Sygnały i układy dynamiczne

Sprawozdanie z zadania 2

Łukasz Nizik 180647
Marcin Wawrzonowski 180729
Katarzyna Zychowicz 180758

WSTĘP

1. Analizowany problem

Należało opracować modele symulacyjne liniowych modeli wzrostu i przedyskutować oraz zilustrować na wykresach wpływ różnych wartości współczynnika a na przebiegi rozwoju populacji. Następnie opracować model symulacyjny liniowego modelu populacji z podziałem na kohorty. Współczynniki dzietności i przeżywalności należy przyjąć dla wybranego miasta lub regionu. Zaproponować rozszerzenie modelu tak, że uwzględniona będzie migracja osób z zewnątrz. Opracować model symulacyjny populacji drapieżników i ofiar i zilustrować ewolucję tych populacji wykresami czasowymi i fazowymi.

2. Wiadomości teoretyczne

Układ dynamiczny – model matematyczny rzeczywistego zjawiska przyrody, którego ewolucja jest wyznaczona jednoznacznie przez stan początkowy; najczęściej jest opisany pewnym wektorowym równaniem różniczkowym, zwanym równaniem stanu. Teoria układów dynamicznych stanowi ważny dział matematyki znajdujący liczne zastosowania przy opisie rozmaitych konkretnych zjawisk, m.in. w teorii sterowania. Układy złożone są najczęściej symulowane komputerowo.

Prostym modelem wzrostu pewnej wielkości, użytecznym przy modelowaniu matematycznym wzrostu populacji, jest równanie różnicowe z czasem dyskretnym (Luenberger, 1979):

$$x(k+1) = ax(k), k = 0,1,2 \ldots$$

przy czym $x(k) \in R$ oznacza wielkość, której zmiany są modelowane, natomiast $a \in \infty[0,\infty)$ jest stałą określającą dynamikę tych zmian. Stała ta nazywana jest współczynnikiem wzrostu. Zmienna k jest wyznacznikiem czasu dyskretnego.

Model wzrostu może być modelem z czasem ciągłym. W najprostszej postaci, model ten opisany jest następującym równaniem różniczkowym (Luenberger, 1979):

$$\dot{x} = ax$$

w którym parametr a, określający dynamikę wzrostu wielkości x, jest liczbą rzeczywistą i w przypadku, gdy jest to liczba dodatnia, wielkość x zwiększa swą wartość wraz ze wzrostem czasu.

Jednak taki model wzrostu nie jest wystarczająco dokładny w przypadku, gdy poziom reprodukcji jest nierównomiernie rozłożony w grupach wiekowych modelowanej populacji (Luenberger, 1979). W takim przypadku populację można podzielić na grupy wiekowe o równej długości, powiedzmy 10 - letnie, nazywane kohortami. W pierwszej grupie są członkowie populacji w wieku od 1 do 10 lat, w drugiej są osoby w wieku od 11 do 20 lat itd.

PRZEBIEG WYKONANIA ZADANIA

1. **Opracować modele symulacyjne liniowych modeli wzrostu oraz zilustrować na wykresach wpływ różnych wartości współczynnika a na przebiegi rozwoju populacji.**

```
%liniowy model wzrostu - czas dyskretny


sampleRate = 1;

wspolczynnikWzrostu1 = 1;

wspolczynnikWzrostu2 = 1.2;

wspolczynnikWzrostu3 = 0.8;


%tworzenie dziedziny i templateĂłw funkcji

x = 1:sampleRate:10;

lmwD1 = 1:sampleRate:10;

lmwD2 = 1:sampleRate:10;

lmwD3 = 1:sampleRate:10;


%tworzenie zbiorow wartosci

for i=1:9,

    lmwD1(i+1) = wspolczynnikWzrostu1*lmwD1(i);

    lmwD2(i+1) = wspolczynnikWzrostu2*lmwD2(i);

    lmwD3(i+1) = wspolczynnikWzrostu3*lmwD3(i);

end



%rysowanie wykresow

figure(1);

hold on;

xlabel('k');
```

```
ylabel('x(k)');
stem(x, lmwD1,'b','LineStyle','none','marker','o');
stem(x, lmwD2,'r','LineStyle','none','marker','x');
stem(x, lmwD3,'g','LineStyle','none','marker','+');
legend('a = 1','a = 1.2','a = 0.8');
hold off;


% liniowy model wzrostu - czas ciagly

sampleRate = 0.01;
wspolczynnikWzrostu1 = 2;
wspolczynnikWzrostu2 = 0;
wspolczynnikWzrostu3 = -2;

x = 0:sampleRate:1;
x0 = 1;

lmwC1 = x0*exp(wspolczynnikWzrostu1*x);
lmwC2 = x0*exp(wspolczynnikWzrostu2*x);
lmwC3 = x0*exp(wspolczynnikWzrostu3*x);

figure(2);
hold on;
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
plot(x,lmwC1,'r');
plot(x,lmwC2,'b');
plot(x,lmwC3,'g');
legend('a = 2','a = 0','a = -2');
hold off;
```

2. **Opracować model symulacyjny liniowego modelu populacji z podziałem na kohorty. Współczynniki dzietności i przeżywalności należy przyjąć dla wybranego miasta lub regionu. Zaproponować rozszerzenie modelu tak, że uwzględniona będzie migracja osób z zewnątrz**

```
%liniowy model populacji z podzial□em na kohorty


%dane

startPopulation = [60; 180; 340; 450; 440; 430; 460; 440; 320; 260]; %populacja poczatkowa

b = [0; 0; 0.0; 0.08; 0.07; 0.05; 0.45; 0.8; 0.7; 0.3]; %wsp. urodzenia

d = [0.05; 0.01; 0.02; 0.03; 0.01; 0.01; 0.5; 0.6; 0.9; 1]; %wsp. umieralnoĹ□ci

t = [0 : 1 : 100]; %czas symulacji


population = startPopulation;


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


for j=2:101

    %tablica zawierajaca liczbe□ osob urodzonych w danym czasie

    for i=1:10

        births(i) = b(i)*population(i, j-1);

    end

    %pierwsza kohorta - sumowanie narodzonych osob

    population(1, j) = sum(births);

    %pozostale kohorty pomniejszone o wspolczynnik zgonow

    for i=2:10

        population(i, j) = (1-d(i-1))*population(i-1, j-1);

    end

end


%obliczanie calkowitej populacji w danym czasie

totalPopulation = sum(population);
```

```
%wykresy

figure(1);

subplot(2,2,1);

%hold on;

plot(t,population);

legend('0-10','11-20','21-30','31-40','41-50','51-60','61-70','71-80','81-90','91-100');


%figure(2);

subplot(2,2,2);

hold on;

plot(t,totalPopulation,'b');

plot(t,population);

hold off;


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% symulacja z uwzglednieniem migracji

% do tego celu skorzystamy z funkcji rand


migration = 10;populationM = startPopulation;


for j=2:101

    %tablica zawierajaca liczbe osob urodzonych w danym czasie

    for i=1:10

        births(i) = b(i)*populationM(i, j-1);

    end

    %pierwsza kohorta - sumowanie narodzonych osob +/- migracja

    populationM(1, j) = sum(births) + rand*migration;

    %pozostale kohorty pomniejszone o wspolczynnik zgonow +/- migracja

    for i=2:10

        populationM(i, j) = ( 1-d(i-1))*populationM(i-1, j-1) + rand*migration;

        if populationM(i, j) < 0
```

```
            populationM(i, j) = 0;
        end
    end
end

totalPopulationM = sum(populationM);

%wykresy
%figure(2);
subplot(2,2,3);
%hold on;
plot(t,populationM);
legend('0-10','11-20','21-30','31-40','41-50','51-60','61-70','71-80','81-
90','91-100');

%figure(2);
subplot(2,2,4);
hold on;
plot(t,totalPopulationM,'b');
plot(t,populationM);
hold off;
```

3. Opracować model symulacyjny populacji drapieżników i ofiar i zilustrować ewolucję tych populacji wykresami czasowymi i fazowymi.

```
clear;

owce = 7;
wilki = 7;

zgonyOwiec = 1;
narodzinyOwiec = 3;

zgonyWilkow = 0.7;
```

```
narodzinyWilkow = 1.1;


podzialka = 0.00003;
czas = 0 : podzialka : 10;


sim('simWilczkiOwieczki');


subplot(1, 2, 1);
plot(symulacjaOwce, symulacjaWilki)
hold on;


subplot(1, 2, 2);
plot(czas,symulacjaOwce , 'g');
hold on;
plot(czas, symulacjaWilki, 'r');
```