Contrôle de cours 2 (1 heure)

Nom : Rodet **Prénom :** Louis **Classe :** B1

N.B. : le barème est sur 20.

1 Probabilités

Exercice 1 (5 points)

Considérons une variable aléatoire entière infinie X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X{=}n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X{=}n) = 1$.

2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$. On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

2 Familles de vecteurs, base et dimension d'une espace vectoriel

Exercice 2 (8 points)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de E.

1. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille libre».

   ....

2. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille liée».

   ....

3. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E».

   ....

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, c'est-à-dire $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, et de plus que $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_3)$.

   ....

5. Application : dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = \big(u_1{=}(1,-1,1), u_2{=}(5,1,1), u_3{=}(1,2,-1)\big)$.

   (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.

   ....

   (b) Donner une base de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ et en déduire sa dimension.

   ....

Une démonstration de cours (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies n et p, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de G.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre} \Longrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

3 Applications linéaires

Exercice 3 (4 points)

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas linéaire. Justifier soigneusement votre réponse.

2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions mathématiques de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x, x - 2y + z) \end{array} \right.$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire sa dimension.