EPITA

Mathématiques S2

Partiel

Juin 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Tout au long de ce partiel, chaque réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (4,5 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

a. Déterminer pour chacune des familles suivantes s'il s'agit d'une base de E.

$\mathcal{F}_1 = \{P_1(X) = 2X + 2,\ P_2(X) = X^2 + X + 1\}$

$\mathcal{F}_2 = \{Q_1(X) = X^2 + 2,\ Q_2(X) = X^2 + 4X,\ Q_3(X) = X^2 + 2X + 1\}$

$\mathcal{F}_3 = \{R_1(X) = X^2 + 2,\ R_2(X) = X^2 + 4X,\ R_3(X) = X^2 + 3X + 2\}$

b. Déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = 2X^2 + X + 8$ dans chacune des bases identifiées ci-dessus.

Exercice 2 (2,5 points)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b,c) pour que φ soit linéaire. Démontrez votre réponse

Exercice 3 (5 points)

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et deux sous-ensembles de E : $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$) et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$).

a. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sev de E. (On admettra que $\mathcal{I}$ est aussi un sev de E)

b. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que $\mathcal{P} \cup \mathcal{I} \neq E$

c. À partir d'une fonction $f \in E$, on définit les deux fonctions :
$f_p : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}$ et $f_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$.
Montrer que f_p est paire et f_i impaire. Calculer $f_p + f_i$.

d. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 4 (4 points)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-b)X^4 + (2a+c)X^2 + (a+b+c) \end{array} \right.$

a. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

b. f est-elle injective ?

c. f est-elle surjective ?

Exercice 5 (4 points)

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

On note $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On définit : $\mathcal{D}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 0, 1),\ u_2 = (1, -1, 0),\ u_3 = (0, 1, -1)$
et $\mathcal{D}_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$ où $v_1 = (1, 2, 1, 2),\ v_2 = (0, 3, 0, 3),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

a. Quelle est l'image des vecteurs de $\mathcal{B}_3$ par g ?

b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $g\left((x, y, z)\right)$.

c. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ au départ et $\mathcal{D}_4$ à l'arrivée.

d. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{D}_3$ au départ et $\mathcal{D}_4$ à l'arrivée.

Exercice 6 (4 points)

Soit $h : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+3z, x-y, x+z) \end{array} \right.$

a. Déterminer la matrice M associée à h dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

b. On appelle C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de cette matrice. La famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est-elle libre ? Sinon, en extraire une famille libre maximale.

c. En déduire $\operatorname{Im} h$, $\operatorname{rg}(h)$ et $\operatorname{Ker} h$.

Exercice 7 (3 points)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{(1,0,-1);(4,-1,-3);(1,3,-3)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'application linéaire associée à la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

a. Sans aucun calcul, que peut-on dire du rang de f ? Comment appelle-t-on la matrice P ?

b. Déterminer P^{-1} la matrice inverse de P, sans oublier de vérifier votre résultat.

Exercice 8 (4 points)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(x, \frac{1}{2}(y-z), \frac{1}{2}(z-y)\right) \end{array} \right.$

a. Montrer que f est un projecteur.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sous forme d'espaces vectoriels engendrés et en déduire une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Ker} f$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\operatorname{Im} f$.

c. On admet que la réunion des vecteurs de ces deux bases $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.