i_a + ai_b + a^2 i_c] = \frac{2}{3} \text{Re} [ai_a + a^2 i_b + a^3 i_c] \quad (2.11)$$

Потокоцепления

$$\psi_s = i_s L_s + i_r L_{rm} \quad (2.12)$$

$$\psi_r = i_r L_r + i_s L_{rm} \quad (2.13)$$

$$\psi_s = \frac{2}{3} [i_A + ai_B + a^2 i_C] L_s + \frac{2}{3} [i_a + ai_b + a^2 i_c] L_{rm} \quad (2.14)$$

$$\psi_r = \frac{2}{3} [i_a + ai_b + a^2 i_c] L_s + \frac{2}{3} [i_A + ai_B + a^2 i_C] L_{rm} \quad (2.15)$$

ЭДС трансформации

$$\text{Re} \frac{d(\psi_s)}{dt} = L_s \frac{di_A}{dt} + L_{rm} \frac{di_a}{dt} \quad (2.16)$$

приведенная потокоцепления

$$\psi' = L_r i'_r + L_{rm} i_s \quad (2.17)$$

ЭДС вращения

$$-j\omega_r \text{Re}[\psi'_r] = -j\omega_r \text{Re}[L_r i'_r + L_{rm} i_s] = -j\omega_r \text{Re} \left[\frac{2}{3} (i'_a + ai'_b + a^2 i'_c) L_r + \frac{2}{3} (i_A + ai_B + a^2 i_C) L_{rm} \right] \quad (2.18)$$

$$-j\omega_r \text{Re}[\psi'_r] = -\frac{\omega_r}{\sqrt{3}} [(i'_c - i'_b) L_r + (i_C - i_B) L_{rm}] \quad (2.19)$$

Уравнения Кирхгофа для фазных напряжений статора и ротора ЭМ

$$\begin{aligned} u_A &= i_A R_s + L_s \frac{di_A}{dt} + L_{rm} \frac{di_a}{dt} & u_a &= i'_a R_r + L_r \frac{di'_a}{dt} + L_{rm} \frac{di_A}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} [(i'_c - i'_b) L_r + (i_C - i_B) L_{rm}] \\ u_B &= i_B R_s + L_s \frac{di_B}{dt} + L_{rm} \frac{di_b}{dt} & u_b &= i'_b R_r + L_r \frac{di'_b}{dt} + L_{rm} \frac{di_B}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} [(i'_c - i'_a) L_r + (i_C - i_A) L_{rm}] \\ u_C &= i_C R_s + L_s \frac{di_C}{dt} + L_{rm} \frac{di_c}{dt} & u_c &= i'_c R_r + L_r \frac{di'_c}{dt} + L_{rm} \frac{di_C}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} [(i'_a - i'_b) L_r + (i_A - i_B) L_{rm}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

в матричной формуле

$$[U] = [R][i] + [L_1] \left[\frac{di}{dt} \right] + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} [L_2][i] \quad (2.21)$$

Электромагнитный момент

$$M = \frac{3}{2}(\psi_s \times i_s) \quad M_{\text{я}} = \frac{pL_{rm}}{\sqrt{3}} [i'_a(i_B - i_C) + i'_b(i_C - i_A) + i'_c(i_A - i_B)] \quad (2.22)$$

Если ротор вращается с переменной угловой скоростью, то его движение описывается уравнением[18]

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} = M_{\text{я}} - M_c \quad (2.23)$$

где J - суммарный момент инерции ротора и нагрузочного механизма ;p - число пар полюсов; M_c - момент сопротивления

$$[U] = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad [i] = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & L_{rm} & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & L_{rm} & 0 \\ 0 & 0 & L_s & 0 & 0 & L_{rm} \\ L_{rm} & 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ 0 & L_{rm} & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_{rm} & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad \left[\frac{di}{dt} \right] = \begin{bmatrix} \frac{di_A}{dt} \\ \frac{di_B}{dt} \\ \frac{di_C}{dt} \\ \frac{di_a}{dt} \\ \frac{di_b}{dt} \\ \frac{di_c}{dt} \end{bmatrix}$$

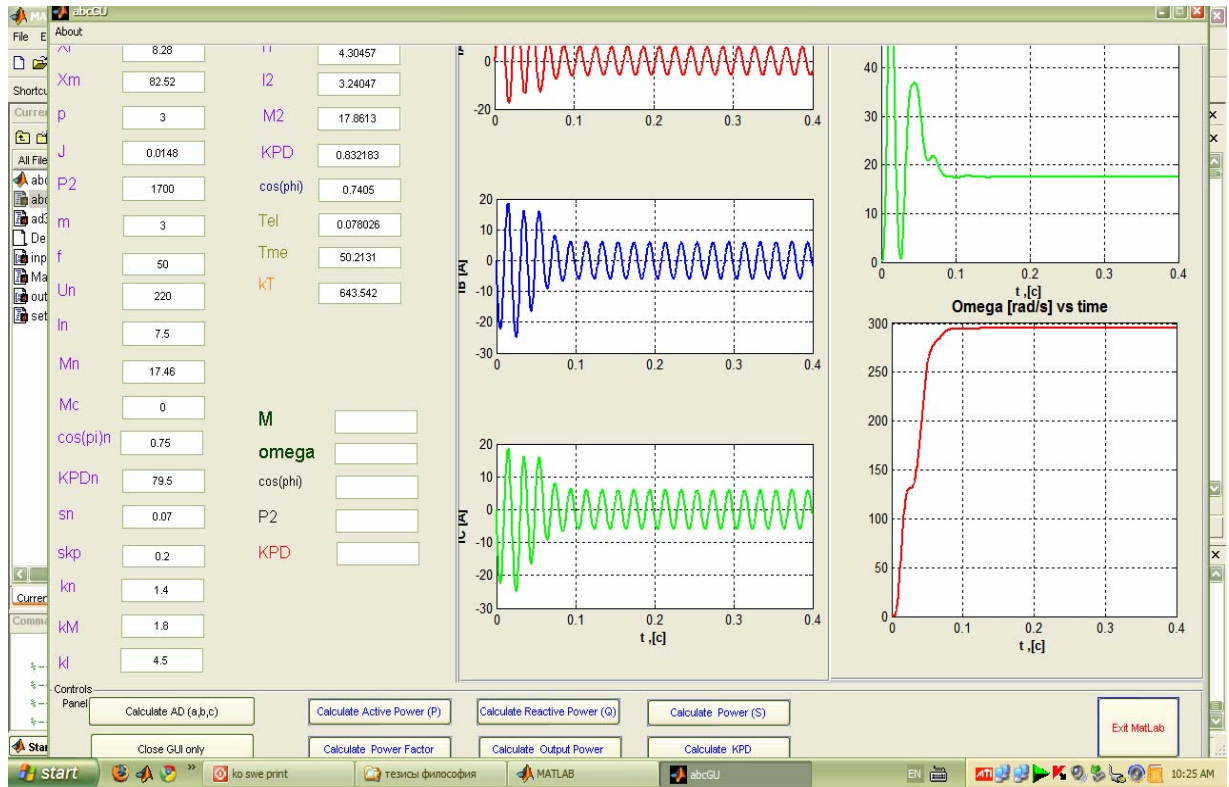
$$[L_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{rm} & -L_{rm} & 0 & L_r & -L_r \\ -L_{rm} & 0 & L_{rm} & -L_r & 0 & L_r \\ L_{rm} & -L_{rm} & 0 & L_r & -L_r & 0 \end{bmatrix}$$

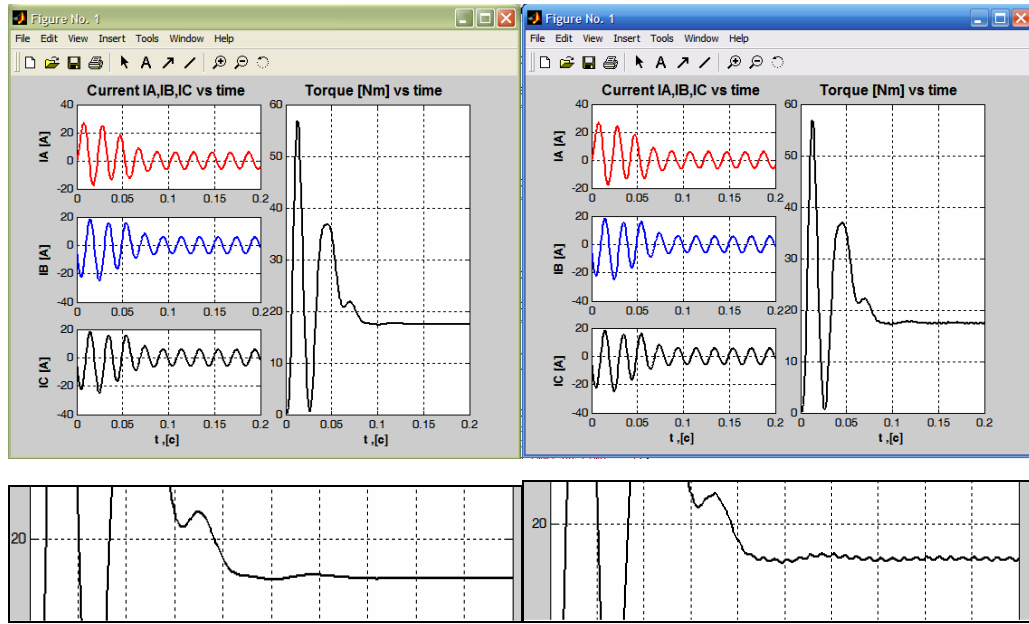
$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & L_{rm} & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & L_{rm} & 0 \\ 0 & 0 & L_s & 0 & 0 & L_{rm} \\ L_{rm} & 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ 0 & L_{rm} & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_{rm} & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_A}{dt} \\ \frac{di_B}{dt} \\ \frac{di_C}{dt} \\ \frac{di_a}{dt} \\ \frac{di_b}{dt} \\ \frac{di_c}{dt} \end{bmatrix} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{rm} & -L_{rm} & 0 & L_r & -L_r \\ -L_{rm} & 0 & L_{rm} & -L_r & 0 & L_r \\ L_{rm} & -L_{rm} & 0 & L_r & -L_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

уравнения коши

$$\left[\frac{di}{dt} \right] = \left[L_1^{-1} \right] \left(\left[U \right] - \left[R \right] \left[i \right] - \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} \left[L_2 \right] \left[i \right] \right) \quad (2.25)$$

$$\left[\frac{di}{dt} \right] = \left(\left[L_1^{-1} \right] \left[U \right] - \left[L_1^{-1} \right] \left[R \right] \left[i \right] - \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} \left[L_1^{-1} \right] \left[L_2 \right] \left[i \right] \right) \quad (2.26)$$





(а)

(б)

Рис.(2.3) Решение СДУ АД (а) без АИН (б) с АИН

2.2. Математическая модель асинхронного двигателя с учетом насыщения в 3-фазной системе координат статора и ротора

Дифференциальные уравнения насыщенной электрической машины имеют такой же вид как и для ненасыщенной машины.

Для системы координат α, β, γ уравнение контуров статора с учетом потерь в стали [18].

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= (R_{s\alpha} + R_m)i_{s\alpha} + R_m i_{r\alpha} + L_{\sigma s\alpha} \frac{di_{s\alpha}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta\alpha}}{dt}; \\ u_{s\beta} &= (R_{s\beta} + R_m)i_{s\beta} + R_m i_{r\beta} + L_{\sigma s\beta} \frac{di_{s\beta}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta\beta}}{dt}; \\ u_{s\gamma} &= (R_{s\gamma} + R_m)i_{s\gamma} + R_m i_{r\gamma} + L_{\sigma s\gamma} \frac{di_{s\gamma}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta\gamma}}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Уравнения контуров короткозамкнутого ротора

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_{r\alpha} i_{r\alpha} + \frac{d\psi_{\delta\alpha}}{dt} + L_{\sigma r} \frac{di_{r\alpha}}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} (L_{\sigma r} i_{r\beta} + \psi_{\delta\beta} - L_{\sigma r} i_{r\gamma} - \psi_{\delta\gamma}); \\ 0 &= R_{r\beta} i_{r\beta} + \frac{d\psi_{\delta\beta}}{dt} + L_{\sigma r} \frac{di_{r\beta}}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} (L_{\sigma r} i_{r\gamma} + \psi_{\delta\gamma} - L_{\sigma r} i_{r\alpha} - \psi_{\delta\alpha}); \\ 0 &= R_{r\gamma} i_{r\gamma} + \frac{d\psi_{\delta\gamma}}{dt} + L_{\sigma r} \frac{di_{r\gamma}}{dt} + \frac{\omega_r}{\sqrt{3}} (L_{\sigma r} i_{r\alpha} + \psi_{\delta\alpha} - L_{\sigma r} i_{r\beta} - \psi_{\delta\beta}). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Для потокосцеплений и токов справедливы следующие выражения:

$$\psi_{s(\alpha,\beta,\gamma)} = \psi_{\sigma s(\alpha,\beta,\gamma)} + \psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}; \quad (2.29)$$

$$\psi_{r(\alpha,\beta,\gamma)} = \psi_{\sigma r(\alpha,\beta,\gamma)} + \psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}; \quad (2.30)$$

$$\psi_{\sigma s(\alpha,\beta,\gamma)} = L_{\sigma s} i_{s(\alpha,\beta,\gamma)}; \quad (2.31)$$

$$\psi_{\sigma r(\alpha,\beta,\gamma)} = L_{\sigma r} i_{r(\alpha,\beta,\gamma)}; \quad (2.32)$$

$$i_{\mu(\alpha,\beta,\gamma)} = i_{s(\alpha,\beta,\gamma)} + i_{r(\alpha,\beta,\gamma)}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим проекции вектора намагничивающего тока i_{μ} на координатные оси:

$$i_{\mu(\alpha,\beta,\gamma)} = i_{s(\alpha,\beta,\gamma)} + i_{r(\alpha,\beta,\gamma)} = i_{\mu} \frac{\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{\psi_{\delta}} \quad (2.34)$$

Дифференцируем по времени (2.71)

$$\frac{di_{s(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} + \frac{di_{r(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} = \frac{\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{\psi_{\delta}} \frac{di_{\mu}}{dt} + i_{\mu} \frac{d}{dt} \left[\frac{\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{\psi_{\delta}} \right] \quad (2.35)$$

Для производных потокосцеплений в (2.72) справедливо

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{\psi_{\delta}} \right] = \frac{\psi_{\delta} \frac{d\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} - \psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)} \frac{d\psi_{\delta}}{dt}}{\psi_{\delta}^2} \quad (2.36)$$

Производная тока намагничивания

$$\frac{i_{\mu}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \quad (2.37)$$

Выражение (2.66) подставляем в (2.72). В полученных выражениях параметры, обратно пропорциональные статической и динамической индуктивностям, обозначим, соответственно, через B^c и B^d .

$$B^c = \frac{i_\mu}{\psi_\delta}; \quad B^D = \frac{di_\mu}{d\psi_\delta} \quad (2.38)$$

В итоге получаем

$$\frac{di_{s(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} + \frac{di_{r(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} = (B^D - B^c) \frac{\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{\psi_\delta} \frac{d\psi_\delta}{dt} + B^c \frac{d\psi_{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}}{dt} \quad (2.39)$$

где $i_{\mu A} = i_A + \tilde{i}_a - \frac{1}{2}[(i_B + \tilde{i}_b) + (i_C + \tilde{i}_c)]; \quad i_{\mu B} = i_B + \tilde{i}_b - \frac{1}{2}[(i_A + \tilde{i}_a) + (i_C + \tilde{i}_c)];$

$$i_{\mu C} = i_C + \tilde{i}_c - \frac{1}{2}[(i_A + \tilde{i}_a) + (i_B + \tilde{i}_b)]; \quad i_{\mu a} = i_{\mu A}; \quad i_{\mu b} = i_{\mu B}; \quad i_{\mu c} = i_{\mu C};$$

$$i_\mu = \left[i_{\mu A}^2 + i_{\mu B}^2 + i_{\mu C}^2 + (i_{\mu A} i_{\mu B} + i_{\mu A} i_{\mu C} + i_{\mu B} i_{\mu C}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

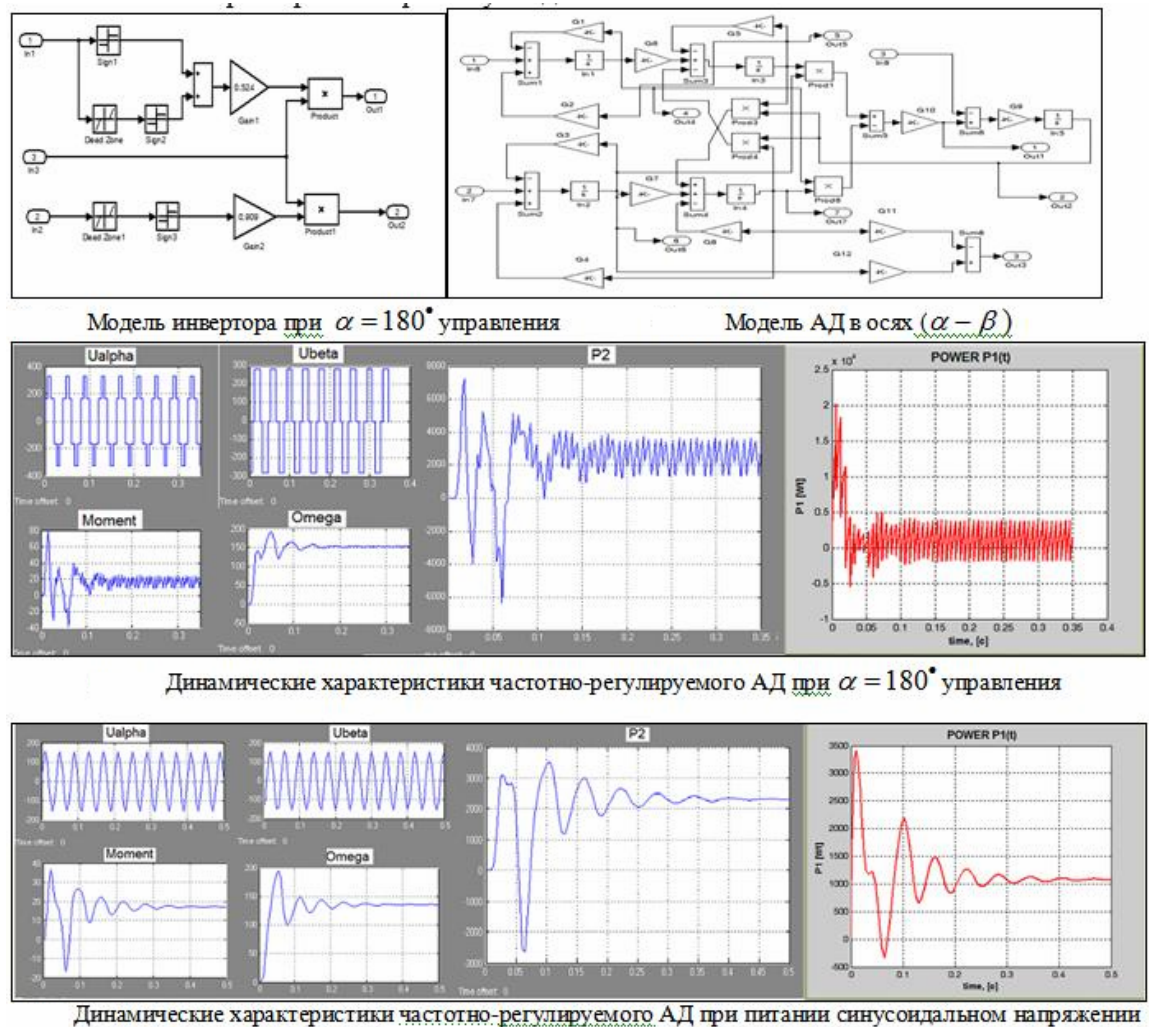


Рис.2.4 Сравнение динамических характеристик АД-ПЧ при питании от (а) 180 управления (б) при питании от синусоидального напряжения

При решении системы дифференциальных уравнений, описывающих работу системы ПЧ-АД, используется метод Рунге-Кутты в модификации Гира. Система линейных алгебраических уравнений, используемая при расчете параметров АД с учетом насыщения и вытеснения тока, решается в матричном виде методом Сарриуса[16].

2.3 Математическая модель асинхронного двигателя в фазной системе координат a, b, c статора и α, β - ротора

В общем случае короткозамкнутый ротор представляется в виде m -фазной системы обмоток. При составлении дифференциальных уравнений обмотку ротора можно заменить двумя короткозамкнутыми эквивалентными контурами неподвижными относительно статора, расположенными по взаимно перпендикулярным осям[42].

Для наиболее точного описания процессов электромеханического преобразования будем использовать модель АД с тремя обмотками статора, расположенными симметрично в пространстве по осям a, b, c и двумя обмотками ротора, расположенными по взаимно перпендикулярным осям α, β (рис.2.5). За положительное направление тока в обмотках идеализированной машины примем направление от конца катушки к ее началу, а за положительное направление оси обмотки - направления векторов МДС катушек при протекании токов в положительном направлении[29].

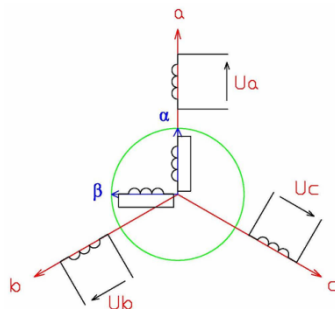


Рис 2.5. Схема модели трехфазного асинхронного двигателя в системе $(a, b, c, (\alpha, \beta))$

Уравнения для этого случая, записанные в векторной форме в неподвижной системе координат, имеют вид[29]:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} - \text{уравнение для напряжений статора} \quad (2.41)$$

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}_r - \text{уравнение для напряжений ротора} \quad (2.42)$$

$$\bar{i}_m = \bar{i}_s + \bar{i}_r - \text{уравнения для токов статора и ротора} \quad (2.43)$$

$$M_{эм} = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s^* \times \bar{i}_s) - \text{уравнение для электромагнитного момента} \quad (2.44)$$

Здесь, \bar{u}_s - обобщенный вектор напряжения статора, \bar{u}_r - обобщенный вектор напряжения ротора, $\bar{\psi}_s$ - обобщенный вектор потокосцепления статора, $\bar{\psi}_r$ - обобщенный вектор потокосцепления ротора. i_m - обобщенный вектор намагничивающего тока, p - число пар полюсов, $M_{эм}$ - электромагнитный момент двигателя, Нм.

При симметричной трехфазной системе обмоток и отсутствия нулевого провода обобщенные вектора токов статора \bar{i}_s , ротора \bar{i}_r и намагничивания \bar{i}_m можно представить в виде[29]:

$$\bar{i}_s = \frac{2}{3} (i_A + a i_B + a^2 i_C) \quad \text{для тока статора,} \quad (2.45)$$

$$\bar{i}_r = \frac{2}{3} (i_a + a i_b + a^2 i_c) \quad \text{для тока ротора.} \quad (2.46)$$

$$\bar{i}_m = \frac{2}{3} (i_{ma} + i_{mb} + i_{mc}) \quad \text{для тока намагничивания} \quad (2.47)$$

где $a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ - операторы поворота

где i_A, i_B, i_C - мгновенные значения токов соответствующих фаз статора

i_a, i_b, i_c - мгновенные значения токов соответствующих фаз ротора

i_{ma}, i_{mb}, i_{mc} - мгновенные значения токов намагничивания соответствующих фаз

Обобщенный вектор, как и любой вектор на комплексной плоскости, можно представить алгебраической формой записи комплексного числа [29].

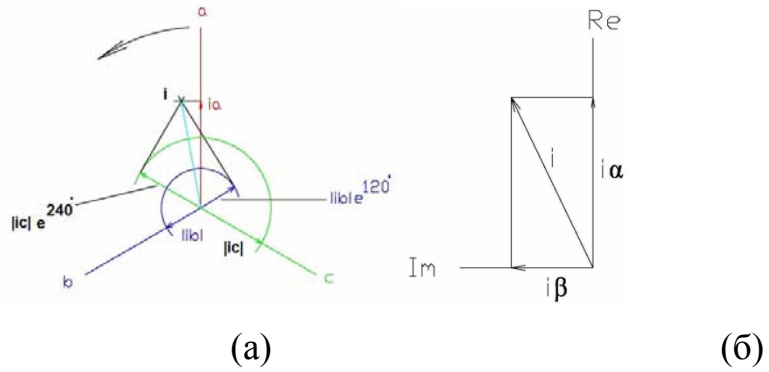


Рис 2.6. Векторы токов трех фаз (а) и двух фаз (б)

Обычно это делают, совмещая вещественную ось с осью фазы **A** статора и фазы **a** ротора, тогда фазные токи статора системе координат (a,b,c (рис. 2.6,a) и фазные токи ротора в системе координатах (α, β) (рис. 2.6,б) имеют вид[29]:

Фазные токи статора в системе координат (a,b,c)

$$i_A = \text{Re}(\bar{i}_s) = \frac{2}{3} \text{Re} \left[i_{AS} + a i_{BS} + a^2 i_{CS} \right] = \frac{2}{3} \left[i_{AS} - \frac{1}{2} i_{BS} - \frac{1}{2} i_{CS} \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} i_{AS} \right] = i_{AS} \quad (2.48)$$

$$i_B = \text{Re}(a^2 \bar{i}_s) = \text{Re} a^2 \frac{2}{3} \left[i_{AS} + a i_{BS} + a^2 i_{CS} \right] = \frac{2}{3} \text{Re} \left[a^2 i_{AS} + a^3 i_{BS} + a^4 i_{CS} \right] = i_{BS} \quad (2.49)$$

$$i_C = \text{Re}(a \bar{i}_s) = \text{Re} a \frac{2}{3} \left[i_{AS} + a i_{BS} + a^2 i_{CS} \right] = \frac{2}{3} \text{Re} \left[a i_{AS} + a^2 i_{BS} + a^3 i_{CS} \right] = i_{CS} \quad (2.50)$$

Фазные токи ротора в системе координат (α, β)

$$i_\alpha = \text{Re}(\bar{i}_r), \quad i_\beta = \text{Im}(\bar{i}_r) \quad (2.51)$$

Здесь, i_{AS}, i_{BS}, i_{CS} - фазные токи статора 3-фазного АД, $i_A, i_B, i_C, (i_\alpha, i_\beta)$ - токи статора и ротора в системе a,b,c, (α, β) , R_s, R_r - активное сопротивление фазы статора и ротора, R_m - активное сопротивления, эквивалентное потерям в стали.

Система дифференциальных уравнений для мгновенных значений полученная на основе уравнений (2)-(3), с учетом (9)-(12) имеет следующий вид:

Уравнения напряжений статора и ротора

$$\left. \begin{aligned} U_a &= \frac{d\psi_a}{dt} + R_s i_a + R_m (i_a + i_\alpha), & U_b &= \frac{d\psi_b}{dt} + R_s i_b + R_m (i_b - \frac{1}{2} i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta) \\ U_c &= \frac{d\psi_c}{dt} + R_s i_c + R_m (i_c - \frac{1}{2} i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta), \\ U_\alpha &= \frac{d\psi_\alpha}{dt} + R_r i_\alpha - \omega_r \psi_\beta, & U_\beta &= \frac{d\psi_\beta}{dt} + R_r i_\beta - \omega_r \psi_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Здесь, обозначено

$$U_a = U_m \cos(\omega_1 t), \quad U_b = U_m \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad U_c = U_m \cos\left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad U_\alpha = U_\beta = 0 \quad (2.53)$$

Уравнения электромагнитного момента

$$M_{эм} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot [\psi_\beta \cdot i_\alpha - \psi_\alpha \cdot i_\beta], \quad (2.54)$$

Уравнения движения

$$\frac{p}{J} (M_{эм} - M_c) = \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.55)$$

где J - суммарный момент инерции ротора и механизма, приведенный к валу АД, M_c - момент сопротивления

Уравнения для потокосцеплений

Выражения потокосцеплений, записанные через токи в заторможенной системе координат а, b, c, (α, β) , имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= L_s i_a + M i_\alpha + M i_{ca}, & \psi_b &= L_s i_b + M \left(-\frac{1}{2} i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta \right) + M i_{cb}, \\ \psi_c &= L_s i_c + M \left(-\frac{1}{2} i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta \right) + M i_{cc}, \\ \psi_\alpha &= L_r i_\alpha + M i_a + M i_{ca}, & \psi_\beta &= L_r i_\beta + M \frac{1}{\sqrt{3}} (i_b - i_c) + M \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{cb} - i_{cc}) \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

где $i_a, i_b, i_c, (i_\alpha, i_\beta)$ - токи статора и ротора, А, $\psi_a, \psi_b, \psi_c, (\psi_\alpha, \psi_\beta)$ - потокосцепления фаз статора (ротора), Вб.

2.4 Математическая модель асинхронного двигателя в фазной системе координат a, b, c статора и α, β - ротора с учетом потерь в стали

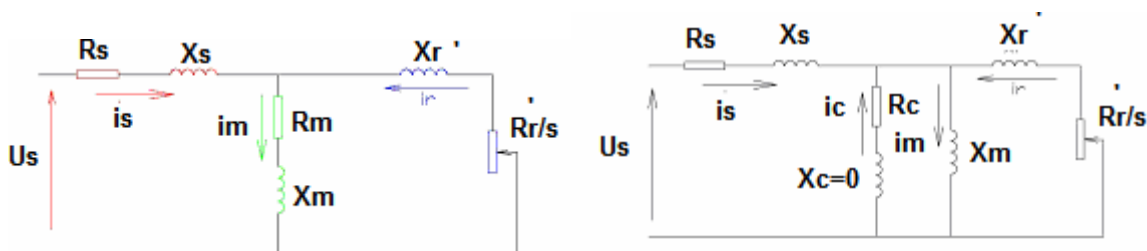
Важность задачи учета потерь в стали АД по крайней мере при работе АД с нагрузками, не превышающими номинальную, определяется существенным вкладом этих потерь в суммарные потери машины. Так, для АД серии 4А потери в стали могут составлять более 20% от полных потерь номинального режима и более 50% от полных потерь холостого хода. Не учет этих потерь при анализе энергетических характеристик привода приводит к существенным погрешностям. Небольшое влияние потери в стали оказывают также на величину и взаимную ориентацию обобщенных векторов электромагнитных переменных АД (напряжения, токов, потокоцеплений) в статических и динамических режимах работы.

В настоящей работе настоящей работе эффект от потерь в стали исследуется разработкой двух вариантов математической модели АД на основе Т-образных схем замещения[24]:

- с последовательным включением активного сопротивления эквивалентного потерям в стали – R_m и индуктивного сопротивления намагничивания - X_m (рис.2.8,а).
- с параллельным включением сопротивлений намагничивающего контура R_c и X_m (рис 2.8,б).

Сопротивления R_c и X_m могут быть легко рассчитаны по известным сопротивлениям R_m , X_m согласно выражениям

$$R_c = \frac{R_m^2 + X_m^2}{R_m}, X_{mu} = \frac{R_m^2 + X_m^2}{X_m}, \quad (2.57)$$



а)

б)

Рис 2.7. Эквивалентные схемы замещения АД с учетом потери в стали

а) с последовательным включением сопротивлений R_m и X_m , б) с параллельным включением сопротивлений R_c и X_m .

Известно [37], что сопротивление R_m зависит не линейно от частоты перемагничивания магнитопровода f , а именно $R_m \equiv f^{1.6}$. Тогда R_m можно выразить как $R_m = R_{m0} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{1.6}$, где R_{m0} - сопротивление потерь в стали, рассчитанное при частоте f_0 . Сопротивление R_c , согласно выражению (2.78) будет также не линейно зависеть от частоты, но по-другому закону $R_c \equiv f^{0.4}$, тогда $R_c = R_{c0} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{0.4}$. Графики изменения сопротивлений R_m и R_c в зависимости от частоты представлены на рис.2.9.

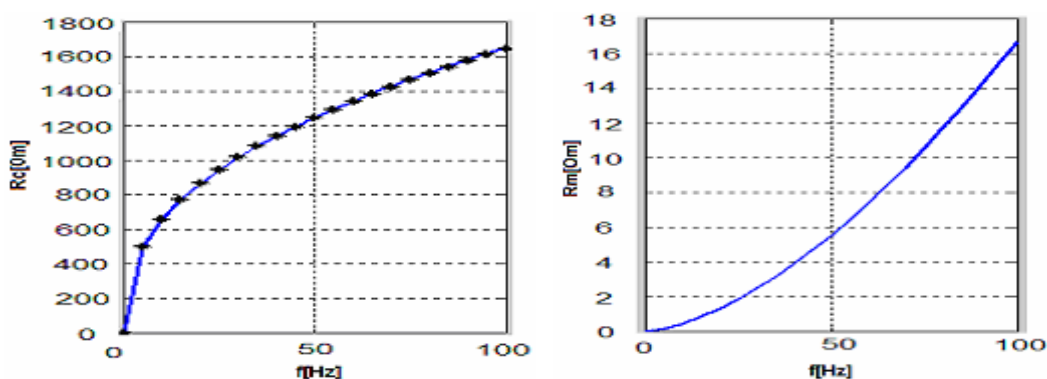


Рис. 2.8 Зависимости сопротивлений R_c , R_m от частоты

В первом варианте модели исследуются процессы путем введения эквивалентного активного сопротивления потерь в стали R_m непосредственно в систему дифференциальных уравнений, что соответствует Т-обратной схеме замещения для установившиеся режима работа, которая изображена на рис 2,а. Уравнения для этого случая, записанные в векторной форме в неподвижной системе координат, имеют вид[29]:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + \bar{i}_m R_m \quad - \text{уравнение для напряжений статора} \quad (2.58)$$

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}_r \quad - \text{уравнение для напряжений ротора} \quad (2.59)$$

$$\bar{i}_m = \bar{i}_s + \bar{i}_r \quad - \text{уравнения для токов статора и ротора} \quad (2.60)$$

$$M_{эм} = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s^* \times \bar{i}_s) \quad \text{уравнение для электромагнитного момента} \quad (2.61)$$

Здесь, \bar{u}_s - обобщенный вектор напряжения статора, \bar{u}_r - обобщенный вектор напряжения ротора, R_m - эквивалентное активное сопротивления вихревые токов, $\bar{\psi}_s$ - обобщенный вектор потокосцепления статора, $\bar{\psi}_r$ - обобщенный вектор потокосцепления ротора. i_m - обобщенный вектор намагничивающего тока, p - число пар полюсов, $M_{эм}$ - электромагнитный момент двигателя, Нм.

Данная система позволяет производить анализ работы АД с учетом потери в стали в случае его работы от преобразователя частоты, когда на обмотки двигателя подается несинусоидальное напряжение.

2.5 Математическая модель для исследования переходных процессов АД в системе а,б,с, (α, β) с учетом потери в стали и с учетом вытеснения тока в роторе

Явление вытеснения тока в стержнях обмотки ротора оказывает значительное влияние на разгон АД. Как известно, во время пуска в стержнях ротора возникают значительные вихревые токи, которые изменяют распределение плотности тока по сечению стержня ротора. В результате активное сопротивление увеличивается, а индуктивное сопротивление - уменьшается. Увеличение активного сопротивления и уменьшение индуктивного сопротивления при пуске из-за вытеснения тока влияют на динамические характеристики АД (на ударный и пусковой моменты, пусковой ток, время пуска и т.д.). Поэтому исследование переходных процессов при пуске АД с учетом изменения активного и индуктивного

сопротивлений ротора, т.е. с учетом нелинейности цепи ротора, имеет существенное значение. Изменение R_r и L_r можно определить с помощью коэффициентов K_r и K_x , которые являются функциями скольжения s или угловой частоты вращения ротора ω_r .

Основу расчета K_r и K_x составляет следующий метод. Пазовая часть стержня короткозамкнутой обмотки ротора - условно делится по высоте на n элементарных слоев рис. 2.9, изолированных друг от друга бесконечно тонким слоем изоляции, чтобы исключить возможность появления вертикальной составляющей тока в стержне [10]. Далее составляется схема замещения, состоящая из n параллельных ветвей. Определение эквивалентных активных и индуктивных сопротивлений этой схемы позволяет найти частотные характеристики активного и индуктивного сопротивлений ротора и, следовательно, коэффициенты K_r и K_x . Результаты расчета представлены на рис. 7.

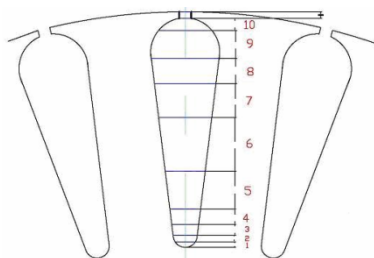


Рис 2.9. Условное деление паза ротора на n -слоев ($n=11$).

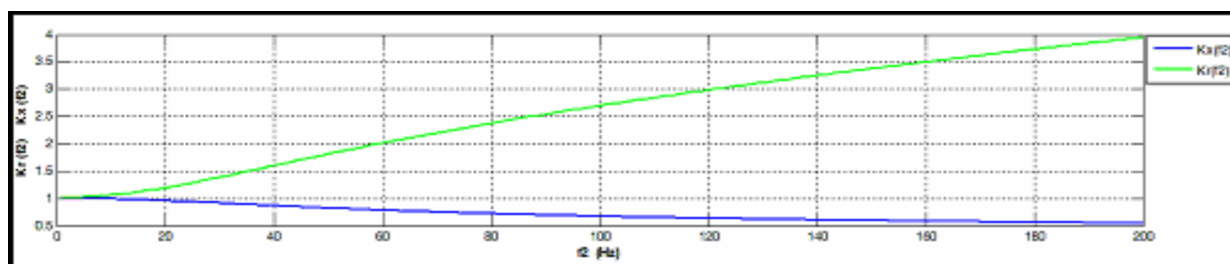


Рис 2.10. Зависимости K_r и K_x от частоты токов в роторе f_2

Изменение индуктивности из-за насыщения машины - Технико-экономические показатели при разработке двигателя определяют тот факт, что при номинальной нагрузке и номинальном потоке работа происходит на нелинейном участке кривой намагничивания машины и поэтому следует учитывать изменение индуктивности из-за насыщения машины.

Индуктивности рассеяния статора и ротора мало зависят от насыщения машины, так как их поля замыкаются по воздуху. Поэтому будем рассматривать влияние насыщения только на изменение индуктивности цепи намагничивания M , который нелинейно зависит от основного потокосцепления ψ_m как показано рис.8.

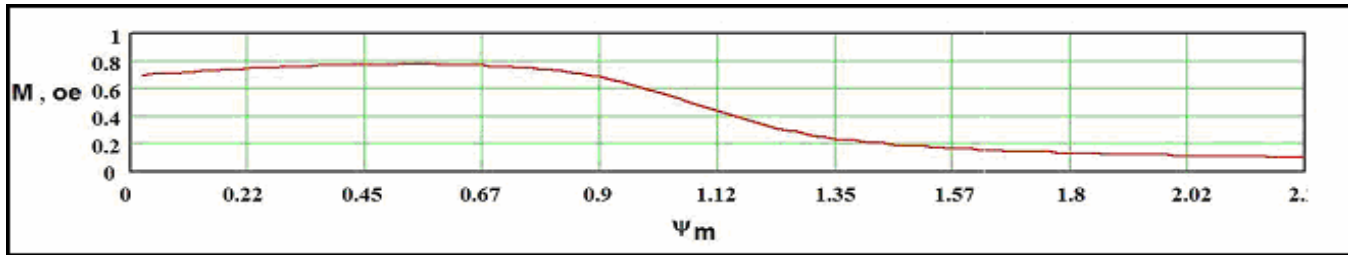


Рис 2.11. Зависимость индуктивности намагничивания M от ψ

Данной математической модели соответствует схема расположения фаз статора и ротора и контуров вихревых токов как показано на рис.2.12. Эта модель, в отличие от рассмотренного выше, имеет 3-контур по осям a, b, c учитывающие эффект потери в стали [29].

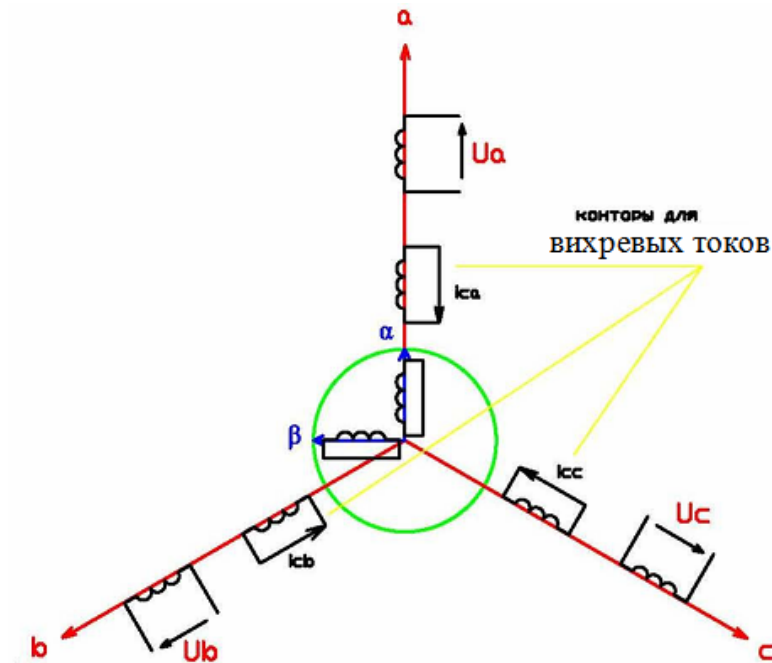


Рис 2.12. Схема модели АД в системе $(a, b, c, (\alpha, \beta))$ с учетом контуров вихревых токов

Система дифференциальных уравнений векторной форме имеет вид

$$\bar{U}_s = R_s \bar{i}_s + L_{\sigma s} \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \frac{d\bar{\psi}_m}{dt}; \quad - \text{уравнения напряжений статора} \quad (2.62)$$

$$0 = R_r \bar{i}_r + L_{\sigma r} \frac{d\bar{i}_r}{dt} + \frac{d\bar{\psi}_m}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}_r; \quad - \text{уравнения напряжений ротора} \quad (2.63)$$

$$0 = R_c \bar{i}_c + L_c \frac{d\bar{i}_c}{dt} + \frac{d\bar{\psi}_m}{dt}; \quad - \text{уравнения напряжений контуры вихревых токов} \quad (2.64)$$

$$\bar{\psi}_s = L_{\sigma s} \bar{i}_s + \bar{\psi}_m; \quad - \text{уравнения для потокосцеплений статора} \quad (2.65)$$

$$\bar{\psi}_r = L_{\sigma r} \bar{i}_r + \bar{\psi}_m; \quad - \text{уравнения для потокосцеплений ротора} \quad (2.66)$$

$$\bar{\psi}_c = L_c \bar{i}_c + \bar{\psi}_m; \quad - \text{уравнения для потокосцеплений контуры вихревых токов} \quad (2.100 \ 21)$$

$$\bar{\psi}_m = L_m (i_m) \bar{i}_m \quad - \text{уравнения для потокосцеплений взаимоиндукции} \quad (2.67)$$

$$\bar{i}_m = \bar{i}_s + \bar{i}_r + \bar{i}_c \quad - \text{уравнения токов} \quad (2.68)$$

Раскладывая векторы системы дифференциальных уравнений (16-23) по осям (a,b,c) и (α, β) получим систему, записанную в скалярной форме, которая имеет вид

$$U_a = \frac{d\psi_a}{dt} + R_s i_a, \quad U_b = \frac{d\psi_b}{dt} + R_s i_b, \quad U_c = \frac{d\psi_c}{dt} + R_s i_c \quad (2.69)$$

$$0 = M \frac{di_{ma}}{dt} + R_c i_{ca}, \quad 0 = M \frac{di_{mb}}{dt} + R_c i_{cb}, \quad 0 = M \frac{di_{mc}}{dt} + R_c i_{cc}. \quad (2.70)$$

$$0 = \frac{d\psi_\alpha}{dt} + R_r i_\alpha - \omega_r \psi_\beta, \quad 0 = \frac{d\psi_\beta}{dt} + R_r i_\beta - \omega_r \psi_\alpha, \quad (2.71)$$

$$M_{эм} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot [\psi_\beta \cdot i_\alpha - \psi_\alpha \cdot i_\beta], \quad (2.72)$$

$$\frac{p}{J} (M_{эм} - M_c) = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.73)$$

Уравнения для токов и потокосцеплений

$$i_{ma} = i_a + i_\alpha + i_{ca}, \quad i_{mb} = i_b - \frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta, \quad i_{mc} = i_c - \frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta \quad (2.74)$$

$$\psi_a = L_s i_a + M i_\alpha + M i_{ca}$$

$$\psi_b = L_s i_b + M \left(-\frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta \right) + M i_{cb} \quad (2.75)$$

$$\psi_c = L_s i_c + M \left(-\frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta \right) + M i_{cc}$$

$$\psi_\alpha = L_r i_\alpha + M i_a + M i_{ca}$$

$$\psi_\beta = L_r i_\beta + M \frac{1}{\sqrt{3}}(i_b - i_c) + M \frac{1}{\sqrt{3}}(i_{cb} - i_{cc}) \quad (2.76)$$

$$\psi_{ca} = L_c i_{ca} + M i_\alpha + M i_a$$

$$\psi_{cb} = L_c i_{cb} + M \left(-\frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta \right) + M i_b \quad (2.77)$$

$$\psi_{cc} = L_c i_{cc} + M \left(-\frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta \right) + M i_c$$

где i_{ca}, i_{cb}, i_{cc} - фазные вихревые токи, А.

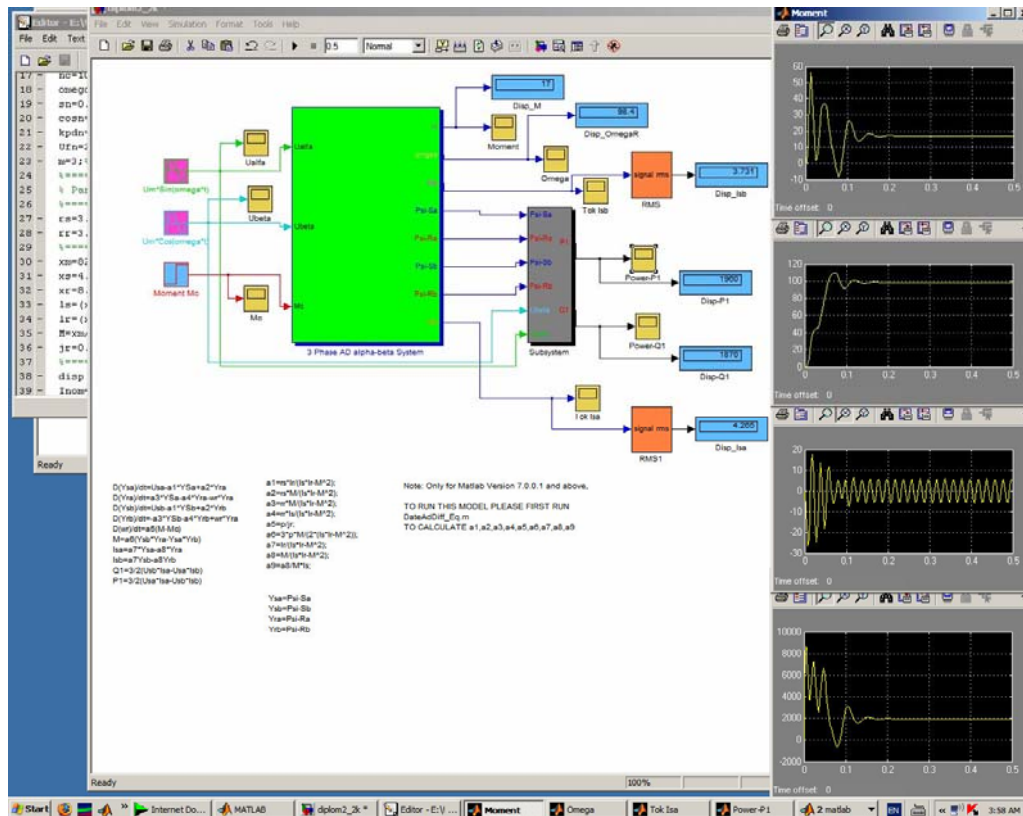


Рис2.13. Программа для исследования переходных процессов работы АД-ПЧ

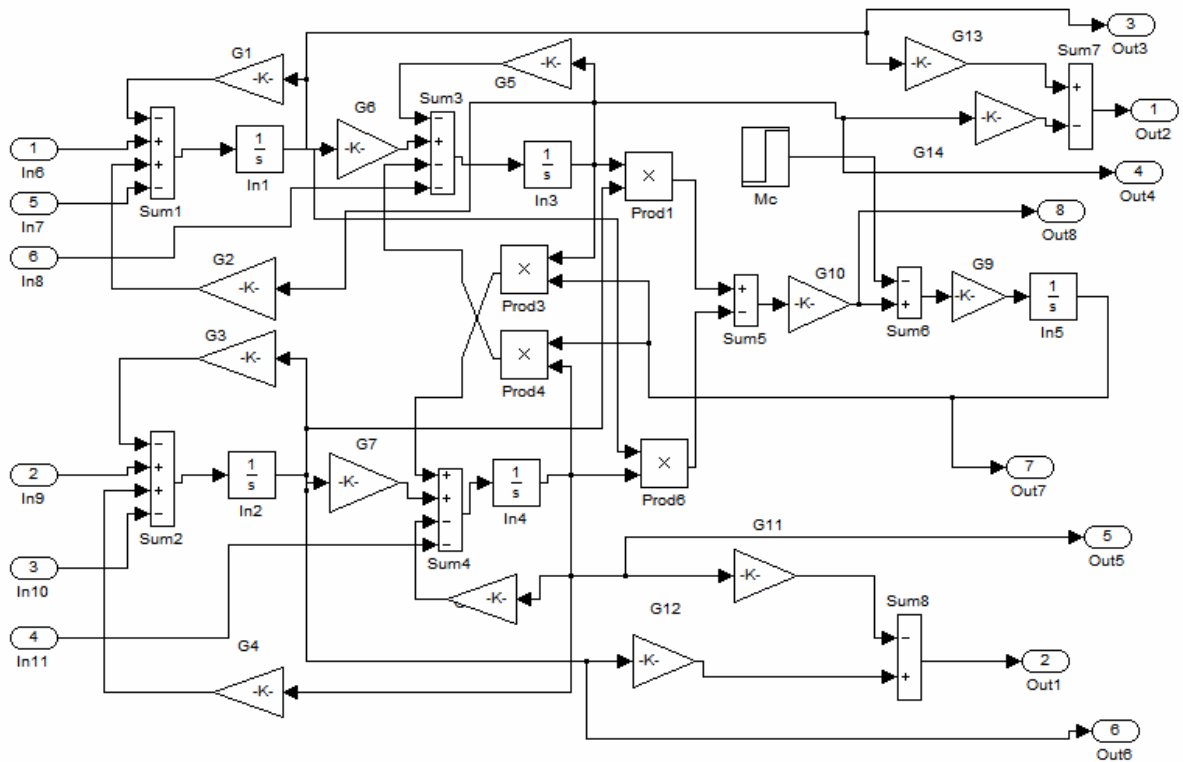


Рис2.14.Подпрограмма 3-Ф АД (блока Simulink)

2.6 Основные показатели обобщенной электрической машины в динамических режимах в осях a,b,c, (α, β)

Для проектирования электрических машин, работающих в динамических режимах, так же как и в установившихся, необходимо знать потребление активной и реактивной мощностей, а также эффективность их преобразования в полезную механическую мощность [8]. Для сравнения моделей выбраны следующие показатели.

а) Для пускового режима:

- Кратности ударного тока в одной из фаз и ударного момента по отношению к номинальному току и моменту, т.е. $K_i = I_{max}/I_{nom}$, $K_m = M_{max}/M_{nom}$,
- Активная P_s и реактивная Q_s мощности, потребляемые двигателем из сети за время пуска, которые рассчитываются по формулам:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T P_s(t) dt, \quad Q_s = \frac{1}{T} \int_0^T Q_s(t) dt \quad (2.78)$$

где $P_s(t) = \operatorname{Re}(U \times I^*) = U_A(t) \cdot i_A(t) + U_B(t) \cdot i_B(t) + U_C(t) \cdot i_C(t)$

$$Q_s(t) = \operatorname{Im}(U \times I^*) = \frac{1}{\sqrt{3}} [U_A(t) \cdot (i_C(t) - i_B(t)) + U_B(t) \cdot (i_A(t) - i_C(t)) + U_C(t) \cdot (i_B(t) - i_A(t))]$$

(2.113) мгновенные активная и реактивная мощности, T – длительность пускового режима.

- Мощность потерь на вихревые токи

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T P_{fe}(t) dt \quad (2.113)$$

где $P_{fe} = R_m(i_{ma}^2 + i_{mb}^2 + i_{mc}^2)$ для первого варианта, $P_{fe} = R_c(i_{ca}^2 + i_{cb}^2 + i_{cb}^2)$ для второго варианта

- Полезная мощность на валу в пусковом режиме:

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T P_2(t) dt, \quad \text{где } P_2(t) = (M_{эм}(t) \cdot \omega_r(t)) - P_{мех} - P_{доб}, \quad (2.79)$$

где $P_{мех}, P_{доб}$ - механические и добавочные потери

- Средние значения коэффициентов полезного действия η и мощности $\cos(\varphi)$ за время пуска:

$$\eta = \frac{P_2}{P_s}, \quad \cos(\varphi) = \frac{P_s}{S_s} \quad \text{где } S_s = \sqrt{P_s^2 + Q_s^2} \quad (2.80)$$

б) Для установившегося режима работы:

Полезная мощность на валу двигателя P_2 , энергетические показатели η и $\cos(\varphi)$, потери в стали P_{fe} , ток фазе статора $A-I_a$ и время, затраченное компьютером на решение данной задачи $-t_K$.

Для демонстрации работы моделей выбран двигатель RA90L6 с параметрами:

$$P_2 = 1500, Bm, U_n = 220, B, f = 50, p = 3, R_s = 3,57, Ом, R_r = 3,8, Ом, X_s = 4,99, Ом$$

$$X_r = 8,28, Ом, X_m = 82,9, Ом, R_m = 5,49, Ом, R_c = 5,49, Ом, J_r = 1,48 \cdot 10^{-3}, Kz / m^2.$$

Согласно уравнениям (11 -14) и (24-29) составлены компьютерные программы в системе Matlab. На рис. 10. представлены осциллограммы токов фазы статора А, фазы ротора α , электромагнитного момента и частоты вращения ротора при пуске двигателя с учетом изменения параметров ротора R_r , $L_{\sigma r}$ и индуктивности намагничивающего контура M для двух моделей [19][65].

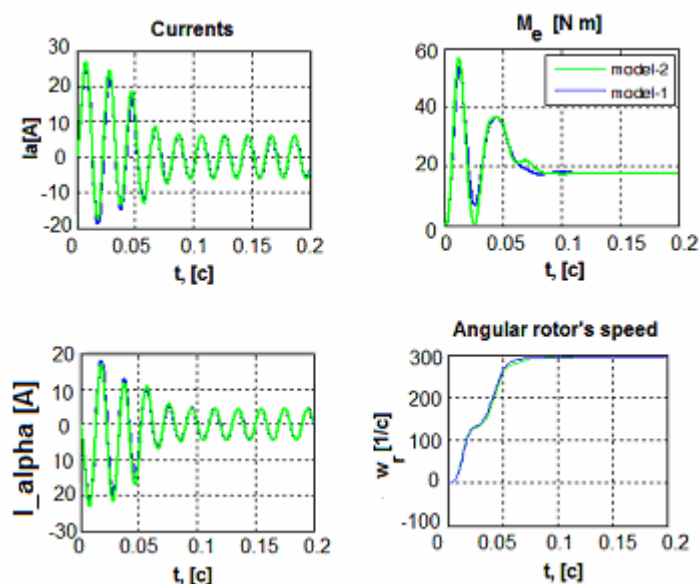


Рис 2.15. Результаты расчета двух вариантов модели

В таблице 1 представлены результаты расчета перечисленных выше показателей по двум моделям в диапазоне частот: 25, 50 и 75 Гц. Характеристики рассчитывались при изменении частоты по закону $\frac{U}{f} = const$ при $f \leq f_{ном}$, а при $f > f_{ном}$, $U = U_{ном}$, момент на валу поддерживался постоянным и равным номинальному.

Сравнение показателей пускового режима.

Таблица. 1

$f, [Гц]$	25		50		75	
	1-я модель	2-я модель	1-я модель	2-я модель	1-я модель	2-я модель
$K_m, [о.е]$	1,62	1,52	3,49	3,6	5,08	5,9
$K_i, [о.е]$	3,057	3,33	5,94	6,239	8,57	9,1
$P_s, [Вт]$	1145,5	1224	3007,6	2938	5838	5385
$Q_s, [Вт]$	1127,2	1457	3358	3470	6778	6404

$P_{\phi e}$, [Вт]	30,6	13,59	471,1	78,7	2094	193
η , [%]	49,5	44	50	51	44	48
$\cos(\varphi)$, [о.е]	0,71	0,64	0,66	0,64	0,65	0,64

Сравнение показателей установившегося режима. Таблица. 2

f , [Гц]	25		50		75	
	1-я модель	2-я модель	1-я модель	2-я модель	1-я модель	2-я модель
i_a , [А]	3,63	4,64	3,85	3,9	4,69	3,9
η , [%]	70,1	61	80,3	81,3	75	83
$\cos(\varphi)$, [о.е]	0,8	0,68	0,74	0,72	0,66	0,72
$P_{\phi e}$, [Вт]	6,29	17,5	93,39	105,7 1	413,5	258,8
Ω_r , [1/с]	44,97	43,1	99,08	99,07	151,6	151,9
P_2 , [Вт]	677,86	650,5 9	1515, 4	1519	2333	2339
t_K , [с]	0,12	3,42	0,24	6,77	0,17	10,2

Из таблицы 2 следует, что обе модели дают примерно одинаковые результаты расчетов пускового режима. Однако потери в стали за время пуска, рассчитанные по первому варианту модели значительно превышают аналогичные потери второго варианта. С другой стороны компьютерное время расчета по второму варианту в десять раз превышает время расчета первого варианта. На нас взгляд, более адекватно описывает переходные процессы математическая модель второго варианта. Это необходимо учитывать при выборе моделей для разработки быстродействующих систем векторного управления регулируемых асинхронных двигателей.

Математическая модель представлена в двух вариантах: первый вариант с шестью дифференциальными уравнениями (ДУ), второй с девятью ДУ. Сравнение результатов расчета пускового и установившегося режимов показало достаточную для анализа сходимость результатов по этим двум моделям. Однако потери в стали за время пуска, рассчитанные по первому варианту модели значительно превышают аналогичные потери второго варианта. С другой стороны компьютерное время расчета по второму варианту в десять раз превышает время расчета первого варианта. На наш взгляд, более адекватно описывает переходные процессы математическая модель второго варианта. Это необходимо учитывать при выборе моделей для разработки быстродействующих систем векторного управления регулируемых асинхронных двигателей.

Выводы по главе 2.

В предлагаемой структуре математических моделей, описывающей работу системы ПЧ-АД, учитывающих эффект вытеснения тока в проводниках обмотки ротора, насыщение магнитопровода, закон управления инвертором с ШИМ;

Разработанные методики и программы расчета переходных режимов работы позволяют детально исследовать влияние формы входного напряжения АД и параметры АД на ее энергетические показатели при питании от преобразователя частоты.

В результате сравнения различных критериев оптимальности, на основании проведенных оптимизационных расчетов, даны рекомендации по выбору конструкции АД с короткозамкнутым ротором, работающих совместно со статическими преобразователями.

Разработана математическая модель частотно регулируемого двигателя в осях $(a, b, c, (\alpha\beta))$, в которой учитываются потери в стали, а влияние насыщения и вытеснения токов учитывается с помощью коэффициентов K_{mu} , K_r и K_x . Представлены зависимости активного сопротивления

намагничивающего контура эквивалентного потерям в стали от частоты перемагничивания.