EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EDO a variabili separabili

$$y'(x) = f(x) \cdot g\big(y(x)\big) \rightarrow soluzioni: \begin{cases} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx \\ g(y) = 0 \end{cases}$$

EDO lineari del 1° ordine

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) \rightarrow soluzione: y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\int e^{A(x)} f(x)\, dx + C\right)$$

EDO lineari del 2° ordine

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x) \rightarrow difficili, studiamo\ casi\ particolari$$

EDO lineari del 2° ordine omogenee

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = 0$$

$$\rightarrow risolvere\ per: r^2 + a(x)r + b(x) = 0$$

$$\rightarrow soluzione: \begin{cases} c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} & con\ \Delta > 0 \\ c_1 \cdot e^{rx} + c_2 \cdot x \cdot e^{rx} & con\ \Delta = 0 \\ c_1 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x) & con\ \Delta < 0 \end{cases}$$

EDO lineari del 2° ordine a coefficienti costanti (METODO DI SOMIGLIANZA)

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

$$\rightarrow ottengo\ l'integrale\ generale\ dell'omogenea:$$

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0 \rightarrow y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

$$\rightarrow in\ base\ a\ f(x)\ POLINOMIALE, ESPONENZIALE\ o\ TRIGONOMETRICA, trovare\ y_p(x)\ simile$$

1. $\underline{POLINOMIALE: f(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x^1 + q_0}$

$$y_p(x) = \begin{cases} P^{(\deg(f))}(x) & se \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ x \cdot P^{(\deg(f))}(x) & se \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ x^2 \cdot P^{(\deg(f))}(x) & se \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{cases} della\ omogenea$$

$P^{(\deg(f))}(x)$ *polinomio di grado pari a* $f(x)$, *quindi nella forma* $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x^1 + a_0$

2. $\underline{ESPONENZIALE: f(x) = A \cdot e^{rx}}$

$$y_p(x) = \begin{cases} c \cdot e^{rx} & se\ r \neq r_1 \neq r_2 \\ c \cdot x \cdot e^{rx} & se\ \Delta > 0 \\ c \cdot x^2 \cdot e^{rx} & se\ \Delta = 0 \end{cases} della\ omogenea$$

3. $\underline{TRIGONOMETRICA: f(x) = A\cos(wx) + B\sin(wx)}$

$$y_p(x) = \begin{cases} C\cos(wx) + D\sin(wx) & se\ iw \neq r_1 \neq r_2 \\ x(C\cos(wx) + D\sin(wx)) & altrimenti \end{cases} della\ omogenea$$

$$\rightarrow sostituisco \begin{cases} y(x) = y_p(x) \\ y'(x) = y_p'(x) \\ y''(x) = y_p''(x) \end{cases} nella\ EDO, ottenendo\ y_p''(x) + a \cdot y_p'(x) + b \cdot y_p(x) = f(x)$$

$$\rightarrow semplificando, ottengo\ i\ valori\ \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{C}\ \mathbf{e}\ \boldsymbol{D}\ a\ seconda\ del\ caso\ e\ li\ sostituisco\ in\ y_p(x)$$

$$\rightarrow ottengo\ l'integrale\ generale\ della\ EDO\ a\ coeff.costanti: y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x)$$

EDO lineari del 2° ordine a coefficienti costanti (METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI)
$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$

$\rightarrow ottengo\ l'integrale\ generale\ dell'omogenea$:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0 \rightarrow y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

$\rightarrow cerco\ y_p(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)\ con\ C_1(x), C_2(x)\ incognite$

$\rightarrow pongo\ le\ condizioni \begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} e\ ottengo\ le\ incognite$

$\rightarrow semplificando, ottengo\ le\ funzioni\ \boldsymbol{C_1(x)}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{C_2(x)}\ e\ li\ sostituisco\ in\ y_p(x)$

$\rightarrow ottengo\ l'integrale\ generale\ della\ EDO\ a\ coeff.costanti$: $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x)$

Problema di Cauchy di ordine 1
$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Ha ALMENO 1 soluzione

Problema di Cauchy di ordine 2
$\begin{cases} y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \end{cases}$

Ha SOLO 1 soluzione

Ottenuto l'integrale generale finale nella forma $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x)$, applico i valori iniziali e semplificando ottengo le costanti $\boldsymbol{c_1}$ $(\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{c_2})$, che poi vanno sostituite nell'integrale generale per trovare l'integrale particolare che risolve il problema di Cauchy.

SPAZIO $\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare
$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$se\ \vec{X} \perp \vec{Y} \rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$

Norma
$\|\vec{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
$|\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle| = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\|$

Distanza euclidea
$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}$

Intorno sferico aperto
$P \in \mathbb{R}^n, r > 0 \in \mathbb{R} \rightarrow U_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| < r\}$

Intorno generico
$V \subseteq \mathbb{R}^n$ è $intorno\ di\ P\ se\ \exists U_r(P) \subseteq V$

Punti interni, esterni e di frontiera
$P \in Int(s)\ se\ \exists U_r(P) \subseteq S$

$P \in Est(s)\ se\ \exists U_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash S$

$P \in Fr(s)\ se\ \forall U_r(P) \rightarrow U_r(P) \cap S \neq \emptyset\ e\ U_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \backslash S) \neq \emptyset$

Insieme aperto e chiuso
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ è $aperto\ se\ \forall x \in S \rightarrow x \in Int(S)$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ è $chiuso\ se\ \mathbb{R}^n \backslash S$ è $aperto\ [oppure\ se\ Fr(S) \subseteq S]$

Chiusura di un insieme
$S \subseteq \mathbb{R}^n\ si\ chiude\ con\ \overline{S} = S \cup Fr(S)$

Punto di accumulazione
$P \in \mathbb{R}^n$ è $di\ accumulazione\ per\ S \subseteq \mathbb{R}^n\ se\ \forall U_r(P) \rightarrow U_r(P) \cap (S \backslash \{P\}) \neq \emptyset$

Punto isolato
$P \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ è $isolato\ se\ \exists U_r(P) \rightarrow U_r(P) \cap S = \{P\}$

Insieme limitato
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ è $limitato\ se\ \exists K \in [0, +\infty[\rightarrow \forall X \in S, \|X\| < K$

Insieme compatto
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ è $compatto\ se$ è $chiuso\ e\ limitato$

Arco di curva continuo in $\mathbb{R}^n$
È una funzione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \big(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t)\big)\ con\ I \subseteq \mathbb{R}^n$.

Si definisce immagine $Im(v) = \gamma(I) = \{\gamma(t): t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Arco di curva chiusa
$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è $chiusa\ se\ I = [a, b]\ e\ \gamma(a) = \gamma(b)$

Lunghezza di una curva

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \in \mathbb{R} \quad con \begin{cases} I = [a, b] \\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I): I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \forall t \in I \rightarrow \gamma'(t) \neq (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

Funzioni in più variabili reali a valori reali
$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$ è $una\ legge\ che\ associa\ ad\ ogni\ X = (x_1, \cdots, x_n) \in D\ un\ valore\ f(X) \in E.$

$$G_f = \big\{\big(X, f(X)\big): X \in D\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Curve di livello
$Dati\ f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\ \ e\ c \in \mathbb{R}\ \Longrightarrow L_c(f) = \{(x, y) \in D: f(x, y) = c\}$

Parametrizzazione di una retta tangente a una funzione in un punto, di una ellisse e una circonferenza
$r(t) = P + t \cdot \gamma'(P)$

$E(t) = (x_c + a \cdot cos\, t\, , y_c + b \cdot sin\, t)$

$C(t) = (x_C + R\, cos\, t\, , y_C + R\, sin\, t)$

Limiti di funzioni a più variabili
$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\ \ e\ P \in \mathbb{R}^n\ punto\ di\ accum.\ di\ D \Longrightarrow \lim_{X \to P} f(X) = L \in \mathbb{R}\ \ se\ \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \in \mathbb{R}:$

$$|f(X) - L| < \varepsilon \quad \forall X \in (U_\delta(P) \setminus \{P\}) \cap D$$

Teorema del confronto
$g(X) \leq f(X) \leq h(X)\ \ \forall X \in U_{\delta > 0}(P) \setminus \{P\}\ e\ \lim_{X \to P} g(X) = \lim_{X \to P} h(X) = L\ allora\ \lim_{X \to P} f(X) = L$

Limiti polari

$$\lim_{(x,y) \to (x_P, y_P)} f(x, y) \Longrightarrow polo: P = (x_P, y_P) \Longrightarrow \begin{cases} x = x_P + \rho \cos\theta \\ y = y_P + \rho \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta)\ con\ \theta\ variabile\ (non\ ignorare)$$