ANALISI II – riassunto completo

PROBLEMA DI CAUCHY DI ORDINE 1

$$\begin{cases} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx \\ y(x) = n \end{cases}$$

1. Separa le due funzioni g(y), f(x) scrivendole $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx$. Se l'equazione è omogenea devo cercare la soluzione $g(y) = 0$

<u>NOTA</u>: se mi trovassi un problema non omogeneo ($y(x) = n, n \,! = 0$) con *x* e *y* non separabili nella forma y'(x) + a(x) · y(x) = b(x),devo moltiplicare tutti i membri per un fattore integrante, ovvero per $e^{\mathrm{A}x}$ dove Ax è un'antiderivata di ax.

2. Risolvi gli integrali inserendo dalla parte di *x* la costante *c*
   <u>NOTA</u>: se dovesse capitarti una funzione $\ln|\mathrm{y}$ … |devi rimuovere il logaritmo elevando tutto alle *e* da entrambi i lati. Devi quindi prendere la parte di destra e metterla TUTTA come esponente di *e*. fatto questo puoi separare la parte con la *c* introducendo una variabile $k = e^c$ che moltiplicherà *e* elevato all'integrale di *f(x)*
3. Applico la condizione $y(x) = n$ all'equazione appena ottenuta, calcolando per quale *k* la condizione è vera. Infine riscrivo la soluzione del problema inserendo nell'EDO ottenuta il valore di *k*.
4. Scrivo l'intervallo di definizione massimo ricordando che deve contenere la *x* del problema e che deve essere un intervallo singolo (non un insieme di intervalli).

EDO OMOGENEE DI SECONDO ORDINE E PROBLEMA DI CAUCHY

1. Ricavo dall'equazione data i parametri *a*, *b*, *c* e li uso per scrivere una nuova equazione di grado minore.
2. Guardo il Δ:
   a. Δ > 0: la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{r_1 x} + c_2 * e^{r_2 x}$
   b. Δ = 0: la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{rx} + c_2 * x * e^{rx}$
   c. Δ < 0: ho due radici distinte, irrazionali nella forma $\alpha \pm \beta i$; la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 * e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
3. Derivo l'equazione generale appena trovata
4. Sostituisco il parametro *y'(x) = n* che ho nel problema di Cauchy e mettendolo a sitema con *y(x) = m* ottengo i valori di c_1 e c_2

EDO NON OMOGENEE DI SECONDO ORDINE E PROBLEMA DI CAUCHY

1. Ricavo dall'equazione data i parametri *b*, *c* e li uso per scrivere una nuova equazione di grado minore.
2. Guardo il Δ:
   a. Δ > 0: la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{r_1 x} + c_2 * e^{r_2 x}$
   b. Δ = 0: la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{rx} + c_2 * x * e^{rx}$
   c. Δ < 0: ho due radici distinte, irrazionali nella forma $\alpha \pm \beta i$; la soluzione sarà nella forma $c_1 * e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 * e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
3. Scrivo quindi la formula della omogenea, $y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ inserendo al posto di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ i valori associati al Δ
4. Cerco la soluzione particolare , $y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ risolvendo il sistema
   $$\begin{cases} c_1' y_1(x) + c_2' y_2(x) = 0 \\ c_1' y_1'(x) + c_2' y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$
5. Inserisco c_1e c_2 nella formula di $y_p(x)$

6. Sommo la $y_p(x)$ con $y_o(x)$
7. Impongo le condizioni iniziali di Cauchy

INTORNI E APPARTENENZA

$P \in \mathbf{R}^n, \mathrm{r} > 0 \ \in \mathbf{R} \ \rightarrow \mathrm{U_r(P)} = \{\mathrm{X} \ \in \mathbf{R}^n : \|\mathrm{X} - \mathrm{P}\| < r\}$

Dato un punto P, devo trovare un raggio r che mi crei un intorno $\mathrm{U_r(P)}$ tale che la distanza tra P e X sia minore di questo raggio, ovvero P sia contenuto nello stesso spazio di piano rappresentato dall'equazione che contiene anche X.

$P \in \mathrm{Int(S)}$ se $\exists\ \mathrm{U_r(P)} \subseteq \mathrm{S}$

$P \in \mathrm{Est(S)}$ se $\exists\ \mathrm{U_r(P)} \subseteq \mathbf{R^n} \backslash \mathrm{S}$

$P \in \mathrm{Fr(S)}$ se $\forall\ \mathrm{U_r(P)} \ \rightarrow \ \mathrm{U_r(P)} \cap \mathrm{S} \ \neq \emptyset$ e $\mathrm{U_r(P)} \cap (\mathbf{R^n} \backslash \mathrm{S}) \neq \emptyset$

Un punto di accumulazione è un punto P appartenente a S dove un suo intorno contiene almeno un altro punto.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$\gamma : [a, b] \rightarrow \boldsymbol{R}^2$

$t \ \rightarrow (t_1, t_2)$

$lunghezza(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|$

Derivo t_1, t_2. Sostituisco i valori *a* e *b* nell'equazioni t_1 e t_2 (sostituisco a coppie) e applico la formula della norma: $\|\vec{L}\| = \sqrt{(t_1)'^2 + \ ... + \ (t_n)'^2}$

PARAMETRIZZAZIONE DELLA RETTA

$r(t) = P + t * \gamma'(P)$

oppure

$r(t) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Data questa formula sostituisco i parametri

FORMULE PER LE CONICHE

ELLISSE: $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

$V_1 = (x_c + a, y_c)$	$V_3 = (x_c, y_c + \ b)$
$V_2 = (x_c - a, y_c)$	$V_4 = (x_c, y_c - \ b)$

Se *a* = *b* allora ho una circonferenza

IPERBOLE: $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

$V_1 = (x_c + a, y_c)$	$V_2 = (x_c - a, y_c)$
$A_1 = \dfrac{b}{a}(x - x_c) + y_c$	$A_2 = -\dfrac{b}{a}(x - x_c) + y_c$

VARIAZIONE: $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = -1$

LIMITI

Dimostrare che un limite esiste:

1. Devo dimostrare che $|f(x, y) - l| \ \leq h(x, y)$ e che $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} h(x, y) = 0$ con $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = l$
2. Teorema del confronto

LIMITI CON COORDINATE POLARI

3. Dato il limite $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_p,y_p)} f(x, y)$ sostituidci tutte le x con $x = x_p + \rho \cos \theta$ e le y con $y = y_p + \rho \sin \theta$

Classificazione dei punti stazionari – criterio dei minori

1. Calcolare $f\,'x(x, y)$
2. Calcolare $f'y(x, y)$
3. Porre le funzioni uguali a 0 e calcolare i punti (risolvere il sistema)
4. Calcolare la matrice Hessiana:
   a. Calcolare $f\,''xx(x, y)$
   b. Calcolare $f\,''xy(x, y)$ che è uguale a $f\,''yx(x, y)$
   c. Calcolare $f\,''yy(x, y)$
5. Inserire il tutto nella matrice Hf = $\begin{matrix} f\,''xx(x,y) & f\,''xy(x,y) \\ f\,''yx(x,y) & f\,''yy(x,y) \end{matrix}$
6. Inserire i valori di x e y nella matrice
7. Valutare la matrice Hessiana applicata ad un punto
   a. Se det($Hf(P)$) > 0 e $f\,''xx(x, y)$ > 0 allora P è un minimo
   b. Se det($Hf(P)$) > 0 e $f\,''xx(x, y)$ < 0 allora P è un massimo
   c. Se det($Hf(P)$) < 0 allora P è un punto di sella

Classificazione dei punti stazionari – moltiplicatori di Lagrange

1. Testare il gradiente
2. Calcolare $g\,'x(x, y)$
3. Calcolare $g'y(x, y)$
4. Valutare $\nabla(g(x, y))$ = ($g\,'x(x, y)$, $g'y(x, y)$) e verificare che sia ≠ (0,0) nel punto (0,0) (sostituisco i valori nel punto del gradiente) o che non appartenga al dominio
5. Ricavare la funzione Lagrangiana $L = f(x, y) - \lambda(g(x, y))$
6. Ottenere un sistema di derivate parziali e risolverlo stando attento a valutare tutte le soluzioni per ottenere dei punti
   a. Calcolare $L'x(x, y, \lambda)$
   b. Calcolare $L'y(x, y, \lambda)$
   c. Calcolare $L'\lambda(x, y, \lambda)$
7. Valutare la matrice Hessiana Orlata nei punti
   a. $B_{L(x,y,\lambda)}$ = $\begin{matrix} 0 & g'x(x,y) & g'y(x,y) \\ g'x(x,y) & L''xx(x,y) & L''xy(x,y) \\ g'y(x,y) & L''yx(x,y) & L''yy(x,y) \end{matrix}$
   b. Se il det($B_{L(x,y,\lambda)}$) > 0 il punto è un massimo locale
   c. Se il det($B_{L(x,y,\lambda)}$) < 0 il punto è un minimo locale

Iperpiano tangente

1. Calcolare le derivate parziali
   a. Calcolare $a = f\,'x(x, y, z)$
   b. Calcolare $b = f'y(x, y, z)$
   c. Calcolare $c = f'y(x, y, z)$
2. Sostituire nella formula $a(x - xp) + b(y - yp) + c(z - zp)$

Piano tangente

1. Calcolare le derivate parziali
   a. Calcolare $a = f\,'x(x, y, z)$
   b. Calcolare $b = f'y(x, y, z)$
   c. Calcolare $c = f'y(x, y, z)$
2. Applicare la formula z – $f\,'x(x\mathrm{p}, yp) = f\,'x(x\mathrm{p}, yp)$ (x – xp) + $f\,'x(x\mathrm{p}, yp)$ (y – yp)

Coordinate sferiche:
Usate quando l'equazione ha una forma del tipo: $x^2 + y^2 + z^2$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \rho\cos(\varphi) & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

RICORDA IL DETERMINANTE DELLA JACOBIANA: $\rho^2 \sin(\varphi)$

Coordinate cilindriche:
{ x = ρ cos(θ) y = ρ sin(θ) z = z $\rho \in [0, r]$ $\theta \in [0,2\pi]$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & z\ \rho \in [0, r] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z & \end{cases}$$

RICORDA IL DETERMINANTE DELLA JACOBIANA: ρ

Campo conservativo
1. Verificare la condizione delle derivate incrociate
    a. $(F1)'y(x, y)$ = $(F2)'x(x, y)$ con $F1$ e $F2$ i punti x e y dati
2. Calcolare il potenziale
    a. Calcolare ∫ $F1\ dx$ per trovare una soluzione $U(x)$ + $c(y)$
    b. Calcolare ∫ $F2\ dy$ per trovare una soluzione $U(y)$ + $d(x)$
    c. Porre $U(x)$ + $c(y)$ = $U(y)$ + $d(x)$
    d. Prendere dei valori di $d(x)$ e $c(y)$ che soddisfino l'equazione

Integrale di linea lungo la curva
Tabella dei valori di sen e cos

Valutazione sull'insieme M
1. Ottenere un sistema di derivate parziali e risolverlo stando attento a valutare tutte le soluzioni per ottenere dei punti
    a. Calcolare $L'x(x, y, \lambda)$
    b. Calcolare $L'y(x, y, \lambda)$
    c. Calcolare $L'\lambda(x, y, \lambda)$
2. Sostituire i punti trovati dal sistema nella g(x) e trovare il valore massimo e minimo

funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ mx}{sen\ nx}=\frac{m}{n}$	$\lim_{x\to 1}\frac{(arc\cos x)^2}{1-x}=2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \qquad (a>1)$
$\lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+a^x}=\begin{cases}1 & se\ a<1\\ \frac{1}{2} & se\ a=1\\ 0 & se\ a>1\end{cases}$

α (°)	α (rad)	sen α	cos α
$0°$	0	0	1
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0
$180°$	π	0	-1