Práctico 1

Matemática Discreta I – Año 2019/1

FAMAF

1. Demostrar las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son siempre números enteros.
   Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.
   a) $a = -(-a)$
   b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$
   c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.

2. Idem 1.
   a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$
   b) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

3. Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.
   a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
   b) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.
   c) Probar que si $a + c < b + c$ entonces $a < b$.

4. Sea $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^n + 1$.

5. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_k = 7u_{k-1} - 10u_{k-2}$, $\forall k \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Sea u_n definida recursivamente por: $u_1 = 2$, $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \ \ \forall\, n > 1$.
   a) Calcule u_2 y u_3.
   b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.

7. Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:
   a) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.
   b) $n^3 \leq 3^n$; $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.

8. Calcular evaluando las siguientes expresiones:

   a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$ $\qquad$ *b*) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$ $\qquad$ *c*) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ $\qquad$ *d*) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

9. Calcular:

   a) $2^{10} - 2^9$

   b) $3^2 2^5 - 3^5 2^2$

   c) $(2^2)^n - (2^n)^2$

   d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

10. Probar que:

    a) $4^5 > 5^4$

    b) $8^9 > 9^8$

    c) $2^6 - 2^3 = 7^2 + 7$

11. Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

    a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

    b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

    c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

12. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

    a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, n, $k \in \mathbb{N}$.

    b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.

    c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

13. Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$.

    b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

    c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

    d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

    e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

    f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

    g) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

    h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 \,/\, \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2n+1}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

j) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

k) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

l) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

m) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $0 < a_i < 1 \forall\, i$, entonces $(1-a_1)\cdots(1-a_n) \geq 1-a_1-\cdots-a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$.

15. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

    a) $n = n^2$, *b)* $n = n+1$, *c)* $3^n = 3^{n+2}$, *d)* $3^{3n} = 3^{n+2}$.

16. Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

    a) Demostraremos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
    Supongamos que $5k+3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k+3 = 5p$. Probemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5: Como

    $$5(k+1)+3 = (5k+5)+3 = (5k+3)+5 = 5p+5 = 5(p+1),$$

    entonces obtenemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

    b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo n, $a^n = 1$.
    Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces $a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.