Contrôle de cours 2 (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : Le barème est sur 20. Il y a en tout 4 questions de cours.

1 Espaces vectoriels

Cours 1 : familles de vecteurs (6 points)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$)

1. (a) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

   ....

   (b) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille liée de E.

   ....

   (c) Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}_2[X]$. Parmi les vecteurs $P_1 = 2$, $P_2 = X + 1$, $P_3 = X$, $P_4 = X^2 + X$ et $P_5 = X^2 + 2X + 2$, donner sans justifier d'une part une famille libre de E composée de 3 vecteurs et d'autre part, une famille liée de E composée de 3 vecteurs.

   ....
   ....

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

   (a) Que cela signifie-t-il ? Vous devez répondre en utilisant des quantificateurs.

   ....

   (b) Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^2$. Proposer sans justifier une famille génératrice de E parmi les vecteurs $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (-2, 4)$, $u_3 = (-1, 1)$ et $u_4 = (-1, -2)$.

   ....
   ....

3. On suppose que e_1 est une combinaison linéaire de e_2, e_3 et e_4. Montrer rigoureusement que

$$\mathrm{Vect}\left((e_1, e_2, e_3, e_4)\right) = \mathrm{Vect}\left((e_2, e_3, e_4)\right)$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Cours 2 : bases (3 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,1), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,0))$. Rappeler à l'aide de quantificateurs ce que signifie « $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$ ». Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 2 et 3 dans la base $\mathcal{B}$ (en respectant l'ordre des vecteurs de $\mathcal{B}$). Trouver x, y et z.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \operatorname{Vect}\left(((1,2,0),(3,-2,1),(4,0,1))\right)$. Trouver la dimension de F. Justifier soigneusement.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2 Applications linéaires

Cours 3 : exemples (3 points)

Donner, sans justifier, un exemple : 1) d'un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$, 2) d'une application non linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, 3) d'une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}[X]$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Cours 4 : noyau et image (8 points)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Donner la définition mathématique de $\mathrm{Ker}(f)$.

....
....

2. Donner la définition mathématique de $\mathrm{Im}(f)$.

....
....

3. **Donner et démontrer** une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « f injective »

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. **Donner** une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « f surjective »

....

5. Donner sans justifier un exemple d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(((1, 0, -2)))$

....
....
....
....