Práctico 2
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos.

a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?
Rta: Tenemos 9 posibilidades para el primero (todos salvo el cero) y diez para cada uno de los restantes cuatro lugares. Por lo tanto, por el Principio de la multiplicación, hay $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90000$ números de 5 dígitos.

b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?
Rta: En este caso, el último dígito sólo puede ser 0,2,4,6 ó 8. Por lo tanto, por el Principio de la multiplicación, hay $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45000$.

c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?
Rta: El 3 puede estar en cada uno de los 5 lugares, lo que genera que necesitemos analizar 5 casos. Si el 3 está en el lugar más significativo (el primero), los restantes 4 lugares sólo pueden tomar 9 valores, ya que el 3 está excluido, tenemos así 9^4 números. Los otros 4 casos corresponden a los números que comienzan con un dígito distinto de 0 y 3, y que tienen exactamente un 3 entre sus cuatro últimos dígitos, estos son: $4 \cdot 8 \cdot 9^3$ números. Por el principio de adición: hay en total $9^4 + 32 \cdot 9^3 = 9 \cdot 9^3 + 32 \cdot 9^3 = 41 \cdot 9^3 = 29889$ números.

d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?
Rta: Un capicúa de 5 dígitos está determinado por los primeros 3 dígitos. El primero tiene 9 posibilidades y los dos restantes 10 cada uno. Luego, tenemos $9 \cdot 10^2 = 900$ capicúas de 5 dígitos.

e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?
Rta: A los anteriores 900 debemos sumarle 90 de 4 dígitos, 90 de 3 dígitos, 9 de 2 dígitos y 9 de un dígito (suponiendo que el cero no es capicúa). En total tenemos $9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098$ números.

(2) ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

Rta: La primera cifra tiene 9 posibilidades, la última tiene 5 posibilidades y las dos restantes 10. Por lo tanto, se tienen $9 \cdot 10^2 \cdot 5 = 4500$ números.

(3) ¿Cuántos números naturales múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

Rta: Podemos pensar en un número de "4 dígitos", donde tenemos 5 elecciones posibles (0,1,2,3 ó 4) para el primer dígito; 10 elecciones posibles para el segundo y tercer dígito, y dos para el cuarto: los números múltiplos de 5 deben terminar en un 0 o en un 5. Esto nos da: $5 \cdot 10^2 \cdot 2 = 1000$ posibilidades, pero estamos contando también el 0000. Si descontamos ese caso, obtenemos $1000 - 1 = 999$ números.

Rta alternativa: Como $5000/5 = 1000$, cada múltiplo de cinco buscado, al dividirlo por 5, nos dará un número entre 1 y 999. Recíprocamente, cada número entre 1 y 999 al multiplicarlo por 5, nos da un múltiplo de 5 menor que 4999. Luego, hay 999 múltiplos de 5.

(4) En los viejos boletos de ómnibus, aparecía un número de 5 cifras (en este caso podían empezar con 0), y uno tenía un boleto capicúa si el número lo era.

a) ¿Cuántos boletos capicúas había?
Rta: A diferencia del Ejercicio (1)*d)*, los tres primeros dígitos tienen 10 posibilidades cada uno. Luego, hay $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ boletos capicúas.

b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?
Rta: Para la primera cifra tenemos 10 posibilidades, para la segunda 9 posibilidades, para la tercera 8 posibilidades, para la cuarta 7 posibilidades, y para la última 6 posibilidades. Así, por el principio de la multiplicación, tenemos $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ boletos.

(5) Las antiguas patentes de auto tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Luego vinieron patentes que tienen 3 letras y luego 3 dígitos. Finalmente, ahora, las patentes tienen 2 letras, luego 3 dígitos y a continuación dos letras más ¿Cuántas patentes pueden hacerse con cada uno de los sistemas?

Rta: Con el primer sistema teníamos 24 letras, contando Tierra del Fuego y ciudad de Buenos Aires. Entonces con el primer sistema podíamos hacer $24 \cdot 10^6$ patentes (24 millones). Con el segundo sistema $27^3 \cdot 10^3$ patentes (menos de 20 millones). Con el tercer sistema hay $27^2 \cdot 10^3 \cdot 27^2$ patentes (alrededor de 530 millones).

(6) Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos,

a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?
Rta: $20 = 8 + 7 + 5$ posibles formas.

b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?
Rta: Si los ordenamos según estilo, por ejemplo RoClCu, tenemos 8 posibles para el primero, 7 para el segundo y 5 para el tercero. A esto, hay que multiplicarlo por $3! = 6$ permutaciones (las posibles permutaciones de tres objetos, los tres estilos). En total serían: $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 1680$. Si no están ordenados por estilo, serían $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$.

c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?
Rta: Si pudiera mezclar estilos sin restricciones tendría $20 \cdot 19 \cdot 18$. Para cumplir con la restricción impuesta debemos restar todos los que usan los tres estilos, es decir, uno de cada uno, que es lo que calculamos en el apartado anterior cuando están ordenados por estilo: $280 \cdot 6$. Queda entonces $20 \cdot 19 \cdot 18 - 280 \cdot 6 = 6840 - 1680 = 5160$. En el caso en que no importe el orden, es decir, ABC sea lo mismo que CBA, etc., se tendría $\frac{20\cdot19\cdot18}{6} - 280 = 1140 - 280 = 860$.

Observación:

Si admitiéramos el uso del número combinatorio (no es el objetivo de este ejercicio), los items (6)*b)* y (6)*c)* se podrían resolver de la siguiente manera, **en el caso donde no importe el orden**:

b) Tendríamos:
$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280.$$
c) Obtenemos que:
$$\binom{20}{3} - 280 = \frac{20!}{17!3!} - 280 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} - 280 = 1140 - 280 = 860.$$

(7) Mostrar que si uno arroja un dado n veces y suma todos los resultados obtenidos, hay $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

Rta: Probemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, como el dado tiene tres caras pares (2,4,6), entonces hay $3 = \dfrac{6^1}{2}$ formas distintas de obtener par, y por tanto la afirmación es válida para $n = 1$.

Supongamos que el enunciado es cierto para k lanzamientos (*H.I.*). Cuando tiramos $(k + 1)$-veces, la suma total será par si la suma de los primeros k resultados era par y el último es par, ó si la suma de los primeros k fue impar y el último es impar. Notemos que si había $\dfrac{6^k}{2}$ posibilidades de que la suma de los primeros k fuese par (aplicando H.I.), entonces las posibilidades de que fuese impar son: $6^k - \dfrac{6^k}{2} = \dfrac{6^k}{2}$. Por lo tanto, las posibilidades para $k + 1$ lanzamientos serán:
$$\frac{6^k}{2} \cdot 3 + \frac{6^k}{2} \cdot 3 = 6 \cdot \frac{6^k}{2} = \frac{6^{k+1}}{2}.$$
De donde, por el Principio de inducción, la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

(8) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

Rta: El número buscado debe tener al menos 2 cifras y a lo más 4 cifras (ya que 10000 no tiene una cifra 7, ni 5). De los de "cuatro cifras", elegimos dos de ellas donde irán ubicados el 5 y el 7, esto es, una selección ordenada y sin repetición de 2 elementos de un conjunto de 4 elementos. Las restantes cifras podrán llevar cualquiera de los otros ocho dígitos (notar que estamos considerando también al cero). Tenemos entonces

$$\frac{4!}{(4-2)!} \cdot 8^2 = \frac{4!}{2!} \cdot 64 = 12 \cdot 64 = 768 \quad \text{posibilidades.}$$

(9) ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?

Rta: En este caso es más fácil contar todos los subconjuntos (2^{10}) y luego eliminar aquellos que no contienen ningún impar, es decir, aquellos que están formados únicamente por los elementos de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ que son 2^5. Luego, la solución es $2^{10} - 2^5 = 2^5(2^5 - 1) = 32 \cdot 31 = 992$ subconjuntos.

Rta alternativa: Otra forma sería pensar que para armar un subconjunto de $\{0, ..., 9\}$ tengo que elegir primero un subconjunto de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, después elegir un subconjunto de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y por último aplicar el principio de multiplicación. Lo primero se puede hacer de 2^5 formas. Lo segundo de $2^5 - 1$ formas, descontando el conjunto vacío porque queremos que haya al menos un impar. Así, hay $2^5 \cdot (2^5 - 1)$ formas de armar el subconjunto.

(10) El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho, o tener 33?

Rta: Si contamos todos los subconjuntos de 3 cartas donde una de ellas es el 1 de espadas, tendremos que son todos los subconjuntos de dos cartas entre las 39 restantes, esto es, hay

$$\binom{39}{2} = \frac{39!}{37!2!} = \frac{39 \cdot 38}{2} = 39 \cdot 19 = 741,$$

formas posibles de obtener el macho.

Ahora, para cada palo, la cantidad de subconjuntos de 3 cartas, de entre las cuales 2 de ellas son el 7 y el 6 correspondientes, son exactamente 38 (las posibles cartas restantes). Como hay 4 palos, entonces tenemos $4 \cdot 38 = 152$ posibilidades de obtener el 33.

Por último, es más probable el macho pues $4 \cdot 38 = 152 < 39 \cdot 19 = 741$.

(11) ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

Rta: Debemos elegir 3 mujeres entre 6, y combinarlo con 2 hombres elegidos entre 4. Esto da:
$$\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2} = \frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{4!}{2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 20\cdot 6 = 120$$
posibles comités.

(12) ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:

a) No hay restricciones en la selección?
Rta: Debemos elegir 5 personas entre 11, por lo cual hay
$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 11\cdot 7\cdot 6 = 462$$
posibles comités.

b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?
Rta: Debemos elegir 2 profesores entre 4, y combinarlo con 3 estudiantes elegidos entre 7. De donde, hay
$$\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{3} = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{7!}{4!3!} = \frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 6\cdot 35 = 210$$
posibles comités.

c) El comité debe tener al menos 3 profesores?
Rta: Si tuviera exactamente 3 profesores sería:
$$\binom{4}{3}\cdot\binom{7}{2} = 4\cdot 21 = 84.$$
A estos debemos agregar los que tienen exactamente 4 profesores: $\binom{4}{4}\cdot\binom{7}{1} = 7$. En total quedan $84+7=91$ posibles comités.

d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?
Rta: Sin restricción tenemos $\binom{11}{5} = 462$ posibles comités (por el ítem *a*)). A esto le restamos los que tienen a X e Y:
$$\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 12\cdot 7 = 84.$$
En total quedan $462-84=378$ posibles comités.

(13) Si en un torneo de fútbol participan $2n$ equipos, probar que el número total de opciones posibles para la primera fecha es $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$. sugerencia: use un argumento por inducción.

Rta: Hacemos inducción sobre n. Para $n=1$: Si son 2 equipos, hay un único partido posible, o sea $2\cdot 1-1$, así la afirmación vale para $n=1$.

Suponiendo que vale para $2k$ equipos (*H.I.*), consideremos el caso de $2k+2$ equipos. Tomamos uno de los nuevos equipos y por tanto tenemos $2k+1$

rivales posibles; una vez ya definido este partido, nos quedan $2k$ equipos, y por hipótesis inductiva tenemos $1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ posibilidades para completar la fecha. Es decir, en total tenemos $1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot (2k+1)$ posibilidades para la primera fecha. Así, por el principio de inducción, la afirmación vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta alternativa: Otra forma es elegir el primer partido, $\binom{2n}{2}$ formas, el segundo partido,$\binom{2n-2}{2}$ formas, y asi sucesivamente hasta $\binom{4}{2}$ y $\binom{2}{2}$ formas para los últimos dos partidos. Al hacer eso se están contando más de una vez la misma elección de partidos pero en diferentes ordenes, así que se deben descontar todas las maneras posibles de ordenar los n partidos para los $2n$ equipos. El resultado sería

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{n!} &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\\ = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdots (2 \cdot (n-1)) \cdot (2n-1) \cdot 2n}{2^n n!}&\\ = \frac{2^n n! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).&\end{aligned}$$

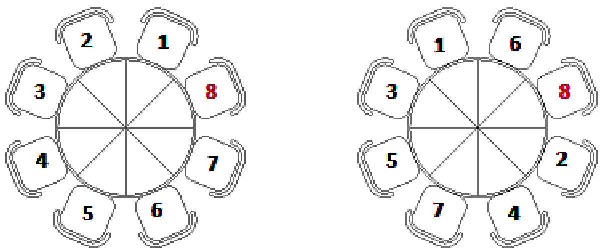
(14) En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.

Rta: Podríamos pensar a las chicas como un único bloque y este puede ir en $n+1$ posiciones distintas. Si ahora individualizamos cada chico tenemos $n!$ posibilidades de ordenarlos e idénticamente $n!$ posibilidades individualizando cada chica. Luego, tenemos $(n+1) \cdot n! \cdot n! = (n+1)!n!$ formas posibles de armar la fila.

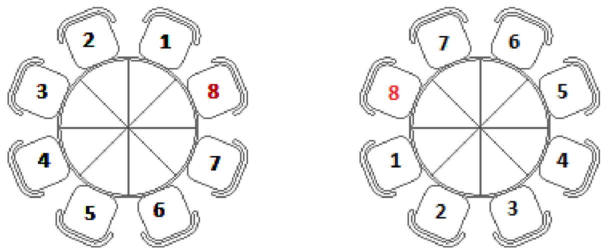
(15) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

Rta: Lo que primero debemos notar es que sólo nos interesan las posiciones relativas entre las personas, es decir, quién está a la izquierda y a la derecha de quién. Además, recordemos que hay $n!$ formas de ordenar a n personas en una fila.

Ahora bien, elegimos una persona, digamos la 8, y la sentamos en una posición fija. Los 7 asientos que quedan pueden pensarse como una fila, ya que los bordes no están unidos. Luego, hay $7!$ formas de sentar las 8 personas alrededor de la mesa. Por ejemplo, dos sentadas distintas posibles son:



Rta alternativa: Hay 8! formas de ordenar a 8 personas. Como consideramos a las 8 posibles rotaciones cíclicas de una sentada dada como la misma, dividimos por 8 para no contar repeticiones. Luego, hay $\frac{8!}{8} = 7!$ formas distintas de sentar a las 8 personas en una mesa circular. Por ejemplo, dos sentadas iguales podrían ser:



(16) *a)* ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 hombres y 6 mujeres en una mesa circular si nunca deben quedar dos mujeres juntas?
Rta: Se requiere que haya al menos un hombre entre cada par de mujeres, y hay sólo seis hombres, entonces debe haber exactamente uno separando dos mujeres cercanas. Entonces tenemos que alternar hombre y mujer. Por lo cual, tenemos 6!6! posibilidades para ponerlos en fila comenzando por un hombre, y dividimos por 6 ya que, por ser circular, no importa que hombre comienza.
Rta alternativa: Si tenemos doce sillas numeradas del 1 al 12 alrededor de la mesa y ubicamos a los hombres en las sillas impares, esto se puede hacer de 5! formas distintas (ver ejercicio anterior). Luego, tenemos que llenar las sillas pares y cualquiera de las 6! permutaciones da una distribución distinta. Así quedan 5!6!.

b) Ídem, pero con 10 hombres y 7 mujeres.
Rta: Ponemos 20 sillas y sentamos al primer hombre en la silla 2, y a los restantes en las otras sillas pares. Tenemos 9! formas de hacerlo. Ahora, ubicamos a las mujeres en las 10 sillas vacías (las sillas sobrantes se retiran). Tenemos $\binom{10}{7}$ formas de elegir los lugares, por 7! formas de ordenarlas. Así tenemos: $9! \cdot \frac{10!}{7!3!} \cdot 7! = \frac{10!9!}{3!}$.

(17) *a)* ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA
Rta: Tenemos 10 letras, de las cuales hay 3 A, 2 M, 2 T, 1 E, 1 I, 1 C. Al total de las 10! permutaciones debemos dividirlo por las permutaciones de las repeticiones. Entonces tendremos $\frac{10!}{3!2!2!}$ formas distintas.

b) Ídem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.
Rta: $\frac{7!}{2!}$ y $\frac{9!}{2!}$.

c) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?
Rta: Tenemos 5 vocales y 5 consonantes, al alternarlos tendremos 5!5!. A esto hay que multiplicarlo por 2 ya que se puede empezar con vocal o consonante, y dividirlo por las repeticiones. Así, hay $\frac{5!5!2}{3!2!2!} = 1200$ formas.

(18) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

Rta: Una forma de pensarlo es que tenemos que armar todas las permutaciones de seis objetos de los cuales se repiten tres de ellos dos veces cada uno (tenemos tres pares de objetos). Esto da: $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$. A esto debemos restarle todas las permutaciones que comienzan con un 0. Esto es: $\frac{5!}{2!2!} = 30$. Así, hay $90 - 30 = 60$ números.

Rta alternativa: Otra forma de pensarlo sería notar que la cantidad de números que empiezan con 1 es igual a la cantidad de números que empiezan con 2, porque en cada caso tenemos que ordenar 5 objetos donde hay dos repeticiones de dos de esos objetos. Entonces el total de combinaciones sería $2 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 2 \cdot 30 = 60$.

(19) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

Rta: Consideremos todos los segmentos que tienen como extremos a dos vértices del polígono. Como cada segmento está determinado por dos vértices sin importar el orden, hay $\binom{n}{2}$ segmentos. Ahora, en esa cuenta están incluidos los lados del polígono, los cuales no queremos contar. Como hay n lados, entonces la cantidad de diagonales sería:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n}{2} \cdot (n - 1 - 2) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(20) Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Rta: Tenemos:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!}.$$

Y por otra parte:

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m-(k-m))!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}.$$

De donde se desprende que se verifica la igualdad deseada.

(21) Probar que para todo i, j, $k \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

Rta: Por definición:

$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!(i+j+k-i)!} \cdot \frac{(j+k)!}{j!(j+k-j)!} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}.$$

(22) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Rta: 2^n es la cantidad de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si agrupamos los subconjuntos de acuerdo a su cardinal y usamos que $\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, se obtiene la igualdad.

Rta alternativa: Usamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

en el caso particular $a = 1, b = 1$, y así obtenemos:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$

Rta: Aquí podemos usar la fórmula del binomio al caso particular $a = 1, b = -1$. Podemos interpretar la fórmula como la igualdad de la cantidad de subconjuntos de cardinal par con los de cardinal impar.

(23) Probar que para todo natural n vale que

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Rta: Tenemos:

$$\begin{aligned} 2\binom{n}{2} + n^2 &= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n(n-1+n) \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} = \binom{2n}{2}. \end{aligned}$$