Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : Prénom : Classe :

N.B. : Le barème est sur 20.

1 Un peu de logique

Exercice 1 (3,5 points)

1. Soient P, Q et R trois assertions. Donner la négation de « $P \wedge Q$ », « $P \vee (Q \wedge R)$ » et de « $P \Longrightarrow Q$ »

   ....
   ....

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

   1) $x < 1 \quad \cdots \quad x \leq 1$. 2) $x^2 + x - 6 > 0 \quad \cdots \quad x > 2$. 3) $\ln(x) = 3 \quad \cdots \quad x = e^3$. 4) x multiple de 3 $\cdots$ x multiple de 6.

2 Ensembles et fonctions

Exercice 2 (6 points)

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

1. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est injective »

   ....
   ....

2. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est surjective »

   ....
   ....

3. Prenons le cas $E = F = [\![1, 5]\!]$.

   (a) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ vérifiant $f(\{1, 2, 5\}) = \{1, 4\}$. Votre fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifiez.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(b) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ bijective telle que $f^{-1}(\{3,5\}) = \{3,4\}$.

3 Intégration

Exercice 3 (4,5 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2. Énoncer proprement le théorème d'intégration par parties sans oublier ses hypothèses.

3. Démontrer soigneusement la formule d'intégration par parties.

4 Dénombrement

Exercice 4 (2,5 points)

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$.

Compléter la fin des phrases suivantes :

1. Le nombre de 5-uplets de E sans répétition est $\cdots\cdots$

2. Le nombre de 3-uplets de E avec répétition est $\cdots\cdots$

3. Le nombre de 4-uplets de E sans répétition et commençant par a est $\cdots\cdots$

4. Le nombre de sous-ensembles de E est $\cdots\cdots$

5. Le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de E est $\cdots\cdots$

Exercice 5 (3,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Rappeler l'expression de $\binom{n}{k}$ et rappeler ce que compte cette quantité.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. Considérons un ensemble E de cardinal n.

   Expliquer (d'un point de vue dénombrement) pourquoi il y a autant de sous-ensembles de E à k éléments que de sous-ensembles de E à $n - k$ éléments. Démontrer ensuite cette affirmation par le calcul.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....