Correction Partiel S1

Exercice 1 : encore des intégrales

1. *Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer* $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1}\,dx$

$$I = \int_1^2 (x-1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_1^2 = \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{5}\times 1^{\frac{5}{2}} - 0 = \frac{2}{5}$$

2. *Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer* $J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1}\,dx$

$$J = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2+6}{x^3+6x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\ln\left(x^3+6x+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\ln(8)-\ln(1)\right) = \frac{3\ln(2)}{3} = \ln(2)$$

Exercice 2 : cours sur les polynômes

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. *Que savez-vous du degré de $A+B$ et de $A\times B$?*

   On a $\deg(A+B) \leq \mathrm{Max}\left(\deg(A), \deg(B)\right)$ et $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

2. *Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B. Il écrit sur sa copie :*
   « $\exists\,(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A = BQ + R$ et $0 \leq R < B$ »
   Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

$$\exists\,!\,(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

3. *Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 + X - 3$ par $B = X^2 - X + 1$.*

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2X^4 & & & +X & -3 & X^2 \ -X \ +1 \\ \cline{7-7}
- & 2X^4 & -2X^3 & +2X^2 & & & 2X^2 \ +2X \\ \cline{2-6}
 & & 2X^3 & -2X^2 & +X & -3 & \\
- & & 2X^3 & -2X^2 & +2X & & \\ \cline{3-6}
 & & & & -X & -3 &
\end{array}$$

4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que signifie que α est une racine de A ? Donner un exemple d'un polynôme A de degré 3 qui admet 42 comme racine.*

   - α racine de $A \iff A(\alpha) = 0$.
   - Exemple : $A = (X-42)(X^2+X+1)$ est une polynôme de degré 3 qui admet 42 comme racine.

Exercice 3 : nombres complexes

Considérons l'équation (E) $(z + \sqrt{3} - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. *Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.*

   - $(z+\sqrt{3}-i)(z^2-2z+2)=0 \iff z+\sqrt{3}-i=0$ ou $z^2-2z+2=0$.
   - $z+\sqrt{3}-i=0 \iff z=-\sqrt{3}+i$.
   - Le discriminant de $z^2-2z+2=0$ est $\Delta=-4$. Ainsi,

   $$z^2-2z+2=0 \iff z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i \text{ ou } z_2=\overline{z_1}=1-i$$

   En conclusion : $S=\left\{-\sqrt{3}+i, 1+i, 1-i\right\}$

2. *Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).*

   $-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i=\overline{1+i}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 4 : arithmétique

Les parties sont indépendantes. Les résultats de la question 1. peuvent être admis et utilisés par la suite.

1. *Soient p un nombre premier et $a\in\mathbb{Z}$.*

   (a) *Montrer que $p\wedge a=1$ ou $p\,|\,a$.*

   On sait que $p\wedge a\,|\,p$ et comme p est premier, on en déduit que $p\wedge a=1$ ou $p\wedge a=p$. Dans le cas où $p\wedge a=p$, comme on sait aussi que $p\wedge a\,|\,a$, on obtient $p\,|\,a$.

   (b) *Montrer que $p\wedge a=1$ si et seulement si $\exists\, b\in\mathbb{Z}$ tel que $ab\equiv 1[p]$.*

   Par le théorème de Bézout, on a

   $p\wedge a=1 \iff \exists\,(b,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $ab+pv=1 \iff \exists\,(b,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $ab=1-pv \iff \exists\, b\in\mathbb{Z}$ tel que $ab\equiv 1\,[p]$

2. *Considérons le nombre premier $p=47$. On cherche à résoudre l'équation (E) $23x\equiv 1[47]$ d'inconnue $x\in[\![1,46]\!]$.*

   (a) *Trouver dans $\mathbb{Z}^2$ une solution particulière (x_0,y_0) à l'équation (E_1) $23x+47y=1$.*

   On a $47=23\times 2+1$ ainsi $23\times(-2)+47\times 1=1$. Le couple $(x_0,y_0)=(-2,1)$ convient.

   (b) Résoudre (E_1) dans $\mathbb{Z}^2$.

   - Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ une solution de (E_1). On a $23x+47y=1$. Or $23x_0+47y_0=1$, ainsi, $(\star)$ $23(x-x_0)=47(y_0-y)$. On en déduit que $47\,|\,23(x-x_0)$. Comme $47\wedge 23=1$, on a alors par le lemme de Gauss : $47\,|\,x-x_0$. Ce qui revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-x_0=47k$, c'est-à-dire $x=x_0+47k=-2+47k$.
   En reportant dans $(\star)$, on a alors $23\times 47k=47(y_0-y)$. D'où, $23k=y_0-y$, ce qui donne $y=y_0-23k=1-23k$.

   - Réciproquement, supposons que $x=-2+47k$ et $y=1-23k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On a alors

   $$23x+47y=23(-2+47k)+47(1-23k)=23\times(-2)+47\times 1+23\times 47k-47\times 23k=1$$

   Ainsi, (x,y) est bien solution de (E_1).

   - En conclusion, $S_1=\{(-2+47k, 1-23k),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

   (c) *En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E). En déduire les solutions de (E) dans $[\![1,46]\!]$.*

   $$23x\equiv 1[47] \iff \exists\, q\in\mathbb{Z} \text{ tel que } 23x=1+47q \iff \exists\, y\in\mathbb{Z} \text{ tel que } 23x+47y=1$$

   Par la question précédente, $S=\{-2+47k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
   Cela revient à dire que les solutions de (E) sont tous les entiers congrus à -2 modulo 47. Il n'y a qu'un seul entier $x\in[\![1,46]\!]$ qui vérifie cela : $x=45$.

3. *Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.*

(a) *Montrer que* $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47]$ *ou* $b \equiv 0[47]$.

• L'implication réciproque $\boxed{\Longleftarrow}$ est évidente.
• Faisons l'implication directe $\boxed{\Longrightarrow}$. Supposons $ab \equiv 0[47]$. On a ainsi $47 \mid ab$. Comme 47 est premier, on sait par la question 1.(a) que
— Soit $47 \mid a$ et dans ce cas là, cela donne $a \equiv 0[47]$.
— Soit $47 \wedge a = 1$. Comme $47 \mid ab$, on obtient par le lemme de Gauss, $47 \mid b$, c'est-à-dire $b \equiv 0[47]$.

(b) *En déduire que* $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47]$ *ou* $a \equiv -1[47]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.

Si $a \equiv 1[47]$ alors $a^2 \equiv 1^2[47] \equiv 1[47]$. Si $a \equiv -1[47]$ alors $a^2 \equiv (-1)^2[47] \equiv 1[47]$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $a^2 \equiv 1[47]$. Ainsi, $a^2 - 1 \equiv 0[47]$ ce qui donne $(a-1)(a+1) \equiv 0[47]$. On obtient par la question précédente : $a - 1 \equiv 0[47]$ ou $a + 1 \equiv 0[47]$, ce qui implique $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.

(c) *Trouver tous les* $a \in [\![1, 46]\!]$ *tels que* $a^2 \equiv 1[47]$.

Par la question précédente, cela revient à trouver tous les $a \in [\![1, 46]\!]$ tels que $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.
Or $a \in [\![1, 46]\!]$ et $a \equiv 1[47] \iff a = 1$. De plus, $a \in [\![1, 46]\!]$ et $a \equiv -1[47] \iff a = 46$.
Il n'y a donc que deux solutions : 1 et 46.

(d) *Soient* $a \in [\![1, 46]\!]$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Quel est le reste de la division euclidienne de* a^{46k} *par 47 ? Justifier.*

On a $a^{46k} = \left(a^{46}\right)^k$. Comme $a < 47$, 47 ne divise pas a. 47 étant premier, par le petit théorème de Fermat, $a^{46} \equiv 1[47]$. Ainsi, $\left(a^{46}\right)^k \equiv 1^k[47] \equiv 1[47]$. Comme $0 \leq 1 < 47$, 1 est le reste de la division euclidienne de a^{46k} par 47.

Exercice 5 : suites 1

1. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de :* $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$ *et* $u_n = O(v_n)$ *en* $+\infty$ *?*

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,\ u_n = o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ et } u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ bornée}$$

On pourrait aussi écrire :
— $u_n \sim v_n$ si $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
— $u_n = o(v_n)$ si $u_n = v_n\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
— $u_n = O(v_n)$ si $u_n = v_n b_n$ avec (b_n) bornée.

2. *Comparer en* $+\infty$ *les suites* (u_n) *et* (v_n) *suivantes à l'aide des comparateurs de Landau* $\sim$, $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ *en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.*

(a) $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = e^n - n$.

$\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{e^n(1 - \frac{n}{e^n})}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Par conséquent $u_n = o(v_n)$. Comme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge, elle est donc bornée. D'où, $u_n = O(v_n)$.

(b) $u_n = n^2 - n + 1$ et $v_n = n^2 - 1$.

$\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 - \frac{1}{n^2})} = \dfrac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Par conséquent $u_n \sim v_n$. Comme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge, elle est donc bornée. D'où, $u_n = O(v_n)$.

3. *Soit* (u_n) *une suite telle que* $u_n = \dfrac{-1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Donner un équivalent simple de* (u_n) *en* $+\infty$. *Justifier.*

On peut écrire $u_n = \dfrac{-1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Ainsi, $\dfrac{u_n}{\frac{-1}{2n}} = 1 - 2\varepsilon_n \longrightarrow 1$. Donc $u_n \sim \dfrac{-1}{2n}$.

Exercice 6 : suites 2

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+6x-8}{8}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *et la suite* (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & \in & \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de* u_0 *cette suite est-elle constante ?*

   (u_n) constante $\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.
   Or $u_{n+1} = u_n \iff \dfrac{u_n^2+6u_n-8}{8} = u_n \iff u_n^2+6u_n-8 = 8u_n \iff u_n^2-2u_n-8 = 0 \iff (u_n-4)(u_n+2) = 0$.

   Ainsi, pour $u_0 = 4$ ou $u_0 = -2$, la suite (u_n) est constante.

2. *Faire le tableau (complet) des variations de* f *sur* $[0, +\infty[$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+6}{8}$ qui s'annule pour $x = -3$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{17}{8}$	↗	-2	↗	4	↗	$+\infty$

3. *Pour la suite de l'exercice, on prend* $u_0 \in]-2, 4[$. *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2, 4[$.

   On fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   • $u_0 \in]-2, 4[$. La propriété est donc vraie au rang 0.

   • Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors, $-2 < u_n < 4$. Par le tableau de variations, f est strictement croissante entre -2 et 4. D'où, $f(-2) < f(u_n) < f(4)$ ce qui donne $-2 < u_{n+1} < 4$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

   • Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2, 4[$

4. *Étudier la monotonie de* (u_n).
   On a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+6u_n-8}{8} - u_n = \frac{u_n^2-2u_n+8}{8} = \frac{(u_n-4)(u_n+2)}{8}$$
   Via 3., $u_n + 2 > 0$ et $u_n - 4 < 0$ car $-2 < u_n < 4$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante.

5. *La suite* (u_n) *est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.*

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 ainsi elle converge. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite. l vérifie $l = f(l)$.
   Ainsi, $l = -2$ ou $l = 4$. Or comme (u_n) est décroissante, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 < 4$. Pour $n \to +\infty$, on obtient $l \leq u_0 < 4$. Donc $l = -2$.

Exercice 7 : une démonstration

Soit (u_n) *une suite.*

1. *Soit* $l \in \mathbb{R}$. *Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) converge vers l ».*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

2. *Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) est bornée ».*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$$

3. *Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.*

   Supposons que (u_n) converge et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On sait donc que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

   Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe donc un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| < 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$$

   ce qui signifie que la suite (u_n) est bornée à partir du rang N.

   Définissons alors le réel $M = \max\left(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\right)$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$. La suite (u_n) est donc bornée.

4. *Expliquer pourquoi la réciproque est fausse.*

   La suite $((-1)^n)$ est bornée par 1 mais diverge. La réciproque est donc fausse.

Exercice 8 : exercice original

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leq u_{p+q} \leq \frac{p+q}{pq}$$

En considérant des suites extraites de (u_n), étudier le comportement de (u_n) en $+\infty$ (convergence ou divergence). Justifier avec soin.

• Comme l'inégalité précédente est vraie pour tout entier p et tout entier q non nuls, on peut prendre $p = q = n$. On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, on en déduit par le théorème des Gendarmes, que la suite (u_{2n}) est convergente vers 0.

• En prenant cette fois ci $p = n$ et $q = n + 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Or $\dfrac{2n+1}{n(n+1)} = \dfrac{n(2 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{n(1 + \frac{1}{n})}$. Donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$. On en déduit par les Gendarmes que la suite (u_{2n+1}) converge vers 0.

• Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers une même limite (zéro) donc la suite (u_n) converge vers 0.