ELABORAZIONE DI SEGNALI E IMMAGINI

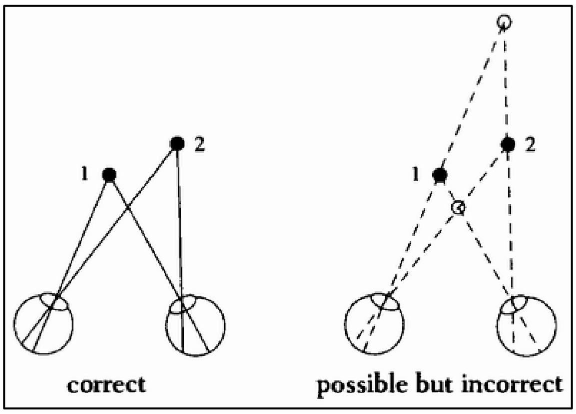
Introduzione ai segnali

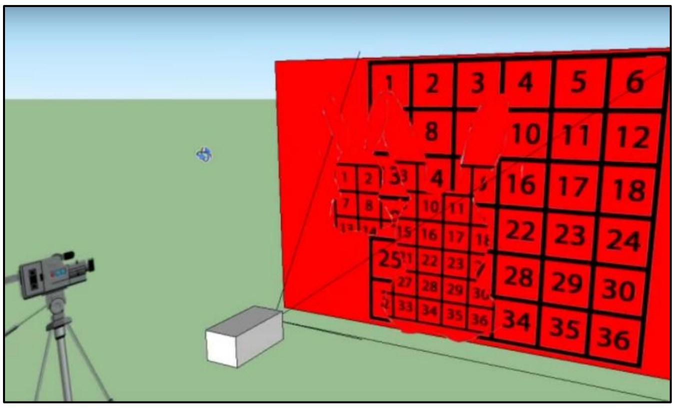
Un segnale è una qualsiasi grandezza (fisica o astratta) che varia in un dominio (tempo, spazio …) in maniera deterministica o aleatoria e che trasporta informazioni. Un segnale è composto da informazione e dal rumore. L'informazione è qualcosa che quando viene fornita dissipa un'incertezza. Il rumore è tutto ciò che è associato al segnale ma che non porta informazione. Il rumore disturba la ricezione del segnale e l'estrazione dell'informazione. L'energia di un segnale è un attributo associato ad un segnale, espresso in joule (potenza x tempo); esistono segnali ad energia finita o a energia infinita. La potenza è l'energia per unità di tempo. Il SNR (singal to noise ratio) è il rapporto tra la potenza del segnale e la potenza del rumore; se questo valore si avvicina ad 1, abbiamo un segnale molto più facile da elaborare. Esistono diversi tipi di segnale: acustico, elettrico, elettromagnetico, sismico, su grandezze astratte (serie finanziarie).

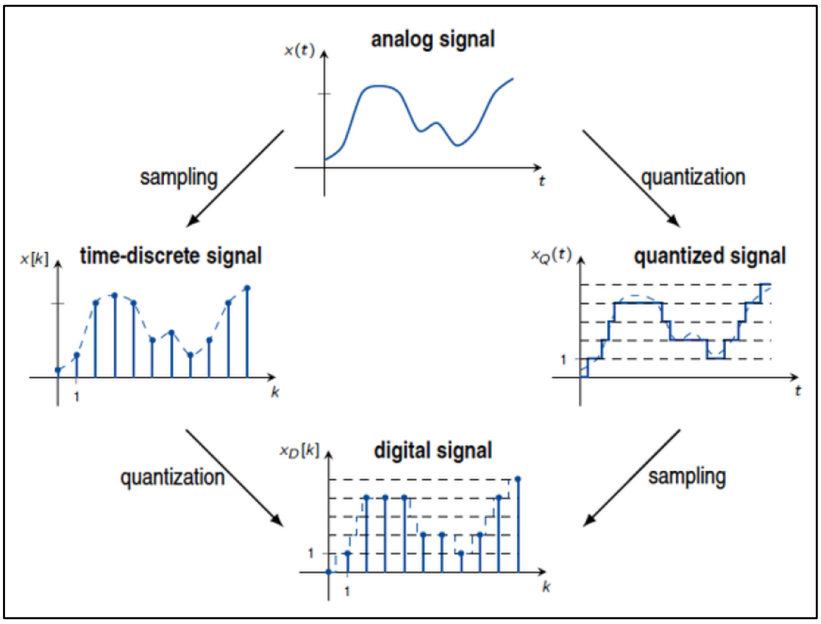
Acquisizione di un segnale

La prima operazione che è possibile effettuare sui segnali è l'acquisizione/ricezione di un segnale. Se il segnale esiste fisicamente, è essenziale captare le variazioni nel mezzo in cui è trasmesso. La facilità di acquisizione è dettata dalla frequenza del segnale: se un segnale ha una frequenza alta, oltre a generare condizioni di ricezione complesse, necessita di un hardware più costoso. I componenti che si occupano di acquisire un segnale sono inseriti in una catena di acquisizione; i principali membri di questa catena sono il sensore (*trasduttore*), il campionatore e il digitalizzatore. Il trasduttore è un dispositivo che acquisisce in ingresso una grandezza fisica e restituisce, in uscita, una grandezza elettrica. Il campionatore, invece, trasforma un segnale continuo in discreto. Il digitalizzatore, invece, discretizza i valori assunti dal segnale.

A seconda della grandezza da elaborare dobbiamo utilizzare un particolare tipo di sensore. Per poter tradurre un'onda sonora in un segnale elettrico possiamo usare un microfono; esistono diversi tipi di microfoni, adeguati alla frequenza che devono captare e alla risposta direzionale che devono avere. È possibile catturare delle immagini grazie alle telecamere, di cui la più diffusa è la telecamera monoculare; oltre alle telecamere normali, troviamo le hishspeed (fino ad 1M fps), le femtospeed (10^{18} fps, usate per rilevare la propagazione della luce). Il processo di acquisizione si chiama imaging e può essere monospettrale, RGB o multispettrale. In un processo monospettrale, un sensore CMOS (complementary metal – oxide semiconductor) cattura la quantità di luce che incide su di esso, generando un'immagine in scala di grigi. In un imaging RGB, invece, sono presenti tre sensori, ognuno dei quali cattura un tipo specifico di luce (rossa, verde o blu). I segnali dei sensori vengono poi combinati tra loro generando un'immagine a colori (come facevano i pittori divisionisti). Per ottenere un'immagine multispettrale, invece, è necessario acquisire immagini a diverse lunghezze d'onda che poi vengono combinate insieme. Un'altra tipologia di telecamere sono le telecamere stereo. Queste simulano la visione stereoscopica umana, sfruttando la presenza di due obiettivi separati da una distanza predefinita (*baseline*) e permettono di definire la profondità degli oggetti. Questa tipologia di telecamera ha bisogno di determinati accorgimenti, in quanto soffre del problema delle corrispondenze, un errore che non permette di sovrapporre un punto registrato con un obiettivo nell'immagine ottenuta dall'altro obiettivo. Questo problema viene risolto con un una camera RGB – D (*depth*) che monta un emettitore ed un ricevitore di un segnale infrarossi che riescono a mappare ogni punto.







I segnali acquisiti dall'ambiente naturale sono analogici, ovvero continui nello spazio/tempo e nei valori che trasportano. Il campionamento ci permette di trasformare un segnale continuo in uno discreto. Un campionamento errato danneggia l'informazione e causa problemi di aliasing.

La quantizzazione è l'associazione dei valori discreti di un segnale ad un intervallo di quantizzazione. Contrariamente alla campionatura fa perdere sempre un po' di informazione, abbassando la qualità del segnale. Subito dopo la quantizzazione, il segnale viene codificato; attraverso un modulo del sistema di elaborazione, ogni intervallo di quantizzazione viene associato ad un codice. Unendo il campionamento e la quantizzazione otteniamo un segnale digitale. La digitalizzazione di un segnale è essenziale per la trasmissione dello stesso.

La compressione di un segnale, permette di ridurre i bye necessari per memorizzarlo. Un segnale viene trasmesso attraverso un mezzo di trasmissione (canale di comunicazione) che può essere una struttura fisica (es. cavo, quindi si parla di trasmissioni guidate) o uno spazio libero (tramite un'antenna, si propaga nel vuoto o nell'aria); in questo passaggio, il segnale consuma la propria energia perdendo potenza. Il mezzo di trasmissione è caratterizzato da:

- ampiezza di banda (banda passante): frequenza massima e minima del mezzo [Hz]
- velocità di trasmissione (bit rate): numero di bit trasmessi in un secondo [bit/s]
- attenuazione: diminuzione in ampiezza che subisce il segnale passando nel mezzo [dB]
- rumore: segnali aleatori provenienti dal mezzo di trasmissione

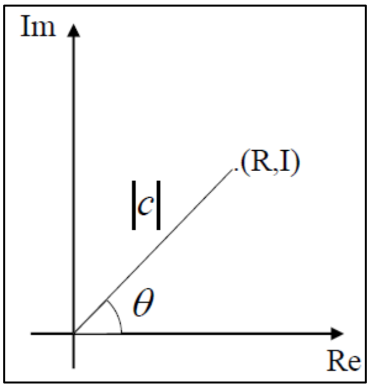
Analisi in tempo frequenza

Dato un segnale, l'analisi in tempo frequenza permette di rivelare il contenuto frequenziale di un segnale; è possibile descrivere un segnale grazie alla sua frequenza. Inoltre, l'analisi frequenziale permette la progettazione di filtri. Il filtraggio è composto da un insieme di operazioni da applicare al segnale per migliorarlo (aumento dell'informazione), restaurarlo (rimozione di rumore), separarlo (isolamento di diverse componenti) o estrarne determinate caratteristiche. Se per l'audio il contenuto frequenziale è essenziale, altrettanto possiamo dire per gli edge nelle immagini. Oltre agli edge è possibile definire le regioni, agglomerati di pixels simili tra loro

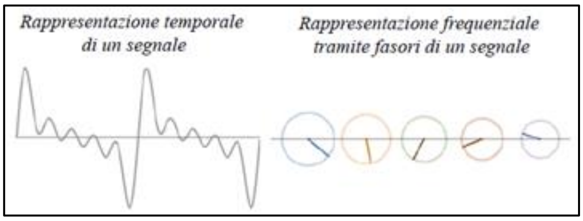
MATEMATICA PRELIMINARE

Numeri complessi

Un numero complesso **c** $\in \mathbb{C}$ è **c** = **Re** + *j***Im** con **Re** = *parte reale*, **Im** = *parte immaginaria* variabili $\in \mathbb{R}$, *j* = unità immaginaria tale che $j = \sqrt{-1}$. Il coniugato di **c** è **c*** = **Re** − *j***Im.** I numeri complessi possono anche essere visti geometricamente su un piano complesso, descritti da coordinate (R,I), dando vita ad una forma rettangolare. Altra rappresentazione è la **forma polare**: *c* = |c| (cos θ + *j* sin θ) dove $|c| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ è il *modulo* mentre $\theta \sim \arctan(\frac{Im}{Re})$ è la *fase*. Per la formula di Eulero $e^{j\theta} = cos\,\theta + j\sin\theta$ possiamo ottenere la forma alternativa $c = |c|e^{j\theta}$ e quindi ottenere la moltiplicazione di numeri complessi come $c_1c_2 = |c_1||c_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$. Dato t $\in\mathbb{R}$, una funzione complessa di



variabile reale è $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$, rappresentabile con un **fasore** ovvero un punto che ruota attorno all'origine ad una determinata distanza $|c|$ con velocità angolare $\theta(t)$. Risulta intuibile come i numeri complessi semplifichino la rappresentazione dei fasori. Il grande vantaggio dei fasori consiste nello permettere il passaggio dal dominio temporale/spaziale a quello frequenziale. Un fasore permette di far variare nel tempo un numero complesso: $|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$ dove $\theta(t)$ è l'angolo spazzato a partire da un determinato angolo Φ ad un certo istante t. Possiamo quindi codificare la velocità angolare con $\theta(t) = \frac{2\pi}{T_0}t + \Phi$ con T_0 che indica il tempo necessario per coprire 2π quadranti.



Una funzione è pari se e solo se $f(t) = f(-t)$ e si traduce in una simmetria sull'asse y. Una funzione è dispari se e solo se $f(t) = -f(-t)$ e si traduce in una simmetria sull'origine. Una qualsiasi funzione può essere descritta come una combinazione di una funzione pari con una funzione dispari: $f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) + f(-t)\big) + \frac{1}{2}\big(f(t) - f(-t)\big)$. Questa tecnica viene sfruttata nel caso di coseni e seni nell'*analisi di Fourier*. Otteniamo quindi le formule $\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$.

Tassonomia per i segnali

Un segnale è una funzione generica $f: D_1 \rightarrow D_2$ che associa ad ogni elemento del dominio D_1 uno ed un solo elemento del codominio D_2. I domini possono essere scalari, vettoriali o matriciali. A seconda del tipo di dominio e codominio, otteniamo differenti tipi di segnali.

codominio / dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$	continuo (o analogico)	quantizzato	continuo complesso
$\mathbb{Z}$	discreto (o campionato)	digitale	discreto complesso

Oltre al dominio ed al codominio, una possibile classificazione può essere data da cosa rappresentano i segnali, se entità naturali (suoni e immagini) o entità matematiche. Un'ulteriore classificazione è data dalla variabile indipendente del segnale: abbiamo quindi segnali temporali, spaziali o frequenziali.

I segnali temporali continui, la cui variabile D_1 è pensata come tempo, si dividono in segnali a tempo continuo $D_1 = \mathbb{R}(-\infty, +\infty)$, a causale continuo $D_1 = \mathbb{R}[0, +\infty)$ ed a intervallo limitato continuo $D_1 = \mathbb{R}(t_{start}, t_{end})$. Non è necessario specificare il codominio, anche se solitamente è $D_2 = \mathbb{R}[VAL_{min}, VAL_{max}]$.

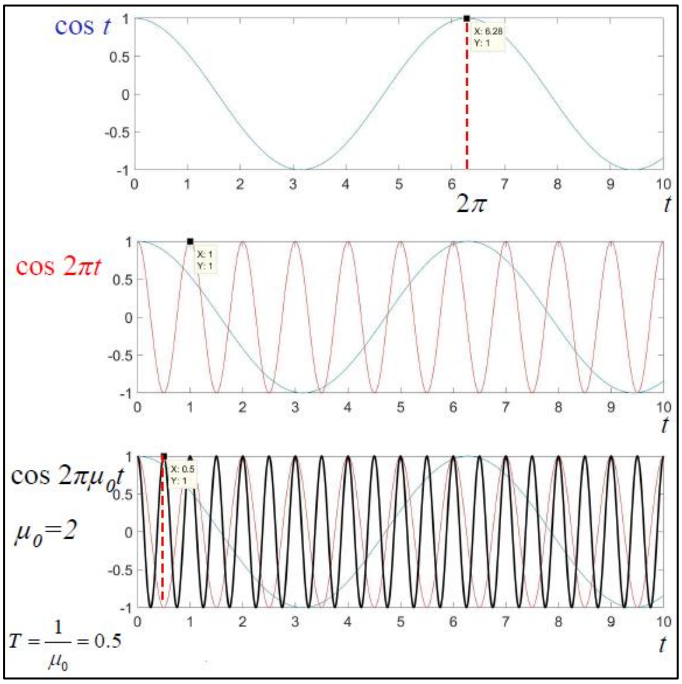
I segnali frequenziali continui esprimono alcune proprietà dei segnali temporali o spaziali. Qui, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ ed è la frequenza μ espressa in Hz. μ indica quanti cicli di segnale accadono rispetto all'unità in cui sono duali (m se spaziali, s se temporali). Nel codominio $D_2 \subseteq \mathbb{C}$ il segnale complesso **contiene** sia l'**ampiezza** che la **fase**, alternativamente $D_2 \subseteq \mathbb{R}$ ed è chiamato **magnitudo**.

I segnali spaziali continui prevedono $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ con le variabili del dominio pensate come coordinate: in generale, si usa $D_1 = \mathbb{R}(t_{start}, t_{end}) \times \mathbb{R}(z_{start}, z_{end})$. Un esempio di segnali spaziali continui sono le immagini: a seconda del tipo di immagine (multispettrale, monospettrale o a 3 canali) abbiamo diversi domini (coordinate) e codomini (intensità, saturazione e tono del colore).

Un segnale si dice discreto se il dominio viene campionato da un insieme discreto di punti $D_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1(\times n_2 \ldots)}$, ovvero tutti gli intervalli sono alla stessa distanza. Sono segnali discreti una stringa di caratteri, un segnale audio preso ad intervalli prefissati, un'immagine rappresentata in pixel. Se il segnale discreto deriva da una decimazione del dominio, si parla di segnale campionato. I segnali digitali sono segnali discreti con ampiezze quantizzate.

Un segnale f è periodico di periodo T se $\exists\, T \in \mathbb{R}^+ : f(t+T) = f(t), \forall t \in D_1$ e T è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica. La frequenza fondamentale è espressa dalla formula $\mu_0 = \frac{1}{T}$.

Un segnale è periodico trigonometrico di minimo periodo se, fissato $\mathrm{T} > 0$ è nella forma $f(t) = \cos 2\pi\, \mu_0 t$ o nella forma $f(t) = \sin 2\pi\, \mu_0 t$. Spesso $2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T} = \omega_0$ è chiamata velocità angolare o pulsazione. Oltre a questo, possiamo fissare $\theta \in \mathbb{R}$ chiamato fase, che sommato alle forme periodiche trigonometriche base producono uno sfasamento del segnale, applicando quindi un'operazione di shift.



Un segnale si dice ad energia finita (o di energia) se l'integrale che ne rappresenta l'energia converge.

$$[J] \quad E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \text{ con } |f(t)|^2 = f^*(t)f(t), f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

I segnali trigonometrici non sono di energia. Per essere segnali di energia finita, la condizione necessaria è che all'infinito l'ampiezza vada a 0.

Un segnale si dice a potenza finita (o di potenza) se l'integrale che ne rappresenta la potenza converge.

$$[J] \quad P_f = \begin{cases} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t)dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt \text{ con } |f(t)|^2 = f^*(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Per un segnale ad energia finita, la potenza tende a 0; quindi un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie, ma può non appartenere a nessuna categoria.

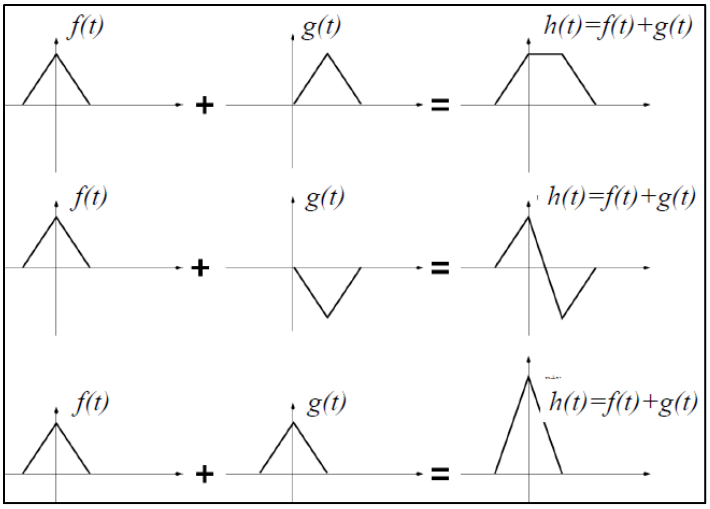
OPERAZIONI

Operazioni fondamentali

Dati due segnali f e g arbitrari monodimensionali, possiamo definire le seguenti operazioni:

- somma: $h(t) = f(t) + g(t) \quad \forall t \in D_1$
- prodotto: $h(t) = f(t) \cdot g(t) \quad \forall t \in D_1$
- amplificazione: $h(t) = \lambda f(t) \quad \forall t \in D_1$

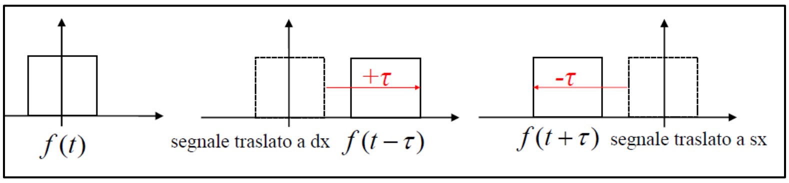
In particolar modo, la somma di due segnali è estremamente facile quando essi non interferiscono tra loro.

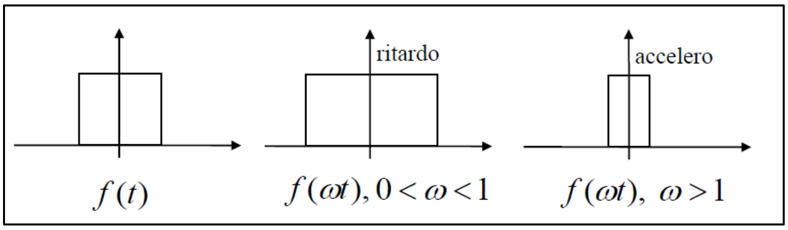


Altre operazioni

Esistono anche altre operazioni, che si basano sulle operazioni fondamentali:

- shift: $\forall f(t): D_1 \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}$

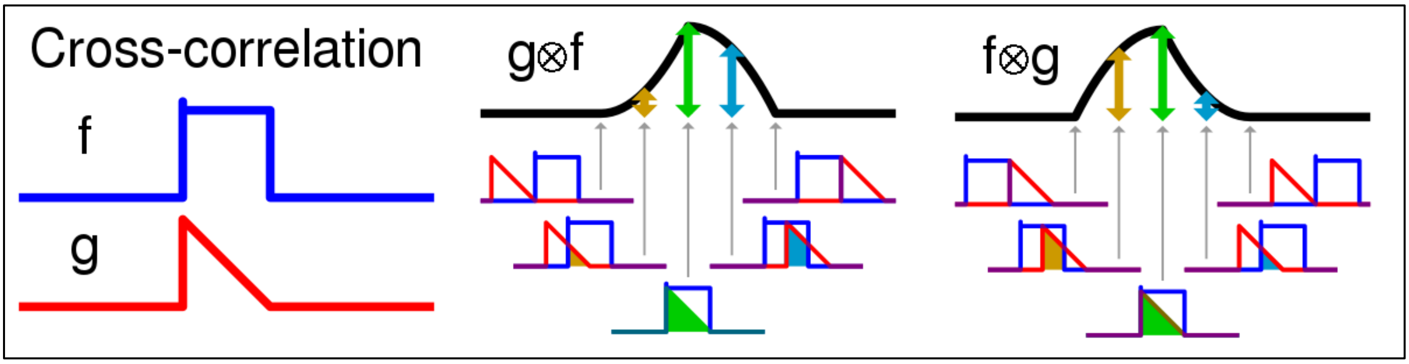




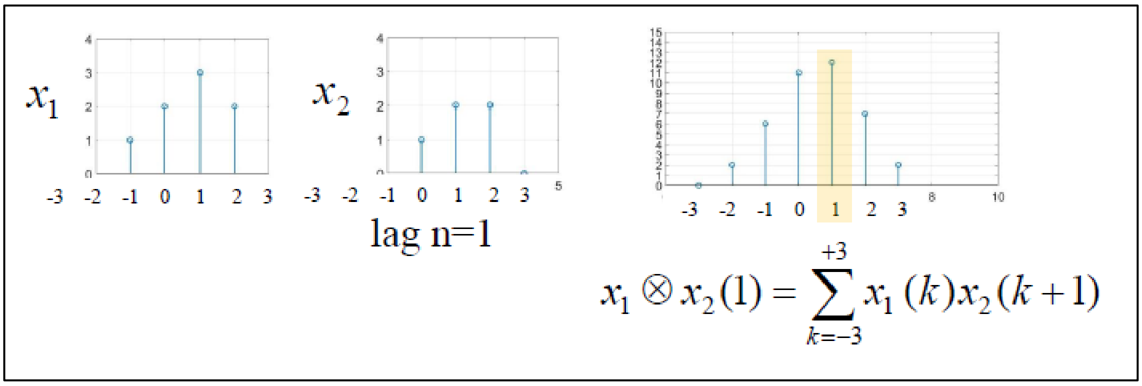
- rescaling: $\forall f(t): D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$

Cross correlazione

Dati f_1 e f_2 segnali continui $f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau + t) d\tau$ con $f_1^*(\tau)$ complesso coniugato, ovvero $f_1(\tau)$ se f_1 è reale. Valutando il tutto su $t = 0$, ovvero lag tra un segnale e l'altro, abbiamo l'integrale di cross correlazione

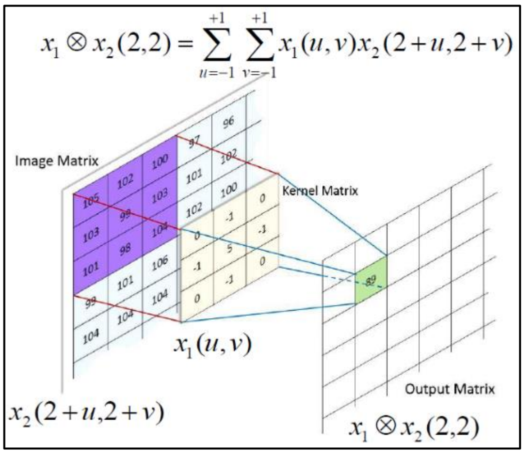


Se dobbiamo trattare segnali con range di valori diversi, abbiamo bisogno della cross correlazione normalizzata: $f_1 \overline{\otimes} f_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau+t) d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$. Se $f_1 = f_2$ si parla di autocorrelazione (normalizzata o no). Nel caso di $x_1(n)$ e $x_2(n)$ discreti, la cross correlazione sarà: $x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k+n), k \in \mathbb{Z}$



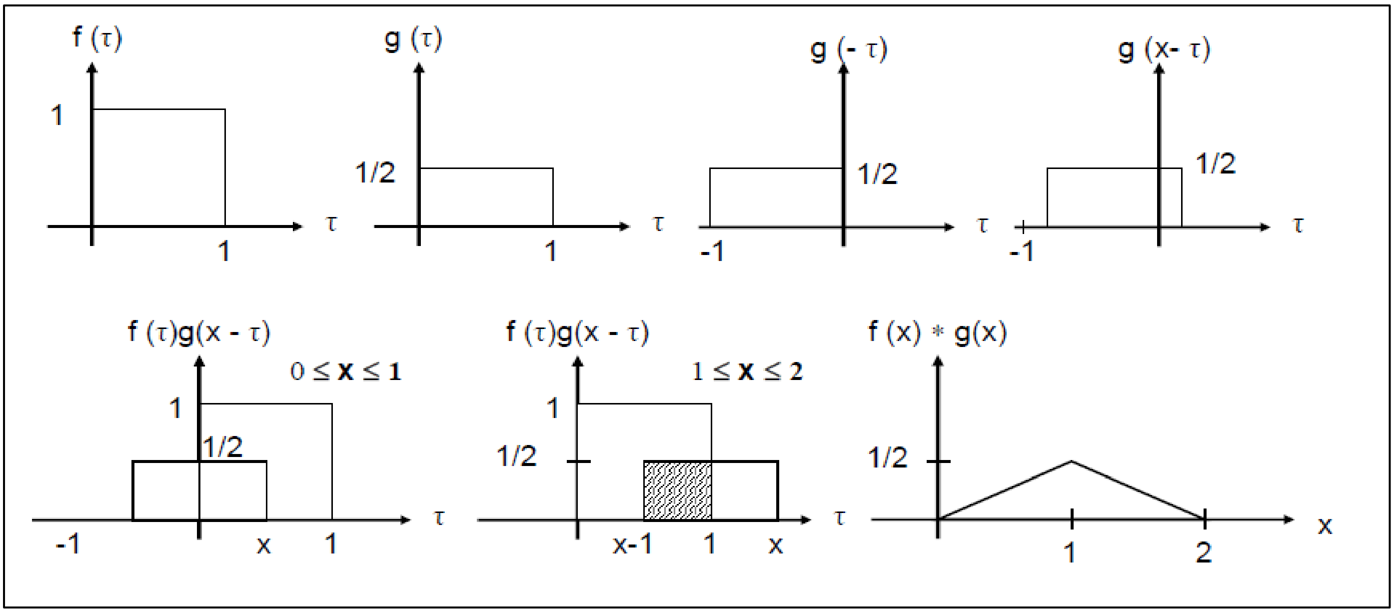
Nel caso 2D (e quindi di immagini), diventa: $x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} x_1(u,v) x_2(n+u, m+v)$ con x_1 chiamato template o kernel. Il kernel, solitamente, ha una dimensione minore di quella dell'immagine (ovvero di x_2). Se $x_1 = x_2$ si parla di autocorrelazione.

Può essere necessario utilizzare la cross correlazione normalizzata se i segnali hanno range di valori diversi: $x_1 \otimes x_2(n,m) = \frac{\sum_{u=-k}^{+k}\sum_{v=-k}^{+k}[x_1(u,v)-\overline{x_1}][x_2(n+u,m+v)-\overline{x_2}]}{\sqrt{\sum_{u=-k}^{+k}\sum_{v=-k}^{+k}[x_1(u,v)-\overline{x_1}]^2\sum_{u=-k}^{+k}\sum_{v=-k}^{+k}[x_2(u,v)-\overline{x_2}]^2}}$. In pratica questa operazione consiste nel sottrarre la media ad ogni punto nell'intorno di applicazione definito dalla matrice kernel.

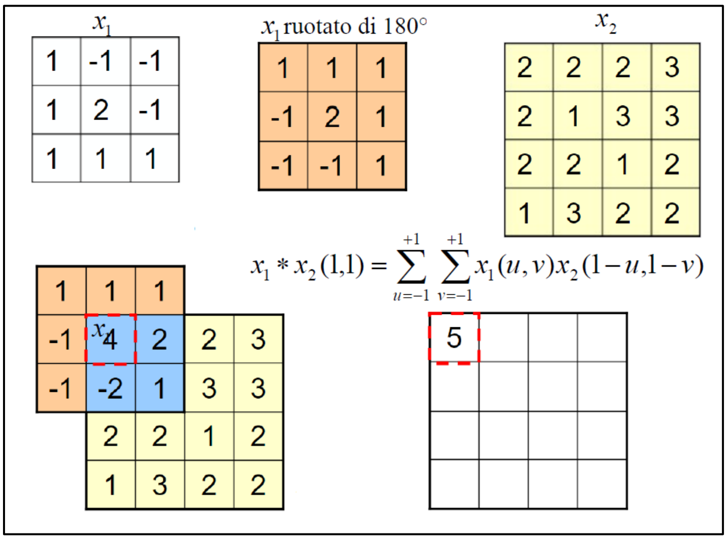


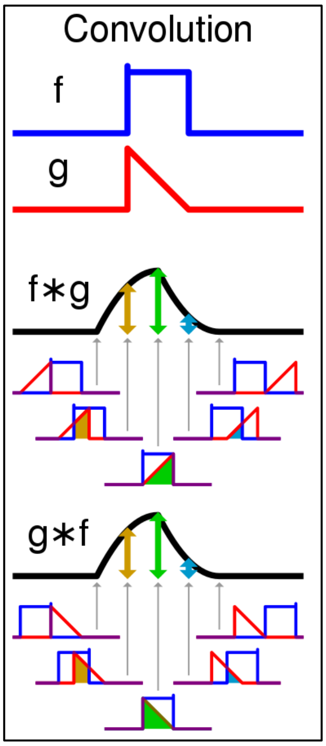
Convoluzione

La convoluzione è un'evoluzione della cross correlazione: prende una funzione, la ruota di 180° e applica la cross correlazione. La formula della convoluzione per segnali continui è $f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$



Se i segnali sono discreti, la formula diventa: $x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(k-n)$. Nel caso 2D (e quindi di immagini) la formula è: $x_1 * x_2(n) = \sum_{u=-k}^{+k}\sum_{v=-k}^{+k} x_1(u,v)x_2(n-u,m-v)$, ovvero applico la cross correlazione con una trasposizione su x_1. La convoluzione filtra un'immagine, rimuovendo rumore ma sfocando.





SEGNALI CONTINUI DI USO COMUNE

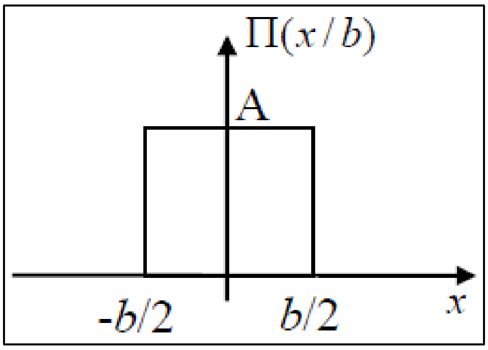
Funzione box

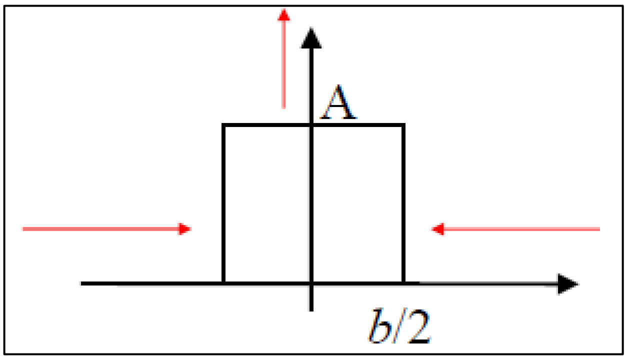
$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & -0.5 \le x \le 0.5 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione box generica

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad \text{con } x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

Se strizzo la box, ottengo l'impulso δ(x), definito come $\delta(x) = \lim_{b \to 0} \frac{1}{b} \Pi\left(\frac{x}{b}\right)$ col vincolo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$





Impulso

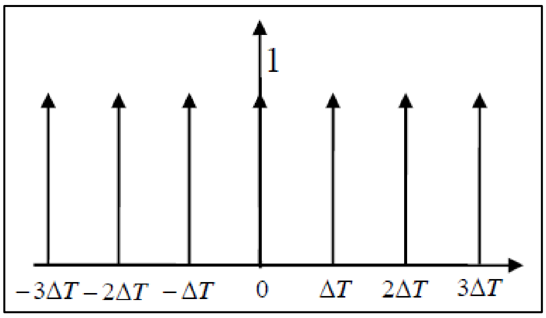
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

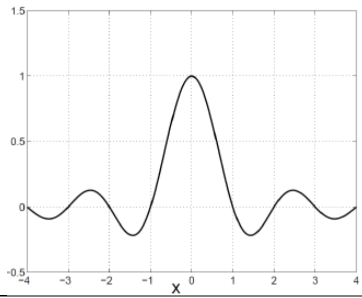
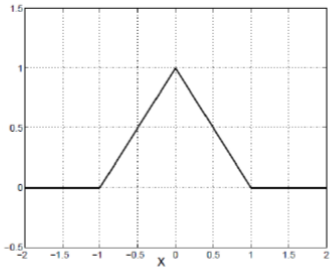
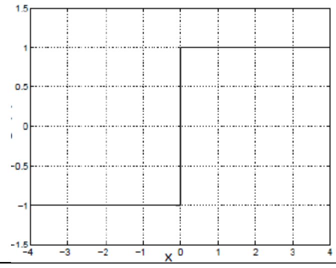
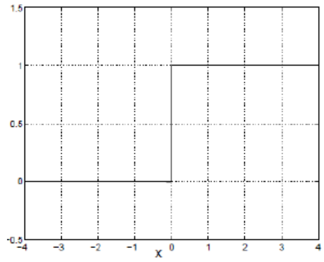
L'impulso, grazie al vincolo integrale, è associabile ad una distribuzione probabilistica. L'impulso gode delle seguenti proprietà:

1. $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$ (proprietà di setacciamento)
3. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

L'impulso unitario discreto $\delta(x)$ è una funzione $\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$

Il treno di impulsi è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità ΔT ed è espresso dalla formula $S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta T)$



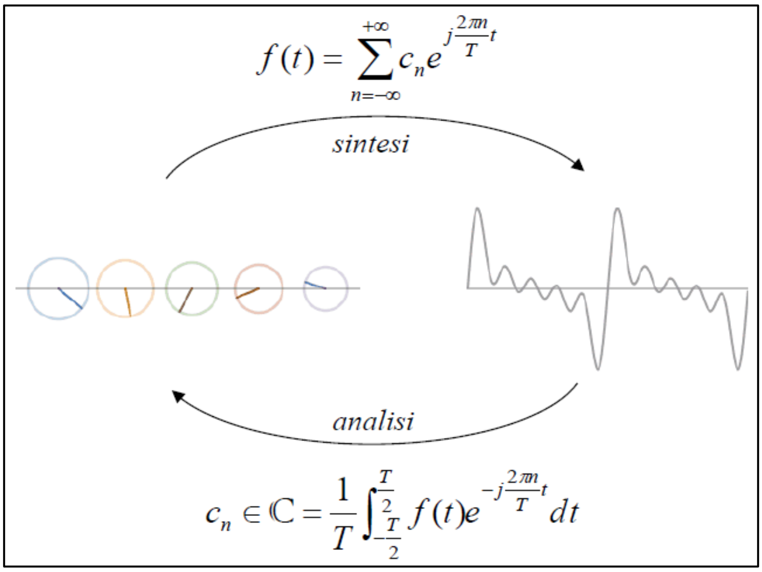
Nome	Funzione	Rappresentazione
SINC	$sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ Intersezione con l'asse *x* in 1, 2 …	
TRIANGOLO	$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-\lvert x\rvert & \text{se } \lvert x\rvert < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	
SEGNO	$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se x} < 0 \\ +1 & \text{se x} > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ Ribalta i segnali sopra/sotto l'asse *x*	
GRADINO	$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se x} < 0 \\ 1 & \text{se } x \ \geq 1 \end{cases}$	

ANALISI DI FOURIER

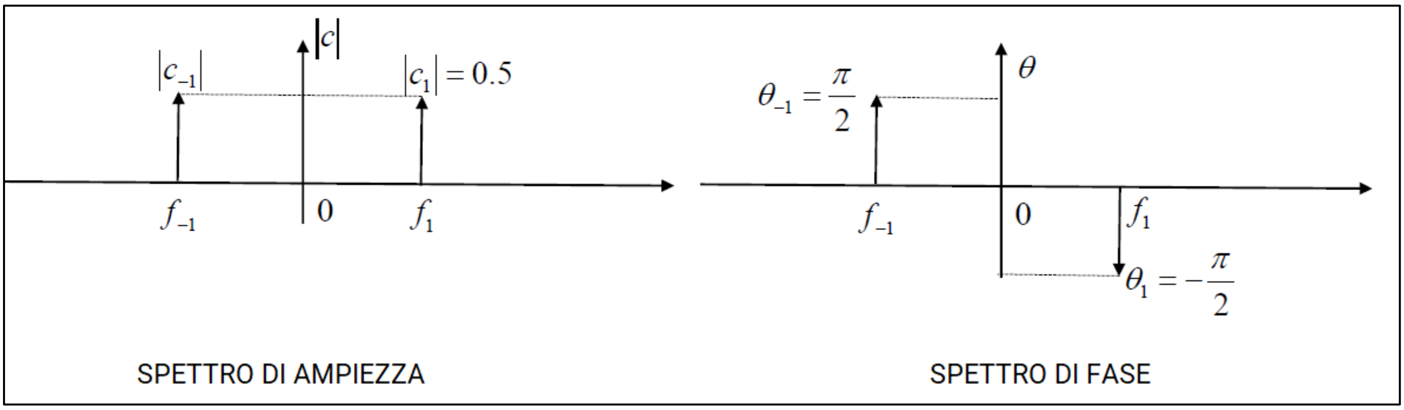
L'analisi di Fourier permette di passare dai segnali temporali (o spaziali) a quelli frequenziali e viceversa.

Serie di Fourier

Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di variabile continua t periodica di periodo T, può essere espressa come: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ per $n \in \mathbb{Z}$ (*sintesi*), ovvero una sommatoria di esponenziali complessi di frequenza multipla rispetto a quella fondamentale, moltiplicati per i coefficienti $c_n \in \mathbb{C}$, dove $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}$ (*analisi*). In pratica la serie di Fourier è una serie infinta di termini, composti da un numero complesso ed un fasore moltiplicati tra loro, che danno vita ad un altro fasore. Riscrivendo c_n come un fasore, otteniamo $c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\frac{2\pi n}{T}t + \theta_n}$, uguale a dire che estendiamo il fasore $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ ad una



lunghezza $|c_n|$ e che facciamo partire il fasore con un angolo iniziale θ_n (detto angolo di fase). Nel caso in cui $|c_n| \in \mathbb{R}$, $\theta_n$non compare, e quindi $c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$. Da questi ricaviamo lo spettro di ampiezza e quello di fase. Lo spettro di ampiezza rappresenta il modulo del fasore; lo spettro di fase riporta, invece, gli angoli di fase. Ad esempio, gli spettri della funzione $\sin 2\pi$ sono:



Proprietà della serie di Fourier

Entrambi gli spettri sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo spettro di Fourier. Lo spettro di Fourier per i segnali periodici gode delle proprietà:

- lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto all'asse y
- lo spettro di fase è antisimmetrico rispetto all'asse y
- se i coefficienti c_n sono reali, non esiste lo spettro di fase
- entrambi gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale

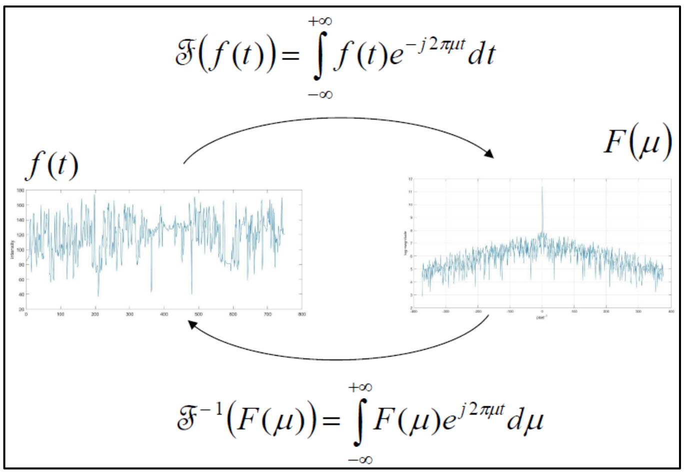
ANALISI DI FOURIER

Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ un segnale reale e continuo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anche non periodico; si chiama trasformata di Fourier (TdF) $\mathfrak{F}(f(t))$=F(μ) il segnale $\mathfrak{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathfrak{F}(f(t))$=F(μ)= $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$ dove μ è l'analogo di $\frac{n}{T}$ della serie di Fourier. In pratica, la TdF restituisce un coefficiente di "presenza" F(μ) per una determinata frequenza μ. La TdF esiste solo se $f(t)$ è un segnale di energia

Trasformata di Fourier inversa

Sia F(μ) la TdF di un segnale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce trasformata di Fourier inversa il segnale $\mathfrak{F}^{1}$(F(μ))=$f(t)$ $\mathfrak{F}^{1}$(F(μ))=$f(t)$= $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(\mu) e^{-j2\pi\mu t} d\mu$. La $\mathfrak{F}^{1}$ permette di ricostruire f partendo da F.

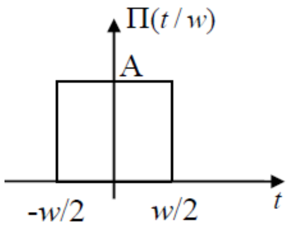
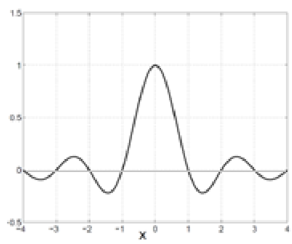
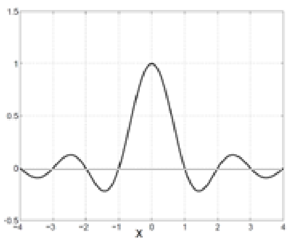
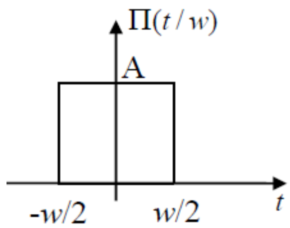


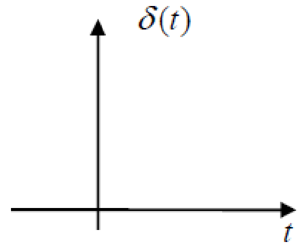
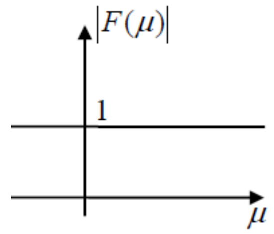
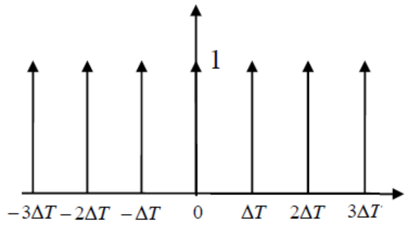
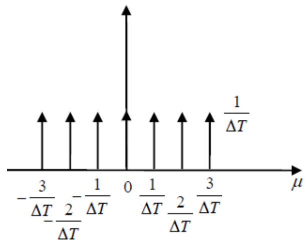
Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà:

Proprietà	prima		dopo
LINEARITÀ	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$\xrightarrow{\mathfrak{F}}$	$a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$
SCALATURA TEMPORALE	$z(t) = f(at)$	$\xrightarrow{\mathfrak{F}}$	$Z(\mu) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\mu}{a}\right)$
	$a = -1,\ \ z(t) = f(t)$	$\xrightarrow{\mathfrak{F}}$	$Z(\mu) = F(-\mu)$
DUALITÀ	$f(t)$	$\xrightarrow{\mathfrak{F}}$	$F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)} e^{-j2\pi\mu t} \mathrm{dt}$
	$F(t)$	$\xrightarrow{\mathfrak{F}}$	$f(-\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F(t)} e^{-j2\pi\mu t} \mathrm{dt}$

Trasformate di Fourier di funzioni comuni

$\mathfrak{F}(f(t))=$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t/w) e^{-j2\pi\mu t} dt$ $= \mathrm{F}(\mu)$	**BOX**  $\Pi\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{w}}\right)$	**SINC**  $\mathrm{sinc}(\mu w) = Aw \cdot \frac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w}$
NOTE:	La formula generale diventa: $\mathrm{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m}$; quindi se $m = 1$ e $\mu = \frac{1}{w}$, la sinc interseca l'asse nei punti $-\frac{1}{w}, \frac{1}{w}, \frac{2}{w}$ ... $\mathrm{sinc}(0) = 1$ e $\mathrm{sinc}(m) = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}$. Più è larga la box, più è frequente la funzione sinc	
$\mathfrak{F}(f(t))=$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(tw)\, e^{-j2\pi\mu t} dt$ $= \mathrm{F}(\mu)$	**SINC**  $\mathrm{sinc}(tw)$	**BOX**  $\Pi\left(-\frac{\mu}{\mathrm{w}}\right) = \Pi\left(\frac{\mu}{\mathrm{w}}\right)$
NOTE:	Applicando la proprietà della dualità ai calcoli precedenti, posso dire che ottengo una box: $f(t) \xrightarrow{Tdf} F(\mu) \rightarrow F(t) \xrightarrow{Tdf} f(-\mu)$	

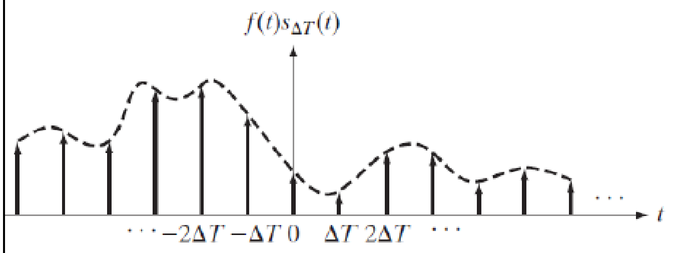
$\mathfrak{F}(f(t))= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$ = F(μ)	**IMPULSO**  $\delta(x)$	**COSTANTE 1**  $e^{-j2\pi\mu t}$
NOTE:	Questo significa che nella TdF ho solo lo spettro di ampiezza. Il valore ottenuto dalla TdF è indipendente da dove è centrato l'impulso.	
$\mathfrak{F}(f(t))= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta T}(x) e^{-j2\pi\mu t} dt$ = F(μ)	**TRENO DI IMPULSI**  $S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$	**TRENO DI IMPULSI**  $S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$
NOTE:	Genero una forma alternativa per il treno di impulsi. Più è lungo il periodo di campionamento ΔT, più fitto sarà il periodo di campionamento nella TdF e meno alti saranno gli impulsi	

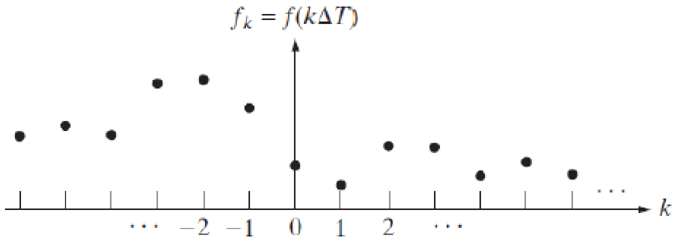
Supponiamo ora di dover fare la Trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni continue reali: possiamo calcolarla rapidamente applicando la convoluzione delle trasformate di Fourier, che altro non è che il prodotto delle TdF delle singole funzioni.

$$\mathfrak{F}(f * h(t)) = F(\mu) \rightarrow H(\mu) \cdot F(\mu)$$

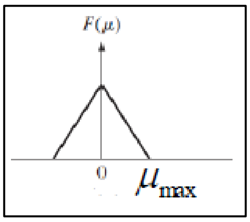
Campionamento

Sia $f(t)$ un segnale reale continuo $f:]-\infty, +\infty[\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anche non periodico. Per poter essere elaborato deve essere innanzitutto campionato ad intervalli discreti, ovvero essere moltiplicato per un treno di impulsi; la frequenza di campionamento ottenuta, sarà pari a quella del treno di impulsi. $\tilde{f}(t) = f(t) \cdot S_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$

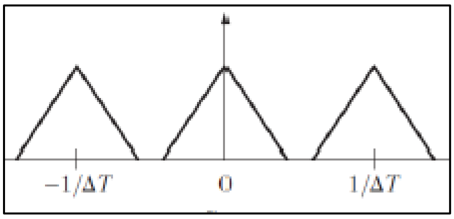




Trasformata di Fourier a tempo – discreto (DTFT)

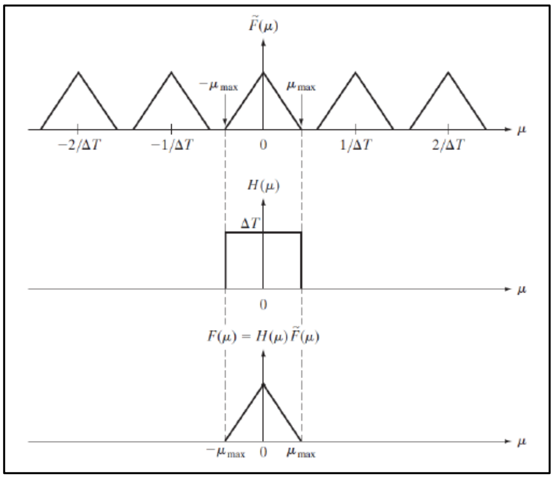


Abbiamo visto che la frequenza del treno di impulsi di partenza influisce sul treno di impulsi generato dalla trasformata: più è corto il periodo di campionamento ΔT, più è alta la frequenza nel nuovo treno; al contrario, più è sparso il periodo di campionamento, più sono alti gli impulsi. Sia ora $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considerando $\tilde{f}(t)$ treno di impulsi, possiamo calcolare la trasformata di Fourier con la formula $\boldsymbol{\tilde{F}(\mu) = F(\mu) \ast S_{\Delta T}(\mu) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)}$. A livello pratico, $F(\mu)$ è la TdF della funzione $f(t)$ mentre $F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$ è la TdF della funzione $f(t)$ shiftata a destra di una quantità pari a $\frac{n}{\Delta T}$. La funzione $\tilde{F}(\mu)$ è un segnale periodico, una serie di infinite copie dello spettro di $F(\mu)$ ripetute ogni $\frac{1}{\Delta t}$. A questo punto è facile notare come all'aumentare del periodo di campionamento Δt, le copie della nostra funzione si avvicinino tra loro. Se le repliche dello spettro arrivano a sovrapposti, sorge il problema dell'**aliasing**.

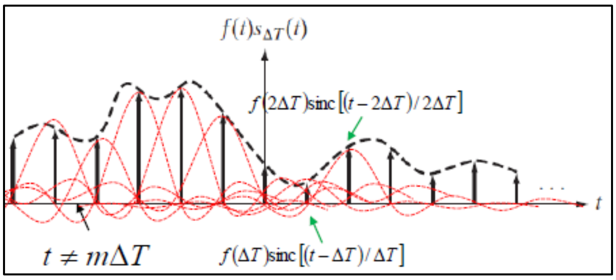


Teorema del campionamento

Un segnale reale continuo $f(t)$, limitato in banda, può essere ricostruito completamente e senza errori patendo da un set di suoi campioni, se essi sono stati acquisiti con un tempo di campionamento ΔT tale che $\frac{1}{\Delta T} = \mu_s > 2\mu_{max}$. La frequenza $\frac{1}{\Delta T}$ viene detta **frequenza di Nyquist**.

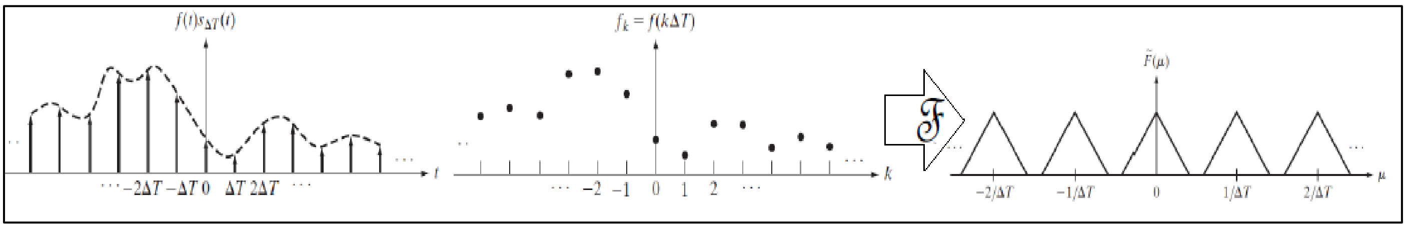


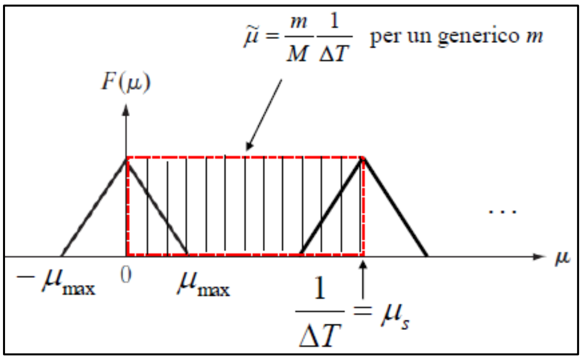
Per ricostruire il segnale, genero la TdF della funzione campionata: otterrò così una funzione periodica. Isolando un periodo e antitrasformandolo con Fourier, riotterrò la funzione originale. La formula finale che otteniamo è rappresentabile come $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{t-n\Delta T}{n\Delta T}\right]$; se t corrisponde alla posizione di uno de campioni riesco ad avere una ricostruzione "banale". Se t non corrisponde, ottengo una somma tra infinite sinc pesate dal campione $f(n\Delta T)$: un'**interpolazione**. Questa interpolazione, però, non può essere effettuata in quanto è composta da una sommatoria infinita ma il segnale che sto trattando è finito. Diventa necessario introdurre un'altra trasformata di Fourier, la trasformata discreta.



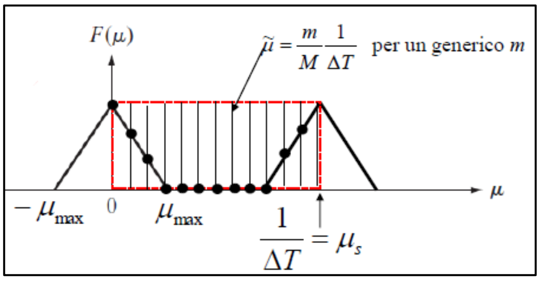
Trasformata di Fourier discreta (DFT)

La trasformata di Fourier discreta di un segnale reale continuo $f(t)$ di dominio illimitato e non periodico, campionato con periodo ΔT, è una funzione continua, periodica (di periodo $\frac{1}{\Delta T}$) anch'essa di dominio illimitato. La formula della DFT può essere espressa in due modi diversi: se conosco la forma analitica della TdF (raro) posso usare $\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$, altrimenti userò $\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$





Quest'ultima espressione deve essere rivista campionando il dominio spettrale. Una volta selezionati gli intervalli frequenziali che mi interessano, ovvero da 0 a $\frac{1}{\Delta T}$, prendo in considerazione M campioni; otterrò così $\tilde{\mu} = \frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}$ con $m = 0, \dots M-1$ e $\frac{m}{M} \in \left[0, 1 - \frac{1}{M}\right]$. Aggiustando la formula della DFT sul numero M di campioni, otterrò: $\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}$.

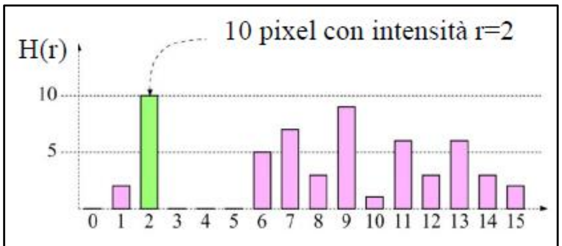


ELABORAZIONE DELLE IMMAGINI

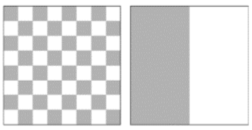
L'elaborazione delle immagini consiste nel prendere come input un'immagine e restituirne un'altra come output. Il **rinforzo** di un'immagine è un particolare tipo di elaborazione che mira a rendere l'immagine più adatta al contesto; questo perché la qualità di un'immagine non è un'informazione oggettiva, ma dipende da cosa devo fare con quell'immagine: nell'esempio, l'immagine a sinistra è più verosimile, ma l'immagine a destra ha più dettagli. Possiamo dire che la qualità è la combinazione pesata di tutti gli attributi significativi di un'immagine. Un'immagine è di scarsa qualità se non è facilmente interpretabile da un operatore umano.

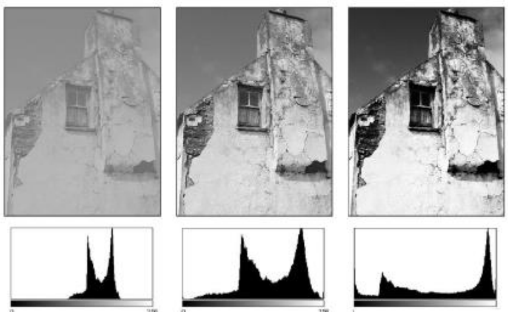
Strumenti per il rinforzo: istogramma

I pixel di un'immagine possono essere considerati una popolazione su cui possono essere applicate tutte le quantità statistiche descrittive (media, mediana, varianza, deviazione standard ...). Particolarmente utile è la conoscenza della distribuzione delle frequenze dei toni grigi, rappresentabile attraverso un istogramma. Per ogni livello di grigio viene riportato il numero di pixel di quel colore. Otteniamo così $H(r) = \#pixel$ dove $\sum_{r=0}^{L-1} H(r) = M \cdot N$. L'istogramma non tiene conto della distribuzione spaziale dei pixel: questo significa che immagini diverse possono avere istogrammi simili (o identici). Di conseguenza, non è possibile ricostruire all'immagine partendo da un istogramma. L'istogramma permette di osservare in modo chiaro il contrasto di un'immagine, ovvero il rapporto tra il valore più alto (punto più luminoso) ed il valore più basso (punto più scuro) della luminosità. A seconda della distribuzione dei picchi dell'istogramma possiamo suddividere le immagini in tre categorie: a basso contrasto, a contrasto di acquisizione o ad alto contrasto. Altra classificazione delle



H(r)	0	2	10	0	0	0	5	7	3	9	1	6	3	6	3	2
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15





basso contrasto | contrasto di acquisizione | alto contrasto immagini che possiamo ottenere dall'analisi dell'istogramma è la suddivisione in immagine chiara o immagine scura: un'immagine è chiara se l'istogramma presenta valori più alti sulla destra. Al contrario, un'immagine è scura se l'istogramma presenta valori più alti sulla sinistra. Chiara e scura sono caratteristiche dell'immagine; se un'immagine, durante l'acquisizione, varia il suo livello di luminosità verso il chiaro si dice sovraesposta, se lo varia verso lo scuro si dice sottoesposta.

Elaborazione delle immagini

L'elaborazione delle immagini può essere effettuata nel dominio spaziale o nel dominio frequenziale (dopo l'applicazione delle TdF discreta 2D). Nel dominio spaziale, l'elaborazione può essere espressa come $g(x,y) = T[f(x,y)]$, essendo f l'immagine d'ingresso e g quella di uscita, con T un operatore su f definito in un intorno di (x,y). Esistono tre tipi di elaborazione, che dipendono dall'intorno che prendiamo in considerazione: le operazioni puntuali (l'intorno corrisponde al pixel stesso), locali (l'intorno rappresenta una regione attorno al pixel (x,y)) e globali (l'intorno rappresenta l'intera immagine f).

OPERAZIONI PUNTUALI

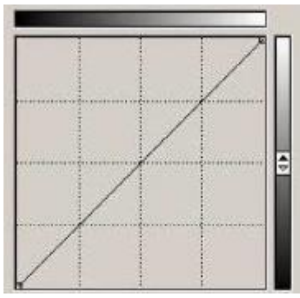
Si dice operatore puntuale, un operatore che preso in input un valore di un pixel, ne restituisce uno cambiato che dipende esclusivamente dal valore del pixel in ingresso ($s = T(r)$ con $s,\ r \in [0, 255]$). Le operazioni puntuali vengono utilizzate principalmente per variare il contrasto, aumentando o diminuendo il valore di grigio del singolo pixel, per rendere più o meno evidenti le differenze strutturali dell'oggetto rappresentato. L'operazione puntuale da applicare viene scelta valutando la disposizione dell'istogramma e della look – up – table (LUT), ovvero la rappresentazione della funzione puntuale.

Identità

L'identità è l'operazione più semplice: non cambia nulla.

PRIMA

DOPO



LUT

FORMULA: $s = r$

Negativo

Il negativo viene utilizzato quando si hanno dettagli grigi immersi in zone nere che si vogliono evidenziare; questo perché l'occhio umano percepisce meglio dettagli scuri su sfondi chiari (es. mammografie).

PRIMA

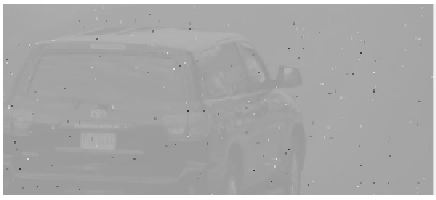
DOPO

LUT

FORMULA: $s = L - 1 - r$ oppure se ho livelli di grigio $s = 255 - r$

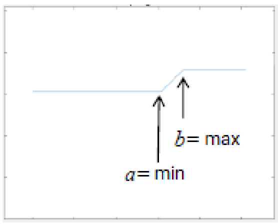
Clamping

Il clamping limita le intensità ad un range definito $[a, b]$; viene utilizzato nel caso ci siano dei pixel di rumore molto chiari o molto scuri che voglio mascherare (es. immagini con rumore impulsivo)



PRIMA

DOPO

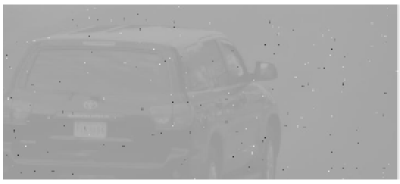


LUT

FORMULA: $T(r) = \begin{cases} a \text{ se } r < a \\ r \text{ se } a \leq r \leq b \\ b \text{ se } r > b \end{cases}$

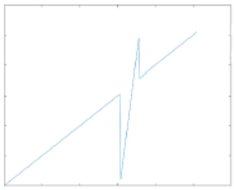
Stretching (o shrinking)

Lo stretching stira/comprime le intensità di un range $[r_{min}, r_{max}]$ ad un range $[a, b]$. Se i valori ottenuti dalla formula non sono numeri naturali, vengono arrotondati. Se l'immagine passa da valori scuri a valori più chiari, la LUT è speculare in orizzontale.



PRIMA

DOPO



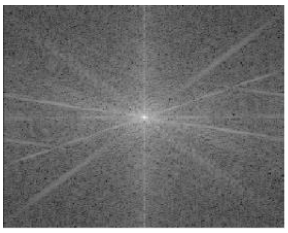
LUT

FORMULA: $s = [\frac{r - r_{min}}{r_{max} - r_{min}}]\ [b - a]\ +\ a$

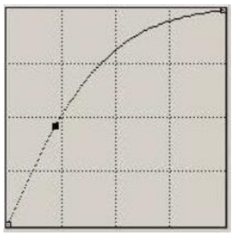
Trasformazione logaritmica

La trasformazione logaritmica viene utilizzata per mappare fasce strette di valori dell'immagine originale in fasce più ampie, aumentandone così il contrasto.

PRIMA



DOPO



LUT

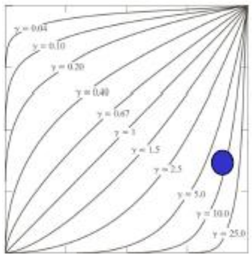
FORMULA: $s = c\ log\ (1 + r)$,dove c è una costante di normalizzazione pari a $c = \frac{L}{log(1+L)}$ che serve a mappare i valori nell'intervallo $[0, L]$

Trasformazione di potenza

La trasformazione di potenza ha un utilizzo simile alla trasformazione logaritmica; in questa trasformazione, però, è necessario specificare i valori di c e di γ: se $\gamma < 1$ la trasformazione ha effetti analoghi a quella logaritmica, per $\gamma > 1$ ha effetti opposti. c è scelto in dipendenza di γ in modo da normalizzare i valori nell'intervallo $[0,255]$. Essendo molto difficile da trovare viene applicato uno stretching alla trasformazione di potenza normalizzata.

PRIMA

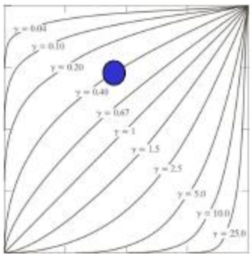
DOPO - $\gamma = 10$



LUT

PRIMA

DOPO - $\gamma = 0.4$



LUT

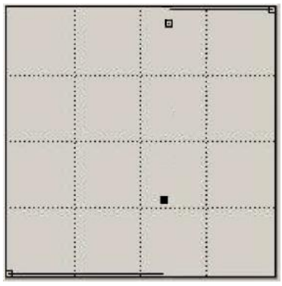
FORMULA NORMALIZZATA: $\tilde{s} = r^{\gamma}$, FORMULA: $s = [\frac{\tilde{s}-\tilde{s}_{min}}{\tilde{s}_{max} - \tilde{s}_{min}}]\,[MAX - MIN] + MIN$ con $\tilde{s}_{min/max}$ *i livelli di grigi e* MAX/MIN il massimo ed il minimo livelli di grigi possibili (es. 255,0)

Binarizzazione

Produce un'immagine che ha solo due livelli: nero e bianco. Viene utilizzata per discriminare un oggetto dalla scena. La difficoltà nell'uso di questa operazione sta nel trovare la soglia T corretta. Esiste quindi la binarizzazione col metodo di Otsu, che cerca la soglia che minimizza la varianza intra - classe.

PRIMA

DOPO



LUT

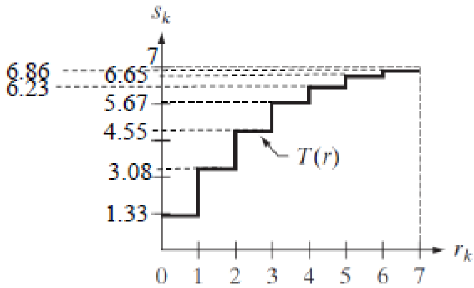
FORMULA: $s = \begin{cases} 255 \text{ se } r > T \\ 0 \text{ se } r \leq T \end{cases}$

Equalizzazione

Un’immagine si dice equalizzata se il contributo di ogni tonalità di grigio è simile; questo comporta che l’istogramma sia piatto o uniforme e che quindi sia più interpretabile dal nostri cervello. L’algoritmo cerca di rendere la distribuzione uniforme, ovvero con ogni valore indipendente massimamente significativo.

PRIMA

DOPO

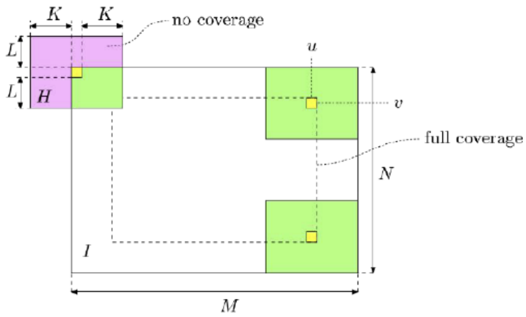


LUT

FORMULA: $s = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n}, k = 0, 1, \dots, L-1$ dove n_j è il numero di pixel con una certa tonalità di grigio, n il numero totale di pixel e sono presenti $L-1$ tonalità di grigio nell’immagine.

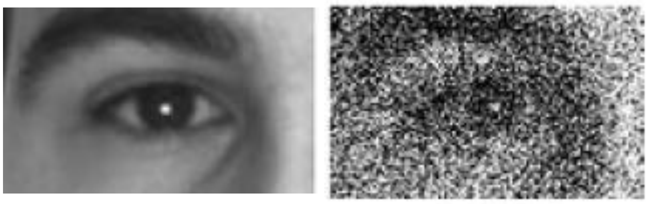
OPERAZIONI LOCALI

Le operazioni locali modificano il valore di un pixel osservandone un certo intorno. Vengono spesso usate per migliorare la qualità dell’immagine o per estrarre informazioni dalla stessa. Se il filtraggio è effettuato tramite l’elaborazione T sull’immagine, si parla di filtraggio spaziale. Le due categorie di operazioni locali principali sono i filtraggi spaziali lineari e i filtraggi spaziali non lineari; un filtraggio è lineare se consiste nell’effettuare la convoluzione tra l’immagine ed un filtro (kernel) prendendo il nome di filtraggi lineari. I filtraggi lineari sono afflitti da un problema: l’intorno può cadere in una zona esterna all’immagine. Per risolvere questo problema esistono diversi modi; il **cropping** prevede che il filtro venga eseguito solo dove l’intorno cade all’interno dell’immagine, lasciando quindi scoperta una zona. Il **padding**, invece, prevede l’aggiunta di 0 attorno all’immagine, fino a coprire l’intorno. L’ultima alternativa è la **replicazione**: in questo caso, l’immagine viene estesa duplicando i valori dei pixel esterni fino a coprire la superficie dell’intorno.



Rumore nelle immagini

Il rumore è un disturbo dell'immagine introdotto casualmente dal sistema di acquisizione o dal mezzo di propagazione, che ne degrada la qualità. Data l'immagine f, l'immagine con rumore $\varepsilon(n,m)$ è definita $\tilde{f}(n,m) = f(n,m) + \varepsilon(n,m)$. La quantità di rumore viene stimata attraverso la SNR (signal to noise ratio) che viene espressa in varie forme. Una delle più utilizzate, la versione mean square, è definita dalla formula $SNR_{ms} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\tilde{f}(n,m)^2}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}[\tilde{f}(n,m)-f(n,m)]^2}$. Esistono principalmente due tipi di rumore: il rumore gaussiano additivo bianco e il rumore impulsivo. Il rumore gaussiano additivo bianco è un processo stocastico (variabile aleatoria che emette valori casuali nel tempo o nello spazio) che si somma al segnale pulito. Non è un segnale periodico, per cui i valori vengono prodotti secondo la probabilità $P(\varepsilon(n,m) = l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\{\frac{(l-0)^2}{2\sigma^2}\}}$ ossia seguendo una distribuzione gaussiana di media = 0 ed una varianza σ^2 dove più è alta la varianza, più rumorosa sarà l'immagine finale. L'altra forma di rumore è quello impulsivo; chiamato anche rumore sale e pepe, viene causato da alterazioni brusche del segnale. È parametrizzato da una variabile D, una percentuale che rappresenta la densità: maggiore sarà questa percentuale, maggiore sarà il numero di pixel corrotti.

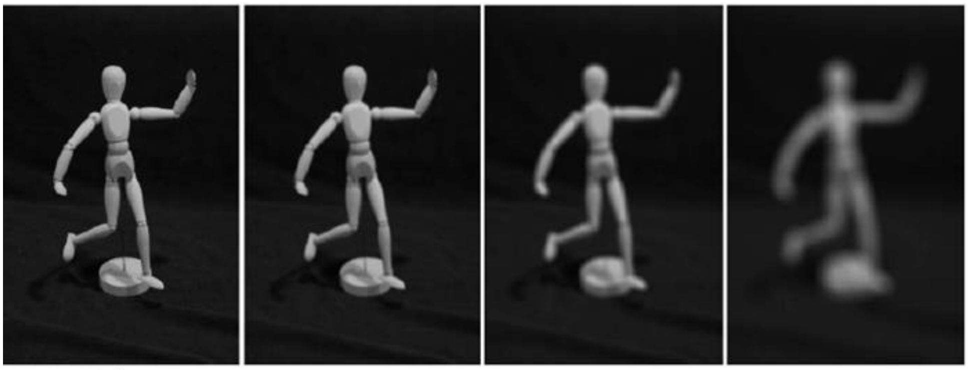


Filtraggio

Esistono tre tipologie principali di filtraggio: smoothing, sharpening e estrazione di caratteristiche. I filtri di **smoothing** servono per aumentare il SNR. I filtri di **sharpening** basano il loro funzionamento sul calcolo delle derivate; servono ad aumentare il grado di dettaglio delle immagini e spesso sono usati come post processing dei filtri di smoothing. Possono incrementare il rumore di un'immagine. L'**estrazione delle caratteristiche**, infine, estrae rappresentazioni alternative alle immagini, di partenza che ne evidenziano aspetti particolari.

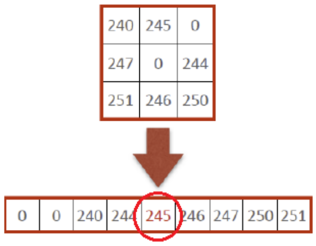
Filtro media

Il filtro media è un filtro di smoothing usato per eliminare il rumore Gaussiano; è un filtraggio lineare, attuato attraverso la convoluzione dell'immagine con la maschera di media. La maschera di media è una matrice K x K (con K dispari) i cui coefficienti sono tutti uguali e pari a $\frac{1}{K^2}$ (quindi la somma dei valori del kernel è 1). In pratica, dato un punto ed il suo intorno, sostituisce nel punto ma media dei valori del suo intorno. L'immagine ottenuta con questo filtro risulta quindi addolcita rispetto ai bordi degli oggetti. Da notare che il filtro di media lascia inalterata la somma dei livelli di grigio nell'immagine (a meno di padding).



originale | 7 x 7 | 15 x 15 | 41 x 41

Filtro mediano



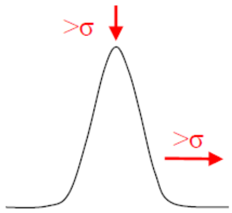
Il filtro mediano è un filtraggio di smoothing non lineare, usato per rimuovere il rumore impulsivo. Preso un punto ed il suo intorno, il filtro ordina i valori e sostituisce il valore del pixel con la mediana appena ottenuta dall'intorno. Questa tipologia di filtraggio è solitamente efficace, in quanto è una stima robusta del filtro di media. Se è presente del rumore impulsivo, applicando il filtro di media otterremo un intorno affetto ancora da quel problema, al contrario del filtro mediano.


Immagine con rumore impulsivo


Filtro di media


Filtro mediano

Filtro Gaussiano



Il filtro Gaussiano è un filtro di smoothing che consiste nell'applicare una media pesata ad un intorno di un pixel: i pesi più vicini al centro della maschera hanno valori più alti. Viene quindi effettuato uno smoothing più lieve, preservando i contorni in modo migliore. Il filtro Gaussiano, anche se preserva molto meglio la struttura, rimuove meno rumore dalle immagini rispetto al filtro di media. La potenza dello smoothing è determinata dalla deviazione standard σ: maggiore è il valore, maggiore sarà lo smoothing.

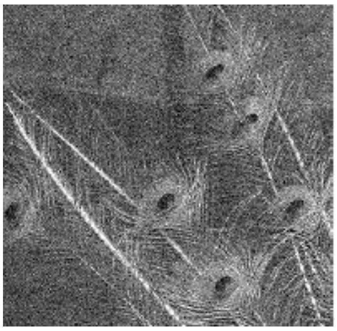
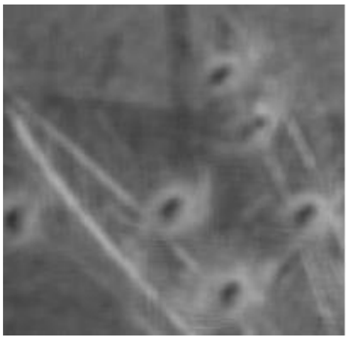
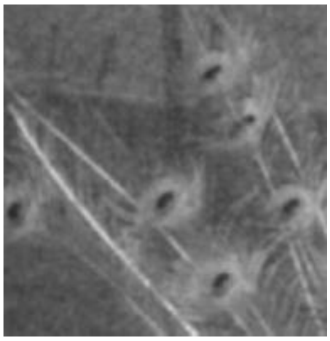
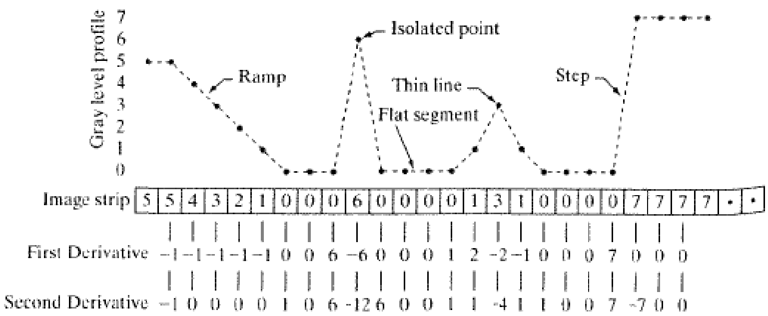


Immagine con rumore impulsivo


Filtro di media


Filtro Gaussiano - $\sigma = 1.7$

Filtraggi di sharpening



I filtraggi di sharpening basano il suo funzionamento sulle proprietà della derivata prima e seconda: la derivata prima è nulla in regio di intensità costante e non nulla in presenza di variazioni di intensità, la derivata seconda è nulla in regioni di intensità stabile o in presenza di variazioni costanti di intensità (rampe) e, invece, non nulla in presenza di variazioni non costanti (inizio e fine delle rampe). Considerando le immagini come funzioni bidimensionali e analizzandole con le derivate, possiamo estrarre gli edge di un'immagine (che altro non sono che una particolare discontinuità). La derivata prima produce edge "thick", mentre la derivata seconda produce edge più sottili, avendo una migliore risposta su dettagli fini e punti isolati. Anche per questo, la derivata seconda ha maggiore possibilità di mantenere il rumore. Applicare la derivata sull'asse delle x o su quelle delle y mi permette di estrarre elementi diversi.

I | $I_x = \partial_x \circledast \mathrm{I}$ | $I_y = \partial_y \circledast \mathrm{I}$

Un importante filtro basato sulla derivata seconda è il filtro Laplaciano; filtro isotropico (risposta invariante a rotazione), è descritto: $\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = [I(x+1,y) + I(x-1,y) + I(x,y+1) + I(x,y-1)] - 4I(x,y)$. Da questo filtro vengono ricavate delle maschere di filtraggio dette laplaciane, che hanno la caratteristica di avere coefficienti positivi vicini al centro e negativi alla periferia, la cui somma è 0.

Basic highpass spatial filtering

La **basic highpass spatial filtering** è un filtro di smoothing che usa una maschera laplaciana H. Il fatto che la maschera laplaciana sia fatta in quel particolar modo, garantisce un output di 0 su regioni di grigio stabili. L'immagine finale, così, mostrerà tutti (e solo) i dettagli.

Sharpening con Laplaciano

Lo sharpening con laplaciano è un tipo di filtraggio lineare; utilizza il basich highpass spatial filtering per creare un'immagine con gli edge amplificati che va a sommare all'immagine di partenza per rinforzarla. Utilizza la formula $g(m,n) = T([f(m,n)]) = f(m,n) + c \cdot h \circledast \mathrm{f}(\mathrm{m},\mathrm{n})$ con h maschera laplaciana e c costante 1 se la maschera ha il pixel centrale positivo, -1 altrimenti. Inoltre, è spesso possibile determinare una variabile α che è presente nella maschera laplaciana per segnalare l'importanza da assegnare agli edge:

$$h = \frac{1}{\alpha+1}\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \\ \alpha-1 & \alpha+5 & \alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

con $\alpha = \begin{cases} \alpha = 0 & \rightarrow verticali\ e\ orizzontali \\ \alpha = 1 & \rightarrow diagonali \\ \alpha = 0.5 & \rightarrow tutti \end{cases}$

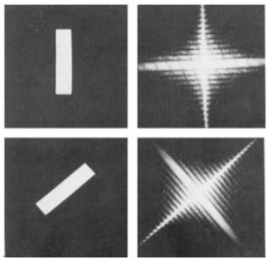
Originale | $\alpha = 0.5$

High boost filtering

L'high boost filtering è una generalizzazione di una maschera di unsharp. Definiamo una immagine coma filtrata passa alto (high pass) se $I_{hp} = I_{start} - I_{smooth\_filtered}$. L'high boost filtering, definita A fattore di amplificazione degli edge, è $highBoost = A \cdot I_{start} + I_{hp}$. Se $A = 1$ il filtro diventa un normale filtro di sharpening con laplaciano.

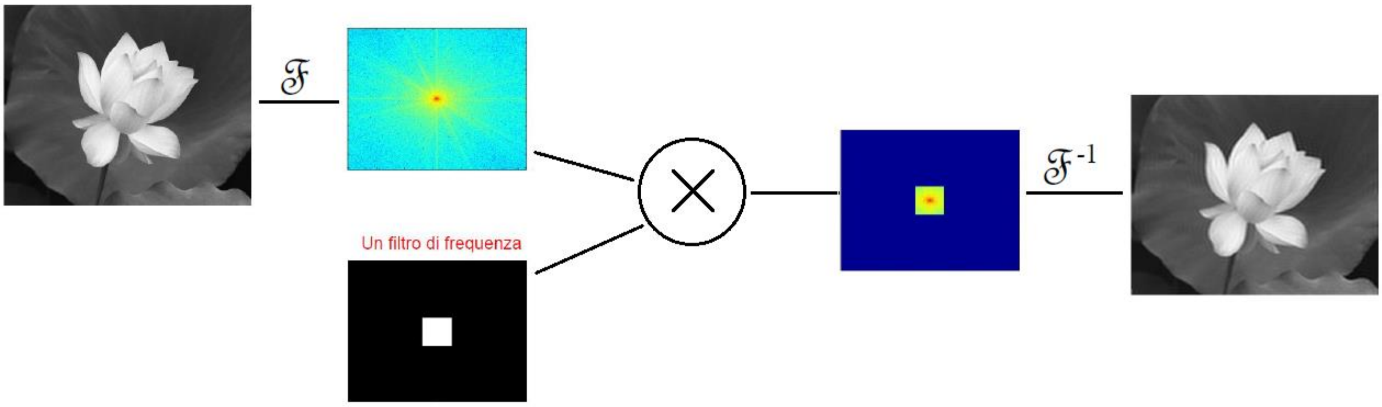
RINFORZO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

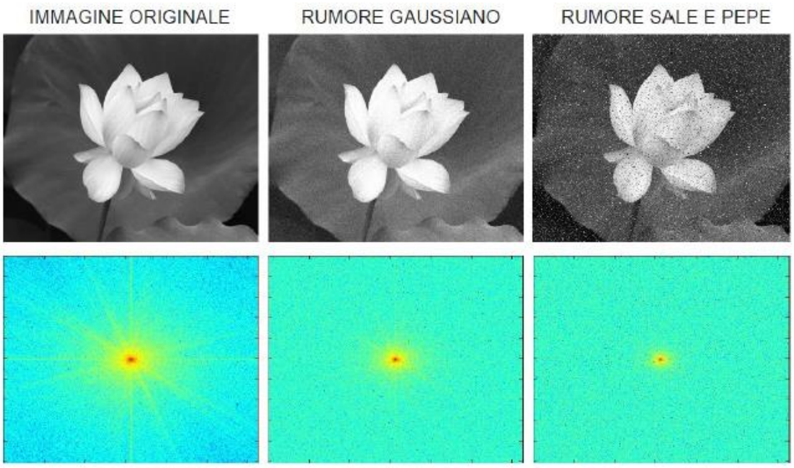
Il dominio delle frequenze



Per poter eseguire delle operazioni di rinforzo delle immagini nel dominio delle frequenze, abbiamo bisogno di poter utilizzare la DFT in un ambiente 2D. A questo proposito, la nuova formula sarà: $F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y)}$. La DFT 2D gode della proprietà di traslazione e di rotazione: la proprietà di traslazione indica che se l'immagine viene spostata, il risultato della sua trasformata sarà a sua volta spostato. La proprietà di rotazione, invece, specifica che se l'immagine viene ruotata di un angolo θ, viene ruotata anche la trasformata di Fourier di quell'angolo.

Utilizzando la DFT 2D posso filtrare in frequenza: dopo aver progettato il filtro in frequenza H, calcolo la TDF dell'immagine F. Applico la convoluzione $F * H$ e antitrasformo il prodotto. Se il filtro H è un filtro spaziale, eseguo un'operazione di zero – padding e poi applico i processi descritti precedentemente.





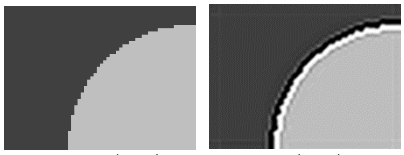
Nel dominio delle frequenze troviamo lo stesso tipo di rumore che avevamo nel dominio spaziale: il rumore gaussiano ed il rumore sale e pepe. Il rumore porta ad un aumento delle frequenze: riducendo quindi le alte frequenze riusciamo ed eliminare il rumore. Infatti, l'informazione a basse frequenze corrisponde a zone dell'immagine con lente variazioni d'intensità, come muri o nuvole. Al contrario, le zone ad alte frequenze, corrispondono a parti in cui abbiamo variazioni repentine come spigoli, angoli e rumore. Per questo, ridurre le alte frequenze significa togliere livello di dettaglio all'immagine.

Filtri passa alto e passa basso

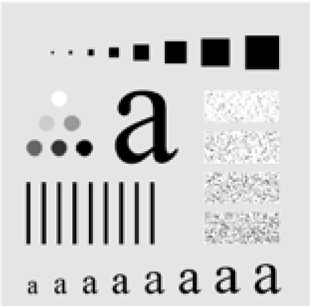
Passa alto e passa basso sono due tipologie di filtri che permettono di rimuovere dall'immagine un determinato tipo di frequenze. Il filtro **passa basso** rimuove dall'immagine le informazioni ad alte frequenze, lasciando solo quelle a basse. Il filtro **passa alto**, invece, rimuove le basse lasciando le alte frequenze. Ognuno di questi filtri è derivabile dall'altro: $H_{pa} = 1 - H_{pb}$ e $H_{pb} = 1 - H_{pa}$.

Filtri passa basso

Il miglior filtro passa basso (chiamato ideale) ha la trasformata in frequenza che è pari ad una box. Questo, digitalmente, è impossibile perché un filtro del genere crea un effetto di **ringing**: il ringing (o effetto di Gibbs) è dovuto al fatto che per avere come TDF una box, la funzione spaziale di partenza deve essere una sinc (e quindi ha più punti maggiori di 0). Visivamente, il ringing appare come bande vicino ai bordi.



senza ringing con ringing



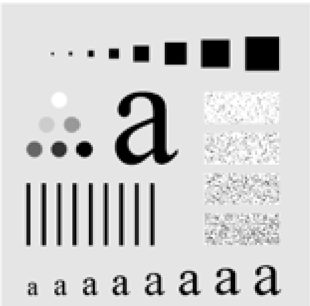
ORIGINALE

FILTRO

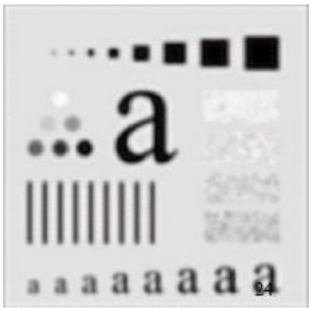
$$H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ se } D(u,v) \le D_0 \\ 0 \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$
con $D_0 = \mu_c$

FORMULA

Questo implica che vengano mantenute solo le frequenze nel cerchio D_0. Una variante del filtro ideale è il filtro **passa basso di Butterworth**. Questo particolare filtro ha un'attenuazione dolce in prossimità della frequenza di taglio che lo rende meno soggetto a ringing.



ORIGINALE

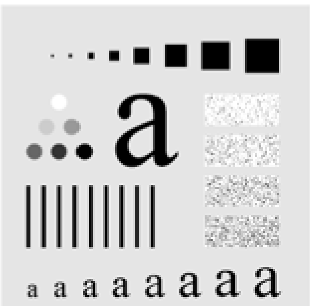


FILTRO

$$H(u,v) = \frac{1}{1+(D(u,v)/D_0)^{2n}}$$

FORMULA

Altro filtro passa basso è il filtro **Gaussiano**. Questo filtro si basa sull'utilizzo di una gaussiana (la cui curva è determinata da σ). La TdF^{-1} di una gaussiana è un'altra gaussiana: a livello pratico, un filtro gaussiano spaziale ottenuto da un gaussiano frequenziale non avrà ringing.



ORIGINALE

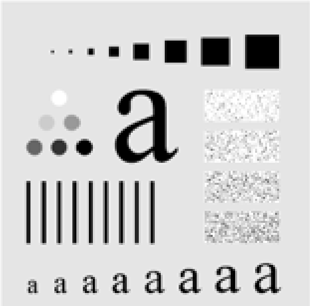
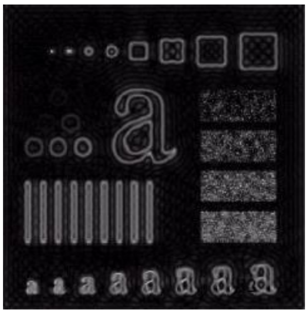
FILTRO

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$ con $D_0 = \sigma$

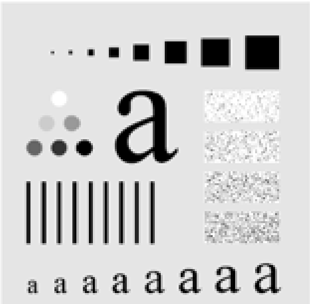
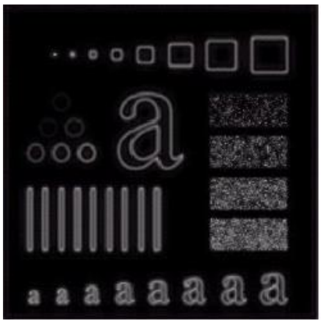
FORMULA

Filtri passa alto

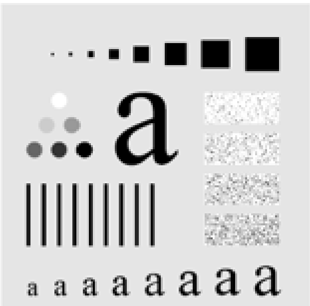
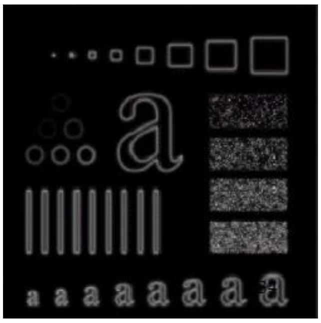
Il filtro passa alto ideale permette che vengano mantenute solo le frequenze fuori dal cerchio D_0.

		$H(u,v) = \begin{cases} 0 \text{ se } D(u,v) \le D_0 \\ 1 \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$ con $D_0 = \mu_c$
ORIGINALE	FILTRO	FORMULA

Una variante del filtro ideale è il filtro **passa alto di Butterworth**, con prestazioni sono comparabili.

		$H(u,v) = \frac{1}{1+(D(u,v)/D_0)^{-2n}}$
ORIGINALE	FILTRO	FORMULA

Altro filtro passa alto è il filtro Gaussiano. Questo filtro genera immagini più smooth rispetto ai precedenti.

		$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$
ORIGINALE	FILTRO	FORMULA

Altri filtri

Il **filtro omeomorfo** attenua il contributo delle basse frequenze e aumenta quello delle alte frequenze. Viene ottenuto moltiplicando un filtro passa alto con una costante.

		$H(u,v) = 1 + k\, H_{pa}(u,v)$
ORIGINALE	FILTRO	FORMULA

Il filtro passa banda permette di fermare tutte le frequenze al di fuori di un intervallo di frequenze specificato. Il filtro ferma banda, agisce al contrario. In modo analogo a quanto visto coi filtri passa basso e passa alto, un filtro è ottenibile dall'altro: $H_{pbn} = 1 - H_{ebn}$ e $H_{ebn} = 1 - H_{pbn}$