Exercícios de matemática discreta - Relações de equivalência e de ordem.

Exercícios

1) Para cada uma das relações em A, determine se é: reflexiva; simétrica; anti-simétrica; transitiva, sendo $A = \{1, 2, 3\}$

a) $R_1 = \{ (1,2), (1,1), (2,2), (2,1), (3,3) \}$

b) $R_2 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3) \}$

c) $R_3 = \{ (1,1), (2,2), (1,2), (2,3), (3,1) \}$

d) $R_4 = AxA$

2) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Defina relações em A tais que:

a) R_1 : só tenha a propriedade reflexiva;

b) R_2: só tenha a propriedade simétrica;

c) R_3: só tenha a propriedade transitiva;

d) R_4: só tem a propriedade anti-simétrica;

e) R_5: é reflexiva e simétrica, mas não transitiva;

f) R_6: é reflexiva e transitiva, mas não simétrica.

3) Podemos ter uma relação que não é simétrica nem anti-simétrica? Exemplifique.

4) Podemos ter uma relação simultaneamente simétrica e anti-simétrica? Exemplifique.

5) Cada um dos enunciados abaixo define uma relação em A nos números naturais (IN). Verifique, em cada caso, se a relação é reflexiva, simétrica ou transitiva:

a) " x é menor ou igual a y"

b) "x divide y"

c) "$x + y = 4$"

6) Sejam R e S relações em um conjunto A, $A \neq \emptyset$. Verifique se é V ou F cada uma das afirmações a seguir:

a) Se R é simétrica, então R^{-1} é simétrica.

b) Se R é anti-simétrica, então R^{-1} é anti-simétrica.

c) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

d) Se R é simétrica, então $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

e) Se R é transitiva e S é transitiva, então $R \cup S$ é transitiva.

f) Se R é transitiva e S é transitiva, então $R \cap S$ é transitiva.

g) Se R é anti-simétrica e S é anti-simétrica, então $R \cup S$ é anti-simétrica.

h) Se R é anti-simétrica e S é anti-simétrica, então $R \cap S$ é anti-simétrica.

i) Se R é reflexiva e S é reflexiva, então $R \cup S$ é reflexiva.

j) Se R é reflexiva e S é reflexiva, então $R \cap S$ é reflexiva.

7) Verifique se as relações a seguir, definidas em IR, são relações de ordem ou de equivalência. Justifique sua resposta.

a) $x \, R \, y \Leftrightarrow x - y = 8$

b) $x \, R \, y \Leftrightarrow y \leq x^2$

c) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y$

d) $x \, R \, y \Leftrightarrow x \neq y$

e) $x \, R \, y \Leftrightarrow x < y$

f) $x \, R \, y \Leftrightarrow x \leq y$

8) Avalie se as relações abaixo possuem as propriedades reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva:

(a) $x \, R \, y \Leftrightarrow x - y = 5$	(b) $x \, R \, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$	(c) $x \, R \, y \Leftrightarrow y \leq x^2$
(d) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y^1$	(e) $x \, R \, y \Leftrightarrow y = e^x$	(f) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y$
(g) $x \, R \, y \Leftrightarrow x < y$	(h) $x \, R \, y \Leftrightarrow x \neq y$	(i) $x \, R \, y \Leftrightarrow x.y$ é par

9) Classifique as relações do exercício anterior como 'de ordem', 'de equivalência', 'de ordem e de equivalência' ou 'nem de ordem e nem de equivalência'.

10) Seja R a relação definida por: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$, onde $a,b,c,d \in$z. Prove que a relação R é uma relação de equivalência. (Lembrete: Uma prova não pode ser construída através de exemplos)

11) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer não vazios, e *R* uma relação tal que $\mathrm{A}R\mathrm{B} \Leftrightarrow A \subseteq B$. Prove que esta é uma relação de ordem. (Lembrete: Uma prova não pode ser construída através de exemplos)

12) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11} onde está definida a relação binária R em A como: $\{\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x \equiv y (\mathrm{mod}\, 5)\}$. Quais são as classes de equivalência dessa relação ? Descreva os elementos de A que pertencem a cada classe.