

# Fisica II

## Elettrostatica

### Carica

- $q$  [ $C = A \cdot s$ ], misurata in Coulomb
- proprietà quantizzabile intrinseca della materia a livello atomico
- positiva (+) o negativa (-)
- ottenuta mediante:
  - **strofinio**: migrazione di elettroni da un corpo all'altro, uno diventa carico negativamente, l'altro positivamente
  - **induzione**: un corpo carico positivamente, quindi con meno elettroni, avvicinandosi a un corpo neutro, sposta i suoi elettroni nella zona del corpo vicina ad esso, rendendola negativa
  - **contatto**: gli elettroni fisicamente si spostano da un corpo all'altro, caricandolo di conseguenza con la stessa carica di partenza dell'oggetto toccante
- la quantità di carica in un sistema si conserva sempre:  $Q_i = Q_f$

### Legge di Coulomb

la forza che attira cariche opposte o repelle cariche uguali  $q_1, q_2$  distanti  $r$  tra loro

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{1 \rightarrow 2}^2} \vec{U}_{1 \rightarrow 2} \quad [N]$$

### Dove

- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \quad \left[ \frac{Nm^2}{C^2} \right]$
- $\epsilon_0$ : permittività del vuoto o costante dielettrica nel vuoto; il campo elettrico dipende dal mezzo

### Campo elettrico

Se con la legge di Coulomb usiamo come punto di riferimento una delle due cariche, chiamandola  $Q$ , otteniamo una formula che descrive il campo elettrico vettoriale generato dalla carica  $Q$ , ovvero:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r \right) \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \Rightarrow$$

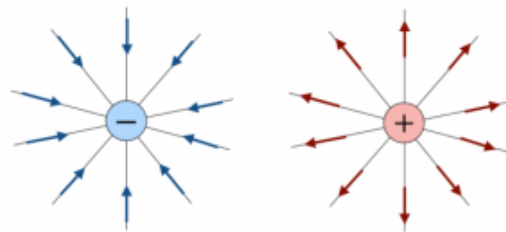
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r \quad \left[ \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \right]$$

“Quanta forza per unità di carica viene applicata da  $Q$  su una carica di prova”

Così facendo, ci concentriamo non più sull'interazione tra due cariche, ma sugli effetti di un campo su una carica di prova posta per misurare i suddetti effetti; il campo è dunque una proprietà dello spazio:

$Q$  genera un campo  $\vec{E}(\vec{r})$  che applica una forza  $\vec{F}(\vec{r})$  sulla carica  $q$

Quando la carica  $Q$  è positiva il campo ha tutti i vettori che escono dall'origine, quando invece è negativa i vettori puntano verso l'origine: questi vettori si rappresentano tramite le "linee di campo".



## Energia elettrostatica del campo elettrico

"Il lavoro compiuto dalla  $\vec{F}_{el}$  per spostare una carica da A a B"

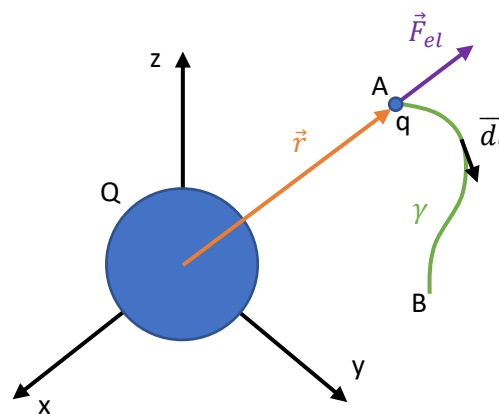
OPPURE

"Il lavoro esterno che mi serve per spostare una carica da B a A"

$$L_{AB} = -\Delta U_{el} = U_A - U_B$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_A^B$$

$$\boxed{U(\vec{r}) - U(\infty) = \int_r^\infty \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} [J]}$$



"Il lavoro compiuto dalla  $\vec{F}_{el}$  per spostare una carica da  $r$  a  $\infty$ "

Il lavoro è positivo nel caso in cui le cariche fossero uguali, perché devo compiere un lavoro affinché la carica di prova non venga spinta via oltre il punto B; il lavoro è invece negativo se le cariche sono di segno opposto allora la carica di prova è attratta verso la sorgente del campo e devo trattenerla nel punto B.

La forza elettrostatica è conservativa, quindi il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dal punto iniziale e finale; nel caso in cui essi coincidano, il lavoro risulta essere nullo.

## Potenziale elettrostatico (tensione)

"Il lavoro esterno per unità di carica serve per portare una carica da A a B"

C'è una forte analogia con il concetto di campo, infatti il passaggio è analogo: prima si parlava di forza vettoriale elettrostatica e poi si è introdotto il campo vettoriale elettrico, ora si parla di energia elettrostatica e si introduce il campo vettoriale del potenziale elettrostatico.

$$\boxed{\Delta V_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta U_{AB}}{q} = \frac{-L_{AB}}{q} = - \int_A^B \frac{\vec{F}_{el}}{q} d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_A \left[ V = \frac{J}{C} \right]}$$

$$\boxed{V(r) - V(\infty) = - \int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} [V]}$$

"Il lavoro esterno per unità di carica serve per portare una carica da  $\infty$  a  $r$ "

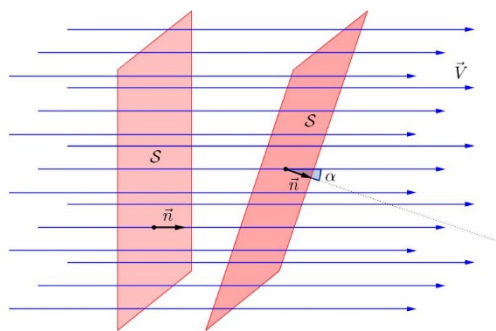
$\Delta V_{AB} = 0$  se  $\vec{E} \perp d\vec{l}$ , quindi su tutta una superficie sferica di un dato raggio intorno alla sorgente del campo la differenza di potenziale è nulla e la forza elettrostatica rimane invariata: una superficie di questo tipo è detta **equipotenziale**.

## Flusso di un campo

"è la proprietà che ha il campo di attraversare una superficie"

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \boxed{\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} [Vm]}$$

- Flusso entrante: verso opposto alla normale della superficie, segno negativo
- Flusso uscente: verso concorde alla normale della superficie, segno positivo



## Teorema di Gauss

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint_{S \text{ chiusa}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

$$\begin{cases} \text{sup. sferica} = 4\pi r^2 \\ \text{sup. lat. cilindro} = 2\pi rh \end{cases}$$

## Distribuzioni possibili delle diverse simmetrie

- Sferica: volumetrica  $\rho = \frac{Q}{vol} \left[ \frac{C}{m^3} \right]$ , superficiale  $\sigma = \frac{Q}{sup} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$
- Cilindrica (rotazione): volumetrica  $\rho \left[ \frac{C}{m^3} \right]$ , superficiale (laterale)  $\sigma \left[ \frac{C}{m^2} \right]$ , lineare (filo)  $\lambda = \frac{Q}{lung} \left[ \frac{C}{m} \right]$
- Assiale (piano): superficiale  $\sigma \left[ \frac{C}{m^2} \right]$

## Carica su una superficie

Distribuzione superficiale sferica (densità superficiale):  $\sigma = \frac{Q}{sup} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$

In una distribuzione sferica, usando il teorema di Gauss otteniamo:

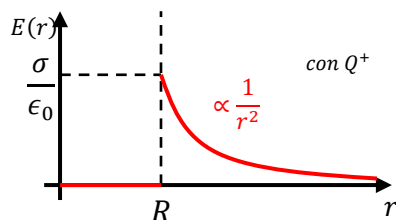
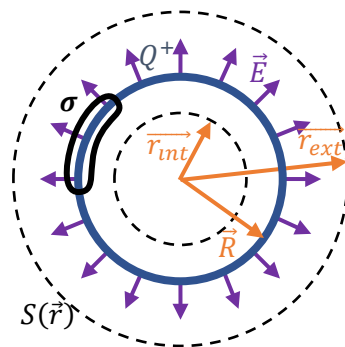
$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{S(\vec{r})} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \oint_{S(\vec{r})} d\vec{S} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  è stato portato fuori dall'integrale poiché costante su tutta la superficie

equipotenziale  $S(\vec{r})$ ; ricordiamo che con  $r = R \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{sup} \Rightarrow Q_{int} = \sigma 4\pi r^2$  e che

$r < R \Rightarrow Q_{int} = 0$ . Da queste considerazioni si ottiene:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} & r = R \\ 0 & r < R \end{cases}$$



## ESEMPIO RIASSUNTIVO

$$Q^- = -1,5 \cdot 10^{-8} C$$

$$e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$R = 0,5 cm = 5 \cdot 10^{-3} m$$

$$d = 2 cm = 2 \cdot 10^{-2} m$$

1. Calcolare  $\vec{E}(\vec{r})$  ovunque (modulo, direzione e verso)

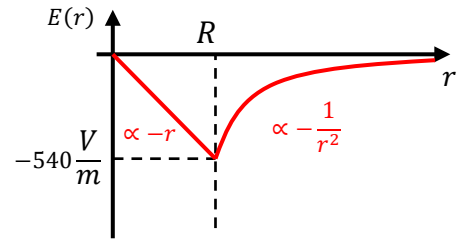
Calcoliamo la densità volumetrica della carica sferica:

$$\rho = \frac{Q}{vol} \Rightarrow \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = -3 \cdot 10^{-2} \frac{C}{m^3}$$

Modulo (usando il teorema di Gauss):

$$\oint_{S \text{ chiusa}} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot \oint_{S(r)} dS = \frac{Q_{int} a S(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int} a S(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int} a S(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow -\frac{100}{r^2} \frac{V}{m} & r > R \\ \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow -540 \frac{V}{m} & r = R \\ \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho^- \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \frac{\rho^-}{3\epsilon_0} r \frac{V}{m} & r < R \end{cases}$$

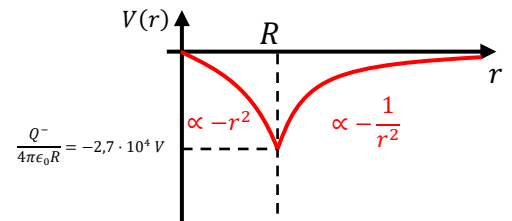


Direzione: radiale (è una simmetria sferica)

Verso: entrante (la carica è negativa)

2. Graficare  $V(r)$ :

$$\begin{aligned} V(r \geq R) &= - \int_{\infty}^{r \geq R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^r \\ &= \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r} V \\ V(r < R) &= - \int_{\infty}^{r < R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \left( \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) \\ &= V(R) - \int_R^r \frac{\rho^-}{3\epsilon_0} r \cdot d\vec{r} = V(R) - \frac{\rho^-}{6\epsilon_0} r^2 \Big|_R^r \\ &= \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 R} - \left( \frac{\rho^-}{6\epsilon_0} R^2 - \frac{\rho^-}{6\epsilon_0} r^2 \right) V \end{aligned}$$



Solo la parte in **giallo** è quella variabile in base al raggio, il resto è costante

3. Considerazioni sulla carica  $e^-$ :

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{d}) = e^- \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 6 \cdot 10^{-14} N$$

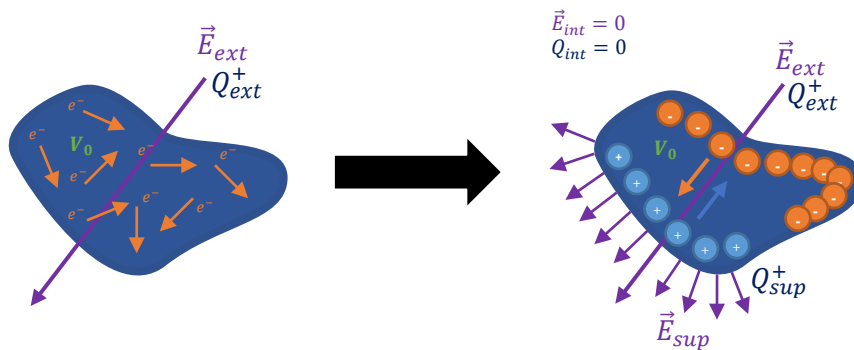
L'elettrone si allontana verso l'infinito, la forza diminuirà in proporzione a  $1/r^2$  e all'infinito si fermerà

$$L_{campo}(d \rightarrow \infty) = -q\Delta V \Rightarrow -e^- \Delta V = -e^- (V(\infty) - V(d)) = e^- \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 d} = 3 \cdot 10^{-12} N$$

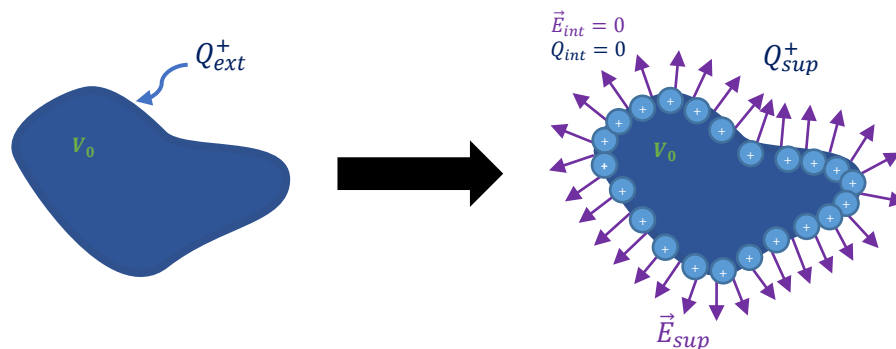
## Elettrostatica nei conduttori

Un corpo conduttore è formato da elementi chimici i cui atomi possiedono elettroni nella fascia orbitale più esterna più inclini a spostarsi da un atomo all'altro, causando quella che viene chiamata "agitazione termica" del corpo. Questo significa che i suddetti elettroni (detti "liberi") sono molto soggetti a uno spostamento se viene introdotta una carica nelle loro vicinanze, in particolare:

- **Induzione:** un campo elettrico attraversa il corpo. Gli elettroni liberi sono in moto caotico all'interno del corpo a causa dell'agitazione termica; quando il campo attraversa il corpo, esso addensa sul lato dal quale arriva tutte le cariche di segno opposto e dall'altro lato tutte le cariche concordi in  $10^{-9}$  secondi, creando un campo superficiale sul lato concorde.



- **Contatto:** una carica viene posta sul corpo. Essa si dispone in  $10^{-9}$  secondi sulla superficie in modo uniforme, equilibrando la quantità di carica.



In entrambi i casi, un conduttore è in equilibrio quando:

1.  $E_{int} = 0$
2.  $V_{conduttore} = V_0 = cost$  (perché dalla 1 si ricava che  $\Delta V = 0$ )
3.  $Q_{int} = 0$  (perché dalla 1 si ricava che  $\Phi(\vec{E}) = 0$ )
4.  $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{U}_n$  (teorema di Coulomb, il campo è ortogonale alla superficie)

## Pressione elettrostatica

La pressione elettrostatica è l'effetto della forza elettrostatica di Coulomb quando esercitata, all'interno di un dielettrico, su una superficie:

$$\vec{p} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{U}_n \text{ [Pa]}$$

## Densità superficiale non omogenea

La distribuzione delle cariche su una superficie è proporzionale al raggio di curvatura dell'oggetto, cioè

$$\sigma \propto \frac{1}{R}$$

per questo i parafulmini non sono a palla ma a spillo.

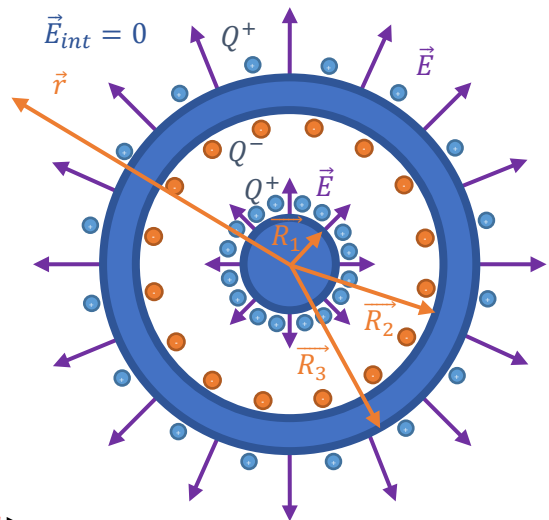
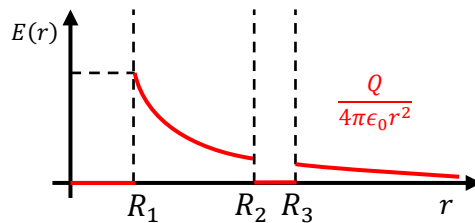
## Condensatori

### Simmetria sferica

La carica all'interno della cavità viene indotta nella superficie interna dell'anello, sulla quale si troverà carica negativa; sulla superficie esterna, dato che le cariche si sono spostate, si troverà una carica positiva identica a quella interna alla cavità.

Calcoliamo il campo, che varia in base alla superficie e viene calcolato quindi con la formula  $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{U}_n$

$$\begin{cases} \sigma_1^+ = \frac{Q^+}{4\pi R_1^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \\ \sigma_2^- = \frac{Q^-}{4\pi R_2^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \\ \sigma_3^+ = \frac{Q^+}{4\pi R_3^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \\ \sigma_3^+ < \sigma_2^- < \sigma_1^+ \end{cases}$$



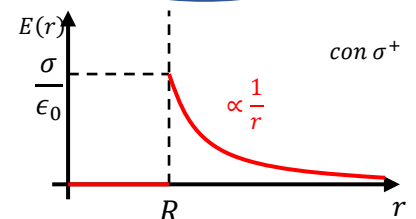
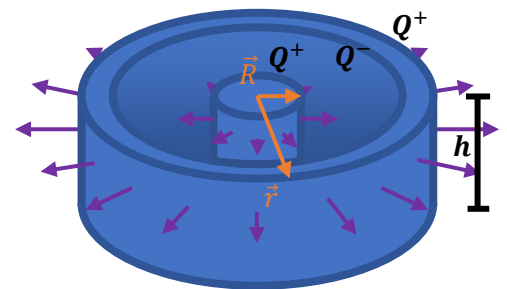
### Simmetria cilindrica

Utilizzo il teorema di Gauss per calcolare il campo, ho bisogno quindi di una superficie sulla quale il campo sia costante (sup. equipotenziale), così da poterlo tirare fuori dall'integrale, e poi utilizzo la densità:

$$r \geq R: \Phi_{laterale} = \oint_{sup.lat.} E(r) \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\sigma \cdot 2\pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}}$$

$$r < R: Q_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{E(r < R) = 0}$$



Variante: filo ( $R \rightarrow 0$ )

In questo caso il raggio del cilindro interno è infinitesimo e considerato pari a 0, quindi la densità non è più superficiale ma lineare:

$$\Phi_{laterale} = \oint_{sup.lat.} E(r) \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r \geq R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

## Simmetria piana (piano infinito)

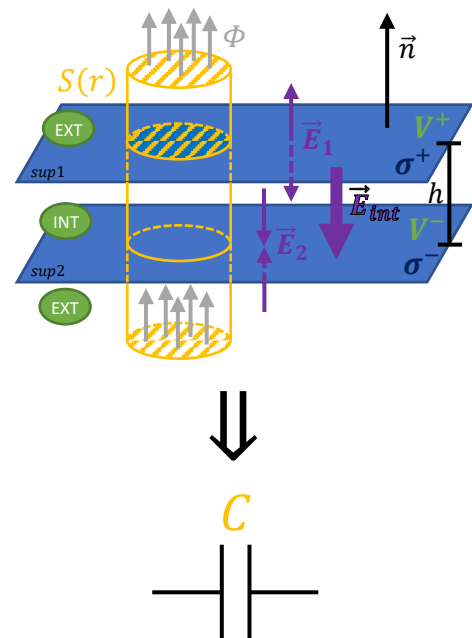
Anche qui usiamo il teorema di Gauss e come superficie usiamo un cilindro, ma in questo caso il flusso attraversa le basi; otteniamo un campo costante:

$$\begin{aligned}\Phi_{basi} &= \oint_{sup.lat.} E(r) \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2(4\pi r^2) \\ &= \frac{\sigma \cdot (4\pi r^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{sup} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}\end{aligned}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

$$\Delta V = V^+ - V^- = - \int_{x_0=0}^{x^+=h} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$$

La direzione del campo della superficie è la stessa della normale se la densità di carica è positiva, altrimenti è opposta.



## Capacità elettrostatica

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{|\Delta V|} \left[ F = \frac{C}{V} \right] \text{ Farad}$$

Vediamo le cariche dei diversi tipi di condensatori visti prima:

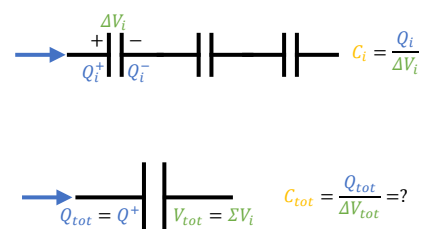
$$\begin{aligned}C_{cond.sfera} &= \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{V(R_1) - V(R_2)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{cond.cilindro} &= \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{V(R_{int}) - V(R_{ext})} = \frac{\sigma 2\pi R h}{\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R_{ext}}{R_{int}}} = 2\pi\epsilon_0 h \ln \frac{R_{ext}}{R_{int}} \\ C_{cond.piano} &= \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{V^+ - V^-} = \frac{\sigma \Sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}\end{aligned}$$

Per la capacità del piano abbiamo bisogno di conoscere la distanza dal piano all'altezza di prova ( $h = z - z_0$ ) e inoltre la superficie  $\Sigma$ , poiché si tratta di un piano infinito ma dobbiamo limitarlo altrimenti non riusciremmo a calcolare la carica  $Q$ .

## Collegamento condensatori IN SERIE

Se si collegano N condensatori in serie (uno dopo l'altro) si può calcolare la capacità totale semplificando il circuito come fosse un unico condensatore totale:

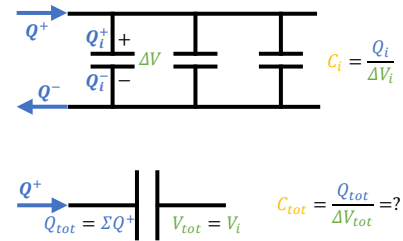
$$\Delta V = \sum \Delta V_i = \sum \frac{Q_i}{C_i} = Q \sum \frac{1}{C_i} \Rightarrow \frac{\Delta V}{Q} = \sum \frac{1}{C_i} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{tot}} = \sum \frac{1}{C_i}}$$



## Collegamento condensatori IN PARALLELO

Differentemente, se colleghiamo tutti i condensatori in parallelo a due sorgenti di carica, la capacità si ottiene svolgendo:

$$C_{tot} = \frac{Q_{tot}}{\Delta V_{tot}} = \frac{\sum Q_i}{\Delta V} = \sum \frac{Q_i}{\Delta V_i} = \sum C_i \Rightarrow \boxed{C_{tot} = \sum C_i}$$

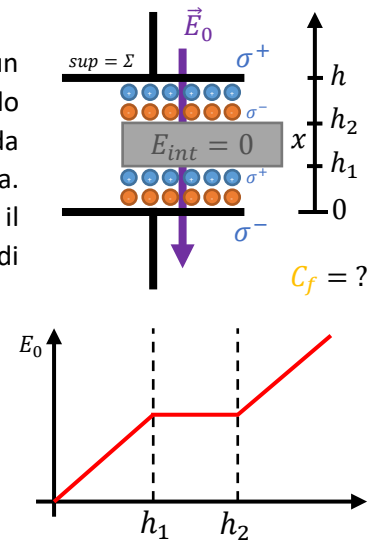


## Condensatore attraversato da un conduttore

Quando un corpo conduttore viene messo tra le armature di un condensatore esso agisce come fosse un'altra coppia di armature (creando quindi due condensatori in serie), caricandosi del segno di carica opposta da un lato e concorde dall'altro, continuando il campo con la seconda armatura. Così facendo, la capacità aumenta, poiché il campo attraversando il conduttore, non deve spostarsi nel vuoto, quindi evita letteralmente di percorrere lo spazio pari allo spessore  $x$  del conduttore:

Carica del condensatore vuoto:  $\boxed{C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}}$

$$\frac{1}{C_f} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h_1}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{h_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h_1 + h_2}{\epsilon_0 \Sigma} \Rightarrow \boxed{C_f = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h - x}}$$

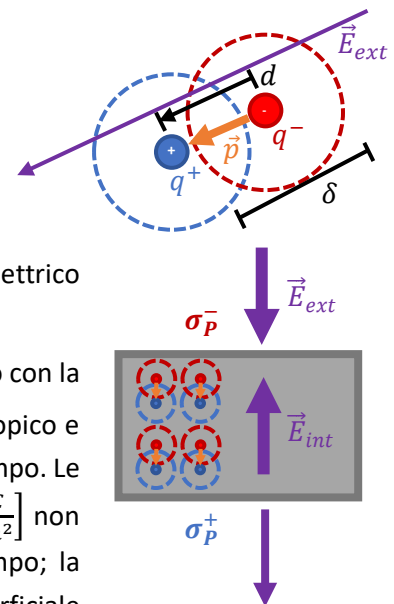


## Elettrostatica nei dielettrici

### Dipolo elettrico

Un corpo dielettrico è formato da atomi che non hanno elettroni liberi quindi, quando viene introdotta una carica o vengono attraversati da un campo, non hanno elettroni che si spostano liberamente nello spazio, ma i nuclei atomici e gli elettroni si separano spazialmente, formando quello che viene definito "dipolo elettrico", un micro-magnete, i cui due centri dei poli sono ad una distanza  $d$  uguale per tutti i dipoli di un dato corpo dielettrico omogeneo.

L'unità con cui vengono maneggiati i dipoli è il **momento di dipolo**, definito con la formula  $\boxed{\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} q\vec{d} \text{ [Cm]}}$ , che indica la direzione del polo a livello microscopico e che va a stabilizzarsi, dopo alcune oscillazioni, in direzione del flusso del campo. Le superfici del corpo ottengono una **densità carica di polarizzazione**  $\sigma_p \left[ \frac{C}{m^2} \right]$  non libera, che quindi si viene a formare solo quando viene indotto un campo; la polarizzazione interna del corpo è nulla  $\langle P \rangle = 0$ , ma la polarizzazione superficiale è pari a  $\boxed{\vec{P} = N\vec{p} \left[ \frac{C}{m^2} \right]}$ , dove  $N = \frac{\# \text{atomi}}{\text{vol. corpo}}$ , ovvero il momento di dipolo per unità di volume, una rappresentazione del dipolo del corpo a livello macroscopico.

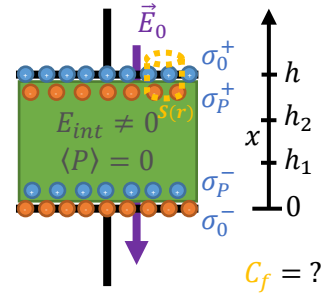




## Condensatore attraversato da un dielettrico

Quando un corpo dielettrico viene messo tra le armature di un condensatore esso si arrangia in dipoli con polarizzazione interna nulla e acquisisce densità superficiali positive e negative, generando quindi un campo interno. La tensione finale ne risulta essere diminuita, quindi la capacità aumenta, anche rispetto a un condensatore riempito con un conduttore:

$$V_f = \frac{V_0}{\epsilon_r} < V_0 \Rightarrow \boxed{C_f = \epsilon_r C_0} > C_0$$



dove  $\epsilon_r$  è la permittività dielettrica del materiale di cui è formato il corpo dielettrico omogeneo, che ora calcoleremo, insieme al campo interno, per il quale useremo il teorema di Gauss con una superficie cilindrica, che sta a cavallo tra la superficie del condensatore e quella del corpo:

$$\Phi_{base\ dentro\ il\ materiale} = \oint_{sup.base} E(r) \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot (4\pi r^2) = \frac{(\sigma_0 - \sigma_P) \cdot (4\pi r^2)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_{int} = \frac{\sigma_0 - \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{int} = E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0}}$$

L'ultimo strato del corpo è quello che possiede la superficie con densità di carica di polarizzazione  $\sigma_P$ . La superficie è calcolata dividendo il volume dell'ultimo strato per lo spessore di un polo del dipolo e quindi moltiplicando il tutto per il numero di atomi che compongono la superficie, quindi in una formula:

$$\sigma_P = \frac{q}{sup} = \frac{\#atomi}{vol.corpo} \delta q = N \delta q$$

Ora ricordandoci alcune formule precedenti si ottiene che:

$$\begin{cases} \vec{P} = N\vec{p} \\ \vec{p} = q\vec{d} \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = Nq\vec{d} \Rightarrow \sigma_P = N\delta q = \delta \frac{\vec{P}}{\vec{d}} = \vec{P} \frac{\delta}{\vec{d}} = \vec{P} \cdot \vec{n} \Rightarrow \boxed{\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}}$$

Riprendendo la formula del campo interno sopra, calcoliamo il valore di  $\epsilon_r$  e una formula equivalente per  $\vec{P}$ :

$$E_{int} = E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{int} + \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 \Rightarrow E_{int}(1 + \chi) = E_0 \Rightarrow \boxed{\epsilon_r = 1 + \chi}$$

$$\chi = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0 \vec{E}} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}}$$

dove  $\chi$  è la suscettività elettrica del materiale, una proprietà intrinseca del materiale che compone il corpo che non ha unità di misura (è quindi un numero puro, analogamente al coefficiente di attrito).

Modificando la formula sopra:

$$E_{int} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{int} + \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 E_{int} + P = \sigma_0 \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{int} + \vec{P}} = \sigma_0$$

Definisco  $\vec{D}$  il campo spostamento elettrico (non misurabile ma comodo per i calcoli) e ridefinisco il teorema di Gauss anche per i dielettrici:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int.lib.}$$

## Energia elettrostatica del dipolo

Dato che vale il principio di sovrapposizione, il campo totale del dipolo è espresso con la somma dei campi dei due poli, quindi:

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- \Rightarrow \vec{E}^{tot} = \frac{q^+}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r^+ + \frac{q^-}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r^-$$

Quando viene investito da un campo elettrico, il dipolo subisce due forze, una attrattiva verso il campo (subita dal polo opposto) e una repulsiva in direzione del campo (subita dal polo concorde). Essendo forze di stessa intensità e direzione ma di verso opposto, non c'è moto traslazionale, ma solo rotatorio, perché il sistema è una coppia di forze; il dipolo quindi sentirà un **momento torcente** pari a:

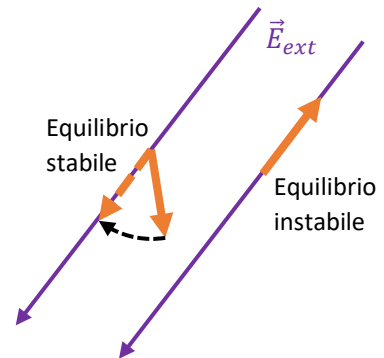
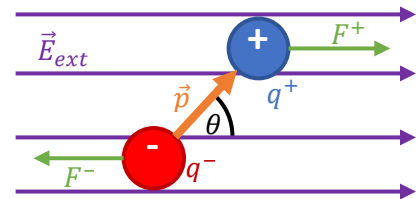
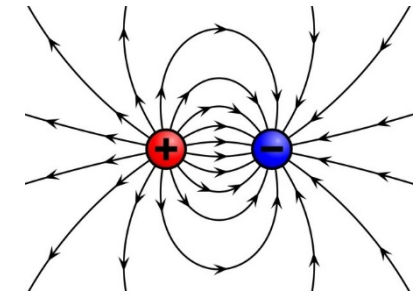
$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{d} \sin \theta q\vec{E} = \vec{p} \sin \theta \vec{E} \Rightarrow \boxed{\tau = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Soggetti al momento torcente dopo un po' di tempo dovuto all'agitazione termica che muove gli elettroni e quindi si oppone alla rotazione, tutti i dipoli del corpo ruotano in direzione del campo esterno entrante: il corpo subisce quindi una **polarizzazione per orientamento**.

Si può calcolare quindi l'energia elettrostatica del dipolo:

$$\begin{cases} dL_{ext} = +dU_{sistema} \\ dL_{ext} = F^{tot} \cdot ds \Rightarrow dL_{ext} = \tau \cdot d\theta = \vec{p} \sin \theta \vec{E} d\theta = dU \Rightarrow U = \int \vec{p} \sin \theta \vec{E} d\theta = -\vec{p} \vec{E} \cos \theta \\ dL_{ext} = \tau \cdot d\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E} [J]}$$

Il sistema vuole ottenere la quantità di energia minore, quindi porterà  $U = 0$  mediante  $\cos \theta = 0$ , quindi allineando tutti i dipoli con il momento in direzione concorde al campo, in **equilibrio stabile**. Dato che l'equazione sopra si risolve con  $\theta = 0^\circ \vee \theta = 180^\circ$ , è possibile ottenere dei dipoli in **equilibrio instabile**, ovvero con stessa direzione del campo ma verso opposto: se si applica un infinitesimo angolo di rotazione, il dipolo ruota fino ad andare in equilibrio stabile.

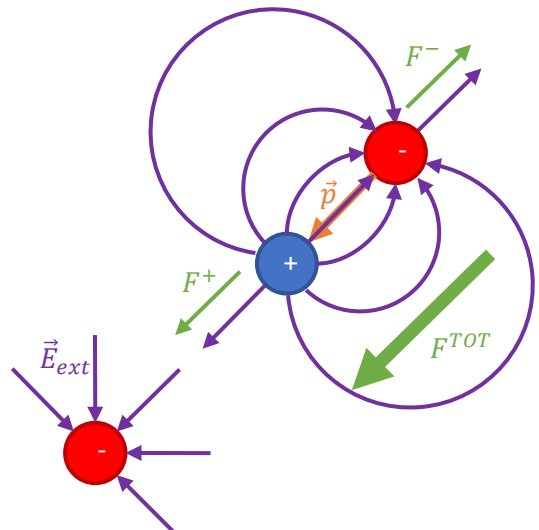


## Campo non uniforme

Se un dipolo è avvicinato a un campo esterno, il suo campo interno ne risente e il dipolo sentirà una forza attrattiva o repulsiva non indifferente verso la sorgente, risultando quindi in un modo traslatorio.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}}$$

Il dipolo sente una forza nella direzione del gradiente del campo esterno, quindi nella direzione del suo campo più intenso, nell'esempio, quello positivo.

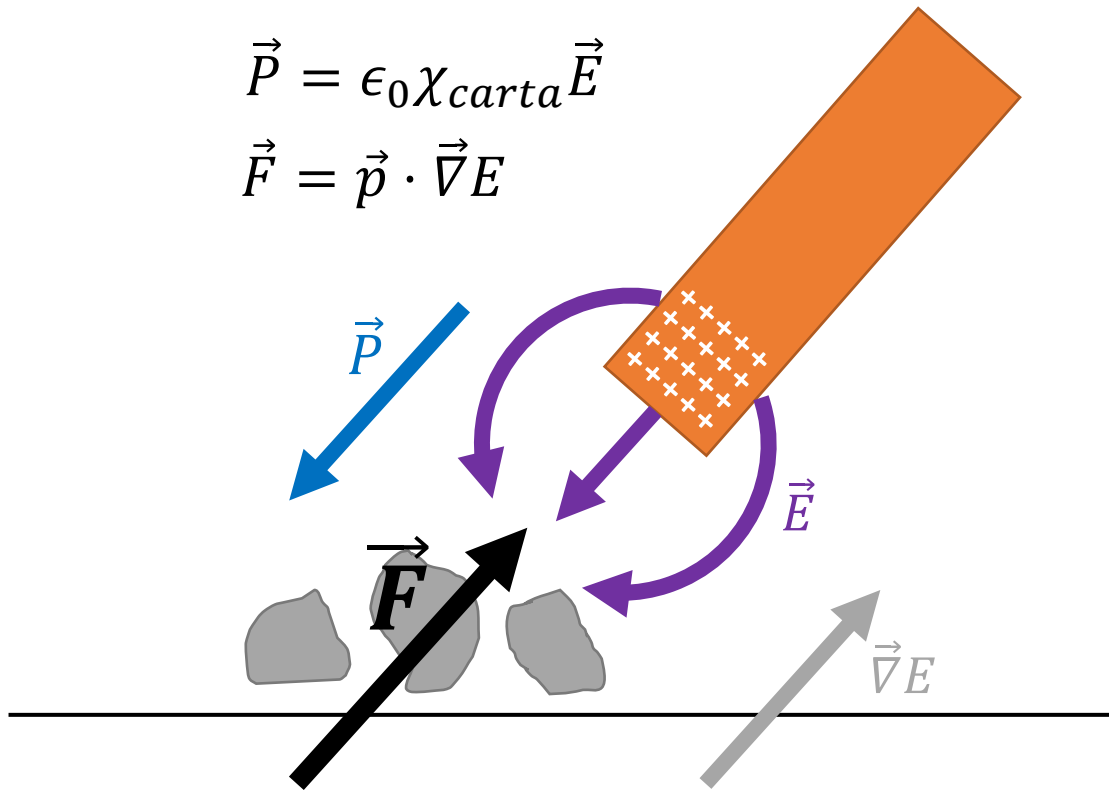


Inoltre si osserva anche una polarizzazione non uniforme nel caso in cui un corpo dielettrico venga avvicinato a un campo esterno, il quale polarizza maggiormente i dipoli più vicini rispetto a quelli più lontani, creando una densità di volume diversa da zero dovuta appunto alla polarizzazione:

$$\rho_{polariz.} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_{carta} \vec{E}$$

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E$$



## Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

### Nel vuoto

Descrivono l'elettromagnetismo in ambito LOCALE legato al tempo (elettrodinamica, interazione tra campo magnetico ed elettrico) e non (elettrostatica o magnetostatica).

Al momento ne vediamo due, quelle legate prettamente all'elettrostatica:

Dal teorema di Gauss  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$  usando il teorema della divergenza si ottiene la prima, che descrive che "le sorgenti del campo elettrico sono le cariche puntiformi isolate":

$$1. \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Dalla formula del campo conservativo  $\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  usando il teorema del rotore si ottiene la terza, che descrive che "esiste l'energia potenziale":

$$3. \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

### Nei dielettrici

Solo per dielettrici omogenei, dove  $D = \epsilon E$  con  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ :

$$1. \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib.}}$$

$$3. \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0}$$

### Teorema della divergenza

$$\oint_{sup} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$

Il flusso di un campo attraverso una superficie chiusa è pari all'intensità di volume racchiuso in quella superficie.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### Teorema del rotore

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{sup} \vec{\nabla} \times \vec{A} dS$$

La circuitazione lungo una curva chiusa di un campo è pari al flusso del rotore di quel campo su una superficie chiusa.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

## Energia elettrostatica nei sistemi

### Sistema di cariche puntiformi

L'energia potenziale di una carica puntiforme in una certa posizione è il lavoro necessario per portare quella carica da una posizione di riferimento nota a quella certa posizione. Per calcolare l'energia ipotizziamo di avere lo spazio vuoto e man mano aggiungiamo cariche. Per disporre la prima carica non si compie alcun lavoro, infatti essa sarà l'unica carica esistente,  $L_1 = 0$ ; per aggiungere la seconda carica bisogna compiere un lavoro contro la prima, pari a  $L_2 = q_2 \Delta V_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ ; per la terza carica bisogna compiere un lavoro contro la prima e la seconda, quindi  $L_3 = q_3 \Delta V_1 + q_3 \Delta V_2 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$ ; alla n-esima carica:

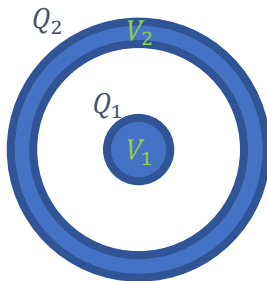
$$\begin{aligned} L_n &= q_n \Delta V_1 + q_n \Delta V_2 + \dots + q_n \Delta V_{n-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \\ \Rightarrow U_e &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho(r) V(r) dvol \end{aligned}$$

## Sistema di conduttori

Sfruttando la definizione di energia elettrostatica e ricordando che un conduttore ha carica  $Q = \int_S \sigma dS$  e potenziale costante, si ottiene:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

### Caso particolare: Condensatore



La carica delle armature è quella superficiale esterna, dalla formula della capacità del condensatore si ottiene  $C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C\Delta V$  e sappiamo che  $Q_1 = -Q_2$ , quindi:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 - Q_1 V_2) = \frac{Q_1}{2} (V_1 - V_2) \\ &= \frac{C\Delta V}{2} \Delta V = \frac{1}{2} C\Delta V^2 \Rightarrow \boxed{U_e = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q\Delta V} \end{aligned}$$

### Densità di energia

Il campo elettrico ha associato un potenziale ed una energia elettrica, il che significa che essa è una proprietà dello spazio e il suo valore è variabile in base alla posizione in cui ci si trova. In una unità di volume è presente una certa energia, come visto prima, quindi essa avrà una certa densità volumetrica ed in particolare, nel vuoto, essa può essere calcolata dalle formule del condensatore (o con la formula dell'energia elettrostatica usando le equazioni di Maxwell):

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ C &= \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \\ Q &= \sigma \Sigma \\ E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma \Sigma)^2}{\frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \Sigma}{\epsilon_0} h = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_0} \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (vol) \Rightarrow \boxed{u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \left[ \frac{J}{m^3} \right]}$$

# Elettrodinamica

## Conduzione elettrica

Quando due conduttori carichi con diversi potenziali vengono collegati da un cavo di spessore virtualmente nullo, il conduttore con il potenziale maggiore cede cariche all'altro fino a quando, col passare del tempo, la differenza di potenziale non diventa pari a 0. Le cariche, spostandosi, generano un campo elettrico nel cavo, le cui linee di campo partono dal conduttore che cede cariche e vanno verso l'altro.

Per riportare i potenziali allo stato iniziale è necessario un generatore, ovvero un dispositivo che utilizza un tipo di energia NON elettrica per spostare le cariche usando la **FORZA ELETTROMOTRICE** (f.e.m., o **tensione**, o **d.d.p.**) contro la forza di Coulomb.

$$\xi = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} \quad [V]$$

Così facendo, definiamo operativamente l'**intensità di corrente** come:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad [A]$$

ovvero come il passaggio di una quantità infinitesimale di carica in un certo intervallo infinitesimo di tempo attraverso una di cavo sezione S.

Ridefiniamo in modo analitico l'intensità di corrente come sommatoria della densità di corrente su tutte le infinitesime porzioni di superficie che compongono S:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{S} \quad [A]$$

dove  $\vec{j}$  è il campo vettoriale della **densità di corrente** definito come la quantità di carica in un certo volume  $nq$  (ottenuto moltiplicando la carica unitaria  $q$  per il numero di portatori di carica per unità di volume  $n$ ) mossa alla velocità di deriva  $\vec{v}_d$ , cioè la velocità media di una particella carica:

$$\vec{j} = nq\vec{v}_d \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right]$$

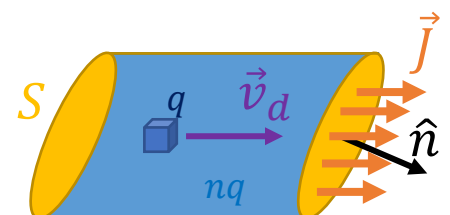
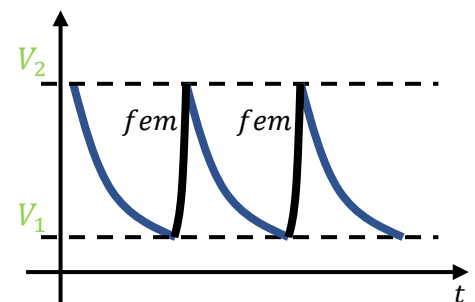
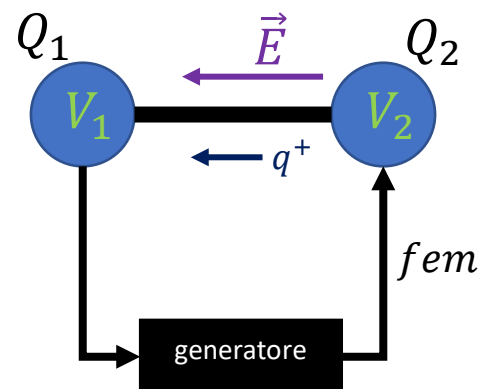
## Resistenza

Da queste formule, usando la definizione di impulso possiamo arrivare alla definizione di **conducibilità elettrica**  $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$  e **resistività elettrica**  $\rho = \frac{1}{\sigma} \quad [\Omega m]$ , proprietà dipendenti dal materiale, e alla prima legge di Ohm a livello locale:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt \Rightarrow m(\vec{v} - \vec{v}_0) = q\vec{E} \cdot \tau \Rightarrow \Delta \vec{v} = \frac{q\vec{E}\tau}{m} = \langle \vec{v}_d \rangle \Rightarrow \vec{j} = \left( \frac{nq^2\tau}{m} \right) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \rho \vec{j}}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \xrightarrow{\text{tempo}} 0$$

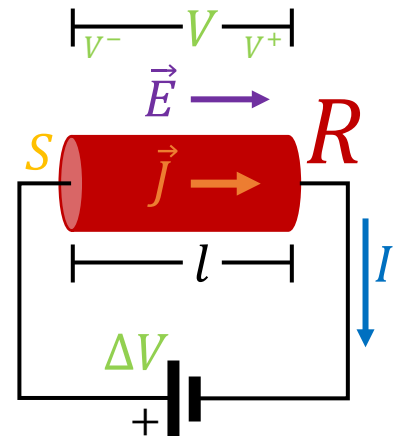


e alla **1ª legge di Ohm** a livello globale in caso di materiali omogenei ohmici:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= \int E \cdot dl \Rightarrow El \\ \vec{E} &= \rho \vec{J} \\ I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow JS \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V = El = \rho J l = \left( \rho \frac{l}{S} \right) I \Rightarrow \boxed{\Delta V = R \cdot I}$$

e alla **2ª legge di Ohm**, che descrive il concetto di resistenza:

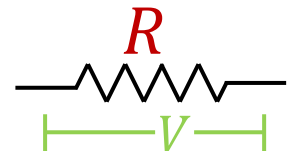
$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S} \left[ \Omega = \frac{V}{A} \right]}$$



Calcoliamo il lavoro compiuto dai vari componenti, ricordando che

$$dL_{ext} = q\Delta V \text{ e che } P = \frac{dL}{dt}:$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dq\Delta V}{dt} = \Delta V \cdot I \Rightarrow \begin{cases} \boxed{P_{dissipata} = \xi \cdot I} \\ \text{dal gener.} \\ \boxed{L_{compiuto} = \xi \cdot I \cdot \Delta t} \\ \text{dal gener.} \\ \boxed{P_{dissipata} = V \cdot I = R^2 \cdot I} \\ \text{dalla resist.} \end{cases} \quad (3^a \text{ legge di Ohm})$$



Notiamo che nella resistenza c'è potenza e che si alza la temperatura: questo è dovuto all'**effetto Joule**, che permette alla resistenza di dissipare potenza sotto forma di calore.

## Resistenze in serie e in parallelo

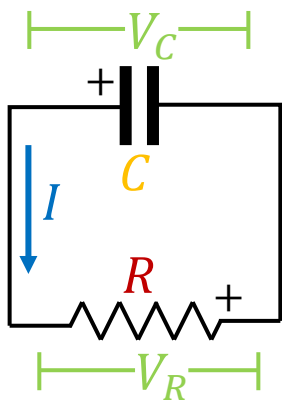
Quando un numero di resistenze vengono messe in parallelo o in serie possono essere raggruppate e viste come un'unica resistenza equivalente, il cui valore dipende dal caso ed è pari a:

$$\begin{aligned} \text{in serie} \quad R_{eq} &= \sum R_i \\ \text{in parallelo} \quad \frac{1}{R_{eq}} &= \sum \frac{1}{R_i} \end{aligned}$$

## Scarica del condensatore

Ricordiamo che il condensatore è un componente elettrico in grado di immagazzinare carica elettrica su una delle due armature e, tramite un campo elettrico interno, spostarla sull'altra armatura immagazzinandone altrettanta e continuando la trasmissione di carica.

Osservando ora il comportamento del condensatore in elettrodinamica (quindi al variare del tempo), notiamo che l'armatura impiega del tempo per raggiungere il livello di carica massimo (dato dalla capacità del condensatore stesso) e allo stesso modo impiega del tempo il campo elettrico interno per raggiungere il suo valore massimo e carica quindi l'altra armatura; il procedimento opposto è necessario per scaricare completamente il condensatore. Calcoliamo quindi la variazione di carica, potenziale e intensità di corrente:



Ponendo una resistenza, necessaria come carico del circuito (per assorbire la differenza di potenziale) e un condensatore nella stessa maglia di un circuito. Così facendo, la somma delle tensioni della maglia dovrà essere 0 (leggi di Kirchhoff).

Usando le formule del potenziale della resistenza, del condensatore e dell'intensità di corrente (uscente dal condensatore, segnata negativa; entrante nella resistenza, segnata positiva) otteniamo una EDO del 1° ordine a variabili separabili, che una volta risolta, descrive l'andamento nel tempo delle cariche nel condensatore:

$$\left. \begin{aligned} V_R(t) &= R \cdot I(t) \\ V_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ I(t) &= -\frac{dQ(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_R + V_C = 0 \Rightarrow R \left( +\frac{dQ(t)}{dt} \right) = -\frac{Q(t)}{C} \Rightarrow \frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0=Q(t_0)}^{Q(t)} \frac{dQ(t)}{Q(t)} = \int_{t_0=0}^t -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln Q(t) \Big|_{Q_0}^{Q(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{Q(t)}{Q_0} \right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Il valore  $\tau = R \cdot C$  [ $\Omega \cdot F = s$ ] indica la **costante di tempo o di decadimento** del fenomeno; riscriviamo la formula precedente:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

da questo risultato otteniamo il potenziale:

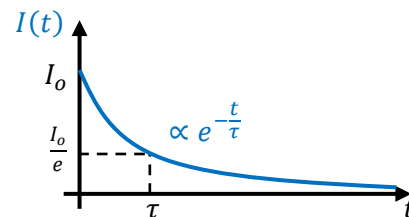
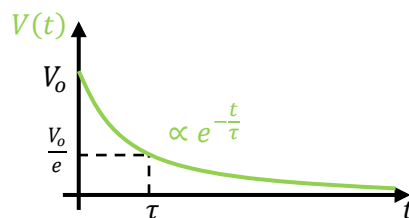
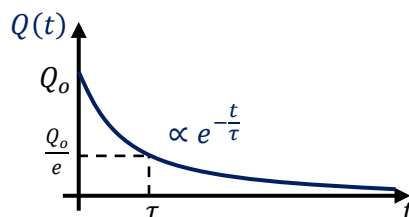
$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

e anche l'intensità di corrente:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d \left( Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau=RC}} \right)}{dt} = \frac{Q_0}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

I valori iniziali di carica, tensione e intensità di corrente prima della scarica del condensatore sono rispettivamente  $Q_0$ ,  $V_0$  e  $I_0$ .





## Magnetostatica

### Forza di Lorentz

Se osserviamo una carica in movimento notiamo che su di essa agisce una forza perpendicolare al vettore velocità della carica e proporzionale al suo modulo, oltre che al valore della carica stessa; questa forza prende il nome di **forza magnetica**  $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$  e unendola alla definizione della forza elettrica (legge di Coulomb) otteniamo la prima delle formule che descrivono le interazioni fondamentali, la **forza di Lorentz**:

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

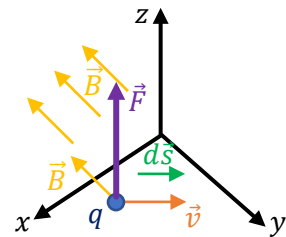
Notiamo che se il vettore velocità della particella e il **campo magnetico**  $\vec{B}$  sono paralleli, allora il prodotto vettoriale risulta essere nullo e  $\vec{F}_{mag} = 0$ : nel caso in cui la particella si muova quindi in direzione del campo magnetico, essa non risente della forza magnetica, poiché il campo magnetico non agisce su di essa.

Ci chiediamo ora se il campo magnetico compie lavoro. Dalla definizione di lavoro (forza compiuta in un certo spostamento) si ottiene:

$$L = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Ma lo spostamento  $d\vec{s}$  è parallelo alla velocità  $\vec{v}$  e perpendicolare alla forza di Lorentz, quindi il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento è certamente sempre nullo:

**il campo magnetico non compie ne genera lavoro**



Se ampliamo ora la visione del fenomeno a livello globale, cioè se sommiamo tutte le forze che agiscono su tutte gli  $N$  portatori di carica che scorrono in una sezione di cavo  $S$  di volume infinitesimo  $\vec{S} \cdot d\vec{l}$ , si ottiene, usando le formule di intensità  $I = \vec{j} \cdot \vec{S}$  e densità di corrente  $\vec{j} = nq\vec{v}_d$  locali, la **2ª formula di Laplace**:

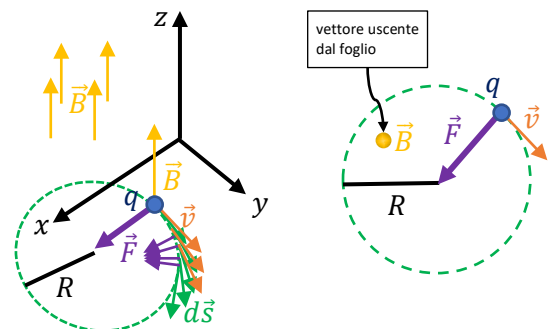
$$\sum_N \vec{F}_i = \sum_N q\vec{v}_d \times \vec{B} = Nq\vec{v}_d \times \vec{B} = (n\vec{S} d\vec{l}) q\vec{v}_d \times \vec{B} = \vec{S} d\vec{l} \vec{j} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}}$$

### Caso di studio: $\vec{B} \perp \vec{v}$

Nel caso in cui il campo magnetico si trovi perpendicolare alla velocità, la carica seguirebbe un moto circolare uniforme, le cui proprietà sono:

$$F = qvB = ma_c = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB} \text{ [m]}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v_T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m}{qB} \text{ [s]}}$$

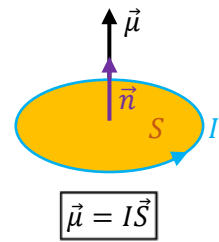


Da questa osservazione possiamo apprezzare come si capisca che il campo elettrico sia responsabile del movimento delle cariche mentre quello magnetico della messa in rotazione di esse.

## Dipolo magnetico

Cercando di creare un'analogia alla carica elettrica, si è provato a teorizzare il concetto di carica magnetica (monopolo magnetico) per descrivere a livello microscopico ciò che compone il campo magnetico, ma si è visto che ciò è impossibile a livello materiale (se si spezza un magnete NS a metà non si ottengono un magnete N ed uno S, ma due magneti NS) ma ipotizzabile a livello particellare (anche se l'esistenza di una particella di monopolo magnetico non è stata ancora provata, al CERN hanno provato ad isolare uno dei due poli di un dipolo, ma non ci sono riusciti). Scartata quindi l'ipotesi di monopolo, si è passato allo studio del **dipolo magnetico**, definito tramite una **spira di superficie infinitesima** attraversata da una corrente proporzionale alla superficie stessa, per mantenere costante il **momento magnetico di dipolo**  $\vec{\mu}$ .

dipolo magnetico

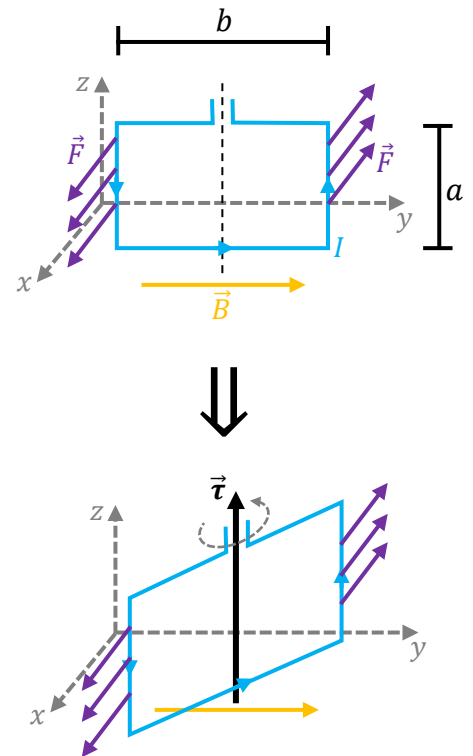


Dato che il dipolo magnetico è per costruzione un elemento che segue un moto circolare, per intuizione esso dovrà avere anche un momento e infatti con un esperimento si può effettivamente notare come esso sia presente. Un cavo piegato a forma di rettangolo nel quale scorre una corrente è messo parallelo a un campo magnetico il quale farà comparire la forza di Lorentz sulle cariche nelle sezioni verticali del cavo (perpendicolari al campo), la quale farà ruotare il cavo grazie alla coppia di forze appena creata ai capi del cavo. Ruotando, arriverà il momento nel quale le forze saranno allineate al cavo, ma questo continuerà a ruotare spinto dal momento d'inerzia accumulato finora, continuando a ruotare perpetuamente con un certo **momento meccanico**  $\vec{\tau}$ . Ricordando la 2ª legge di Laplace  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ , calcoliamo il momento:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{b} \times (I \vec{a} \vec{B}) = \vec{b} \times (I \vec{a} \vec{B}) = b \sin \theta I \vec{a} \vec{B} = I \vec{a} \vec{b} \times \vec{B} \\ &= I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}\end{aligned}$$

e con questo calcoliamo l'**energia meccanica del dipolo magnetico**:

$$\begin{aligned}U &= \int dL_{ext} = \int \tau d\theta = \int \mu \sin \theta B d\theta = -\mu \cos \theta B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &\Rightarrow \boxed{U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}\end{aligned}$$

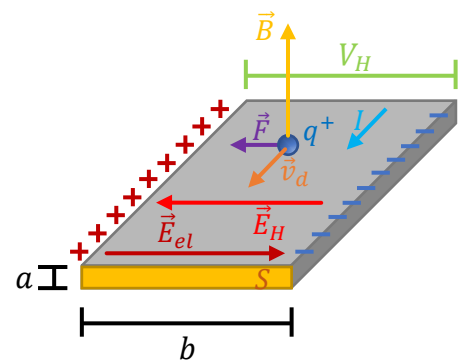


## Effetto Hall

Se su una superficie conduttrice perpendicolare a un campo magnetico scorre una corrente, ai lati si misura una differenza di potenziale di Hall  $V_H$  dovuta all'effetto Hall, positiva o negativa a seconda del materiale. Le particelle che scorrono sulla superficie vengono spostate a sinistra (indipendentemente dalla carica) a causa della forza di Lorentz, che agisce come fosse un campo elettrico, che prende il nome di campo di Hall:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = \vec{v} \times \vec{B}}$$

Le cariche, addensandosi sul lato, formano una densità di carica lineare e quindi un campo elettrico  $\vec{E}_{el}$ , che con l'addensarsi delle



$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{S}} = \frac{I}{\vec{a} \vec{b}} \quad \vec{J} = nq \vec{v}_d = nq \vec{v}$$

cariche man mano controbilancia il campo  $\vec{E}_H$  fino ad arrivare ad un punto di equilibrio, nel quale si sarà creata una differenza di potenziale  $V_H$  ai lati della superficie:

$$\left. \begin{array}{l} E_{el} = \frac{V_H}{b} \\ E_H = vB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_H}{b} = vB \Rightarrow \frac{V_H}{b} = \frac{IB}{abnq} \Rightarrow \boxed{V_H = \frac{IB}{(nq)a}}$$

Questo risultato è molto importante: noti intensità  $I$ , quantità di carica per volume  $nq$ , altezza del conduttore  $a$  e misurando la differenza di potenziale  $V_H$  è possibile calcolare il campo magnetico. Il componente in grado di effettuare questa procedura è detta **sonda di Hall**.

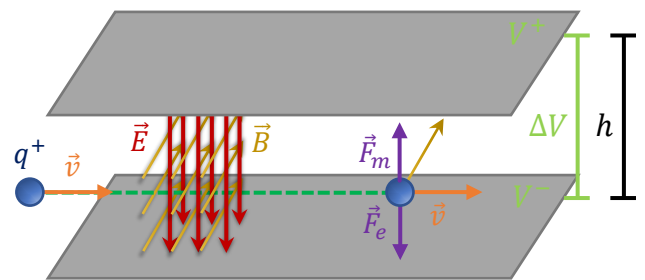
### Selettore di velocità

Una particella (in questo caso positiva, se volessimo usarne una negativa basterebbe cambiare il verso del campo magnetico) sparata da una velocità ignota  $\vec{v}$  da una sorgente viene fatta passare attraverso un condensatore in presenza di un campo magnetico: la particella risentirà della forza elettrica (verso il basso) da parte del campo elettrico e della forza magnetica (verso l'alto) da parte del campo magnetico.

Se impostiamo i campi in modo che  $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$ , possiamo ottenere la velocità della particella:

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

$$E = \frac{\Delta V}{h} \quad \vec{F}_e = -\vec{F}_m$$



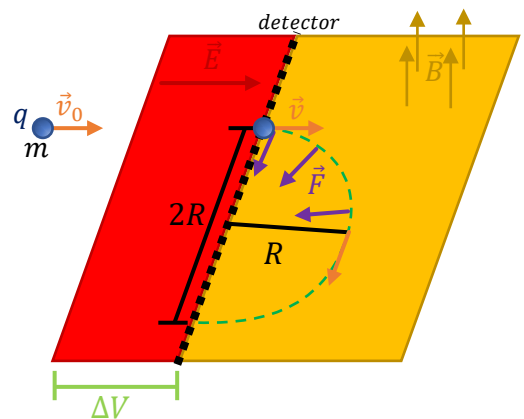
### Spettrometro di massa

Una particella viene sparata grazie a un campo elettrico antecedente un campo magnetico, separati da una fila di detector. Entrando nel campo magnetico, un detector registra la posizione di entrata della particella; il campo poi fa ruotare la particella, che si schianta contro un secondo detector ad una distanza dal primo pari al doppio del raggio di curvatura.

Dalla formula del lavoro possiamo affermare che particelle con uguale carica avranno velocità diverse in base alla loro massa (gli isotopi avranno una velocità diversa poiché di massa diversa).

Con la formula del raggio potremmo scoprire la massa della particella, ma abbiamo bisogno di conoscere anche la sua velocità, per questo prima dei detector inseriamo un selettore di velocità, che misura la velocità  $\vec{v}$  delle particelle. Ora che abbiamo tutti i dati necessari (la velocità  $\vec{v}$ , la carica  $q$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  da noi impostato che ha fatto ruotare la particella con un raggio di curvatura  $R$ ) possiamo calcolare la massa della particella:

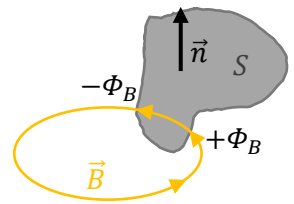
$$R = \frac{mv}{qB_{spet}} \Rightarrow m = \frac{RqB_{spet}}{v} = \frac{qB_{spet}B_{sele}}{E} R = \frac{qB_{spet}B_{sele}h_{sele}}{\Delta V_{sele}} R \Rightarrow \boxed{m = \frac{qB_{spet}B_{sele}h_{sele}}{\Delta V_{sele}} R}$$



$$L_{\vec{E}} = q\Delta V = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

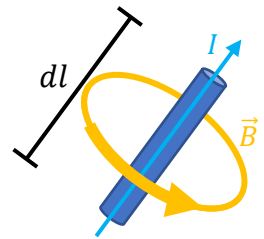
## Calcolo del campo magnetico

Come abbiamo visto, il monopollo magnetico non esiste, quindi nessun punto dell'universo può generare linee di campo, che quindi per forza di cose devono essere chiuse, solenoidali e generate da un dipolo. Il campo magnetico quindi è formato da dipoli magnetici che tracciano linee di campo chiuse, che quindi entrano ed escono in egual misura in qualunque superficie chiusa che attraversano: **il flusso magnetico totale nella superficie chiusa da una spira è sempre pari a 0** e si misura in **weber** [ $Wb = V \cdot s$ ]. Vista in termini locali, questa è la **2ª equazione di Maxwell nel vuoto**.



$$\Phi_B = \oint_{\text{chiusa}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Ma cosa genera il campo magnetico? Abbiamo visto che non esiste il monopollo magnetico, quindi il campo si trova in natura solo in dipoli magnetici, che sono spire infinitamente piccole nelle quali scorre una micro-corrente, quindi probabilmente il campo magnetico è generato dalla corrente.

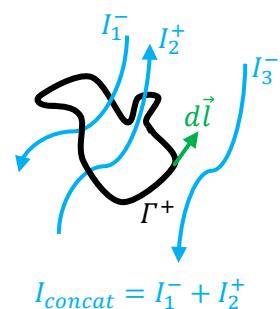


Con l'esperimento condotto da Ørsted, questa ipotesi diventa una formula formale: un cavo viene posto sopra un ago magnetico che segue il campo magnetico terrestre, poi viene fatta scorrere della corrente nel cavo e si nota che l'ago cambia direzione. Questo evento indica che la corrente in qualche modo crea un campo magnetico che interferisce e prevale su quello terrestre, facendo riallineare l'ago verso una nuova direzione. In particolare, si nota che il campo  $\vec{B}$  generato dal cavo è perpendicolare alla densità di corrente  $\vec{j}$  nel cavo, perpendicolare al raggio  $\vec{r}$  di distanza dal cavo, proporzionale a  $\frac{1}{r^2}$  e alla corrente  $I$  che scorre nel cavo: tutte queste informazioni prendono forma nella **1ª formula di Laplace**, nella quale compare anche la costante di **permeabilità magnetica nel vuoto**  $\mu_0$ :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{U}_r}{r^2} \quad [T]}$$

Il campo magnetico generato da una corrente la arrotola seguendo la regola della mano destra, SEMPRE.

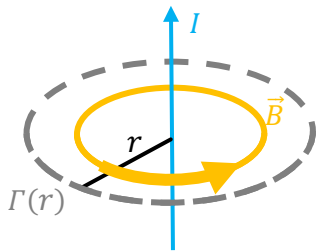
Ora, per il calcolo del campo magnetico, misurato in **tesla** [ $T = \frac{Wb}{m^2}$ ] (un'unità di misura molto grande, si preferisce usare il **gauss** [ $G = 10^{-4} T$ ]), abbiamo bisogno di una formula analoga a quella del teorema di Gauss, che ci permetta quindi di poter fare studi seguendo le linee di campo. Ricordiamo che le linee di campo del campo magnetico sono chiuse, quindi la cosa più ovvia da fare è l'integrale di linea su una circuitazione chiusa  $\Gamma$ , che concatena (racchiude) al suo interno le correnti  $I_{concat}$  che generano il campo: la formula prende il nome di **teorema di Ampere**.



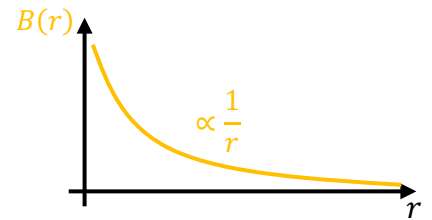
$$\boxed{\oint_{\text{chiusa}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concat}}$$

Come per il teorema di Gauss, osservando le simmetrie, si dovrà trovare una circuitazione tale che il campo rimanga costante in ogni punto del tragitto, così da poter tirare fuori il campo dall'integrale e quindi calcolare le correnti concatenate nella circuitazione.

### $\vec{B}$ in un filo

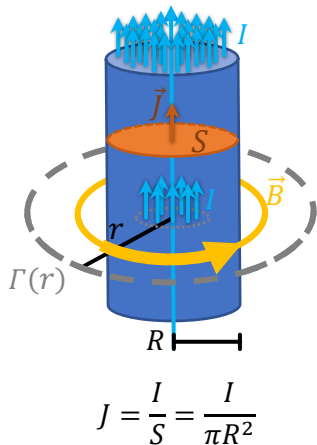


L'asse di simmetria è il vettore  $\vec{J}$  della corrente  $I$ , quindi useremo delle circuitazioni circolari con centro l'asse. Le correnti concatenate sono molto semplici da calcolare, in quanto l'unica corrente è  $I$  poiché sempre dentro  $\Gamma(r)$ .

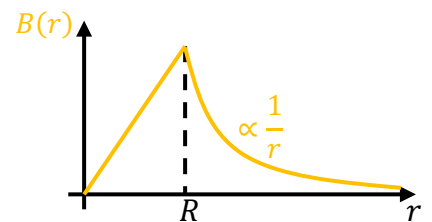


$$\oint_{\Gamma(r)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_{\Gamma(r)} d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

### $\vec{B}$ in un cavo conduttore

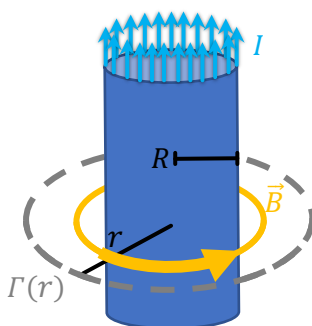


In un cavo nel quale  $I$  per ogni sezione è omogenea, l'asse di simmetria è ancora il cavo, ma ora distinguiamo due casi, con raggio interno o esterno, perché le correnti concatenate interne dipendono dalla sezione di cavo che prendiamo in considerazione, quindi avremo bisogno della densità di corrente.

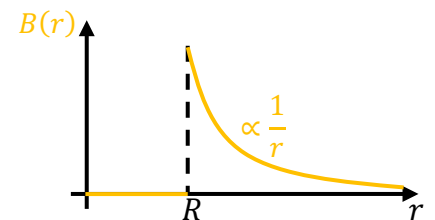


$$\left. \begin{array}{l} r > R: I_{concat} = I \\ r \leq R: I_{concat} = J(\pi r^2) = I \frac{r^2}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{concat}}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ B(r \leq R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \end{array}}$$

### $\vec{B}$ in un cavo conduttore in superficie

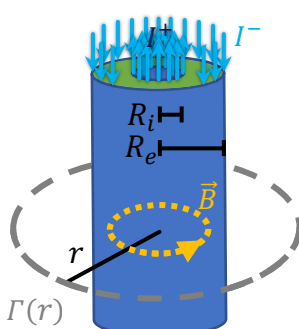


La corrente viene trasmessa solo sulla superficie esterna del cavo: le correnti concatenate quando il raggio della circuitazione è minore del raggio del cavo saranno pari a 0; quando invece il raggio sarà maggiore, saranno formate da tutta la corrente che scorre sulla superficie del cavo.

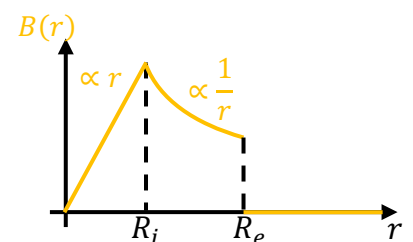


$$\left. \begin{array}{l} r > R: I_{concat} = 0 \\ r \leq R: I_{concat} = I \end{array} \right\} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{concat}}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ B(r \leq R) = 0 \end{array}}$$

### $\vec{B}$ in un cavo schermato

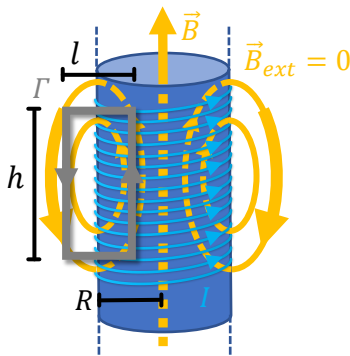


Un cavo schermato è formato da una superficie conduttrice esterna ed un cavo interno, separate da uno strato di materiale isolante, che fanno scorrere una quantità di corrente identica ma di verso opposto.



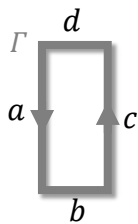
$$\left. \begin{array}{l} r > R_e: I_{concat} = I^+ + I^- = 0 \\ R_i \leq r \leq R_e: I_{concat} = I^+ = I \\ r < R_i: I_{concat} = J(\pi r^2) = I \frac{r^2}{R_i^2} \end{array} \right\} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{concat}}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B(r > R_e) = 0 \\ B(R_i \leq r \leq R_e) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ B(r < R_i) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_i^2} \end{array}}$$

## $\vec{B}$ in un solenoide lineare indefinito



Un solenoide è una bobina di forma cilindrica formata da una serie di spire realizzate con un unico filo conduttore. La corrente, scorrendo nelle spire, crea un campo magnetico che avvolge il filo in quella zona; tutti i mini campi magnetici si sommano e ne formano uno più grande, che all'interno presenta forme di campo lineari mentre all'esterno (lungo i lati) diventa via via sempre più debole. Ogni solenoide è costruito in un certo modo e in particolare ha una certa costante  $n = \frac{\text{numero di spire}}{\text{unità di lunghezza}}$  [ $m^{-1}$ ] che lo caratterizza e che risulta essere il fattore chiave del calcolo del campo magnetico.

La circuitazione questa volta non può essere circolare, in quanto l'asse di simmetria della corrente non esiste; in questo caso, si utilizza un rettangolo di altezza indefinita e di larghezza irrilevante poiché perpendicolare al campo, fatto che permette di eliminare gli integrali su quei lati, visto che il prodotto scalare risulta nullo.

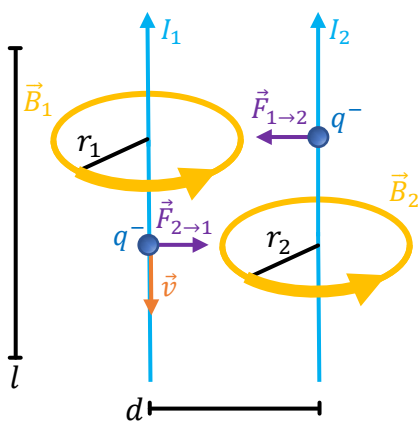


$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d \vec{B} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concat}}$$

La corrente concatenata nella lunghezza  $h$  del lato  $c$  è la corrente  $I$  moltiplicata per il numero di spire in quella lunghezza, cioè  $I_{\text{concat}} = Inh$ . Ora possiamo calcolare il campo, che risulta essere **costante in tutto il solenoide**:

$$\int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concat}} \Rightarrow Bh = \mu_0 Inh \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 In}$$

## Caso di studio: Legge di Laplace in due cavo paralleli



Se due cavi conduttori vengono messi paralleli tra loro e una corrente viene fatta scorrere al loro interno, essi verranno attratti uno verso l'altro, mossi dalla legge di Laplace:

in un cavo, il campo magnetico è  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

la legge di Laplace dice che  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  quindi

$$d\vec{F}_{B_1 \rightarrow I_2} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1(d) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

$$d\vec{F}_{B_2 \rightarrow I_1} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_2(d) = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi d}$$

Questa è anche la definizione dell'unità di misura ampere, la quale enuncia che 1 A è la corrente necessaria per creare una forza di 1 N.

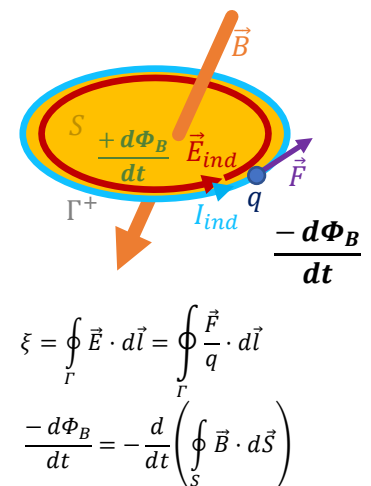
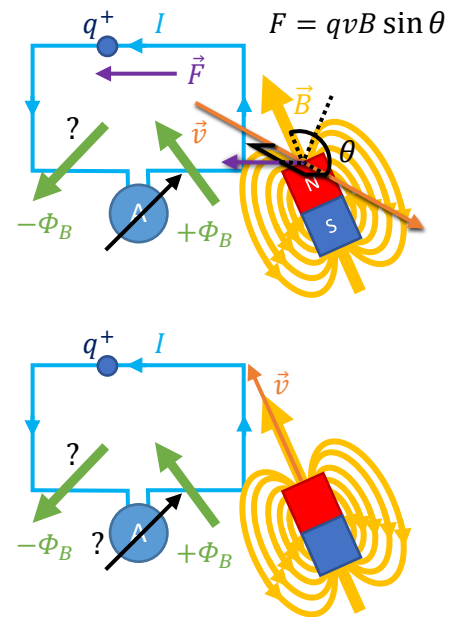
# Elettrodinamica

## Induzione elettromagnetica nel tempo

Se in tutti gli studi fatti finora aggiungiamo il tempo, le cose cambiano notevolmente e il campo magnetico ed elettrico non sono più separabili, ma visti come uno conseguente dell'altro e viceversa. Per introdurre l'argomento prendiamo in analisi l'esperimento di Faraday, il quale usò un circuito privo di corrente collegato ad un amperometro ed un magnete naturale per osservare un comportamento nuovo: quando muoveva il circuito verso il magnete, le particelle cariche nel circuito acquistavano una velocità e quindi risentivano della forza di Lorentz, scorrendo quindi nel circuito e creando una corrente, misurata con l'amperometro; quando invece muoveva il magnete verso il circuito, le particelle cariche non avevano velocità, quindi non c'era forza di Lorentz, ma l'amperometro indicava comunque una corrente. Inoltre, notiamo che con il movimento, del magnete o del circuito, si induce un flusso magnetico nella superficie del circuito; sappiamo che il flusso totale è pari a 0, quindi da qualche parte deve dissiparsi e in particolare nel secondo caso questo potrebbe essere un buon punto di partenza: formalizziamo la **legge del flusso di Faraday**:

$$\xi_{ind} = \frac{-d\Phi_B}{dt} [V]$$

Se scomponiamo la formula notiamo che essa è piena di significato: il flusso magnetico uscente  $-\Phi_B$  dalla superficie  $S$  (che esiste perché deve annullare il flusso entrante  $+\Phi_B$  e rendere il flusso totale pari a 0) induce una f.e.m.  $\xi_{ind}$  che spinge con una forza  $F$  le particelle  $q$  nel cavo  $\Gamma$ , ovvero con un campo elettrico  $\vec{E}_{ind}$ , che quindi prende la forma di una corrente indotta  $I_{ind}$  nel cavo. Il fatto che  $\xi_{ind}$  sia indotta dal flusso opposto  $-\Phi_B$  a quello generato dal campo magnetico è formalizzato nella **legge di Lenz**, che rappresenta l'applicazione del terzo principio della dinamica (di azione e reazione) all'elettrodinamica e si concretizza nel segno meno nella legge di Faraday.

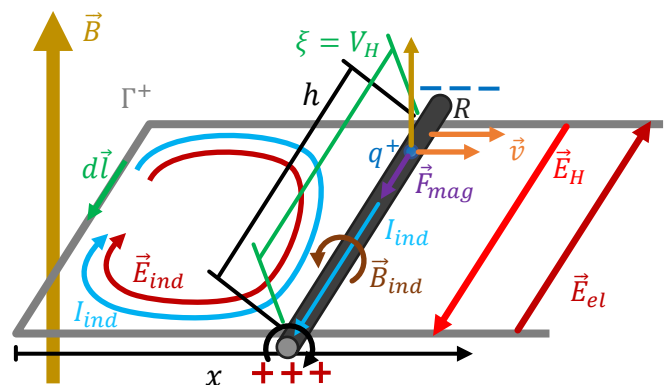


Esploriamo più in dettaglio i due fenomeni descritti sopra:

**Nel primo caso**, per muovere il circuito, posizioniamo una barretta conduttrice in rotolamento su di un circuito rettangolare scarico di area  $S = hx$  immerso in un campo magnetico perpendicolare.

Le particelle in movimento nella barretta risentono della forza di Lorentz, che per effetto Hall genera una differenza di potenziale ai capi della barretta, che funge quindi da generatore:

$$\xi = V_H = \oint_{\Gamma} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{F}_{mag}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{q} \cdot d\vec{l} = hvB$$

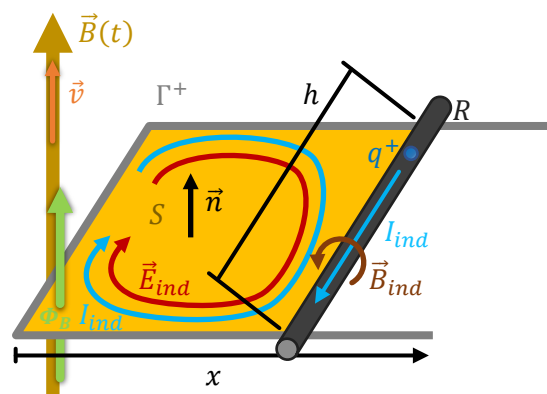


**Nel secondo caso** invece, si muove il magnete perpendicolarmente al circuito. Il campo magnetico  $\vec{B}$  induce un flusso magnetico  $\Phi_B$  nella superficie del circuito:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bxh$$

che con la legge di Faraday genera una f.e.m. indotta:

$$\xi_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Bxh)}{dt} = -Bh\frac{dx}{dt} = hvB$$



**In entrambi i casi**, la f.e.m. è identica e le cariche scorreranno nel cavo, creando un campo elettrico indotto  $\vec{E}_{ind}$  e quindi la corrente indotta  $I_{ind}$ , calcolabile conoscendo la resistenza totale del circuito:

$$I_{ind} = \frac{\xi = \xi_{ind}}{R}$$

Inoltre, la corrente  $I_{ind}$  crea un campo magnetico indotto  $\vec{B}_{ind}$  che la arrotonda su tutto il circuito con la regola della mano destra e si oppone alla variazione di del campo  $\vec{B}$ , facendone cambiare il flusso e quindi diminuendo la f.e.m.  $\xi_{ind}$ , che diminuirà la corrente e quindi il campo  $\vec{B}_{ind}$  stesso. Il processo continua fino a raggiungere un punto di equilibrio: questo fenomeno è detto **autoinduzione**. [in seguito]

Parliamo del **campo elettrico**  $\vec{E}_{ind}$  ora, il quale varia con il campo magnetico e **NON HA UNA SORGENTE**, infatti non deriva da una carica, ma dal movimento del campo magnetico e la sua linea di campo segue il percorso del circuito, quindi ha una circuitazione diversa da 0 e non c'è potenziale elettrico. Queste premesse ci permettono di differenziare questo campo indotto dai campi con sorgente: le leggi di Maxwell e di Gauss qui non possono essere usate, ma possiamo ampliare quella di Maxwell studiando a livello locale il fenomeno. La variazione del flusso magnetico induce il campo elettrico, quindi la **3ª legge di Maxwell nel vuoto** diventa:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Se il campo magnetico non varia nel tempo, si ritrova la legge di Maxwell per l'elettrostatica  $\nabla \times \vec{E} = 0$ .



## Autoinduzione

Come abbiamo visto, le correnti sono le sorgenti dei campi magnetici. Quando una corrente varia  $I(t)$  nel tempo essa produce un campo magnetico variabile  $\vec{B}(t)$ , il quale produce un flusso  $\Phi_B(t)$  nella superficie abbracciata dal circuito, che induce per la legge di Faraday una f.e.m.  $\xi_{ind}$  nel circuito stesso che fa scorrere una corrente indotta  $I_{ind}(t)$  in senso opposto alla corrente di partenza e genera un flusso opposto  $\Phi_{B_{ind}}(t)$  a quello di partenza, andando a mitigarne gli effetti e quindi a diminuire la f.e.m. indotta, che diminuirà la corrente indotta e ne mitigherà la variazione, diminuendo la variazione del campo indotto, in una catena di azioni e reazioni fino a raggiungere un punto di equilibrio. La f.e.m. si dirà autoindotta mentre il flusso opposto è chiamato **autoflusso**, poiché è la corrente stessa che, a suo "svantaggio" (il flusso crea una corrente che le va contro), lo induce. L'autoflusso è un fenomeno strettamente legato alla geometria del circuito ed in particolare si dice che ogni circuito ha una certa capacità costante di indurre corrente che crea l'autoflusso: questa proprietà è chiamata **induttanza** (detto anche coefficiente di autoinduzione) ed è definita come il rapporto tra il flusso magnetico concatenato alla corrente iniziale e la corrente stessa e si misura in **henry**  $\left[H = \frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s\right]$ , che indica che la variazione di una corrente di 1 ampere al secondo genera una f.e.m. di 1 volt:

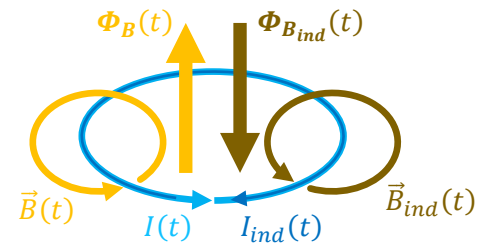
$$L = \frac{\Phi_B}{I} \quad [H]$$

La lettera  $L$  indica non solo il valore di induttanza del circuito, ma indica anche una famiglia di componenti detti **induttori**, i quali sono in grado di generare campi magnetici quando attraversati da una corrente e sono ottenuti in pratica tramite spire avvolte intorno ad un materiale con alta permeabilità magnetica (per favorire il flusso magnetico); il solenoide è l'induttore per antonomasia. In serie o in parallelo, un induttore si comporta allo stesso modo di una resistenza: in serie si somma, in parallelo si sommano i reciproci.

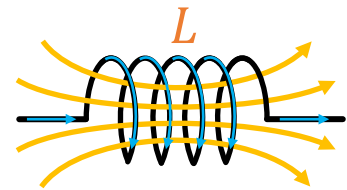
Gli induttori  $L$ , i resistori  $R$  e i condensatori  $C$  sono le tre famiglie di componenti elettrici detti **impedenze**.

Ora che possiamo rappresentare il flusso come conseguenza di una proprietà geometrica del circuito, possiamo definire la legge di Faraday in modo che il flusso sparisca:

$$\xi_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \boxed{\xi_{ind} = -L\frac{dI}{dt}}$$



$$I \Rightarrow \vec{B} \Rightarrow \Phi_B \Rightarrow I_{ind} \Rightarrow \vec{B}_{ind} \Rightarrow \Phi_{B_{ind}} \Rightarrow \Phi_B \Rightarrow \dots$$

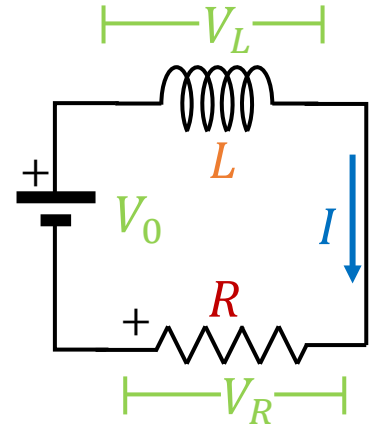


## Circuito RL

Gli effetti sulla corrente di un induttore si possono apprezzare mediante lo studio di un circuito RL (con resistore e induttore) nel quale è posto un generatore di tensione. La corrente, anziché andare a regime istantaneamente alla chiusura del circuito, cresce seguendo una curva analoga a quella studiata per lo scaricamento del condensatore:

$$I(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

in questo caso  $\tau = \frac{L}{R}$   $\left[\frac{H}{\Omega} = s\right]$  è la **costante di tempo** del circuito.



## Potenza ed energia magnetica

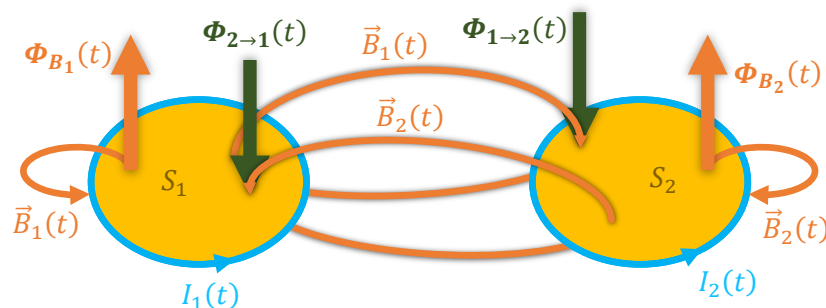
Volendo calcolare la potenza (ricordiamo  $P = \frac{dW}{dt} = VI$ ) di un induttore, la cui f.e.m. si oppone a quella del generatore, otteniamo  $P_{indut} = \xi_{ind} I$ , potenza che, analogamente alla f.e.m., si oppone alla potenza erogata dal generatore  $P_{gen} = V_0 I$ .

Il sistema circuito (il generatore) deve compiere un lavoro (mediante la corrente) per generare il campo magnetico e quindi per andare contro il lavoro compiuto dalla f.e.m. autoindotta:

$$\begin{aligned} U_{mag} = W_{interna (induttore)} &= W_{esterna (sistema)} = \int_0^t P_{gen} dt = \int_0^t -P_{indut} dt = \int_0^t -\xi_{ind} I dt = \int_0^t -\left(-L \frac{dI}{dt}\right) I dt \\ &= \int_{I_0=0}^{I(t)} LI dI = \frac{1}{2} LI^2(t) \Rightarrow \boxed{U_{mag_{indut}} = \frac{1}{2} LI^2(t)} \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema di più circuiti, il campo di ognuno va a indurre un flusso magnetico nella superficie di tutti gli altri, andando ad alterare l'energia magnetica: il flusso indotto in questo modo ha notazione  $\Phi_{i \rightarrow j}(t)$  e il fenomeno prende il nome di **mutua induzione**, poiché tutti i flussi sono reciproci.

Vediamo un esempio con due circuiti e poi generalizziamo:



Sia il primo che il secondo circuito, appena comincia a scorrere la corrente, generano due campi magnetici, i quali per la legge di Faraday inducono due f.e.m. che inducono una corrente inversa e quindi un autoflusso, per poi raggiungere l'equilibrio. Allo stesso tempo però il campo  $\vec{B}_1$  induce un flusso  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  nel circuito 2, generando una f.e.m. indotta  $\xi_{ind_{1 \rightarrow 2}}$  e indebolendo il flusso  $\Phi_{B_2}$ , obbligando il circuito 2 a compiere un lavoro per contrastarla. Allo stesso modo agisce il circuito 2, inducendo  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  nel circuito 1 e generando una f.e.m.  $\xi_{ind_{2 \rightarrow 1}}$  contro  $I_1$ . Il flusso del circuito 1 sul circuito 2 si può calcolare con la definizione di induttanza:

$$\Phi_B = LI \Rightarrow \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} I_1 = M I_1$$

dove  $M_{1 \rightarrow 2}$  è il **coefficiente di mutua induttanza**  $[H]$  e come per  $L$  è un valore legato alla geometria tra il circuito 1 e il 2. Inoltre  $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$  perché la geometria tra loro è identica, quindi il flusso del circuito 2 sul circuito 1 sarà:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} I_2 = M I_2$$

Concentrandoci sul circuito 2 (ma il circuito 1 si comporta analogamente), che oltre a compiere un lavoro contro il suo autoflusso, deve anche compiere un lavoro contro quello compiuto dalla f.e.m.  $\xi_{ind}^{1 \rightarrow 2}$ :

$$\begin{aligned} W_{gen}^{ext} &= \int_0^t P_{gen.1} dt = \int_0^t -P_{1 \rightarrow 2} dt = \int_0^t -\xi_{ind}^{1 \rightarrow 2} I_2 dt = \int_0^t -\left(-\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt}\right) I_2 dt = \int_0^t \frac{d(M_{1 \rightarrow 2} dI_1)}{dt} I_2 dt \\ &= \int_0^t M_{1 \rightarrow 2} \frac{dI_1}{dt} I_2 dt = M_{1 \rightarrow 2} I_2 \int_0^{I_1(t)} dI_1 = M_{1 \rightarrow 2} I_1 I_2 \Rightarrow U_{controllo}^{1 \rightarrow 2} = M I_1 I_2 \end{aligned}$$

l'energia magnetica totale immagazzinata nel circuito 2, cioè il lavoro necessario per andare contro al proprio autoflusso e al flusso del circuito 1, è quindi:

$$U_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

e nel caso generale di un sistema con  $N$  circuiti:

$$U_i = \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N M_{i \rightarrow j} I_i I_j$$

$$U_{sistema}^{circuiti} = \sum_i^N \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N M_{i \rightarrow j} I_i I_j$$

## Densità di energia

Come per l'energia elettrica, anche l'energia magnetica è una proprietà dello spazio e ha una certa densità che si esprime in maniera molto simile, infatti vedendo il campo come generato da un solenoide:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L I^2 & N &= n l \\ L &= \frac{\Phi_{B_{tot}}}{I} & B &= \mu_0 I n \\ \Phi_{B_{tot}} &= N \Phi_{B_{spira}} & vol &= S l \\ \Phi_{B_{spira}} &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{B_{tot}}}{I} I^2 = \frac{1}{2} N \Phi_{B_{spira}} I = \frac{1}{2} n l B S I = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 S l = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (vol)$$

$$\Rightarrow u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

Pratica: calcolo di  $U$

1. Dato il circuito/componente, usando il teorema di Ampere trovo il campo  $\vec{B}$  (o i campi)
2. Usando il campo, calcolo  $\Phi_B$  (o i flussi)
3. Usando il flusso, trovo l'induttanza  $L$  (o le induttanze e il coefficiente  $M_{i \rightarrow j}$  per ogni coppia)
4. Calcolo l'energia  $U$  del sistema (es. per due circuiti,  $U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$ )

#### IV equazione di Maxwell

Fino ad ora abbiamo visto che la variazione di un campo magnetico genera un campo elettrico (con la legge di Faraday); ma è possibile il contrario? È possibile che un campo elettrico generi un campo magnetico?

Usando il teorema di Ampere sul circuito a lato e usando come superficie una tale che metà del condensatore sia incluso, le correnti concatenate saranno quella che scorre dentro il cavo e quella all'interno del condensatore, la cui formula è:

$$E_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_E = E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} I \Rightarrow I_{cond} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

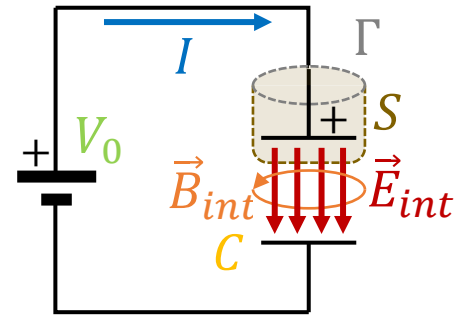
e le correnti concatenate saranno quindi:

$$I_{concat} = I + I_{cond} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Se ora la circuitazione viene effettuata solo dentro il condensatore la corrente nel cavo diventa 0 e il campo magnetico viene generato solo da quello elettrico. Questa è la **4<sup>a</sup> equazione di Maxwell nel vuoto**:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

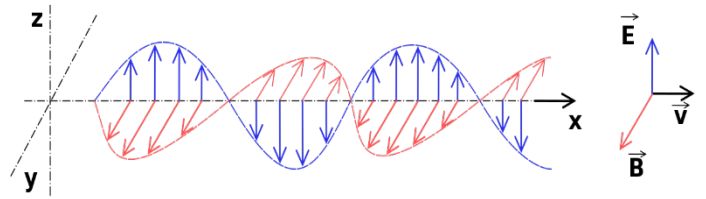
dove  $\mu_0 \epsilon_0$  può essere anche riscritto come  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ .



## Radiazione elettromagnetica

### Equazione delle onde

Manipolando le equazioni di Maxwell, si evince che il campo elettromagnetico è analogo alla equazione delle onde, ma in 3 dimensioni, infatti se ne ottiene una per il campo elettrico (sull'asse  $z$ ) e una per il campo magnetico (sull'asse  $y$ ):



$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Da queste equazioni si è capito che la luce è il prodotto del campo elettromagnetico; la propagazione dei campi magnetico ed elettrico sono le onde elettromagnetiche e si propagano a velocità  $c$ . I campi elettrico e magnetico generano onde trasversali, ortogonali tra loro, in fase e polarizzate, che puntano verso una direzione data dal **vettore di Poynting**:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$

In particolare, notiamo che i generatori irradiano verso l'esterno, mentre le resistenze verso l'interno.

Inoltre, ora che sappiamo che i campi sono indivisibili, l'energia può assumere la sua forma finale ed unica:

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$