Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Ce contrôle contient deux épreuves : une première sur l'ECUE ASN et une seconde sur l'ECUE PSE. Il y aura donc une note par épreuve. À vous de gérer votre temps, mais le sujet est calibré pour 45 minutes sur ASN et 15 minutes sur PSE.
N.B. : le barème de chaque épreuve est sur 20.

Épreuve 1 : Analyse et Séries Numériques NOTE ASN : /20

Exercice 1 : comparaisons de suites (6 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. Donner des équivalents simples en $+\infty$ de u_n et de $u_n - \frac{1}{n}$. Justifier brièvement.

   ....

   ....

2. Dans chacun des cas suivants, les hypothèses permettent-elles de trouver un développement limité de (w_n) à l'ordre demandé ? En cas de réponse positive, donner ce développement limité. En cas de réponse négative, justifier.

   (a) $w_n = u_n + v_n$ à l'ordre 2.

   ....

   ....

   (b) $w_n = u_n + v_n$ à l'ordre 3.

   ....

   ....

   (c) $w_n = u_n \times v_n$ à l'ordre 2

   ....

   ....

   ....

   (d) $w_n = u_n \times v_n$ à l'ordre 3

   ....

   ....

   ....

   (e) $w_n = \ln(v_n)$ à l'ordre 2

   ....

   ....

   ....

   (f) $w_n = \ln(v_n)$ à l'ordre 3

   ....

   ....

   ....

Exercice 2 : méthodes de comparaison (7 points)

1. Considérons deux suites (u_n) et (v_n) positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

   (a) Quels liens d'implications existent-t-ils entre les propriétés «$\sum u_n$ converge», «$\sum u_n$ diverge», «$\sum v_n$ converge» et «$\sum v_n$ diverge» ?

   (b) Démontrer ces implications.

   (c) Application : déterminer la nature de $\sum \left(\dfrac{1-\cos(n)}{n^2} \right)$.

2. Déterminer la nature de $\sum \left(\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$.

Exercice 3 : règle de Cauchy (3 points)

1. Énoncer la règle de de Cauchy pour les séries numériques.

2. En utilisant la règle de Cauchy, déterminer la nature de $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 4 : critère spécial des séries alternées (4 points)

1. Énoncer avec soin le critère spécial des séries alternées.

2. Pour chacune des séries suivantes, est-ce que ce critère peut être utilisé pour trouver sa nature ? Justifier votre réponse et, en cas de réponse positive, donner la nature de la série.

   (a) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

   (b) $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

   (c) $\sum u_n$ où (u_n) admet le développement limité $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Épreuve 2 : Probabilités NOTE PSE : /20

Exercice 1 (10 points)

Considérons une variable aléatoire X, prenant ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et telle que

$$P(X=0) = \frac{1}{3}, \qquad P(X=1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X=2) = \frac{1}{6}$$

1. Exprimer sa fonction génératrice $G_X(t)$.

   ....

   ....

2. Expliquer (sans faire les calculs finaux) comment cette fonction permet d'obtenir :
   (a) L'espérance de X.

   ....

   (b) La variance de X.

   ....

Exercice 2 (10 points)

Considérons deux variables aléatoires X et Y indépendantes, admettant les fonctions génératrices :

$$G_X(t) = G_Y(t) = \frac{2+t}{3}$$

1. Donner les lois de X et Y.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Exprimer la fonction génératrice de $Z = X + Y$ à l'aide de $G_X(t)$ et $G_Y(t)$.

   ....

   ....

   ....

3. En déduire la loi de Z.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....