DERIVATE PARZIALI

Relazioni tra continuità, derivabilità e differenziabilità di *f(X)*

$derivabile \nRightarrow continua$
$continua + derivabile \nRightarrow differenziabile$
$differenziabile \Rightarrow continua + derivabile$

Derivata parziale (di *f(X)* rispetto a *x_i*)

$f(X): U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $f(X) = f(x_1, \dots, x_n), P = (p_1, \dots, p_n)$

$$f'_{x_i}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h \cdot \vec{e_i}) - f(P)}{h} \quad con\ 1 \leq i \leq n$$

Derivata parziale del 2° ordine (di *f(X)* rispetto a x_i e poi rispetto a x_j)

$f(X): U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ ed esistono tutte le derivate parziali in un intorno di P, cioè $f(X) \in \mathcal{C}^1(P)$

$$f''_{x_i x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_{x_i}\left(P + h \cdot \vec{e_j}\right) - f'_{x_i}(P)}{h} \quad con\ 1 \leq i, j \leq n$$

Funzione a più incognite derivabile

$f(x_1, \dots, x_n)$ è derivabile in $P = (p_1, \dots, p_n)$ se esistono tutte le derivate parziali $f'_{x_i}(P)$ $\left[= \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\right]$

Gradiente (di *f(X)* in *P*)

Se $f(x_1, \dots, x_n)$ è derivabile in $P = (p_1, \dots, p_n)$, allora

$$\nabla f(P) = (f'_{x_1}(P), \dots, f'_{x_n}(P))$$

Polinomio di Taylor di ordine 1 (relativo a *f(X)* centrato in *P*)

$f(X): U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $P = (p_1, \dots, p_n)$ e $f(X) \in \mathcal{C}^1(P)$ allora

$$T_{1,P}(x_1, \dots, x_n) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(P)(x_i - p_i) = f(P) + \langle \nabla f(P), X - P \rangle$$

<u>*Caso particolare:*</u> $n = 2$

$$T_{1,P}(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Iperpiano tangente

Se $f(x_1, \dots, x_n)$ è differenziabile in $P = (p_1, \dots, p_n)$ allora l'iperpiano tangente a $f(X)$ in $\left(P, f(P)\right) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è

$$z = T_{1,P}(x_1, \dots, x_n) = f(P) + \langle \nabla f(P), X - P \rangle$$

Derivata direzionale (di *f(X)* in *P* lungo la direzione $\vec{V}$)

Dato $\vec{V} \in \mathbb{R}^n, \left\|\vec{V}\right\| = 1$ detto "versore", $f(x_1, \dots, x_n)$ differenziabile in $P \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$D_{\vec{V}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(P + h \cdot \vec{V}\right) - f(P)}{h} = \langle \nabla f(P), \vec{V} \rangle$$

Teorema
Se $f(X): U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ è differenziabile in P allora
- $\nabla f(P)$ indica direzione e verso di massima crescita di $f(X)$
- $-\nabla f(P)$ indica direzione e verso di massima decrescita di $f(X)$

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Dato $f(X): A \subseteq \mathbb{R}^n$ con A aperto, trovare min/max locali e globali

Sia $P \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ punto di min/max locale per $f(X)$, allora in mutua esclusione:
- P è punto stazionario di $f(X)$, quindi $\nabla f(P) = \vec{0}$
- $f(X)$ non ha tutte le derivate parziali del primo ordine in P, quindi $f(X) \notin C^1(P)$

Teorema di Schwarz
Se $f(X): U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f(X) \in C^2\big(U_r(P)\big)$ allora

$$f''_{x_i x_j}(P) = f''_{x_j x_i}(P) \quad \forall i,j: 1 \le i,j \le n$$

Matrice hessiana
Se le ipotesi del teorema di Schwarz sono vere, ovvero se tutte le derivate di $f(X)$ sono continue in P, allora $H_f(P)$ è simmetrica

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \cdots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \cdots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \cdots & f''_{x_nx_n}(P) \end{bmatrix}$$

Polinomio di Taylor di ordine 2 (relativo a *f(X)* centrato in *P*)
Se $f(X) \in C^2(P)$ con $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ e $P = (p_1, \dots, p_n)$ allora

$$T_{2,P}(x_1, \dots, x_n) = T_{1,P}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(P)(x_i - p_i)\big(x_j - p_j\big)$$

Considerando $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) = (X - P)$ possiamo ridefinire il polinomio di Taylor con:

$$T_{2,P}(x_1, \dots, x_n) = T_{1,P}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2}\vec{h} \cdot H_f(P) \cdot \vec{h}^T$$

Notiamo che $q(\vec{h})$ è una **forma quadratica**

$$\vec{h} \cdot H_f(P) \cdot \vec{h}^T = q(h_1, \dots, h_n) = a_{1,1}h_1^2 + a_{1,2}h_1h_2 + \cdots + a_{n-1,n}h_{n-1}h_n + a_{n,n}h_n^2$$

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ a_{3,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Segno di una forma quadratica

Sia $q(x_1, \dots, x_n) = q(X)$ una funzione quadratica. Diciamo che $q(X)$ è

1. DEFINITA POSITIVA se $q(X) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq \vec{0}$
2. SEMI-DEFINITA POSITIVA se $q(X) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. DEFINITA NEGATIVA se $q(X) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq \vec{0}$
4. SEMI-DEFINITA NEGATIVA se $q(X) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
5. INDEFINITA se non si verifica nessuno dei casi sopra

<u>*Usando il test degli autovalori*</u>

Sia $Q_{n\times n}$ la matrice simmetrica associata alla forma quadratica $q(X)$; in base al segno degli autovalori:

1. DEFINITA POSITIVA tutti positivi
2. SEMI-DEFINITA POSITIVA tutti ≥ 0
3. DEFINITA NEGATIVA tutti negativi
4. SEMI-DEFINITA NEGATIVA tutti ≤ 0
5. INDEFINITA se non si verifica nessuno dei casi sopra

Classificazione punti stazionari

$se\ f(x_1, \dots, x_n)\ derivabile\ due\ volte\ in\ P = (p_1, \dots, p_n)$

- Se $q(\vec{h})$ è DEFINITA POSITVA allora P è un punto di **MINIMO** locale
- Se $q(\vec{h})$ è DEFINITA NEGATIVA allora P è un punto di **MASSIMO** locale
- Se $q(\vec{h})$ è INDEFINITA allora P è un punto di **SELLA**
- Se $q(\vec{h})$ non è tra i precedenti allora non si può usare il metodo delle derivate parziali del 2° ordine

<u>*Caso particolare:*</u> $n = 2, f(x, y), P = (x_p, y_p)$

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(P) & f''_{xy}(P) \\ f''_{yx}(P) & f''_{yy}(P) \end{bmatrix}$$

Con il criterio dei minori:

- Se $det\left(H_f(P)\right) > 0$ e $f''_{xx}(P) > 0$ allora $H_f(P)$ è DEFINITA POSITIVA e P è punto di **MINIMO**
- Se $det\left(H_f(P)\right) > 0$ e $f''_{xx}(P) < 0$ allora $H_f(P)$ è DEFINITA NEGATIVA e P è punto di **MASSIMO**
- Se $det\left(H_f(P)\right) < 0$ allora $H_f(P)$ è INDEFINITA e P è punto di **SELLA**

Ottimizzazione vincolata su sistemi compatti

Sia $f(X): K \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f(X) \in \mathcal{C}^0(K)$ compatto, allora esistono min e max di $f(X)$ su K.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$f, g \in \mathcal{C}^2(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. I punti di min/max locale di $f(x, y)$ su $S = \{(x, y) \in A: g(x, y) = 0\}$ si trovano usando la funzione langragiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

1. Cerco i punti stazionari di $\mathcal{L}$
   $$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$
2. Se $P = (x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario di $\mathcal{L}$ allora classifico (x_0, y_0) usando la matrice hessiana orlata (simmetrica)
   $$B_{\mathcal{L}}(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}''_{xx}(P) & \mathcal{L}''_{xy}(P) \\ g'_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}''_{xy}(P) & \mathcal{L}''_{yy}(P) \end{bmatrix}$$

- Se $det\big(B_{\mathcal{L}}\,(x_0, y_0, \lambda_0)\big) > 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale di $f(x, y)$ soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$
- Se $det\big(B_{\mathcal{L}}\,(x_0, y_0, \lambda_0)\big) < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale di $f(x, y)$ soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$

Integrali di linea di 1^ specie

$\gamma \in C^1([a, b]): [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva regolare almeno a tratti e $\gamma'(t) = \vec{0}$ per un numero finito di punti.
Se $f(X) \in C^0(A), A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\gamma(t) \in A\ \forall t \in [a, b]$ allora:

$$\int_{\gamma} f\, ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

In pratica serve a calcolare l'area del piano curvato di base γ, dove la lunghezza della base è $\|\gamma'(t)\|\Delta t$ e l'altezza è $f\big(\gamma(t)\big)$

Caso particolare

$con\ f = 1\ si\ ha \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \ell(\gamma)$

Integrali doppi

Se $f(x,y) \in \mathcal{C}^0(D), D \subseteq \mathbb{R}^n$ allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

è il volume con segno del solido con base D e altezza $f(x,y)$

Integrali doppi su domini rettangolari
Se $f(x,y) \in \mathcal{C}^0(D), D = [a,b] \times [c,d]$ allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Insiemi x-semplici, y-semplici, semplici e regolari
x-semplice: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con $g_1 \leq g_2$ $\forall x \in [a,b]$, $\mathcal{C}^0([a,b])$
y-semplice: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con $h_1 \leq h_2$ $\forall y \in [c,d]$, $\mathcal{C}^0([c,d])$
semplice: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplice se è x-semplice o y-semplice
regolare: $D \subseteq \mathbb{R}^2, D = \bigcup_{i=1}^n D_i\, , con\ D_i\ insieme\ semplice$

Teorema di Fubini (per gli insiemi semplici)
$f(x,y) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^2)\ con\ D\ insieme\ semplice$
Se D è *x-semplice* allora $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \displaystyle\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$
Se D è *y-semplice* allora $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \displaystyle\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$

Integrali doppi con cambiamento di coordinate
$T: \Omega = [a,b] \times [c,d] \to D \subseteq \mathbb{R}^2$
$(u,v) \mapsto \big(g(u,v), h(u,v)\big)$
con T suriettiva, almeno iniettiva su Ω^0 e $T \in \mathcal{C}^1(\Omega^0)$ cioè $g, h \in \mathcal{C}^1(\Omega^0)$.

Se $f(x,y) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ allora:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f\big(T(u,v)\big) \cdot \big|det\big(DT(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

dove $DT(u,v)$ è la matrice jacobiana associata alla trasformazione T

$$DT(u,v) = \begin{bmatrix} g'_u(u,v) & g'_v(u,v) \\ h'_u(u,v) & h'_v(u,v) \end{bmatrix}$$

In pratica cambia delle coordinate scomode (es. circonferenza $x^2 + y^2 = 4$) in coordinate più comode (es. $(\rho \in [0,2], \theta \in [0,2\pi]) \mapsto (\rho \cdot \cos\theta\, , \rho \cdot \sin\theta)$). Vedi sotto.

Integrali in coordinate polari
$T: [0,r] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$(\rho,\theta) \mapsto (x_c + \rho \cdot \cos\theta\, , y_c + \rho \cdot \sin\theta)$
$det\big(DT(u,v)\big) = \rho$
dove r è il raggio della circonferenza con centro in $C = (x_c, y_c)$

Superfici di rotazione
Data $\gamma: I_z \to \mathbb{R}^2_{xy}, t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ curva sul piano xy, la parametrizzazione di δ della superficie di rotazione è
$$\delta: I_z \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, (t,\theta) \mapsto \big(\gamma_1(t)\cdot\cos\theta\,, \gamma_1(t)\cdot\sin\theta\,, \gamma_2(t)\big)$$

Integrali tripli

Integrali tripli su parallelepipedi rettangoli
$Se\ g(x,y,z) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^3)\ con\ D = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]\ allora$

$$\iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

In pratica $g(x,y,z) > 0$ descrive la densità del punto (x,y,z) nel parallelepipedo $D = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ e l'integrale triplo è la massa totale del parallelepipedo; con $g(x,y,z) = 1$ l'integrale triplo è il volume di D

Integrali tripli per fili
Se $f(x,y,z) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ con $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$
Ω regolare e $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, allora

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Omega \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

Integrali tripli per strati
Se $f(x,y,z) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ con $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [z_0, z_1], (x,y) \in \Omega(z) \subseteq \mathbb{R}^2\ regolare\ \forall z\}$ allora

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\iint\limits_{\Omega(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$$

Cambiamento di variabili per integrali tripli
$\Omega = [a,b]\times[c,d]\times[e,f], T: \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}^3$
$(u,v,w) \mapsto \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$
con T suriettiva, almeno iniettiva su Ω^0 e $T \in \mathcal{C}^1(\Omega^0)$

Se $g(x,y,w) \in \mathcal{C}^0(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ allora:

$$\iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega g\big(T(u,v,w)\big)\cdot\big|det\big(DT(u,v,w)\big)\big|\,du\,dv\,dz$$

dove $DT(u,v,w)$ è la matrice jacobiana associata alla trasformazione T
$$DT(u,v,w) = \begin{bmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{bmatrix}$$

Coordinate sferiche
$T: [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (x_c + \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta\, , y_c + \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta\, , z_c + \rho \cdot \cos\varphi)$
$det\big(DT(u, v, w)\big) = \rho^2 \cdot \sin\varphi$
dove r è il raggio della sfera con centro in $C = (x_c, y_c, z_c)$ e $P = (x_P, y_P, z_P)$ è un punto di D

Coordinate cilindriche
$T: [0, r] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$(\rho, \theta) \mapsto \big(x_c + \rho \cdot \cos\theta\, , y_c + \rho \cdot \sin\theta\, , z_p\big)$
$det\big(DT(u, v, w)\big) = \rho$
dove r è il raggio della base del cilindro con centro in $C = (x_c, y_c)$ e $P = (x_P, y_P, z_P)$ è un punto di D

Superficie regolare
$\varsigma: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ con Ω regolare e ς suriettiva
$(u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$

Se $\varsigma \in C^1(\Omega)$ allora Σ è regolare e i vettori $\varsigma'_u(u, v), \varsigma'_v(u, v)$ sono linearmente indipendenti $\forall (u, v) \in \Omega$

$$Area(\Sigma) = \iint_{\Omega} \|\varsigma'_u(u, v) \times \varsigma'_v(u, v)\|\, du\, dv$$

Integrali di superficie
Σ superficie regolare parametrizzata dalla funzione $\varsigma: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$. $f(x, y, z)$ definita su Σ, allora

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\varsigma = \iint_{\Omega} f(x, y, z) \cdot \|\varsigma'_u(u, v) \times \varsigma'_v(u, v)\|\, du\, dv$$

Campo vettoriale
$\vec{F}: \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\big)$

Campo gravitazionale
$\vec{F}: \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto k \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\right)$

Integrali di linea di 2^ specie
$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big)$ curva regolare con $\gamma(I) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto connesso per archi.
$\vec{F} \in C^1(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale. Allora:

$$\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_a^b \big\langle \vec{F}\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle\, dt$$

Campo conservativo
$\vec{F} \in C^1(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}^n$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto connesso per archi, è un campo conservativo se esiste la funzione $U \in C^2(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}$ detto “potenziale di $\vec{F}$” tale che

$$\nabla U(x_1, \dots, x_n) = \vec{F}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{pmatrix} U'_{x_1} \\ \cdots \\ U'_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdots \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} U'_{x_1} = F_1 \\ \cdots \\ U'_{x_n} = F_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = \int F_1 + C_1(x_2) + \cdots + C_{n-1}(x_n) \\ \cdots \\ U = \int F_n + D_1(x_1) + \cdots + D_{n-1}(x_{x-1}) \end{cases}$$

A questo punto bisogna impostare tutte le funzioni $C_i, \dots, D_i$ affinché tutti le primitive risultino essere uguali. Quindi, si ottiene U usando appunto tutte le funzioni scelte.

Condizione necessaria (uguaglianza delle derivate incrociate)
$\vec{F} \in C^1(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}^n$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto connesso per archi.
Se $\vec{F}$ è conservativo allora $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \to (F_i)'_{x_j} = (F_j)'_{x_i}$

Condizione sufficiente
$\vec{F} \in C^1(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega = U_r(P), P \in \mathbb{R}^n, r > 0$
Se la condizione di uguaglianza delle derivate incociate è verificata allora il campo è conservativo

Teorema
$\vec{F} \in C^1(\Omega): \Omega \to \mathbb{R}^n$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto connesso per archi.
$\gamma: [a, b] \to \Omega$ curva regolare
Se $\vec{F}$ è conservativo allora:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Campo irrotazionale
$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Il rotore di $\vec{F}$ è:

$$rot(\vec{F}) = det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Se $rot(\vec{F}) = \vec{0}$ allora diciamo che $\vec{F}$ è irrotazionale (ovvero l'uguaglianza delle derivate incrociate è verificata su $\mathbb{R}^3$)