FISICA 1

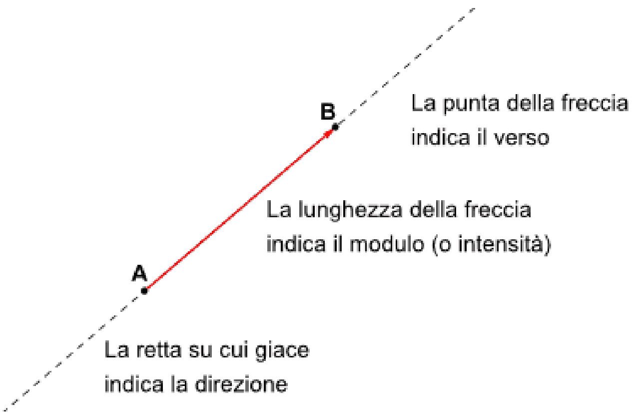
Cinematica

Vettore

Segmento orientato che indica appunto lo spostamento da un punto all'altro. Viene identificato da tre caratteristiche:

- **MODULO**: distanza lineare tra inizio e fine del vettore
- **DIREZIONE**: retta su cui giace il vettore
- **VERSO**: a quale parte della retta punta il vettore

Prendendo due punti A e B, il vettore da A a B si scriverà $\overrightarrow{AB}$ e il modulo sarà indicato $|AB|$ o semplicemente AB.



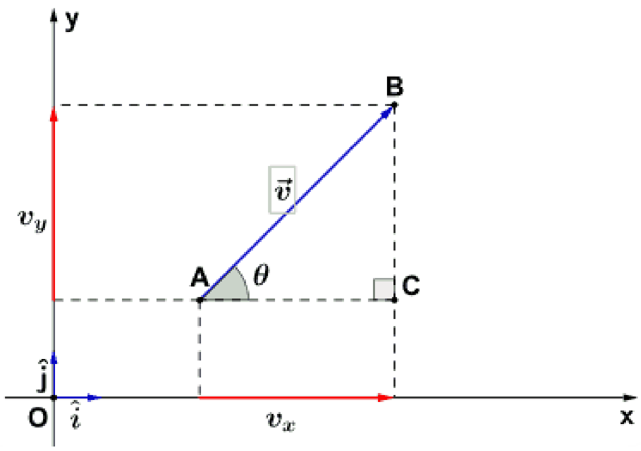
Il vettore si descrive meglio usando le coordinate polari, identificando quindi il **vettore** $\vec{v}$ mediante **origine** $\boldsymbol{O}$, **modulo** $\boldsymbol{v}$ e **angolo** $\boldsymbol{\theta}$.

Tutti i vettori possono essere scomposti nei propri corrispondenti **COMPONENTI**, i quali sono descritti dalle formule:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_x} = \vec{v} \cdot cos(\theta) \\ \overrightarrow{v_y} = \vec{v} \cdot sin(\theta) \end{cases}$$

Ogni componente può essere visto come una moltiplicazione di un **VERSORE** e uno scalare:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_x} = v_x \cdot \hat{\imath} \\ \overrightarrow{v_y} = v_y \cdot \hat{\jmath} \end{cases}$$



I versori sono i componenti unitari del sistema vettoriale e sono, rispettivamente per gli assi x-y-z: $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}$.

Concludendo, un vettore può essere espresso come:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{A_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A_y}} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cos(\boldsymbol{\theta}) + \overrightarrow{\boldsymbol{A}} \sin(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{A} \cos(\boldsymbol{\theta})\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{A} \sin(\boldsymbol{\theta})\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Operazioni vettoriali

Quando si ha a che fare con i vettori, le operazioni possibili sono SOMMA e PRODOTTO, ma sono leggermente diverse da come noi le conosciamo.

Somma vettoriale

Per sommare due vettori è necessario scomporli nelle loro componenti e sommarle, per poi ricomporle in un unico vettore risultante.

$$\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{B_x} + \overrightarrow{B_y} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} = \overrightarrow{C_x} + \overrightarrow{C_y} = \vec{C}$$

Prodotto scalare vettoriale

Per moltiplicare due vettori è necessario ottenere l'angolo tra di loro e utilizzare la formula:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot cos(\theta_{AB})$$

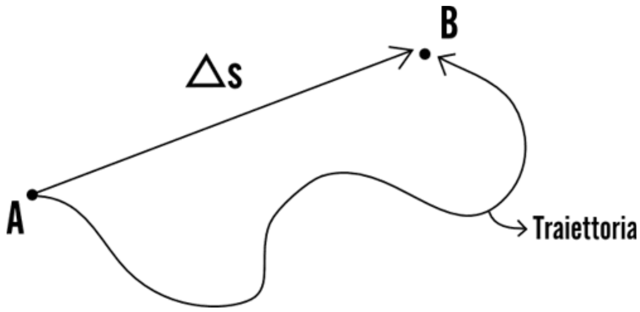
FORMULARIO VETTORI

$tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x}$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	*Componenti di $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^2$* $\begin{cases} \overrightarrow{v_x} = \vec{v} \cdot cos(\theta) \\ \overrightarrow{v_y} = \vec{v} \cdot sin(\theta) \end{cases}$
Scomposizione completa di $\vec{v}$ $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z} = v_x \cdot \hat{\imath} + v_y \cdot \hat{\jmath} + v_z \cdot \hat{k}$		
Somma tra vettori $\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{(A_x + B_x)} + \overrightarrow{(A_y + B_y)}$	*Prodotto vettoriale* $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot cos(\theta_{AB})$	

Velocità media

È la definizione di uno spostamento in un certo periodo di tempo.

$$\boldsymbol{v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$$



Porre particolare attenzione al fatto che lo spostamento non descrive il percorso, ma solo la distanza dal punto iniziale a quello finale.

Velocità scalare media

Il ragionamento è simile alla velocità media, ma questa volta si considera la distanza percorsa.

$$\boldsymbol{v_{sm} = \frac{D}{t_f - t_i} = \frac{D}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$$

Questo metodo di misurazione della velocità è differente in maniera sostanziale dal precedente; osserviamo l'esempio Torino-Milano-Torino: la velocità media è nulla perché è nullo lo spostamento

$$v_m = 0$$

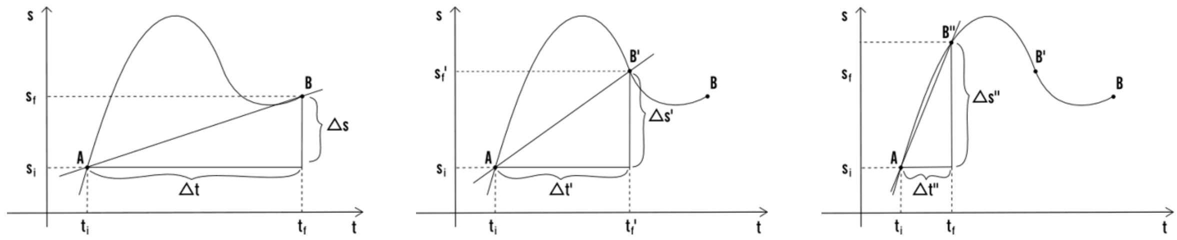
mentre la velocità scalare media è data da

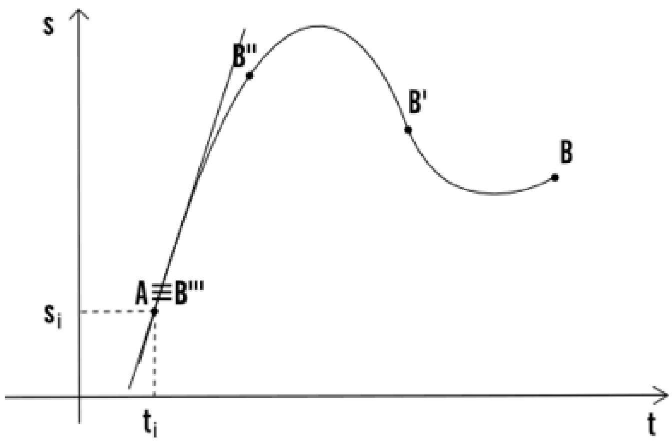
$$v_{sm} = \frac{120km + 120km}{2{,}4h} = 100\frac{km}{h}$$

Velocità istantanea

Per calcolare con quale rapidità cambia la posizione di un punto rispetto al tempo nell'istante t dobbiamo trovare la sua velocità istantanea, ovvero la velocità misurata quando il tempo iniziale e finale si avvicinano sempre di più (come per le derivate).

Vediamo ora il ragionamento, usando un grafico che descrive la posizione di un corpo al variare del tempo.





Raggiunto questo punto, definiamo la velocità istantanea:

$$v = \lim_{t_f \to t_i} \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt}}$$

La formula non ha alcun utilizzo pratico sul campo, ma verrà utilizzata per la risoluzione di altre formule in futuro, utilizzando gli integrali.

FORMULARIO VELOCITÀ

Velocità media $\boldsymbol{v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$	*Velocità scalare media* $\boldsymbol{v_{sm} = \frac{D}{\Delta t}}$	*Velocità istantanea* $\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt}}$

Moto rettilineo uniforme

Un corpo si muove in MRU se percorre spazi uguali in tempi uguali: **LA VELOCITÀ NON CAMBIA**

Data la formula della velocità media e considerando che le misurazioni temporali solitamente cominciano dall'istante 0, per ottenere il punto finale del moto si utilizza la formula:

$$v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - 0}$$

$$v \cdot t = x_f - x_i$$

e quindi in conclusione:

$$\boldsymbol{x_f = x_i + v \cdot t}$$

Inoltre, lo stesso risultato può essere raggiunto utilizzando la formula della velocità istantanea:

$$dx = v \cdot dt$$

$$\int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t v \, dt$$

$$x_f - x_i = v \cdot t$$

$$x_f = x_i + v \cdot t$$

si deve porre attenzione al primo passaggio, poiché se la velocità non fosse costante, non potremmo estrarla dall'integrale.

FORMULARIO MRU

Punto al tempo t

$$\boldsymbol{x = x_i + v \cdot t}$$

(tutte le altre sono inverse)

Accelerazione media

L'accelerazione è la variazione di velocità di un corpo al variare del tempo.

Viene descritta con la formula:

$$\boldsymbol{a_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

se si ha a che fare con una velocità finale minore di quella iniziale l'accelerazione sarà negativa e verrà chiamata DECELERAZIONE (eliminando il segno negativo).

Accelerazione istantanea

Come per la velocità, possiamo calcolare con quale rapidità cambia la velocità del punto in movimento in un particolare istante di tempo.

Viene descritta con la formula:

$$a = \lim_{t_f \to t_i} \frac{v_f - v_j}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

come per la velocità istantanea, otteniamo un rapporto tra differenziali, ma scomponibile ulteriormente nel rapporto della derivata seconda dello spazio sulla derivata del tempo al quadrato.

FORMULARIO ACCELERAZIONE

Accelerazione media $\boldsymbol{a_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]}$	*Accelerazione istantanea* $\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Un corpo si muove in MRUA se percorre spazi uguali con accelerazione uguale in tempi uguali: **L'ACCELERAZIONE NON CAMBIA**

Data la formula dell'accelerazione media e considerando che il tempo iniziale è solitamente 0, il calcolo della velocità finale si otterrà mediante:

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - 0}$$

$$a \cdot t = v_f - v_i$$

e quindi in conclusione:

$$\boldsymbol{v_f = v_i + a \cdot t}$$

Il calcolo del punto finale è un po' più complesso e necessita della formula della velocità istantanea:

$$dx = v \cdot dt$$

sappiamo da sopra il valore di v_f, quindi:

$$dx = (v_i + a \cdot t) \cdot dt$$

$$\int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t v_i \, dt + \int_0^t a \, dt$$

$$x_f - x_i = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

e quindi infine:

$$\boldsymbol{x_f = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$$

FORMULARIO MRUA

Velocità finale $\boldsymbol{v_f = v_i + a \cdot t}$	*Punto al tempo* t $\boldsymbol{x = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}$
Formula senza il tempo $\boldsymbol{v_f^2 - v_i^2 = 2a \cdot (x_f - x_i)}$	

Caduta libera

Ogni corpo è attirato alla Terra (o ad un altro corpo di dimensioni e massa enormi rispetto al primo) dall'accelerazione di gravità, definita:

$$g_{Terra} \approx 9,81\,\frac{m}{s^2} \qquad\qquad g_{Luna} \approx 1,62\,\frac{m}{s^2}$$

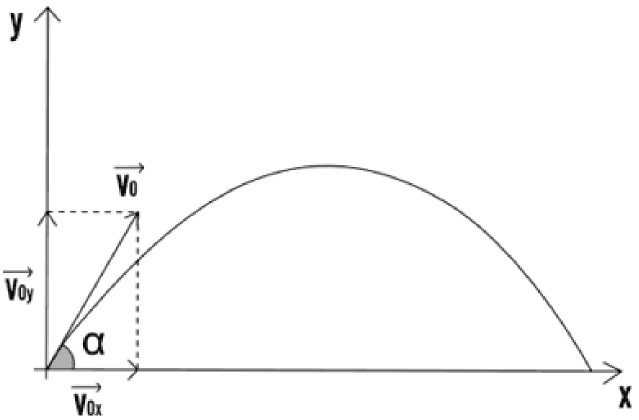
Questo è il motivo per il quale due corpi, se lasciati cadere nello stesso istante, cadranno a terra insieme in un sistema chiuso, quindi PRIVO DI ATMOSFERA.

Bisogna anche considerare il verso del sistema di riferimento!

$$asse\ y\ (\uparrow)\ \rightarrow\ a_{caduta\ libera} = -g$$
$$asse\ y\ (\downarrow)\ \rightarrow\ a_{caduta\ libera} = g$$

Moto parabolico (moto del proiettile)

È il moto di un corpo soggetto alla SOLA forza di gravità lungo una traiettoria parabolica: NIENTE RESISTENZA DELL'ARIA.



Ricordiamo le formule di scomposizione vettoriale:

$$\begin{cases} \vec{v_x} = \vec{v} \cdot cos(\theta) \\ \vec{v_y} = \vec{v} \cdot sin(\theta) \end{cases} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

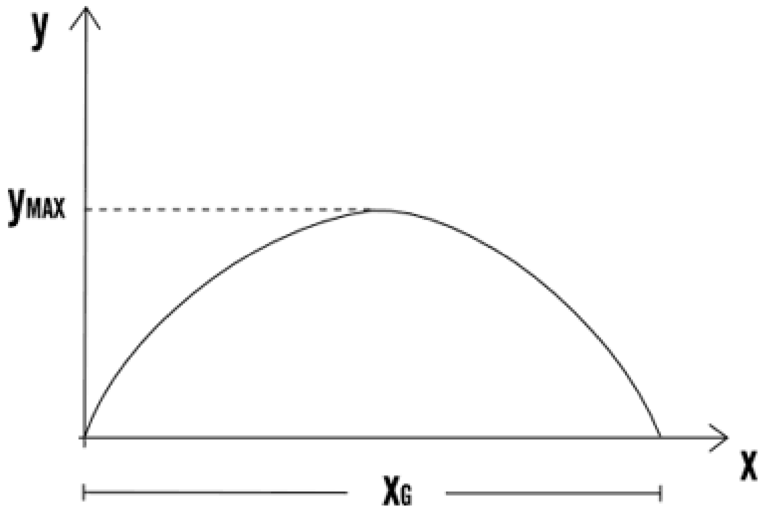
$$tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x}$$

Fatto ciò, possiamo procedere con la ridefinizione delle formule del moto rettilineo sui singoli vettori componenti:

$$\begin{cases} x = x_i + v_{x_i} \cdot t \\ y = y_i + v_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

e scomponendo ulteriormente:

$$\begin{cases} x = x_i + v_i \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y = y_i + v_i \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$



Con le formule sopra possiamo ora passare a calcolare valori particolari di questo moto, come la *GITTATA*, *l'ALTEZZA MASSIMA* e il *TEMPO DI VOLO*.

Cominciamo dall'ALTEZZA MASSIMA, ottenuta mediante trovando l'istante di tempo in cui il corpo smette di salire, quindi quando $v_{y_f} = 0$:

$$v_f = v_i + a \cdot t$$

$$0 = v_{y_i} - g \cdot t$$

$$\boldsymbol{t_{y_{max}} = \frac{v_{y_i}}{g}}$$

arrivati a questo punto, andiamo a vedere dove si trova il corpo all'istante appena trovato:

$$x = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$y_{max} = y_i + v_{y_i} \cdot \frac{v_{y_i}}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_{y_i}}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = 0 + \frac{{v_{y_i}}^2}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{{v_{y_i}}^2}{g^2}$$

$$y_{max} = \frac{{v_{y_i}}^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{{v_{y_i}}^2}{g}$$

$$\boldsymbol{y_{max} = \frac{{v_{y_i}}^2}{2g}}$$

Passiamo ora al calcolo della GITTATA, trovando l'istante di tempo in cui $y_f = 0$, il $t_{x_{\max}}$:

$$\begin{cases} x = x_i + v_{x_i} \cdot t \\ y = y_i + v_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{max} = 0 + v_{x_i} \cdot t \\ 0 = 0 + v_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{max} = v_{x_i} \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{y_i} \cdot t = 0 \end{cases}$$

risolvendo l'equazione di secondo grado per t, otteniamo:

$$t_1 = 0 \quad ; \quad t_2 = \frac{2v_{y_i}}{g}$$

il primo risultato era ovvio, perché appunto all'istante iniziale in corpo è a $y_i = 0$ e $x_i = 0$; il secondo risultato invece identifica proprio il tempo finale, detto TEMPO DI VOLO (da notare il fatto che è il doppio di $t_{y_{max}}$):

$$\boldsymbol{t_{x_{max}} = \frac{2v_{y_i}}{g}}$$

Da questo, otteniamo ora la gittata:

$$x_{max} = v_{x_i} \cdot t$$

$$x_{max} = v_{x_i} \cdot \frac{2v_{y_i}}{g}$$

$$x_{max} = \frac{2v_{x_i}v_{y_i}}{g}$$

$$x_{max} = \frac{2{v_i}^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}$$

$$\boldsymbol{x_{max} = \frac{v_i^2 \cdot sin(2\alpha)}{g}}$$

Notiamo che la gittata varia al variare dell'angolo di lancio e assume valore massimo quando $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$*:*

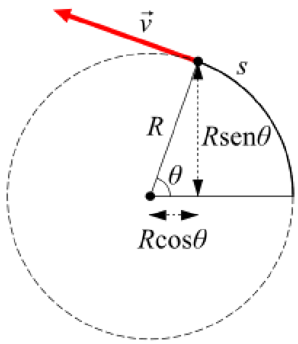
$$\boldsymbol{x_G = \frac{{v_i}^2}{g}}$$

FORMULARIO MOTO PARABOLICO

Punto al tempo t $$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_i + v_{x_i} \cdot t} \\ \boldsymbol{y = y_i + v_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2} \end{cases}$$	*Tempo di volo* $$\boldsymbol{t_{x_{max}} = \frac{2v_{y_i}}{g}}$$	*Tempo di altezza massima* $$\boldsymbol{t_{y_{max}} = \frac{v_{y_i}}{g}}$$
Gittata massima (α = 45°) $$\boldsymbol{x_G = \frac{{v_i}^2}{g}}$$	*Gittata* $$\boldsymbol{x_{max} = \frac{v_i^2 \cdot sin(2\alpha)}{g}}$$	*Altezza massima* $$\boldsymbol{y_{max} = \frac{{v_{y_i}}^2}{2g}}$$

Moto circolare uniforme

È il moto di un corpo lungo una traiettoria circolare a VELOCITÀ COSTANTE.



Qui troveremo alcune nuove componenti: **ACCELERAZIONE CENTRIPETA**, **VELOCITÀ TANGENZIALE** e **VELOCITÀ ANGOLARE**.

In questo tipo di moto è molto più conveniente utilizzare l'ANGOLO percorso piuttosto che la distanza, espresso in **RADIANTI**. Andremo a chiamare l'angolo rispetto a 0 come $\boldsymbol{\theta}$ e la distanza del corpo dal centro $\boldsymbol{R}$ o $\boldsymbol{r}$.

La conversione da angoli espressi in gradi a radianti avviene mediante la proporzione:

$$\theta_{gradi} : 360° = \theta_{rad} : 2\pi$$

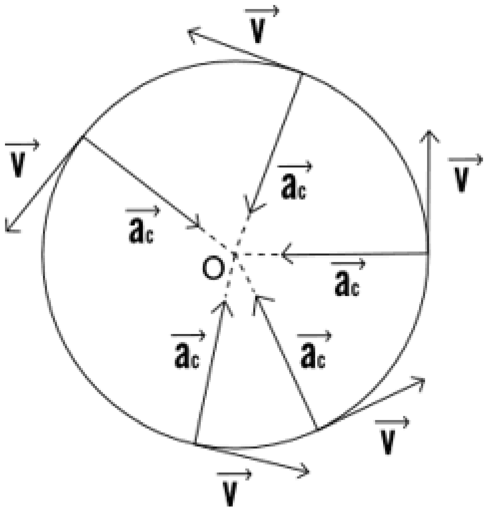
$$\theta_{rad} = \theta_{gradi} \frac{2\pi}{360°}$$

$$\boldsymbol{\theta_{rad} = \theta_{gradi} \frac{\pi}{180°}}$$

La distanza percorsa dal corpo lungo la circonferenza partendo dall'angolo θ sarà quindi:

$$\boldsymbol{s = \theta \cdot r \quad [m]}$$

Il tempo che il corpo impiega per completare un giro completo è detto **periodo** e viene indicato con $\boldsymbol{T}$ e viene utilizzato per calcolare la maggior parte dei componenti del moto.



Concentriamoci ora sui vettori che compongono il moto del corpo: il suo movimento si trova su una circonferenza, ma la velocità come la conosciamo finora lavora in modo lineare ed è sempre quindi tangente alla circonferenza in qualunque suo punto.

La velocità è quindi detta *velocità tangenziale* e si calcola come già conosciamo (distanza/tempo):

$$v = \frac{D}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\boldsymbol{v_t = \frac{2\pi r}{T} \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$$

La *velocità angolare* invece, che vedremo meglio nel capitolo del moto angolare, viene calcolata con:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left[\frac{rad}{s} \; o \; \frac{1}{s}\right]}$$

Esiste anche una relazione (ovviamente) tra la velocità angolare e quella tangenziale:

$$\boldsymbol{v = \omega \cdot r}$$

Per far mantenere all'oggetto un'orbita attorno al centro (modificando la direzione della velocità tangenziale), è necessario avere un moto che attira l'oggetto verso il centro: questo è detto *accelerazione centripeta*.

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r}$$

<u>*FORMULARIO MCU*</u>

Velocità tangenziale $\boldsymbol{v_t = \frac{2\pi r}{T} \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$	*Velocità angolare* $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left[\frac{rad}{s} \; o \; \frac{1}{s}\right]}$
Conversione velocità angolare a tangenziale $\boldsymbol{v_t = \omega \cdot r}$	*Distanza percorsa* $\boldsymbol{s = \theta \cdot r \quad [m]}$
A. centripeta (usando v. tangenziale) $\boldsymbol{a_c = \frac{{v_t}^2}{r}}$	*A. centripeta (usando v. angolare)* $\boldsymbol{a_c = \omega^2 \cdot r}$

Velocità angolare, Moto A. Uniforme e Moto A. Unif. Accelerato

Come abbiamo già visto nel moto circolare, quando si ha a che fare con circonferenze è meglio utilizzare misure angolari piuttosto che distanziali. Le formule in questa sezione sono identiche a quelle per la Velocità e il Moto uniforme, ma anziché in metri, lo spostamento sarà in radianti.

FORMULARIO VELOCITÀ ANGOLARE

Velocità media	Velocità scalare media	Velocità istantanea
$\omega_m = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$	$\omega_{sm} = \frac{A}{\Delta t}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

FORMULARIO ACCELERAZIONE ANGOLARE

Accelerazione media	Accelerazione istantanea
$a_m = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$	$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}$

FORMULARIO MAU

Punto al tempo t

$$\theta = \theta_i + \omega \cdot t$$

(tutte le altre sono inverse)

FORMULARIO MAUA

Velocità finale	Punto al tempo t
$\omega_f = \omega_i + a \cdot t$	$\theta = \theta_i + \omega_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Formula senza il tempo

$$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2a \cdot (\theta_f - \theta_i)$$

Moti relativi

Dinamica

Forze

La forza è una grandezza vettoriale, in quanto essa rappresenta una massa che si muove in una certa direzione con una certa accelerazione. NON è quindi legata al tempo, né allo spazio.

Esistono molti tipi di forze differenti, ma esse vengono tutte raggruppate in 4 famiglie:

- la forza gravitazionale
- la forza elettromagnetica
- la forza forte
- la forza debole

Leggi di Newton

Prima legge di Newton: Principio di inerzia

Se la somma delle forze che agiscono su un corpo è nulla, allora un corpo in quiete (rispetto al sistema di riferimento) rimarrà in quiete e un corpo in moto continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Seconda legge di Newton: Principio di proporzionalità

La forza agente su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione, la cui condivide la direzione e il verso, ed alla massa.

In una formula:

$$\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{a}} \quad \left[\boldsymbol{N = kg\frac{m}{s^2}}\right]$$

Terza legge di Newton: Principio di azione e reazione

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora il corpo B esercita su A una forza uguale e contraria.

In una formula:

FORZA RISULTANTE = REAZIONE VINCOLARE ($\vec{n}$)

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}}$$

Forza peso

La forza peso (o di gravità) è la forza che attira ogni corpo verso il centro del corpo celeste più vicino. È espressa con la formula:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_p} = m\vec{g}}$$

Legge di gravitazione universale

In relazione alla forza peso e all'accelerazione gravitazionale che attrae un corpo a un altro, descriviamo la legge che descrive appunto la forza d'attrazione tra due corpi con la formula:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove

G rappresenta la **costante gravitazione** che vale

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

m_1 e m_2 incidano le masse dei due corpi

r indica la distanza tra i centri dei due corpi

Forza d'attrito radente

Quando le superfici di due corpi scivolano una sull'altra, viene a generarsi una forza che si oppone al moto dei corpi: questa viene chiamata *forza d'attrito (radente)*.

Esistono prevalentemente due tipi di attrito, *statico* o *dinamico*, ma in entrambi i casi, la formula che descrive l'attrito è sempre:

$$F_A = \mu \cdot F_\perp$$

dove

μ è detto coefficiente d'attrito, un valore puro specifico per ogni materiale

$F_\perp$ è la componente perpendicolare alla superficie della risultante delle forze che agiscono sul corpo

Nella maggior parte dei casi la $F_\perp$ coincide con la forza peso del corpo (non nel caso di un piano inclinato).

Questa forza avrà **stessa direzione ma verso opposto rispetto al moto**.

Forza d'attrito statico

Questa forza è quella che dobbiamo vincere affinché si possa mettere in moto un corpo dallo stato di quiete. Viene definita con la formula:

$$F_{As} = \mu_s \cdot F_\perp$$

Ovviamente simile alla precedente, dove μ_s è il coefficiente d'attrito statico del materiale del corpo.

Forza d'attrito dinamico

Questa forza è quella che dobbiamo vincere affinché si possa mettere in moto un corpo che è già in movimento. Viene definita con la formula:

$$F_{Ad} = \mu_d \cdot F_\perp$$

Ovviamente simile alla precedente, dove μ_d è il coefficiente d'attrito dinamico del materiale del corpo.

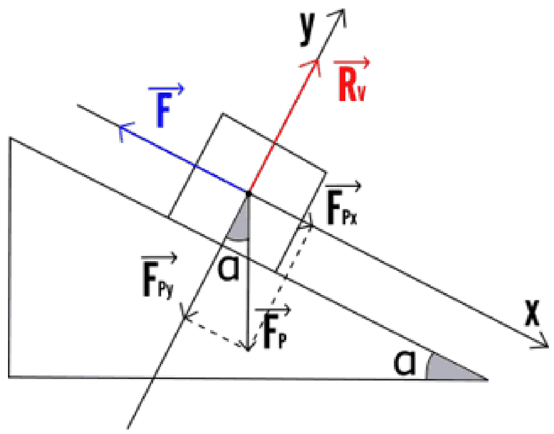
Dato che per sportare un oggetto che è già in movimento è ovviamente necessaria meno forza rispetto a quando è in stato di quiete, possiamo affermare che:

$$\mu_d < \mu_s$$

Piano inclinato

Nella maggior parte dei casi ci troveremo in sistemi dove il piano di riferimento non è orizzontale, ma bensì inclinato. In questi casi, è necessario scomporre le forze affinché si possano applicare le formule precedenti.

L'angolo del piano è lo stesso dell'inclinazione della forza peso dell'oggetto.



La forza peso viene scomposta nelle sue componenti:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{px}} = \overrightarrow{F_p} \cdot \sin\alpha \\ \overrightarrow{F_{py}} = \overrightarrow{F_p} \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

D'altra parte, le forze opposte alle componenti sono la reazione vincolare del piano:

$$\overrightarrow{R_v} = -\overrightarrow{F_{py}}$$

e una forza che noi dobbiamo applicare in base a cosa vogliamo far fare al corpo:

stato di quiete $\vec{F} = -\overrightarrow{F_{px}}$	*salire sul piano* $\vec{F} > \overrightarrow{F_{p_x}}$
scendere sul piano in MRUA $\vec{F} = 0$	*scendere sul piano* $\vec{F} < \overrightarrow{F_{p_x}}$

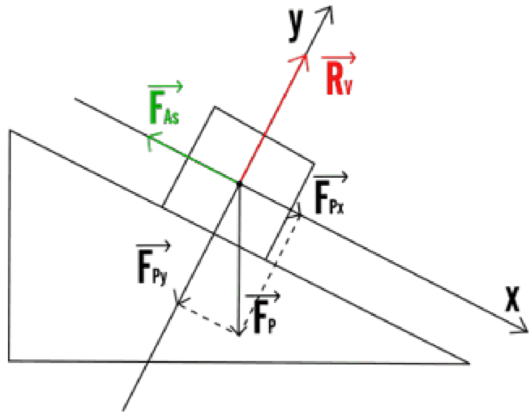
In ogni caso, per calcolare la forza risultante basterà usare:

$$F_{ris} = F_{px} - F$$

TUTTO QUESTO AVVIENE IN ASSENZA DI FORZA D'ATTRITO!

Piano inclinato con forza d'attrito

Se adesso consideriamo anche l'attrito che il corpo genera contro il piano, lo schema cambia leggermente, andando a porre come forza equilibrante della componente x proprio la forza d'attrito del corpo.



La forza risultate è quindi:

$$\vec{F}_{ris} = \Sigma\vec{F} = \overrightarrow{F_{px}} + \overrightarrow{F_{As}}$$

e i moduli sono:

$$\boldsymbol{F_{ris} = F_{px} - F_{As}}$$

Possiamo anche pensare di trovare l'***angolo critico***, ovvero l'angolo che permette al corpo di stare in equilibrio sul piano senza applicare forze supplementari esterne.

Abbiamo quindi bisogno che l'accelerazione del corpo sul piano sia nulla e quindi che la forza risultante sia nulla a sua volta. Usiamo la formula sopra:

$$0 = \overrightarrow{F_{px}} + \overrightarrow{F_{As}}$$

$$0 = \overrightarrow{F_p} \cdot sin\,\alpha - \mu_s \cdot F_\perp$$

come detto in precedenza, la forza perpendicolare è quasi sempre la forza peso, ma non in questo caso, poiché il piano è inclinato. La forza perpendicolare sarà quindi la componente y della forza peso, perché essa è perpendicolare alla direzione dell'attrito, quindi:

$$0 = mg \cdot sin\,\alpha - \mu_s \cdot mg \cdot \cos\alpha$$

$$sin\,\alpha = \mu_s \cdot \cos\alpha$$

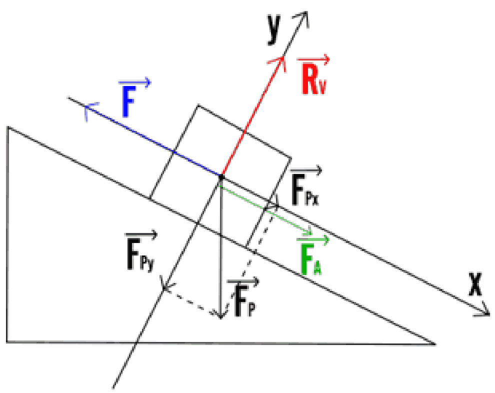
$$\frac{sin\,\alpha}{\cos\alpha} = \mu_s$$

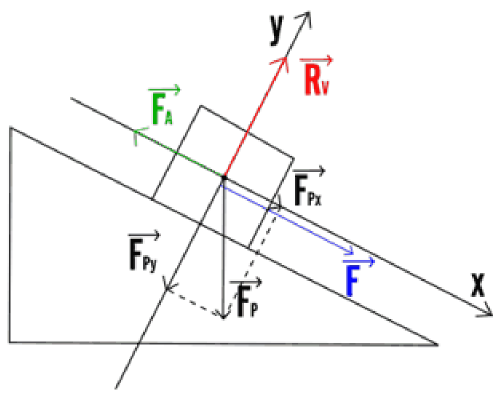
$$\tan\alpha = \mu_s$$

Quindi, per avere **equilibrio senza applicare forze supplementari** è necessario un l'angolo di inclinazione:

$$\boldsymbol{\alpha = arctan(\mu_s)}$$

Bisogna però ricordare che, in caso di forze esterne, l'attrito ha verso opposto:



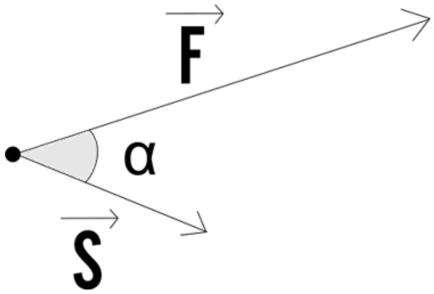


Lavoro

Data una forza **CONSTANTE** esercitata su un corpo che effettua uno spostamento rettilineo, il lavoro è definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

Bisogna però prestare attenzione, in quanto questo è un prodotto scalare tra vettori, con versi e direzioni differenti, quindi la formula più semplice da usare è:



$$\boldsymbol{L = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha \quad [J = N \cdot m]}$$

dove α è l'angolo compreso tra $\vec{F}$ e $\vec{x}$.

Notiamo che per:

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad (90° < \alpha < 270°)$

il lavoro sarà **negativo**, in quanto la forza ha verso **opposto** rispetto allo spostamento

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (270° < \alpha < 90°)$

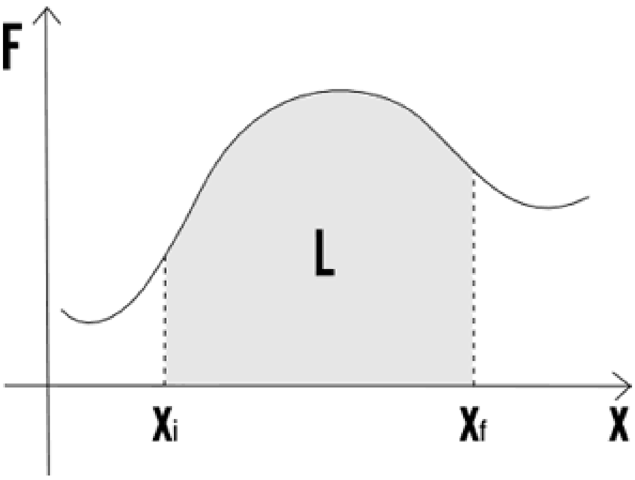
il lavoro sarà **positivo**, in quanto la forza ha verso **concorde** rispetto allo spostamento

$\alpha = 0$

il lavoro sarà **nullo**, in quanto la forza non va a creare né ad influire sullo spostamento

Lavoro di una forza variabile

Quando si ha a che fare con una forza che cambia durante lo spostamento, la formula sopra data non ha più senso ed è necessario generalizzare.



Il valore del lavoro è quindi la somma dei lavori in ogni punto dello spostamento, ed è quindi:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \Delta x$$

che ovviamente si può scrivere come integrale:

$$\boldsymbol{L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \quad [J]}$$

e generalizzando

$$\boldsymbol{L = \int F(x)\, dx}$$

Energia

L'energia è una grandezza fisica difficile da definire, poiché astratta e formulabile solo in modo matematico.

La definizione a grandi linee di energia è:

l'energia è la capacità di un corpo di compiere lavoro, indipendentemente dal fatto che il lavoro venga davvero compiuto o meno

L'energia non è dunque riassumibile in un'unica formula, ma ne esistono diversi tipi per ogni branca della fisica (Meccanica, Termodinamica, Elettromagnetismo, Relatività, Quantistica, …).

Nel nostro caso, ci interesseremo delle energie presenti nella branca della Meccanica, in particolare nella Dinamica, dove troveremo:

- energia cinetica (generata dal movimento dei corpi)
- energia potenziale (generata in base posizione dei corpi nel sistema di riferimento)
- energia meccanica (la sommatoria delle due precedenti)

L'unità di misura dell'energia è il **Joule**, il quale ci fa capire che essa è strettamente legata al Lavoro.

La nozione da tenere a mente è che **l'energia si conserva**, quindi significa che la somma di tutte le energie deve essere sempre uguale in qualsiasi momento.

Energia cinetica

L'energia cinetica è una grandezza legata alla massa e alla velocità di un corpo. Essa indica *il lavoro svolto da un corpo in movimento oppure il lavoro necessario a un corpo per mettersi in movimento* e viene indicata mediante la formula:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

dove appunto

$\boldsymbol{m}$ indica la massa del corpo in movimento

$\boldsymbol{v}$ indica la velocità del corpo in movimento

DIMOSTRAZIONE: si vuole ottenere il lavoro svolto di un corpo mosso da una forza costante, quindi:

$$L = F \cdot \Delta x \cdot \cos 0 = ma \cdot \Delta x$$

senza conoscere l'accelerazione, non andiamo molto distante. Sostituiamola quindi con la formula inversa ottenuta dalla formula priva di tempo del MRUA:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}$$

e quindi:

$$L = m \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$L = K_f - K_i = \Delta K$$

Singolarmente:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Quello appena descritto è il ***TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA***, e serve non solo a ottenere la formula dell'energia cinetica, ma anche a constatare che il Lavoro non è altro che la variazione di energia potenziale:

$$\boldsymbol{L = K_f - K_i = \Delta K}$$

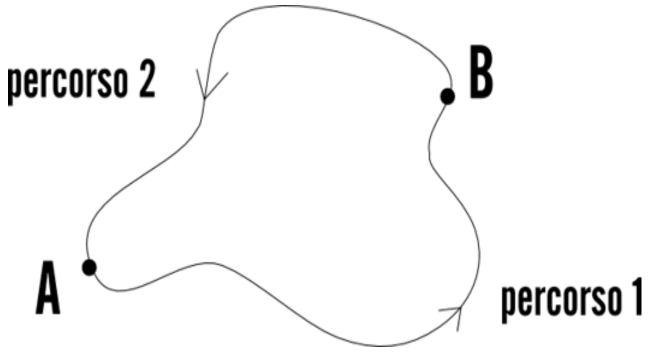
Ovviamente possono essere estrapolate le formule inverse:

$$m = \frac{2K}{v^2} \qquad v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Come si può osservare, l'energia cinetica è direttamente proporzionale alla massa, e quindi per esempio, a parità di velocità, un corpo A con il doppio della massa di un corpo B avrà un'energia cinetica doppia rispetto a B; a parità di massa invece, l'energia cinetica sarà maggiore nel corpo il quale possiede modulo della velocità più grande.

Forze conservative

Una forza si dice conservativa se il lavoro da essa compiuto su un corpo che percorre un cammino chiuso è nullo.



Per dimostrare che questa definizione è valida per qualunque percorso, procediamo in questo modo:

$$L_{percorso\ 1} + L_{percorso\ 2} = 0$$

$$L_{AB} + L_{BA} = 0$$

ricordando la formula generale del Lavoro:

$$\int_A^B F(x)\,dx + \int_B^A F(x)\,dx = 0$$

$$\int_A^B F(x)\,dx = -\int_B^A F(x)\,dx$$

$$\int_A^B F(x)\,dx = \int_A^B F(x)\,dx$$

Così facendo, abbiamo dimostrato che la tesi è valida per qualsiasi forza e qualsiasi percorso chiuso:

una forza conservativa è tale perché il lavoro da lei svolto dipende solamente da inizio e fine di un percorso chiuso, NON DAL PERCORSO

Un esempio di forza conservativa possono essere la forza di gravità o la forza elastica.

ESEMPIO: lanciando verso l'alto una pallina, la forza iniziale la spingerà verso l'alto, ma la forza peso rallenterà il suo moto fino a farle raggiungere il punto più alto, dove la velocità varrà 0 e la pallina tornerà, spinta questa volta dalla forza peso, sulla mano del lanciatore.

Così facendo, il moto della pallina è stato dalla mano fino al punto più alto e dal punto più alto fino alla mano, un cammino chiuso appunto, dove le uniche parti essenziali sono il punto di partenza (la mano) e il punto di arrivo (dove la velocità è 0). La forza peso (o di gravità) è quindi una forza conservativa.

Forze dissipative

L'esatto opposto delle forze conservative sono chiamate forze dissipative, ovvero quelle forze che non agiscono su un circuito chiuso e che quindi sono **DIPENDENTI DAL PERCORSO**.

Un esempio di forza dissipativa è la forza d'attrito, sia dinamico che statico, poiché essendo sempre di verso opposto al moto, il lavoro non potrà mai essere nullo lungo un percorso chiuso.

Energia potenziale

L'energia potenziale è energia **LEGATA SOLAMENTE A FORZE CONSERVATIVE** immagazzinata all'interno di ogni corpo che, appena può, si trasforma in qualunque altro tipo di energia (legata anch'essa solamente a forze conservative), come per esempio l'energia cinetica.

Ogni corpo **(!!! sul quale agiscono forze conservative !!!)** può possedere energia potenziale a causa della sua posizione o orientamento rispetto ad un campo di forze (es. campo gravitazionale terrestre). Nel caso si tratti di un sistema, l'energia potenziale può dipendere dalla disposizione degli elementi che lo compongono.

> *ESEMPIO: un corpo viene tenuto ad una certa altezza H; esso quindi se rilasciato, subirà l'accelerazione gravitazionale terrestre, la quale in base alla massa dell'oggetto genererà una certa forza peso F, la quale in base allo spazio percorso H svolgerà un lavoro L.*
>
> *Questo possibile lavoro è possibile proprio perché l'oggetto si trova all'altezza H e quindi ha immagazzinato un'energia che potenzialmente è in grado di trasformarsi, appena può, in un altro tipo di energia, quella cinetica in questo caso.*

La definizione di energia potenziale è letteralmente il negato del lavoro, secondo questa formula:

$$-L = U_f - U_i = \Delta U$$

dove

U è l'energia potenziale mentre ΔU è la sua variazione

In altre parole, l'energia potenziale è la capacità di un oggetto (o sistema) di trasformare la propria energia in un'altra forma di energia, come ad esempio l'energia cinetica [tipo "l'energia di default generata da un corpo"].

Ogni lavoro prodotto da forze conservative può essere espresso sotto forma di energia potenziale.

L'ENERGIA POTENZIALE NON È LEGATA SOLO ALLA FORZA DI GRAVITÀ (energia potenziale gravitazionale).

ESSA INFATTI SI RITROVA IN TUTTE LE FORZE CONSERVATIVE; ALLA FORZA DI COULOMB CORRISPONDE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA, ALLA FORZA ELASTICA CORRISPONDE L'E. P. ELASTICA, …

Energia potenziale gravitazionale

Prendiamo ora la più comune e vicina a noi energia potenziale, quella gravitazionale.

Come descritto nell'esempio precedente, il solo alzare un oggetto da terra aumenta la sua energia potenziale in base alla sua posizione sull'asse y, altezza appunto.

La formula sarà:

$$\boldsymbol{U = mgh}$$

dove

- $\boldsymbol{m}$ è la massa del corpo
- $\boldsymbol{g}$ è l'accelerazione gravitazionale
- $\boldsymbol{h}$ è lo spazio percorso verticalmente dal corpo

Per avere una formula più concreta di questa energia, consideriamo la formula più astratta e poniamola nel caso in qui l'accelerazione sia appunto quella gravitazionale:

$$U_f - U_i = -L$$

e riscriviamo il lavoro con la sua formula generale:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

utilizziamo la lettera h per meglio descrivere che il valore ha a che fare con l'asse y:

$$U_f - U_i = -\int_{h_i}^{h_f} F(h)\,dh$$

Ora, visto che il sistema di riferimento parte dal basso e va verso l'alto e la forza peso va dall'alto verso il basso, il modulo andrà cambiato di segno e quindi $F(x) = -mg$:

$$U_f - U_i = -\int_{h_i}^{h_f} (-mg)\,dh$$

Dato che mg è un valore costante, lo estraiamo dall'integrale e risolviamo:

$$U_f - U_i = mg[h]_{h_i}^{h_f}$$

$$U_f - U_i = mgh_f - mgh_i$$

il che ovviamente porta a scomporre singolarmente l'energia potenziale gravitazionale in:

$$U = mgh$$

Energia meccanica

L'energia meccanica di un sistema o di un corpo non è altro che la somma di tutte le energie (quindi cinetica e potenziale) del sistema o del corpo.

In una formula:

$$\boldsymbol{E = K + U}$$

Per arrivare a questo traguardo consideriamo le formule dell'energia cinetica e dell'energia potenziale nel caso in qui i loro lavori derivino SOLO DA FORZE CONSERVATIVE:

$$L = \Delta K = -\Delta U$$

$$K_f - K_i = U_f - U_i$$

$$\boldsymbol{K_i + U_i = K_f + U_f}$$

$$\boldsymbol{E_i = E_f}$$

$$\boldsymbol{\Delta E = 0}$$

Questo appena trovato è detto ***PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA***, ovvero abbiamo scoperto che in un **sistema isolato** la quantità di energia resta costante.

Energia meccanica con forze non conservative

Quando un sistema non conserva energia (per esempio, in presenza di attrito), una certa quantità di lavoro verrà dissipato nel sistema, secondo la formula:

$$\boldsymbol{L_A = \Delta E}$$

il lavoro delle forze non conservative è quindi la variazione dell'energia meccanica di un sistema

La potenza

Quando un corpo svolge una certa quantità di lavoro per una certa durata temporale questa viene a prendere il nome di potenza.

In formula:

$$\boldsymbol{P = \frac{L}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \left[W = \frac{J}{s} = N \cdot \frac{m}{s}\right]}$$

Le formule di potenza media e istantanea sono, come ci si potrebbe aspettare:

$$\boldsymbol{P_m = \frac{\Delta L}{\Delta t}} \qquad\qquad \boldsymbol{P = \frac{dL}{dt}}$$

Quindi, aumentando il lavoro e/o diminuendo il tempo di ottiene una potenza maggiore.

ESEMPIO: un montacarichi è in grado di sollevare un mobile da terra fino a 12 metri di altezza, esercitando una forza costante di 800 newton per 20 secondi.

Nel calcolare il lavoro osserviamo che forza e spostamento sono paralleli e concordi.

$L = F \cdot \Delta x = mg \cdot \Delta x = 800N \cdot 12m = 9600\,J$

La potenza sviluppata sarà quindi: $P = \frac{L}{t} = \frac{9600\,J}{20\,s} = 480\,W$

Quantità di moto

Quando un oggetto in movimento si scontra con un altro oggetto, quale sarà il moto dopo l'urto? E **QUANTO** moto era presente prima dell'urto? La quantità di moto è esattamente quello che stiamo cercando e si esprime con la formula:

$$\boldsymbol{\vec{p} = m\vec{v} \quad \left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]}$$

L'unità di misura va scritta in forma estesa, poiché la quantità di moto non ha un'unità di misura specifica.

In un sistema con più di un corpo la quantità di moto totale è quindi:

$$\boldsymbol{\vec{p}_{tot} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n}$$

Con questa nuova definizione possiamo ora riscrivere la seconda legge di Newton così come lui stesso l'aveva scoperta e pensata:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

ESEMPIO: una macchina di 1500 kg sfreccia alla velocità di 80 m/s; la sua quantità di moto sarà:

$$p = 1500\,kg \cdot 80\,\frac{m}{s} = 120000\,kg \cdot \frac{m}{s}$$

Se consideriamo un sistema dove la **FORZA RISULTANTE È NULLA**, la quantità di moto quindi, passando da un corpo all'altro durante un urto, si conserva e rimane costante, e quindi possiamo scrivere la seguente equazione:

$$\vec{F}_{ris} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}_{ris} = 0 \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \vec{p} = costante$$

e quindi in due istanti di tempo diversi, la quantità di moto sarà la stessa. In una formula:

$$\boldsymbol{\vec{p}_i = \vec{p}_f}$$

In questo caso quindi, per definizione, la velocità è costante e ci troviamo in un MRU:

$$m\vec{v}_i = m\vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_f$$

Impulso

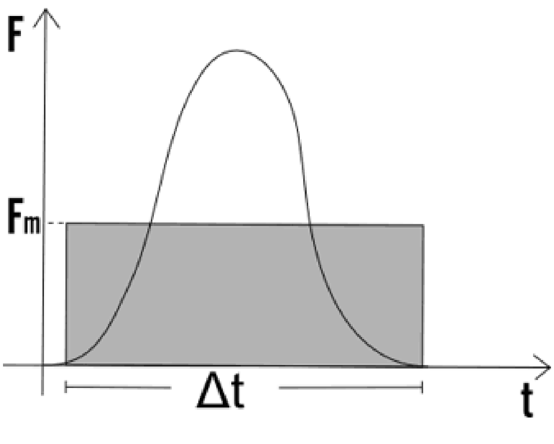
Riconsideriamo ancora la seconda legge di Newton e notiamo che:

$$\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \sum\vec{F} \cdot dt$$

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \sum\vec{F}\, dt$$

dato che la forza non è costante ma varia in base appunto alla quantità di moto, non possiamo portarla fuori dall'integrale ma, ricordando il *Teorema della media dell'integrale*:



$$\int_{t_i}^{t_f} \sum\vec{F}\, dt = \vec{F}_m \cdot \Delta t$$

e sostituendo:

$$\boldsymbol{\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}_m \cdot \Delta t}$$

Abbiamo quindi ottenuto che l'impulso non è altro che la variazione della quantità di moto

Distinguiamo il comportamento di completo della quantità di moto in base al sistema:

SISTEMA CHIUSO: $\Delta\vec{p} = p_f - p_i = 0$ e quindi $\boldsymbol{\vec{p}_f = \vec{p}_i}$ e la **quantità di moto rimane costante**

SISTEMA APERTO: $\Delta\vec{p} = p_f - p_i = \vec{I}$ e quindi $\boldsymbol{\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{I}}$ e la **quantità di moto viene dissipata**

Urti

Quando due corpi si scambiano **INTENSE FORZE** per un **BREVE PERIODO** essi provocano un urto, di diverso tipo in base al loro moto e a come si comportano i due corpi dopo l'urto.

Per il momento escludiamo le forze esterne e quindi ci poniamo in un sistema chiuso.

Urti anelastici

Gli **urti anelastici** prevedono che i due corpi, dopo l'urto, rimangano uniti e si muovano come un **corpo unico**, quindi:

$$p_i = p_f$$

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$\boldsymbol{v_f = \frac{m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

Urti elastici

Gli **urti elastici**, al contrario di quelli anelastici, prevedono che, dopo l'urto, i due **corpi rimangano separati**, quindi questa volta avremo due velocità finali. Necessitiamo dunque di due equazioni; oltre alla quantità di moto, in un sistema chiuso resta costante anche l'energia cinetica, quindi:

$$\begin{cases} p_i = p_f \\ K_i = K_F \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} = m_2 v_{2i} - m_2 v_{2f} \\ m_1 {v_{1i}}^2 - m_1 {v_{1f}}^2 = -(m_2 {v_{2i}}^2 - m_2 {v_{2f}}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \\ m_1 ({v_{1i}}^2 - {v_{1f}}^2) = -m_2 ({v_{2i}}^2 - {v_{2f}}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \end{cases}$$

ed esprimiamo una massa usando l'altra:

$$m_2 = m_1 \frac{v_{1i} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{2f}}$$

e sostituiamo nell'altra equazione:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_1 \frac{v_{1i} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{2f}} (v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f})$$

$$v_{1i} + v_{1f} = -(v_{2i} + v_{2f})$$

$$v_{1i} + v_{2i} = -(v_{1f} + v_{2f})$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \\ \boldsymbol{v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \end{cases}$$