Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

Antes de hacer la resolución de los ejercicios correspondientes al uso de los *Axiomas*, vamos a probar tres propiedades adicionales de los números enteros.

(P1) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $\;0 \cdot a = 0$.

Dem: Por el axioma I4 tenemos que $0 = 0 + 0$, si multiplicamos a ambos lados por a y aplicamos el axioma I5 obtenemos

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Sumando el inverso aditivo de $0 \cdot a$ a ambos lados de la anterior igualdad, se sigue que:

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot a - 0 \cdot a &= (0 \cdot a + 0 \cdot a) - 0 \cdot a && \text{(axioma I6)} \\ &= 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) && \text{(axioma I3)} \\ &= 0 \cdot a + 0 && \text{(axioma I6)} \\ &= 0 \cdot a && \text{(axioma I4)} \end{aligned}$$

(P2) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $\;-a = (-1) \cdot a$.

Dem: Veamos que $a + (-1) \cdot a = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{(axioma I4)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot a && \text{(axioma I5)} \\ &= 0 \cdot a && \text{(axioma I6)} \\ &= 0 && \text{(P1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la unicidad del inverso aditivo, se debe cumplir que $-a = (-1) \cdot a$.

(P3) Sea $c \in \mathbb{Z}$. Si $c < 0$, entonces $0 < -c$.

Dem: En efecto,

$$\begin{aligned} c < 0 \quad &\Rightarrow \quad c + (-c) < 0 + (-c) && \text{(axioma I10)} \\ &\Rightarrow \quad 0 < -c && \text{(axiomas I6, I4)} \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a = -(-a)$

Rta: Por el axioma I6, sabemos que $a + (-a) = 0$. Sumando el inverso aditivo de $-a$ a ambos lados, obtenemos $(a + (-a)) - (-a) = 0 - (-a)$. Luego,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a + ((-a) - (-a)) = -(-a) && \text{(axiomas I3, I4)} \\ &\Rightarrow \quad a + 0 = -(-a) && \text{(axioma I6)} \\ &\Rightarrow \quad a = -(-a) && \text{(axioma I4)} \end{aligned}$$

b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$
Rta: [$\Rightarrow$] Si $a = b$, entonces $(-1)\cdot a = (-1)\cdot b$. Por (P2), se sigue que $-a = -b$.
[$\Leftarrow$] Si $-a = -b$, entonces $(-1)\cdot(-a) = (-1)\cdot(-b)$. Por (P2) se cumple que $-(-a) = -(-b)$, y aplicando el ítem *a*) tenemos que $a = b$.

c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.
Rta: Sumamos $-a$ a ambos lados de la ecuación $a + a = a$, y obtenemos

$$\begin{array}{rcll} a + a = a & \Rightarrow & a + a + (-a) = a + (-a) & \\ & \Rightarrow & a + 0 = 0 & \text{(axiomas I3, I6)} \\ & \Rightarrow & a = 0 & \text{(axioma I4)} \end{array}$$

(2) Idem (1).

a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$
Rta: Como $0 < a$ y $0 < b$, por axioma I11, $0 \cdot b < a \cdot b$. Por (P1) tenemos que $0 \cdot b = 0$, luego $0 < a \cdot b$.

b) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$
Rta: Por (P3) tenemos que $0 < -c$, luego como $a < b$ se sigue que:

$$\begin{array}{cll} \Rightarrow & a + (-a) + (-b) < b + (-a) + (-b) & \text{(axioma I10)} \\ \Rightarrow & -b < -a & \text{(axiomas I2, I3, I6, I4)} \\ \Rightarrow & (-b)\cdot(-c) < (-a)\cdot(-c) & \text{(axioma I11)} \\ \Rightarrow & b \cdot c < a \cdot c & \text{(Regla de los signos)} \end{array}$$

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
Rta: [$\Rightarrow$] Como $a < b$ y $0 < a$, por I11 obtenemos $a^2 < ba$. Ahora bien, también $a < b$ y $0 < b$, nuevamente por I11 obtenemos $ab < b^2$. Luego, $a^2 < ba = ab < b^2$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $a^2 < b^2$, lo cual es equivalente a $a^2 \not\geq b^2$ (se deduce del axioma I8). Ahora, por la Ley de tricotomía, vale una y sólo una de las relaciones siguientes: $a < b$, $a = b$, $b < a$. Si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$, lo cual contradice nuestra hipótesis. De forma análoga, si $b < a$ entonces $b^2 < a^2$, que tampoco puede ocurrir. De todo lo anterior, se debe dar que $a < b$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $0 < a^2$.
Rta: Por tricotomía (axioma I8) o bien $0 < a$ o bien $a < 0$. Si $0 < a$, entonces, por (2)*a)* tenemos que $0 < a^2$. Si $a < 0$, por (P3) $0 < -a$. Luego, por (2)*a)* y la Regla de los signos, $0 < (-a)^2 = a^2$. Así, en cualquier caso se cumple que $0 < a^2$.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.
Rta: Como $a \neq b$, alguno de los dos, a o b, es distinto de cero. Supongamos que $a \neq 0$ y, entonces, por *b)* tenemos que $0 < a^2$. De otro lado, por tricotomía se da una y solo una de las relaciones: $b = 0$, $b \neq 0$. En el caso en que $b = 0$, se sigue que $a^2 + b^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0$. De lo contrario, si $b \neq 0$ entonces $0 < b^2$, y sumando a^2 a esta inecuación,

por axioma I10, obtenemos $a^2 = a^2 + 0 < a^2 + b^2$. Como $0 < a^2$, por el axioma I9 tenemos $0 < a^2 + b^2$. De donde, en cualquier caso se cumple que $a^2 + b^2 > 0$.

d) Probar que si $a + c < b + c$ entonces $a < b$.
Rta: Por axioma I10, $a + c + (-c) < b + c + (-c)$. Por los axiomas I3, I6 e I4 obtenemos $a < b$.

(4) Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a) $\sum_{r=0}^{4} r$. *Rta:* $\sum_{r=0}^{4} r = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

b) $\prod_{i=1}^{5} i$. *Rta:* $\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

c) $\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$.

Rta: Aplicaremos reiteradas veces la definición recursiva de *sumatoria*:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)} &= \sum_{k=-3}^{-2} \frac{1}{k(k+4)} + \frac{1}{-1(-1+4)} \\
&= \sum_{k=-3}^{-3} \frac{1}{k(k+4)} + \frac{1}{-2(-2+4)} + \frac{1}{-1(-1+4)} \\
&= \frac{1}{-3(-3+4)} + \frac{1}{-2(-2+4)} + \frac{1}{-1(-1+4)} \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{12}.
\end{aligned}$$

d) $\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$. *Rta:* $\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{1} = 7$.

(5) Calcular:

a) $2^{10} - 2^9$. *Rta:* $2^{10} - 2^9 = 2 \cdot 2^9 - 2^9 = 2^9 + 2^9 - 2^9 = 2^9$.

b) $3^2 2^5 - 3^5 2^2$. *Rta:* $3^2 2^5 - 3^5 2^2 = 3^2 2^2 (2^3 - 3^3) = 36(-19)$.

c) $(2^2)^n - (2^n)^2$. *Rta:* $(2^2)^n - (2^n)^2 = 2^{2n} - 2^{n2} = 2^{2n} - 2^{2n} = 0$.

d) $(2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1)$. *Rta:* $(2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1) = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1^2 = 2^{2 \cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1$.

(6) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
Rta: Se fijará $m \in \mathbb{N}$, y se hará inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. Por la definición recursiva de potencia, tenemos que $x^{1+m} = x \cdot x^{1+m-1} = x^1 \cdot x^m$. Es decir, el resultado vale para $n = 1$.

Paso inductivo. Supongamos que el resultado es verdadero para $n = k$ (para algún $k \in \mathbb{N}$), es decir que $x^k \cdot x^m = x^{k+m}$ (HI). Veamos que $x^{k+1} \cdot x^m = x^{k+1+m}$. Ahora bien,

$$\begin{array}{rcll} x^{k+1} \cdot x^m & = & x \cdot x^k \cdot x^m & \text{(definición de potencia)} \\ & = & x \cdot x^{k+m} & \text{(HI)} \\ & = & x^{(k+m)+1} = x^{k+1+m} & \text{(definición de potencia)} \end{array}$$

Así, por el principio de inducción, podemos concluir que la propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
Rta: Se hará inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. $(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$, por definición de potencia.
Paso inductivo. Veamos que para algún $k \geq 1$:

$$(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k \text{ (HI)} \;\Rightarrow\; (x \cdot y)^{k+1} = x^{k+1} \cdot y^{k+1}$$

En efecto,

$$(x \cdot y)^{k+1} \overset{\text{def}}{=} (x \cdot y)^k (x \cdot y) \overset{\text{(HI)}}{=} (x^k \cdot y^k)(x \cdot y) = (x^k x) \cdot (y^k y) \overset{\text{def}}{=} x^{k+1} \cdot y^{k+1}.$$

De donde, por el principio de inducción, podemos concluir que la propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$
Rta: Al igual que en *a)*, se fijará $m \in \mathbb{N}$, y se hará inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. Por la definición recursiva de potencia:

$$(x^1)^m = x^m = x^{1 \cdot m}.$$

Paso inductivo. Supongamos que el resultado es verdadero para $n = k$, es decir que $(x^k)^m = x^{km}$ (HI). Veamos que $(x^{k+1})^m = x^{(k+1)m}$. Luego,

$$(x^{k+1})^m \overset{\text{def}}{=} (x^k \cdot x)^m \overset{(b)}{=} (x^k)^m \cdot x^m \overset{\text{(HI)}}{=} x^{k \cdot m} x^m \overset{(a)}{=} x^{km+m} = x^{(k+1)m}.$$

De todo lo anterior, por el principio de inducción, podemos concluir que la propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$. *Rta:* Verdadera: $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^n \cdot 2^k} = 2^{2^{n+k}}$.

b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Rta:* Verdadera: $(2^n)^2 = 2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$.

c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.
Rta: Falsa: supongamos que si vale que $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$, luego

$$\begin{array}{cll} \Rightarrow & 2^7 \cdot 2^{11} = 2^7(1 + 2^4) & \\ \Rightarrow & 2^{11} = 1 + 2^4 & \text{(axioma I7)} \\ \Rightarrow & 1 = 2^{11} - 2^4 = 2^4(2^7 - 1) = 16 \cdot 127 & \text{(Absurdo!)} \end{array}$$

(8) Probar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ $(n \geq 0)$.

Rta: Haremos inducción sobre n.

Caso base. $n = 0$. Por definición recursiva de sumatoria:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1.$$

Paso inductivo. Supongamos que para algún $k \geq 0$ se cumple que $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ (HI). Probaremos que $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$. Ahora bien,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i \overset{\text{(def)}}{=} \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} \overset{\text{(HI)}}{=} 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Por lo tanto, por el principio de inducción, podemos concluir que la propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad n \in \mathbb{N}.$

Rta: Haremos inducción sobre n.

Caso base. $n = 1$. Por definición recursiva de sumatoria, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{1} (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k.$$

Paso inductivo. Supongamos que para algún $h \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{h} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=1}^{h} b_k, \tag{HI}$$

y demostremos que

$$\sum_{k=1}^{h+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k.$$

Comenzamos con el término de la izquierda de lo que queremos probar y debemos obtener el término de la derecha. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h+1} (a_k + b_k) &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h} (a_k + b_k) + a_{h+1} + b_{h+1} \\
&\overset{\text{(HI)}}{=} \sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=1}^{h} b_k + a_{h+1} + b_{h+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{h} a_k + a_{h+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{h} b_k + b_{h+1} \right) \\
&\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k.
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción, podemos concluir que la igualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Rta: Esta es llamada la *suma aritmética*, y la demostraremos por inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. $\sum_{j=1}^{1} j = 1 = (1 \cdot 2)/2$. Verdadero.

Paso inductivo. Para algún $k \geq 1$ suponemos cierto

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{HI}$$

y debemos demostrar que

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} j &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{j=1}^{k} j + (k+1) \overset{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

De todo lo anterior, por el principio de inducción, podemos concluir que la igualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Rta: Inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. Por definición recursiva de sumatoria: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$. De otro lado,

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Paso inductivo. Para algún $k \geq 1$, supondremos cierto

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \tag{HI}$$

y probaremos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \tag{T}$$

Operemos con el lado izquierdo de (T):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&\overset{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollamos el lado derecho de (T):

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.
\end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que el lado derecho y el lado izquierdo de (T) son iguales, y con esto se prueba el resultado.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Verdadero.
Paso inductivo. Para algún $k \geq 1$, supondremos cierto

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2, \tag{HI}$$

y probaremos $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \overset{(\text{HI})}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

De donde, por el principio de inducción, podemos concluir que la igualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2, \ \ n \in \mathbb{N}_0.$

Rta: Inducción sobre n.
Caso base. $n = 0$. $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)^2$. Verdadero.
Paso inductivo. Supongamos que para algún $h \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{h}(2k+1) = (h+1)^2, \tag{HI}$$

y debemos probar que $\sum_{k=0}^{h+1}(2k+1) = (h+2)^2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{h+1}(2k+1) &\overset{(\text{def }\Sigma)}{=} \sum_{k=0}^{h}(2k+1) + 2(h+1) + 1 \\
&\overset{(\text{HI})}{=} (h+1)^2 + 2(h+1) + 1 \\
&= ((h+1)+1)^2 = (h+2)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el principio de inducción, podemos concluir que la igualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, \ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rta: Esta es llamada la *suma geométrica*, y la demostraremos por inducción sobre n.
Caso base. $n = 0$. Por definición recursiva de sumatoria y potencia, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1 = \frac{a-1}{a-1} = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}.$$

Paso inductivo. Para algún $h \geq 0$, supondremos cierto

$$\sum_{k=0}^{h} a^k = \frac{a^{h+1}-1}{a-1}, \tag{HI}$$

y demostraremos que

$$\sum_{k=0}^{h+1} a^k = \frac{a^{h+2}-1}{a-1}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{h+1} a^k &\overset{(\text{def }\Sigma)}{=} \sum_{k=0}^{h} a^k + a^{h+1} \overset{(\text{HI})}{=} \frac{a^{h+1}-1}{a-1} + a^{h+1} \\
&= \frac{a^{h+1}-1+a^{h+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{h+1}-1+a^{h+2}-a^{h+1}}{a-1} \\
&= \frac{a^{h+2}-1}{a-1}.
\end{aligned}$$

Se sigue que, por el principio de inducción, la igualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Observación:

Notemos que $\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + \sum_{k=1}^{n} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} a^k$.

Por lo tanto, para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - 1 = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} - 1 = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}. \tag{SG}$$

(10) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$.

Rta: Para $n = 1, \dots, 11$, es claro que no se cumple, pues

$$1 \leq n \leq 11 \;\Rightarrow\; n^2 \leq 11n < 11n + 3.$$

Para $n = 12$, la desigualdad se cumple, ya que $12^2 = 144 \geq 11 \cdot 12 + 3 = 135$. Así, probaremos por inducción sobre n que:

$$\forall n \geq 12, \; n^2 \geq 11n + 3.$$

Caso base. $n = 12$. Lo vimos más arriba.

Paso inductivo. Supongamos que para algún $k \geq 12$ se satisface:

$$k^2 \geq 11k + 3, \tag{HI}$$

y veamos que $(k+1)^2 \geq 11(k+1) + 3 = 11k + 14$. Luego,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \overset{\text{(HI)}}{\geq} 11k + 3 + 2k + 1 = 11k + 2k + 4 \geq 11k + 14,$$

y la última desigualdad es válida pues:

$$k \geq 12 \;\Rightarrow\; 2k + 4 \geq 28 > 14.$$

De todo lo anterior, por el principio de inducción, la desigualdad vale para todo $n \geq 12$.

(11) Sea $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Se demostrará la fórmula por inducción completa sobre n.

Caso base. Para $n = 1$, el resultado es verdadero pues $u_1 = 3 = 2+1 = 2^1+1$.

El resultado también es verdadero cuando $n = 2$ ya que $u_2 = 5 = 2^2 + 1$.

Paso inductivo. Supongamos que $k \geq 2$ y que el resultado es cierto para los h tales que $1 \leq h \leq k$. Es decir,

$$u_h = 2^h + 1, \quad 1 \leq h \leq k, \; k \geq 2, \tag{HI}$$

entonces debemos probar que $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$. En efecto,

$$\begin{array}{rcll} u_{k+1} & = & 3u_{k+1-1} - 2u_{k+1-2} & \text{(por definición de } a_n\text{)} \\ & = & 3u_k - 2u_{k-1} & \\ & = & 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) & \text{(HI)} \\ & = & 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 & \\ & = & 3 \cdot 2^k + 1 - 2^k & \\ & = & 2 \cdot 2^k + 1 & \\ & = & 2^{k+1} + 1. & \end{array}$$

De donde, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = 2^n + 1$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación:

En el paso inductivo, la forma de determinar el $k \geq 2$ es considerar para cuales k, el $k+1$ satisface la condición dada en la fórmula recursiva de $\{a_n\}$; en este caso, $k+1 \geq 3 \Rightarrow k \geq 2$. Además, en la Hipótesis Inductiva, el menor valor que puede tomar el h lo determina el primer caso base, o sea, el a_1.

(12) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Haremos inducción completa sobre n.

Caso base. Para $n = 1$ el resultado es verdadero pues $u_1 = 9 = 2^{1+1} + 5^1$.

Para $n = 2$ el resultado también es verdadero ya que $u_2 = 33 = 2^{2+1} + 5^2$.

Paso inductivo. Supongamos que $k \geq 2$ y que el resultado vale para los h tales que $1 \leq h \leq k$. Es decir,

$$u_h = 2^{h+1} + 5^h, \quad 1 \leq h \leq k, \;\; k \geq 2, \tag{HI}$$

y veamos que $u_{k+1} = 2^{k+2} + 5^{k+1}$. Ahora bien,

$$\begin{array}{rcll} u_{k+1} & = & 7u_{k+1-1} - 10u_{k+1-2} & \text{(def } a_n\text{)} \\ & = & 7u_k - 10u_{k-1} & \\ & = & 7(2^{k+1} + 5^k) - 10(2^{k-1+1} + 5^{k-1}) & \text{(HI)} \\ & = & 7 \cdot 2^{k+1} + 7 \cdot 5^k - 10 \cdot 2^k - 10 \cdot 5^{k-1} & \\ & = & 7 \cdot 2^{k+1} - 5 \cdot 2 \cdot 2^k + 7 \cdot 5^k - 2 \cdot 5 \cdot 5^{k-1} & \\ & = & 7 \cdot 2^{k+1} - 5 \cdot 2^{k+1} + 7 \cdot 5^k - 2 \cdot 5^k & \\ & = & 2 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 5^k & \\ & = & 2^{k+2} + 5^{k+1} & \end{array}$$

Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = 2^{n+1} + 5^n$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(13) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \;\text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Rta: Probaremos la fórmula por inducción completa sobre n.

Caso base. Para $n = 0$, el resultado es verdadero pues $a_0 = 1 = 0!$.

Para $n = 1$, el resultado es verdadero ya que $a_1 = 1 = 1!$.

Paso inductivo. Supongamos que $k \geq 1$ y que el resultado es cierto para los h tales que $0 \leq h \leq k$. Esto es,

$$a_h = h!, \quad 0 \leq h \leq k, \; k \geq 1, \tag{HI}$$

y demostremos que $a_{k+1} = (k+1)!$. Así,

$$\begin{array}{rcll}
a_{k+1} & = & 3a_{k+1-1} + (k+1-1)(k+1-3)a_{k+1-2} & (\text{def } a_n) \\
& = & 3a_k + k(k-2)a_{k-1} & \\
& = & 3k! + k(k-2)(k-1)! & (\text{HI}) \\
& = & 3k! + (k-2)k! & (\text{def Factorial}) \\
& = & (3+k-2)k! & (\text{factor común}) \\
& = & (k+1)k! & \\
& = & (k+1)! & (\text{def Factorial})
\end{array}$$

Luego, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = n!$ vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(14) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 7, \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Rta: Haremos inducción completa sobre n.

Caso base. Para $n = 0$, el resultado es verdadero pues $a_0 = 0 = 1 - 1 = 6^0 + (-1)^{0+1}$. Para $n = 1$, el resultado es verdadero ya que $a_1 = 7 = 6 + 1 = 6^1 + (-1)^{1+1}$.

Paso inductivo. Supongamos que $k \geq 1$ y que el resultado es cierto para los h tales que $0 \leq h \leq k$. Esto es,

$$a_h = 6^h + (-1)^{h+1}, \quad 0 \leq h \leq k, \; k \geq 1, \tag{HI}$$

y probemos que $a_{k+1} = 6^{k+1} + (-1)^{k+2} = 6^{k+1} + (-1)^k(-1)^2 = 6^{k+1} + (-1)^k$. Ahora bien,

$$\begin{array}{rcll}
a_{k+1} & = & 5a_k + 6a_{k-1} & (\text{def } a_n) \\
& = & 5(6^k + (-1)^{k+1}) + 6(6^{k-1} + (-1)^k) & (\text{HI}) \\
& = & 5 \cdot 6^k + (-1)^{k+1}5 + 6 \cdot 6^{k-1} + (-1)^k 6 & \\
& = & 5 \cdot 6^k + 6^k + (-1)^k(-1)5 + (-1)^k 6 & \\
& = & (5+1) \cdot 6^k + (-1)^k((-1)5 + 6) & \\
& = & 6 \cdot 6^k + (-1)^k = 6^{k+1} + (-1)^k &
\end{array}$$

Se sigue que, por el principio de inducción completa, $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$ vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(15) Sea u_n definida recursivamente por: $u_1 = 2$, $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \ \ \forall\, n > 1$.

a) Calcule u_2 y u_3.
Rta: $u_2 = 2 + \sum_{i=1}^{1} 2^{2-2i} u_i = 2 + 2^{2-2} u_1 = 2 + u_1 = 4$.
$u_3 = 2 + \sum_{i=1}^{2} 2^{3-2i} u_i = 2 + 2^{3-2} u_1 + 2^{3-4} u_2 = 2 + 2^1 2 + 2^{-1} 4 = 8$.

b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.
Rta: Calculemos el cuarto término de la sucesión:

$$\begin{aligned} u_4 = 2 + \sum_{i=1}^{3} 2^{4-2i} u_i &= 2 + 2^{4-2} u_1 + 2^{4-4} u_2 + 2^{4-6} u_3 \\ &= 2 + 2^2 2 + 2^0 4 + 2^{-2} 8 = 16. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $u_1 = 2 = 2^1$, $u_2 = 4 = 2^2$, $u_3 = 8 = 2^3$, $u_4 = 16 = 2^4$. Esto nos indica que debería ser $u_n = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y lo demostraremos por inducción completa sobre n.

Caso base. Lo vimos más arriba, incluso para $n = 1, 2, 3, 4$.

Paso inductivo. Supongamos que $k \geq 1$ y que el resultado es cierto para los h tales que $1 \leq h \leq k$, es decir

$$a_h = 2^h, \quad 1 \leq h \leq k,\ \ k \geq 1. \tag{HI}$$

Debemos probar que $u_{k+1} = 2^{k+1}$. En efecto,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k+1-1} 2^{k+1-2i} u_i & & (\text{def } a_n) \\ &= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k+1-2i} u_i \\ &= 2 + 2^{k+1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-2i} u_i \right) \\ &= 2 + 2^{k+1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-2i} 2^i \right) & & (\text{HI}) \\ &= 2 + 2^{k+1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \right) \\ &= 2 + 2^{k+1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) \end{aligned}$$

Pero, por SG, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_{k+1} = 2 + 2^{k+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = 2 + 2^{k+1} - 2 = 2^{k+1}.$$

Así, por el principio de inducción completa, $a_n = 2^n$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(16) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a) $n = n^2$.

Rta: El caso base no falla pues $1 = 1^2$, pero cuando queremos hacer el paso inductivo tenemos

$$k + 1 \overset{\text{(HI)}}{=} k^2 + 1 \neq (k+1)^2.$$

b) $n = n + 1$. *Rta:* No vale en el caso base: $1 \neq 1 + 1$.

c) $3^n = 3^{n+2}$. *Rta:* No vale en el caso base: $3^1 = 3 \neq 27 = 3^3$.

d) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

Rta: La afirmación vale en el caso base pues $3^{3\cdot 1} = 3^{1+2}$. En el paso inductivo debemos probar que si vale $3^{3k} = 3^{k+2}$, entonces se cumple $3^{3(k+1)} = 3^{(k+1)+2}$. Sin embargo, usando la (HI) obtenemos:

$$3^{3(k+1)} = 3^{3k+3} = 3^{3k}3^3 \overset{\text{(HI)}}{=} 3^{k+2}3^3 = 3^{k+5}.$$

Por otro lado $3^{(k+1)+2} = 3^{k+3}$. Deberíamos probar entonces que $3^{k+5} = 3^{k+3}$, pero esto es falso pues dividiendo por 3^{k+3} obtenemos $3^2 = 1$, lo cual es absurdo.