Disciplina: Projeto e Otimização de Algoritmos

Professor: Rafael Scopel

Trabalho 01

Arthur Both, Felipe Freitas e Gabriel Ferreira

Sumário

Problema 1 – Juros

1. O problema

Vocês estão abrindo uma empresa de modelos generativos e precisam de recursos para desenvolver 'n' diferentes modelos. O membro do time que era responsável por finanças, contratou 'n' empréstimos no valor de $ 1000 cada de vários bancos diferentes. O valor dos empréstimos fica mais caro de acordo com o passar do tempo: em particular, o empréstimo 'j' aumenta por uma taxa de juros 'rj' > 1 em cada mês, onde 'rj' é um determinado parâmetro. Isso significa que se o empréstimo 'j' for pago daqui a 't' meses, vocês terão que devolver ao banco {1000 · '(rj)^t'}.

Assumiremos que todas as taxas de juros são distintas; isto é, 'ri' != 'rj' para taxas 'i' != 'j'.

Dado que a empresa só tem recursos para pagar um empréstimo por mês, em que ordem ela deve pagar os empréstimos para que o valor total gasto seja o menor possível?

2. O Algoritmo

Para resolver o problema, temos de desenhar e implementar um algoritmo que considere as 'n' taxas de juros de preços 'r1', 'r2', […] , 'rn', e calcule uma ordem de pagamento dos empréstimos para que o valor total gasto seja minimizado. Este algoritmo deve ter tempo de execução polinomial em 'n'.

O primeiro passo do algoritmo é ordenar o vetor com os empréstimos, o que tem complexidade de O(n log n).

Ordenado o vetor, basta pegar os valores do vetor em ordem.

3. Análise do Algoritmo

Sabemos que o algoritmo funciona visto que, dada uma taxa de juros in e outra taxa de juros in+1, como ambas iniciaram no mesmo ponto, é impossível que o empréstimo de menor juros ultrapasse o outro com o passar do tempo. Outro fator que contribui para isso é o fato de todos os empréstimos serem sobre a mesma base e um empréstimo apenas pode ser pago por mês.

4. Implementação e Tempo de Execução

O código foi implementado tendo como base o número de empréstimos sendo 100, representado por “i”, seguindo a fórmula 1.001 + (i x 0.001), em que cada iteração consta um número diferente com base no empréstimo em questão. O programa imprime qual o empréstimo que está sendo pago, ao final de toda operação é mostrado que todos foram pagos e sua velocidade de execução.

```
Mês 1:
Empréstimo 100 pago.
Valor pago: R$1100.0000
==========================================
Mês 2:
Empréstimo 99 pago.
Valor pago: R$1207.8010
==========================================
Mês 3:
Empréstimo 98 pago.
Valor pago: R$1323.7532
==========================================
Mês 99:
Empréstimo 2 pago.
Valor pago: R$1218.7214
==========================================
Mês 100:
Empréstimo 1 pago.
Valor pago: R$1105.1157
==========================================
Todos os empréstimos foram pagos.
Valor total gasto: R$664677.62
Tempo de execução: 715ms
Complexidade = O(n log n) + O(n) = O(n log n)
```

```
------------------------------------------
Todos os empréstimos foram pagos.
Valor total gasto: R$664677,62
Tempo de execução: 106ms
Complexidade = O(n log n) + O(n) = O(n log n)

Process finished with exit code 0
```

Ele opera com a com a complexidade de O(n log n), já que os métodos para encontrar o empréstimo de maior taxa, pagar um empréstimo e avançar o mês, são dependentes do vetor que define o número de empréstimos.

Problema 2 – Multiplicação de Matrizes

1. O problema

Multiplicar matrizes é um problema que aparenta ser relativamente simples, e é amplamente utilizado em diversas áreas além da computação. A solução convencional de multiplicar uma matriz m x n por outra matriz n x p era tida como, até 1969, impossível de resolver em um tempo menor que $\theta(n^3)$, porém, inconformado com a afirmação, Volker Strassen propôs um algoritmo para provar que há um método mais eficiente para resolver este problema.

2. O Algoritmo

O algoritmo original de multiplicação de matrizes pode ser expresso mais ou menos da seguinte maneira (em pseudo-código):

```
Matriz A = [1 2 3
    4 5 6
    7 8 9]
Matriz B = [1 2 3
    4 5 6
    7 8 9]
Matriz C = []
Para i = 1 Até m Faça
    Para j = 1 Até p Faça
        C[i][j] = 0
        Para k = 1 Até n Faça
            C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j]
        FimPara
    FimPara
FimPara
```

O algoritmo acima apesar de resolver o problema da multiplicação, é muito complexo e possui complexidade $O(n^3)$ (por ter 3 laços que se repetem um dentro do outro), o que não é ideal.

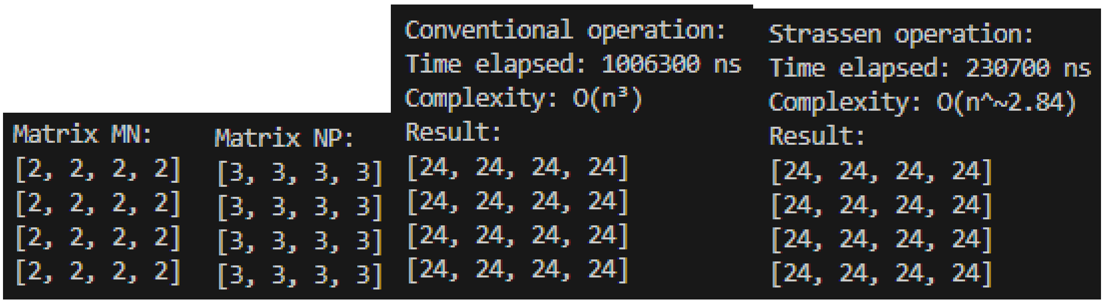
Para resolver este problema, ao menos parcialmente, Strassen idealizou um algoritmo capaz de multiplicar matrizes quadradas com lado de tamanho 2^n, isto é, matrizes que possuem o mesmo número de linhas e colunas e que, também, tenham como lado um valor que seja uma potência de 2 (ex: 2, 4, 8, 64, 512). Baseado na técnica de divisão e conquista, faz uma abordagem diferente de multiplicar as matrizes diretamente e opta por fazer várias divisões menores/parciais.

Em alto nível, o algoritmo de Strassen realiza 3 operações principais:

1. Dividir a matriz em 4 submatrizes
2. Calcular 7 produtos intermediários, por meio de chamadas recursivas
3. Combinar os produtos intermediários para obter uma nova matriz com os resultados

3. Análise do Algoritmo

Apesar de realizar menos multiplicações e, por tanto, não ter um custo de $O(n^3)$ como o original, o preço a se pagar por isso é o de memória, visto que a recursão em diversas submatrizes menores gera maior necessidade de armazenamento. Rodando o algoritmo com duas matrizes 4x4, a primeira preenchida com 2's e a segunda com 3's, obtivemos os seguintes resultados:



4. Implementação e Tempo de Execução

Para atingir uma complexidade de aproximadamente $O(n^{\log_2(7)})$, vamos assumir T(n) como o tempo de execução deste algoritmo para multiplicar duas matrizes n x n. Voltando aos 3 passos anteriores (ver seção 2), sabemos que o passo 1 (Divisão) possui custo O(1), visto que apenas cria referências para as matrizes novas; o passo 2 (7 Cálculos intermediários) possui custo 7*T(n/2), visto que opera sobre meia matriz; e o passo 3 (Combinação) possui custo $O(n^2)$, por realizar certas operações entre matrizes que não são otimizáveis.

Juntando tudo, temos que $T(n) = O(1) + 7 * T(n/2) + O(n^2)$

Aplicando o Teorema Mestre com as variáveis:

a = 7

b = 2

$f(n) = O(n^2)$

Temos que

c = 2

$\log_b a = \log_2 7 \sim= 2.81$

Portanto, o algoritmo de Strassen executa em tempo inferior à $O(n^3)$, provando-se, nos casos em que é aplicável, uma ótima alternativa a multiplicação convencional.

Fontes:

Slides de Aula

https://www.tutorialspoint.com/design_and_analysis_of_algorithms/design_and_analysis_of_algorithms_strassens_matrix_multiplication.htm#:~:text=Strassen's%20Matrix%20Multiplication%20is%20the,takes%20two%20loops%20to%20multiply