1 定义

1. 向量
   既有大小又有方向的量，可记作 $\overrightarrow{AB}, \vec{\boldsymbol{a}}, \alpha$.

2. 模
   向量的长度称为向量的模，可记作 $\|AB\|, \|\vec{\boldsymbol{a}}\|, \|\alpha\|$.
   在直角坐标系中，可表示为 $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. 向量的夹角
   两个非零向量的夹角为以两向量所在射线为边的角。取值范围为 $[0, \pi]$

4. 自由向量
   只考虑向量的大小和方向，不计较起点位置。

5. 相等向量
   长度相等且方向相同的向量，记作 $\alpha = \beta$.

6. 相反向量
   长度相等且方向相反的向量，记作 $\beta = -\alpha$.

7. 零向量
   模为 0，方向任意的向量，记作 θ 或 $\vec{\mathbf{0}}$.

8. 单位向量
   模为 1 的向量。

9. 共线向量
   方向相同或相反的向量，记作 $\alpha // \beta$.

10. 共面向量
    将起点重合，终点在同一平面上的向量。

11. 向量的加法
    平行四边形法则或三角形法则。记作 $\alpha + \beta$.
    如图1：

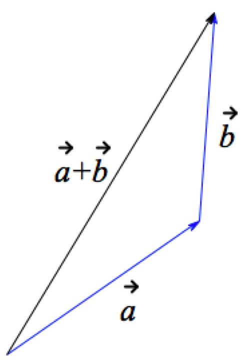

图 1: 向量加法

在直角坐标系中，可以表示为 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

12. 向量的减法

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

如图2：

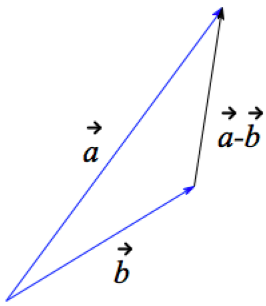

图 2: 向量减法

在直角坐标系中，可以表示为 $(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

13. 向量的数乘
对于实数 m,$\|m\alpha\| = |m|\,\|\alpha\|$,$m\alpha$ 的方向为：
$m > 0$ 时，与 α 相同；
$m < 0$ 时，与 α 相反；
$m = 0$ 时，方向任意。
在直角坐标系中，可以表示为 $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

14. 右手系
对于某个坐标系的三个基底 $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$,若
   - 用右手，从 $\vec{i}$ 的方向握向 $\vec{j}$ 的方向，拇指方向为 $\vec{k}$ 的方向
   - 用右手，食指指向 $\vec{i}$ 的方向，中指指向 $\vec{j}$ 的方向，拇指指向 $\vec{k}$ 的方向

则称 $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ 构成右手系。

15. 线性表示
对于向量 β 和 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,若存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$,使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n,$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示。

16. 线性相关
给定向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = \theta,$$

则称这些向量线性相关。

17. 线性无关

给定向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 如果只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时, 才能使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = \theta,$$

则称这些向量线性无关。

18. 投影

向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为

$$(\vec{\boldsymbol{a}})_{\vec{\boldsymbol{b}}} = \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \cos\varphi \begin{cases} \geq 0 & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \end{cases},$$

其中 φ 为向量 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{b}}$ 的夹角。

19. 向量的数量积

对于向量 α, β,

$$\alpha \cdot \beta = \|\alpha\| \|\beta\| \cos\varphi = \|\alpha\| (\beta)_\alpha$$

称为 α 和 β 的数量积（点积、内积），记作 $\alpha \cdot \beta$ 或 $< \alpha, \beta >$。特别地,$\alpha \cdots \alpha$ 记作 α^2. 在直角坐标系中，可以表示为 $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

20. 方向角

在以 $\left\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\right\}$ 为基底的直角坐标系中，非零向量 α 与 $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ 所成的夹角称为 α 的方向角。（共有三个）

21. 方向余弦

非零向量 α 的方向角的余弦称为 α 的方向余弦。（共有三个）

22. 方向数

与方向余弦成比例的一组数。

23. 向量的向量积

对于向量 α, β，$\alpha \times \beta$ 是一个向量.

$$\|\alpha \times \beta\| = \|\alpha\| \|\beta\| \sin\varphi$$

其中 φ 是 α 和 β 的夹角。

α 和 β 的方向为：

$\alpha \times \beta \perp \alpha, \alpha \times \beta \perp \beta$, 且 $\alpha, \beta, \alpha \times \beta$ 构成右手系。

在直角坐标系中，可以表示为

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{k}} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

24. 向量的混合积

对于向量 α, β, γ, 定义它们的混合积

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \times \beta) \cdot \gamma.$$

在直角坐标系中，可表示为

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

25. 平面的法向量
与平面垂直的任意非零向量称为该平面的法向量。

26. 直线的方向向量
与平面平行的任意非零向量称为该直线的方向向量。

27. 平面的夹角
规定两个平面的夹角的范围为 $[0, \frac{\pi}{2}]$.

28. 通过直线的平面束
包含某条直线的所有平面的集合称为通过这条直线的平面束。

29. 曲面

- 柱面
由平行于一个定方向的动直线 l 沿着空间内的一条定曲线 c 移动所产生的曲面称为柱面, 动直线 l 称为母线，定曲线 c 称为准线，定方向称为母线方向
- 锥面
由过定点 O 的动直线 l 沿着空间内的定曲线 c 移动所产生的曲面称为锥面，点 O 称为定点，动直线 l 称为准线，定曲线 c 称为准线
- 二次曲面
  - 椭球面
  $$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 + \lambda_3^2 z^2 = 1$$
  - 单叶双曲面
  $$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 - \lambda_3^2 z^2 = 1$$
  - 双叶双曲面
  $$\lambda_1^2 x^2 - \lambda_2^2 y^2 - \lambda_3^2 z^2 = 1$$
  - 二次锥面
  $$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 - \lambda_3^2 z^2 = 0$$
  - 椭圆抛物面
  $$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = z$$
  - 双曲抛物面
  $$\lambda_1^2 x^2 - \lambda_2^2 y^2 = z$$
  - 椭圆柱面
  $$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = 1$$
  - 双曲柱面
  $$\lambda_1^2 x^2 - \lambda_2^2 y^2 = 1$$
  - 抛物柱面
  $$\lambda x^2 = y$$

2 性质

1. 向量加法的性质

   - $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
   - $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
   - $\alpha+\theta=\theta+\alpha=\alpha$
   - $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha+\alpha)=\theta$

2. 向量的三角不等式
$$|\|\alpha\|-\|\beta\||\leq\|\alpha\pm\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$$
   当且仅当 $\alpha//\beta$ 时等号成立

3. 向量数乘的性质

   - $1\alpha=\alpha$
   - $m(n\alpha)=(mn)\alpha$
   - $(m+n)\alpha=m\alpha+n\alpha$
   - $m\alpha=\theta$ 当且仅当 $m=0$ 或 $\alpha=\theta$

4. 平面向量基本定理
   平面上任意一个向量都可以由平面上两个不共线的向量唯一地线性表示

5. 空间向量基本定理
   空间上任意一个向量都可以有空间上三个不共面的向量唯一地线性表示

6. 定比分点公式
   设空间中两个定点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$, 若 $P(x,y,z)$ 满足 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2},\lambda\neq-1$, 则 P 的坐标满足
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

7. 投影的性质
$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)_{\vec{u}}=\left(\overrightarrow{AB}\right)_{\vec{u}}+\left(\overrightarrow{BC}\right)_{\vec{u}}$$

8. 向量的数量积的性质

   - $\alpha\cdot\alpha=\|\alpha\|^2\geq0$, 当且仅当 $\alpha=\theta$ 时等号成立
   - $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
   - $(m\alpha)\cdot\beta=m(\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot(m\beta)$
   - $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$
   - $\alpha\cdot\beta=0$ 当且仅当 $\alpha=\theta$ 或 $\beta=\theta$ 或 $\alpha\perp\beta$
   - Schwartz 不等式
$$|\alpha\cdot\beta|\leq\|\alpha\|\,\|\beta\|$$

9. 向量的向量积的性质

- $\alpha \times \alpha = \theta$
- $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$
- $(m\alpha) \times \beta = m(\alpha \times \beta) = \alpha \times (m\beta)$
- $(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma$
- $\alpha \times \beta = \theta$ 当且仅当 $\alpha // \beta$

10. 向量数量积和向量向量积的结合

$$(\alpha \cdot \beta)^2 + (\alpha \times \beta)^2 = \alpha^2 \beta^2$$

11. 向量的混合积的性质

- 若非零向量 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 构成右手系，则 $(\alpha, \beta, \gamma) > 0$
  若非零向量 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 构成左手系，则 $(\alpha, \beta, \gamma) < 0$
- 交换混合积中任意两个向量的位置，混合积变号，值不变
- 混合积中若有两个向量共线，则混合积为 0
- $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta, \gamma) = (\alpha_1, \beta, \gamma) + (\alpha_2, \beta, \gamma)$
- $(m\alpha, \beta, \gamma) = m(\alpha, \beta, \gamma), m \neq 0$
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma + m\alpha)$

3 方法

1. 非零向量的单位化
   如果要求与一个非零向量 α 方向相同的单位向量，可以用如下方法：

$$e = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}.$$

2. 判断向量是否共线
   对于向量 α_1,α_2
   它们共线当且仅当：

- 存在不全为零的实数 k_1, k_2，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \theta.$$

- 向量 α_1, α_2 线性相关。
- 存在一个向量可由另一个向量线性表示。
- $\alpha \times \beta = \theta.$
- 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

它们不共线当且仅当：

- 方程

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \theta.$$

  仅有零解。

- 向量 α_1, α_2 线性无关。
- 任何一个向量都不能由另一个向量线性表示。
- $\alpha \times \beta \neq \theta$.

3. 判断向量是否共面
对于向量 α_1,α_2,α_3
它们共面当且仅当：

- 存在不全为零的实数 k_1, k_2，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \theta.$$

- 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。
- 存在一个向量可由另两个向量线性表示。
- 若向量 α_1 和 α_2 不平行，则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示。
- $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

它们不共面当且仅当：

- 方程

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \theta.$$

仅有零解。
- 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。
- 任何一个向量都不能由另两个向量线性表示。
- $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$.

4. 判断三点共线：
对于三点 A, B, C 和一点 O，A, B, C 三点共线当且仅当：

- 存在不全为零的实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$ 时,

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \theta.$$

- 存在实数 a, b 满足 $a + b = 1$ 时,

$$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}.$$

5. 判断四点共面：
对于四点 A, B, C, D 和一点 O，A, B, C, D 四点共面当且仅当：

- 存在不全为零的实数 a, b, c, d 满足 $a + b + c + d = 0$ 时,

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} + d\overrightarrow{OD} = \theta.$$

- 存在实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$ 时,

$$\overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}.$$

6. 在直角坐标系下计算两点之间的距离
设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

7. 在直角坐标系下计算两个向量的夹角
   设 $\alpha=(x_1,y_1,z_1),\beta=(x_2,y_2,z_2)$, 那么向量 α 和 β 的夹角 φ 满足:
$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}}.$$

8. 在直角坐标系下计算一个非零向量的方向角、方向余弦
   设 $\vec{\boldsymbol{a}}=(x,y,z)$ 的三个方向角分别为 α,β,γ, 则 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 的方向余弦为
$$\cos\alpha=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}}{\|\vec{\boldsymbol{a}}\|\left\|\vec{\boldsymbol{i}}\right\|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\beta=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}}{\|\vec{\boldsymbol{a}}\|\left\|\vec{\boldsymbol{j}}\right\|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\gamma=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{k}}}{\|\vec{\boldsymbol{a}}\|\left\|\vec{\boldsymbol{k}}\right\|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$
   三个方向角直接取反三角函数即可。

9. 判断两向量的向量积的方向
   设所求向量为 $\gamma=\alpha\times\beta$, 则
   - 用右手，从 α 的方向握向 β 的方向，拇指方向即为 γ 的方向
   - 用右手，食指指向 α 的方向，中指指向 β 的方向，拇指方向即为 γ 的方向

10. 求平行四边形的面积
    以平行四边形的两条邻边为向量 α,β, 则平行四边形的面积为 $\|\alpha\times\beta\|$.

11. 求平行六面体的体积
    以平行六面体的三条邻边为向量 α,β,γ, 则平行六面体的体积为 $|(\alpha,\beta,\gamma)|$.

12. 求在某组基底下一个向量的坐标
    设空间中不共面的三个向量 α,β,γ 为基底，则向量 ξ 可以表示为 $\xi=x\alpha+y\beta+z\gamma$, 其中
$$x=\frac{(\xi,\beta,\gamma)}{(\alpha,\beta,\gamma)},y=\frac{(\alpha,\xi,\gamma)}{(\alpha,\beta,\gamma)},z=\frac{(\alpha,\beta,\xi)}{(\alpha,\beta,\gamma)}.$$

13. 求平面的法向量
    对于平面 $Ax+By+Cz+D=0$, 它的一个法向量为 (A,B,C).

14. 求平面的方程
    - 点法式方程
      设 $\vec{\boldsymbol{n}}=(A,B,C)\neq\theta$ 为空间中一个非零向量,$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为空间中一点，那么过 P_0 且与 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 垂直的平面 π 的方程为
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$
    - 一般方程
$$Ax+By+Cz+D=0,$$
      其中 A,B,C 不同时为 0.

- 三点式方程
  经过不共线三点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2),P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面 π 的方程为
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$
- 截距式方程
  若 a,b,c 为三个非零实数，则过 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ 的平面 π 的方程为
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

15. 求直线的方程

- 参数方程
  设 $\vec{s}=(l,m,n)$ 为空间中一个非零向量,$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为空间中一点，那么过 P_0 且与 $\vec{s}$ 平行的直线 L 的方程为
$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}.$$
- 标准方程
  设 $\vec{s}=(l,m,n)$ 为空间中一个非零向量,$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为空间中一点，那么过 P_0 且与 $\vec{s}$ 平行的直线 L 的方程为
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$
  若 $l=0$, 则方程为
$$\begin{cases} x=x_0 \\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \end{cases}.$$
  若 $l=m=0$, 则方程为
$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}.$$
- 一般方程
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$
  其中 A_1,B_1,C_1 和 A_2,B_2,C_2 均不同时为 0.
- 两点式方程
  过两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 L 的方程为
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

16. 由直线的一般方程求其方向向量
  设直线的一般方程为
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$
  则其一个方向向量为 $(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$.

17. 判断三平面的相对位置
设平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \pi_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$

记 $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$,$(A,b)=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$, 则

- $r(A)=r(A,b)=3$ 等价于三平面交于一点。
- $r(A)=r(A,b)=2$ 等价于三平面交于一线。
- $r(A)=r(A,b)=1$ 等价于三平面重合。
- $r(A)=1, r(A,b)=2$ 等价于两平面重合，另一平面与其平行或三平面两两平行。
- $r(A)=2, r(A,b)=3$ 等价于两平面平行，另一平面与这两个平面分别相交或三平面两两相交。

18. 求两条直线的夹角
设 $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ 分别为这两条直线的方向向量，则这两条直线的夹角的余弦值

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{\|\vec{s_1}\|\,\|\vec{s_2}\|}.$$

19. 求两个平面的夹角
设 $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ 分别为这两个平面的法向量，则这两条平面的夹角的余弦值

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\,\|\vec{n_2}\|}.$$

20. 求直线与平面的夹角
设 $\vec{s}, \vec{n}$ 分别为这条直线的方向向量与这个平面的法向量，则这条直线与这个平面的夹角的正弦值

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\,\|\vec{n}\|}.$$

21. 求点到直线的距离
设点 P_0 和方向向量为 $\vec{s}$ 的直线 L 上的任意一点 P, 则 P 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{s}\right\|}{\|\vec{s}\|}.$$

22. 求两条平行直线的距离
设 $\vec{s}$ 为这两条直线的方向向量，P_1, P_2 分别为这两条直线上的任意一点，则这两条直线的距离为

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s}\right\|}{\|\vec{s}\|}.$$

23. 求点到平面的距离
点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

24. 求两个平面的距离
等价于求平面上一点到另一个平面的距离。

25. 求两条异面直线的距离
设 $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ 分别为这两条直线的方向向量，P_1, P_2 分别为这两条直线上的任意一点，则这两条直线的距离为
$$d = \frac{\left(\vec{s_1}, \vec{s_1}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)}{\|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\|}.$$

26. 求两条异面直线的公垂线方程
设两条异面直线 L_1, L_2 的方向向量分别是 $\vec{s_1}, \vec{s_2}$, 则公垂线 L 的方向向量 $\vec{s} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$. 过直线 L_1 和 L 的平面 π_1 的法向量 $\vec{n_1} = \vec{s_1} \times \vec{s}$, 再在 L_1 上任取一点，求出平面 π_1 的点法式方程。

    - 解法一
    同理，求出平面 π_2 的点法式方程。
    而 L 正是 π_1 和 π_2 的交线，从而求出 L 的一般方程。
    - 解法二
    从而可以求出平面 π_1 与直线 L_2 的交点坐标。故可以算出 L 的标准方程。

27. 求通过某条直线的平面束方程
设直线 $L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$,则通过 L 的平面束方程为
$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

28. 求某条直线在某个平面上的投影直线方程
设直线为 L, 投影平面为 π,

    - 知道 L 的一般方程
    那么可以先设出通过 L 的平面束方程，求出过 L 与 π 垂直的平面 π_1 的方程，而 L 的投影直线正是 π 与 π_1 的交线，从而可以求出 L 的投影直线的一般方程。
    - 知道 L 的标准方程
    那么设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$, 平面 π 的法向量为 $\vec{n}$, 则过 L 且与 π 垂直的平面 π_1 的法向量为 $\vec{s} \times \vec{n}$.
    任取 L 上一点，可以求出平面 π_1 的点法式方程。而 L 的投影直线正是 π 与 π_1 的交线，从而可以求出 L 的投影直线的一般方程。

29. 求旋转面的方程
给定曲线 $c: \begin{cases} f(x_i, x_j) = 0 \\ x_k = 0 \end{cases}$ 绕 x_i 轴, 只需要将 x_i 替换成 $\pm\sqrt{x_i^2 + x_k^2}$ 即可。

30. 求投影柱面和投影曲线
对于曲线 L, 求其在 xOy 平面内的投影柱面只需用参数方程消参的方法将 L 方程内的 z 消掉即可。
求其在 xOy 平面内的投影曲线只需要将投影柱面与 $z = 0$ 联立即可。

31. 判断一般的二次型表示的二次曲面

对于一般的二次型

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c=0$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

那么二次型可以写成 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax+B^{\mathrm{T}}x+c=0$.

先用正交变换 $x=Qy$, 将其变成

$$g(y)=y^{\mathrm{T}}\Lambda y+B'^{\mathrm{T}}y+c=0$$

即：

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2+b_1'y_1+b_2'y_2+b_3'y_3+c=0$$

设 g 的正惯性指数为 p, 负惯性指数为 q.

那么该二次型表示的二次曲面为：

- $r(g)=3$
  那么方程可以通过配方化为
  $$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2=d$$
  - $p=3,q=0$ 且 $d>0$
    表示椭球面 ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时表示球面)
  - $p=0,q=3$ 且 $d<0$
    表示椭球面 ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时表示球面)
  - $p=2,q=1$
    - $d>0$
      表示单叶双曲面
    - $d<0$
      表示双叶双曲面
    - $d=0$
      表示二次锥面
- $r(g)=2$
  - 方程可以通过配方化为
    $$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2=bz_3$$
    - $p=2,q=0$
      表示椭圆抛物面
    - $p=1,q=1$
      表示双曲抛物面
  - 方程可以通过配方化为
    $$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2=d$$
    - $p=2,q=0$ 且 $d\neq 0$
      表示椭圆柱面

* $p=1, q=1$ 且 $d\neq 0$
  表示双曲柱面

- $r(g)=1$
  方程可以通过 $z_3=\eta_1 y_2+\eta_2 y_3$ 和配方化为

$$\lambda_1 z_1^2=bz_3$$

  - $p=1, q=0$
    表示抛物柱面
  - $p=0, q=1$
    表示抛物柱面