

EPITA

Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

Janvier 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera divisée par 2 pour obtenir une note sur 20.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 8 exercices.**
 - **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
 - Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
 - Documents et calculatrices interdits.
 - Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-

Exercice 1 : encore des intégrales (3 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1} \, dx$

[illegible]

2. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x + 1} dx$

[illegible]

Exercice 2 : cours sur les polynômes (4 points)

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Que savez-vous du degré de $A + B$ et de $A \times B$?

2. Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B . Il écrit sur sa copie :

$$\ll \exists (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } 0 \leq R < B \gg$$

Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

3. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 + X - 3$ par $B = X^2 - X + 1$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que signifie que α est une racine de A ? Donner un exemple d'un polynôme A de degré 3 qui admet 42 comme racine.

.....
.....
.....

Exercice 3 : nombres complexes (3 points)

Considérons l'équation $(E) (z + \sqrt{3} - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre (E) dans \mathbb{C} .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E) .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4 : arithmétique (11 points)

Les parties sont indépendantes. Les résultats de la question 1. peuvent être admis et utilisés par la suite.

1. Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $p \wedge a = 1$ ou $p \mid a$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

-
- This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
- (a) Montrer que $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47] \text{ ou } b \equiv 0[47]$.
-
-
-
-
-
-
-
-
- (b) En déduire que $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47] \text{ ou } a \equiv -1[47]$.
-
-
-
-
-
-
-
-
- (c) Trouver tous les $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$ tels que $a^2 \equiv 1[47]$.
-
-
-
-
-
-
-
- (d) Soient $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de a^{46k} par 47 ? Justifier.
-
-
-
-

Exercice 5 : suites 1 (4,5 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$?
-
-
-
-
-
-

2. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim, = o(\cdot), = O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

(a) $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = e^n - n$.

.....

(b) $u_n = n^2 - n + 1$ et $v_n = n^2 - 1$.

.....

3. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Donner un équivalent simple de (u_n) en $+\infty$. Justifier.

.....

Exercice 6 : suites 2 (5,5 points)

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 6x - 8}{8}$ définie sur \mathbb{R} et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} &= & f(u_n) \\ u_0 &\in & \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 cette suite est-elle constante ?

.....

2. Faire le tableau (complet) des variations de f sur \mathbb{R} .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Pour la suite de l'exercice, nous prendrons $u_0 \in]-2, 4[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-2, 4[$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Étudier la monotonie de (u_n) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 7 : une démonstration (4 points)

Soit (u_n) une suite.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) converge vers l ».

2. Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) est bornée ».

.....

.....

.....

3. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

4. Expliquer pourquoi la réciproque est fausse.

Exercice 8 : exercice original (5 points)

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{p+q} \leq \frac{p+q}{pq}$$

En considérant des suites extraites de (u_n) , étudier le comportement de (u_n) en $+\infty$ (convergence ou divergence). Justifier avec soin.