Definizioni:

Matrice quadrata: una matrice $A_{m \times n}$ è quadrata se m = n
Matrice triangolare superiore: una matrice è triangolare superiore se è quadrata e i coefficienti di posto *i* e *j* con *i>j* sono uguali a 0
Matrice diagonale: una matrice è diagonale se è triangolare superiore e inferiore

Numeri complessi: ogni numero complesso si scrive in modo unico come *a + bi*, con *a* detta parte reale, *bi* detta parte immaginaria. Se $z = a + bi$ il suo coniugato $\bar{z} = a - bi$

Eliminazione di Gauss – Jordan
$E_i(c)$: moltiplico la riga i per c, c≠0
$E_{ij}(d)$: somma alla riga i la riga j moltiplicata per d, i≠j
$E_{ij}$: scambio la riga i con la riga j, i≠j
Al termine del procedimento il sistema ha:

- [0] soluzioni se l'ultima colonna è dominante
- [1] soluzione se l'ultima colonna non è dominante e non ho variabili libere
- [∞] soluzioni se l'ultima colonna non è dominante e ci sono variabili libere

Ogni matrice ridotta *U* è ottenibile partendo dalla matrice *A* tramite la formula *U = FA* dove *F* sono i passaggi dell'EG scritti a ritroso. Se deve essere eseguito uno scambio di riga, si deve eseguire all'inizio e poi applicare EG. La formula finale, in questo caso, sarà $A = P^T LU$, con *P* che rappresenta lo scambio di righe

e coniugati se applicati a più di una riga, reciproci se applicati a solo una riga

Eliminazione all'indietro: ottenere tramite EG una matrice identità (di ordine corrispondente) al posto della matrice data. Con questo metodo ottengo le inverse della matrice.

Spazi vettoriali

- Un insieme V
- Una funzione VxV →V
- Una funzione CxV →V (α, v)→αv

(A1) per ogni u,v,w ∈ V , u+(v+w) = (u+v)+w;
(A2) esiste un elemento 0 ∈ V tale che, per ogni v ∈ V , 0+v = v, v+0 = v;
(A3) per ogni v ∈ V esiste w ∈ V tale che v+w = 0, w+v = 0.
(M1) per ogni α,β ∈ C e ogni v ∈ V , α(βv) = (αβ)v;
(M2) per ogni α,β ∈ C e ogni v ∈ V , (α+β)v = αv+βv;
(M3) per ogni α ∈ C e ogni u,v ∈ V , α(u+v) = αu+αv;
(M4) per ogni v ∈ V , 1v = v.

Sottospazio vettoriale
Un sottoinsieme U dello spazio vettoriale V si dice un sottospazio vettoriale se
(S1) 0 ∈U;
(S2) per ogni v1,v2 ∈U, si ha v1 +v2 ∈U;
(S3) per ogni v ∈U e ogni α ∈ C, αv ∈U.

Uno spazio vettoriale si dice linearmente dipendente se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ scalari non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

Formula di Grassmann
$\dim(U_1+U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U1 \cap U2)$

Applicazioni lineari
$f: V \rightarrow W$ V, W spazi vettoriali $f$ funzione definita
$f$ è lineare se:
- $\forall\, v_1, v_2 \in V, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $\forall\, v \in V$ e ogni scalare a, $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

$f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $N(f)=\{0\}$
$f: V \rightarrow W$ è suriettiva se e $Im(f)=W$
$f: V \rightarrow W$ è biettiva se è suriettiva e iniettiva

Teorema nullità più rango
$f: V \rightarrow W$ lineare
Se V è finitamente generato, allora $Im(f)$ è uno spazio finitamente generato e $\dim V = \dim (N(f)) + \dim(Im(f))$

Rango
Definizione: Il rango di una matrice $A$ è la $\dim(C(A))$
In altre parole:
il rango di $A$ è uguale al numero di colonne dominanti in una forma ridotta

Steinitz
- a è un insieme di generatori di V, $a = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$
- b è un insieme di generatori di V, $b = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$

Allora $m \le n$ perché posso sostituire m vettori in a con i vettori di b ottenendo un insieme di generatori
Con $k < m$, $w_{k+1} = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$
Se a e b sono basi di V, allora a e b hanno lo stesso numero di elementi

Norma
Dato V spazio vettoriale e $V \rightarrow R$ con $R$ insieme dei Reali, si dice norma su v se $v \mapsto ||v||$
1. $||v|| \ge 0$; se $||v|| = 0$ allora $v = \otimes$
2. $||\alpha v|| = ||\alpha||\ ||v||$
3. $||v + w|| \le ||v|| + ||w||$

Prodotto interno
Un prodotto interno su V è una funzione $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ (denotata con $(v, w) \mapsto (v|w)$)
1. $(w|v) = \overline{(v|w)}$
2. $(u|\alpha v + \beta w) = \alpha(u|v) + \beta(u|v)$
3. $(v|v) \ge 0$, se $(v|v) = 0$ allora $v = 0$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
$|(v|w)| \le \sqrt{(v|v)(w|w)}$

How to:

Matrice trasposta

- Leggere per righe e scrivere per colonne

Matrice h - trasposta

- Fare il coniugio della parte immaginaria (cambiare segno)
- Leggere per righe e scrivere per colonne

Matrice inversa di *A*

- Affiancare la matrice *I* di ordine corretto per ottenere [*A*|*I*]
- Effettuare EG fino a quando non si ottiene [*I*|$A^{-1}$]

Calcolare il rango della matrice *A*

Il rango di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio delle colonne C(*A*) della matrice stessa

- Effettuare l'eliminazione di Gauss sulla matrice *A*
- Contare il numero di pivot

Trovare una base di N(*A*)

- Eseguire l'EG sulla matrice *A*: il numero *n* di pivot ottenuti indica la dimensione della N(*A*)
- Scrivere le equazioni derivate dalla matrice ridotta separandole per righe e ponendolo uguali a 0
- Assegnare *n* valori alle variabili libere e costruire la base mettendo le sostituzioni in colonna

Costruzione LU

Se ho un solo indice faccio il reciproco (capovolgo la frazione), se ne ho due faccio il coniugato (cambio segno)

Calcolare il determinante della matrice *A*

Matrice 2x2:

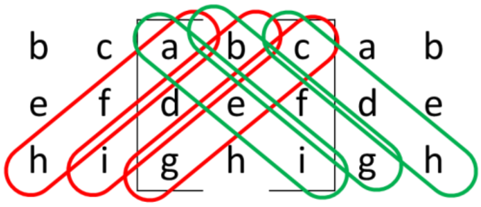
- ad – bc

Matrice 3x3: regola di Sarrus

- Data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- Scrivere a sx di *A* le sue ultime 2 colonne e a dx le sue prime 2 colonne
- Sommare i prodotti delle 3 diagonali complete da sx a dx, *W*
- Sommare i prodotti delle 3 diagonali complete da dx a sx, *Z*
- Eseguire *Z* - *W*




Matrice di qualsiasi dimensione: metodo di Laplace

- Scelgo la riga o la colonna della matrice *A* nella quale ho più 0
- Comincio applicando questo algoritmo:

        1. Scrivo il primo valore *j* della riga/colonna che ho scelto
            - Se il valore è 0, il determinante è 1
        2. Moltiplico per -1 elevato all'indice della riga sommato a quello della colonna di *j*
        3. Moltiplico per la matrice *A* priva di riga e colonna di indice uguale agli indici riga e colonna di *j*
- Tutto questo è da ripetere per tutti gli elementi della riga/colonna scelta
- Se ottengo matrici di grado superiore a 3, riapplico l'algoritmo
- Se il grado è minore di 3, la gestisco o con la regola di Sarrus o con la formula immediata

Cambio di base:

da una base *B* alla base canonica $\varepsilon$:

$M_{\varepsilon \leftarrow B}$

- Scrivere la matrice avente come colonne le righe della base B

da una base *B* a una base *B'*:

se le due basi sono nello stesso spazio vettoriale:

Per comodità verrà assunto uno spazio di $C^2$

- $B = \{v_1, v_2\}$, $B' = \{u_1, u_2\}$
- Dobbiamo trovare $M_{B' \leftarrow B} = [C_{B'}(b_1), C_{B'}(b_2)]$
- Scrivere $b_1$ come combinazione lineare dei vettori di *B'*
    - $\alpha u_1 + \beta u_2 = v_1$
      Questo è un sistema lineare di 2 equazioni con $\alpha$ e $\beta$ come incognite. Una volta risolto avremo la prima colonna della matrice $M_{B' \leftarrow B}$. Fatto questo bisogna proseguire con gli altri valori v.

Matrice associata a *f* rispetto alla base *B* sul dominio e sul codominio:

- Applico la funzione lineare *f* scrivendo i coefficienti delle incognite come colonne della matrice

Matrice associata a *f* rispetto alla base canonica $\varepsilon$:

$T_{\varepsilon \leftarrow \varepsilon}$

- Applico la funzione lineare *f* scrivendo i coefficienti delle incognite come colonne della matrice
- Faccio la trasposta della matrice ottenuta

Matrice associata a *f* rispetto alla base canonica $\varepsilon$ sul dominio e alla base *B* nel codominio:

$T_{B \leftarrow \varepsilon} = M_{B \leftarrow \varepsilon} T_{\varepsilon \leftarrow \varepsilon}$

- Calcolo $M_{B \leftarrow \varepsilon}$ facendo l'inversa della matrice che ha per colonne i vettori della base *B* (che è $M_{\varepsilon \leftarrow B}$)
- Mi calcolo $T_{\varepsilon \leftarrow \varepsilon}$
- Applico la formula

Calcolare la norma di un vettore

$||v|| = \sqrt{v^H v}$

Calcolare il prodotto interno di un elemento *u*:

$(u|u) = u^H u$

NB: nella H devi cambiare di segno ai numeri irrazionali

Algoritmo di GS

Dato $U = \langle v_1..v_n \rangle$ trovare $\{u_1..u_n\}$ ortogonale tale che $U = \langle u_1..u_n \rangle$

GS1) $u_1 = v_1$, calcola $(u_1|u_1)$

GS2) $\alpha_{12} = \frac{(u_1|v_2)}{(u_1|u_1)}$ oppure 0 se $u_1 = 0$

$u_2 = v_2 - \alpha_{12} u_1$

GS3) $\alpha_{13} = \frac{(u_1|v_3)}{(u_1|u_1)}$ $\alpha_{23} = \frac{(u_2|v_3)}{(u_2|u_2)}$

$u_3 = v_3 - \alpha_{13} u_1 - \alpha_{23} u_2$

$GS_{k+1}$) $\alpha_{ik+1} = \frac{(u_i|v_{k+1})}{(u_i|u_i)}$ per i = 1..k

$u_{k+1} = v_{k+1} - \alpha_{1k+1} u_1 - \ldots - \alpha_{kk+1} u_k$

Calcolare il polinomio caratteristico della matrice *A*

$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I]$

- Scrivere la matrice identità *I* corrispettiva alla matrice *A*
- Moltiplicare la matrice *I* per il valore $\lambda$ per ottenere la matrice da sottrarre
- Ottenere la matrice da cui estrarre il determinante sottraendo $\lambda I$ da *A*
- Calcolare il determinante della nuova matrice

Trovare gli autovalori di un polinomio caratteristico $P_A$

- Calcolare gli zeri del polinomio

Calcolare la molteplicità algebrica di un autovalore

La molteplicità algebrica *m* è quante volte l'autovalore annulla il polinomio caratteristico

- Calcolare il polinomio caratteristico
- Calcolare gli autovalori
- Scrivere quante volte ogni autovalore annulla il polinomio caratteristico

NB: la somma delle molteplicità algebriche NON può mai superare la dimensione *n* della matrice

Calcolare la molteplicità geometrica di un autovalore

La molteplicità geometrica *d* è la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda$ ovvero il numero di autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore $\lambda$.

- Calcola il rango della matrice ($A - \lambda I$)
- Sottrailo a *n*, ovvero l'ordine della matrice quadrata

Si dica per quali valori di *x* la matrice *A* è diagonalizzabile

Casi speciali:

- La matrice è simmetrica: diagonalizzabile
- La matrice ammette *n* autovalori distinti: diagonalizzabile

Casi generali:

- Calcolare gli autovalori
- Calcolare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori e verificare che
    - La somma delle molteplicità *m* sia uguale all'ordine della matrice *A*
    - La molteplicità algebrica *m* sia uguale alla molteplicità geometrica *d*

Se uno di questi punti non è verificato, la matrice non è diagonalizzabile.

teorema di Hamilton – Cayley