Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) 135 por 23.
Rta: Como $135 = 23 \cdot 5 + 20$ entonces $q = 5, r = 20$, ya que
$$0 \leq 20 < 23 = |23|.$$

b) -135 por 23.
Rta: Por el item anterior, $-135 = -23 \cdot 5 - 20$, pero $-20 < 0$; hay que corregirlo, y se hace restando y sumando el valor absoluto del divisor:
$$-135 = (-23 \cdot 5 - 23) + (23 - 20) = 23 \cdot (-6) + 3.$$
De donde, $q = -6, r = 3$.

c) 135 por -23.
Rta: $135 = (-23) \cdot (-5) + 20$; luego $q = -5, r = 20$, ya que
$$0 \leq 20 < 23 = |-23|.$$

d) -135 por -23.
Rta: $-135 = 23 \cdot (-6) + 3 = (-23) \cdot 6 + 3$, entonces $q = 6, r = 3$, pues
$$0 \leq 3 < 23 = |-23|.$$

e) 127 por 99.
Rta: $127 = 99 \cdot 1 + 28$; $q = 1, r = 28$.

f) -98 por -73.
Rta: Tenemos que $98 = 73 \cdot 1 + 25$. Luego,
$$-98 = (-73) \cdot 1 - 25 = (-73) \cdot 2 + 48$$
Así, $q = 2, r = 48$, ya que $0 \leq 48 < 73 = |-73|$.

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
Rta: Como $b \leq r < 2b \Rightarrow 0 \leq r - b < b$, entonces sumamos y restamos b a la expresión original, y agrupamos términos de forma adecuada, esto es:
$$a = b \cdot q + r = (b \cdot q + b) + (r - b) = b \cdot (q + 1) + (r - b).$$
Por lo tanto, el cociente es $q + 1$ y el resto $r - b$.

b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
Rta: En este caso, $-b \leq r < 0 \Rightarrow 0 \leq r + b < b$. Luego, $a = b \cdot (q - 1) + (r + b)$, por lo cual el cociente es $q - 1$ y el resto $r + b$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la division por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.

Rta: El resto del cuadrado (cubo) de m es el resto del cuadrado (cubo) del resto de m. Por lo tanto, para el caso de m^2, hay que calcular los restos $\tilde{r}$ de r^2, con $0 \leq r < m$. Así,

$$
\begin{aligned}
m = 3 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1\}.\\
m = 4 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1\}.\\
m = 5 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1, 4\}.\\
m = 7 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1, 2, 4\}.\\
m = 8 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1, 4\}.\\
m = 11 &\Rightarrow \tilde{r} \in \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}.
\end{aligned}
$$

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

a) $(1503)_6$
Rta: En este caso, basta con aplicar la definición del *desarrollo en base* b, con $b \geq 2$, esto es:

$$(r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0)_b := r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0,$$

con $0 \leq r_i < b$. De donde,

$$(1503)_6 = 1 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 216 + 5 \cdot 36 + 3 = 399.$$

b) $(1111)_2$
Rta: $(1111)_2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$

c) $(1111)_{12}$
Rta: Usando la serie geométrica, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(1111)_{12} = 12^3 + 12^2 + 12^1 + 1 &= \frac{12^4 - 1}{11}\\
&= \frac{144^2 - 1}{11} = \frac{143 \cdot 145}{11} = 13 \cdot 145 = 1885.
\end{aligned}
$$

d) $(123)_4$
Rta: $(123)_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = 27.$

e) $(12121)_3$
Rta: $(12121)_3 = 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 = 81 + 54 + 9 + 6 + 1 = 151.$

f) $(1111)_5$
Rta: $(1111)_5 = 5^3 + 5^2 + 5^1 + 1 = \dfrac{5^4 - 1}{4} = \dfrac{624}{4} = 156.$

(5) Convertir

a) $(133)_4$ a base 8.
Rta: Debemos primero calcular cuanto vale $(133)_4$ en base 10 (la base usual) y luego pasarlo a base 8. Ahora bien, $(133)_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 31$, y $31 = 3 \cdot 8 + 7$, por lo tanto $(133)_4 = (37)_8$.

b) $(B38)_{16}$ a base 8.
Rta: Recordemos que B representa al 11 en base 16. Aquí usaremos que $16 = 2 \cdot 8$. Entonces,

$$\begin{aligned}(B38)_{16} &= 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 44 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 8 \\ &= (5 \cdot 8 + 4) \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 = 5 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 \\ &= (5470)_8.\end{aligned}$$

c) $(3506)_7$ a base 2.
Rta: Tenemos que $(3506)_7 = 3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 = 1280$. Ahora bien, en este caso conviene recordar el método general para convertir un número $x \in \mathbb{N}$ en base 10 a una base $b \geq 2$. La forma de hacerlo es, primero, dividir el número original x y los sucesivos cocientes por b, y paramos cuando nos de un cociente igual a cero. Luego, el desarrollo en base b de x viene dado por los restos de las divisiones sucesivas, leídos en forma ascendente.
Luego, dividiendo repetidamente por 2 obtenemos:

$$\begin{aligned}1280 &= 2 \cdot 640 + 0 \\ 640 &= 2 \cdot 320 + 0 \\ 320 &= 2 \cdot 160 + 0 \\ 160 &= 2 \cdot 80 + 0 \\ 80 &= 2 \cdot 40 + 0 \\ 40 &= 2 \cdot 20 + 0 \\ 20 &= 2 \cdot 10 + 0 \\ 10 &= 2 \cdot 5 + 0 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \quad \uparrow\end{aligned}$$

De donde, $(3506)_7 = 1280 = (10100000000)_2$.

Rta alternativa: Hay una forma de hacer este ejercicio más corta: observar que

$$1280 = 2^7 \cdot 10 = 2^8 \cdot 5 = 2^8 \cdot (2^2 + 1) = 2^{10} + 2^8.$$

d) $(1541)_6$ a base 4.
Rta: Tenemos que $(1541)_6 = 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 1 = 36 \cdot 11 + 25 = 396 + 25 = 421$. Luego,

$$\begin{aligned}421 &= 4 \cdot 105 + 1 \\ 105 &= 4 \cdot 26 + 1 \\ 26 &= 4 \cdot 6 + 2 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 1 &= 4 \cdot 0 + 1 \quad \uparrow\end{aligned}$$

Entonces, $(1541)_6 = 421 = (12211)_4$.

(6) Calcular:

a) $(2234)_5 + (2310)_5$
Rta: La suma entre números escritos en la misma base b se hace de la misma forma que la suma usual en base 10, pero teniendo en cuenta las reglas de la base b. Como en base 5, sabemos que $2 + 3 = 5 = (10)_5$, $3 + 3 = 5 + 1 = (11)_5$, etc., obtenemos:

$$\begin{array}{r} (2234)_5 \\ +(2310)_5 \\ \hline (10044)_5 \end{array}$$

b) $(10101101)_2 + (10011)_2$
Rta: En este caso, solo tenemos que tener en cuenta que $1+1 = 2 = (10)_2$. Así,

$$\begin{array}{r} (10101101)_2 \\ + \quad (10011)_2 \\ \hline (11000000)_2 \end{array}$$

(7) Expresar en base 5: $(1503)_6 + (1111)_2$.

Rta: Vamos a resolver este ejercicio en tres pasos.

Primer paso: Convertimos ambos números dados en base 6 y 2, respectivamente, a la base 10. Luego,

$(1503)_6 = 1 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 216 + 5 \cdot 36 + 3 = 399.$

$(1111)_2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$

Segundo paso: Hacemos aritmética en la base 10, la cual todos conocemos. Tenemos que la suma es:

$$399 + 15 = 414.$$

Tercer paso: Por último, convertimos el número (en base 10) obtenido en el paso anterior a la base pedida, 5. En efecto, dividiendo repetidamente por 5 obtenemos:

$$\begin{aligned} 414 &= 5 \cdot 82 + 4 \\ 82 &= 5 \cdot 16 + 2 \\ 16 &= 5 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 5 \cdot 0 + 3 \quad \uparrow \end{aligned}$$

Así, $414 = (3124)_5$.

En resumen,

$$(1503)_6 + (1111)_2 = 399 + 15 = 414 = (3124)_5.$$

(8) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \neq 0$ y $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
Rta: Sabemos que $1|a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Luego, $a|1$ y $1|a$, por *Proposición 3.2.3.* del Apunte, se sigue que $a = 1$ o $a = -1$.

b) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(rb+sc)$ para cualesquiera $r,s \in \mathbb{Z}$.
Rta: Como existen $p,q \in \mathbb{Z}$ tales que $b = ap$ y $c = aq$,

$$rb + sc = r(ap) + s(aq) = a(rp + sq) = am,$$

donde $m := rp + sq \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $a|(rb+sc)$.

c) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
Rta: Si $b = aq$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces $b \cdot c = aqc \Rightarrow a|b \cdot c$.

d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b+c)$, entonces $a|c$.
Rta: Por el inciso *b)*: $a|((b+c)-b)$, o lo que es lo mismo $a|c$.

(9) Dados $b, c \in \mathbb{Z}$, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.
Rta: $0 = 2 \cdot 0$ y $1 = 2 \cdot 0 + 1$.

b) Si b es número par no nulo y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
Rta: Existen $p,q \in \mathbb{Z}$ tales que $b = 2p, c = bq \Rightarrow c = 2pq \Rightarrow c$ es par. $(b|-b)$.

c) Si un número par no nulo divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.
Rta: Si dicho número es a, entonces tenemos que (a par $\Leftrightarrow 2|a$) y $a|2$ $\Longrightarrow$ $a = \pm 2$, por *Proposición 3.2.3*.

d) Si b y c son pares, entonces $b+c$ también lo es.
Rta: $2|b, 2|c \Rightarrow 2|(b+c)$.

e) La suma de un número par y uno impar es impar.
Rta: Existen $p,q \in \mathbb{Z}$ tales que $a = 2q, b = 2p+1 \Rightarrow a+b = 2(q+p)+1$.

f) $b+c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
Rta: $[\Leftarrow]$ Si b y c son ambos pares, entonces por el inciso *d)*: $b+c$ es par. Ahora bien, si existen $p,q \in \mathbb{Z}$ tales que $b = 2q+1, c = 2p+1 \Rightarrow b+c = 2q+1+2p+1 = 2(q+p+1)$.
$[\Rightarrow]$ De otro lado, notar que por el inciso anterior la única posibilidad para que $b+c$ sea par es que b y c sean ambos pares ó ambos impares.

g) b es par si y sólo si b^2 es par.
Rta: $[\Rightarrow]$ Si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 2q$, entonces $b^2 = 2(2q^2)$.
$[\Leftarrow]$ Demostremos el contrarecíproco. En efecto, si existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 2p+1$, entonces $b^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.

(10) Probar que $n(n+1)$ es par para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Rta: Si $n = 2q$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, $n(n+1) = 2q(2q+1)$ es par. Si $n = 2p+1$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, $n(n+1) = (2p+1)(2p+1+1) = 2(p+1)(2p+1)$ es par.

(11) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (no nulos cuando el enunciado lo requiera). ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|12 = 4 \cdot 3$, pero $6 \nmid 4$, $6 \nmid 3$.

b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|(5 + 1)$, pero $6 \nmid 5$, $6 \nmid 1$.

c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|12$ y $4|12$, pero $24 \nmid 12$.

d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $2|6$ y $3|6$, pero $5 \nmid 6$.

e) $b, c \in \mathbb{N}$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.
Rta: Verdadero, $b \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq c$ y $c \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq b$.

(12) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
Rta: Se demostrará la fórmula por inducción sobre n.
Caso base. $n = 1$. En este caso,

$$3^{2\cdot 1+2} + 2^{6\cdot 1+1} = 3^4 + 2^7 = 81 + 128 = 209 = 11 \cdot 19,$$

es decir, $11|3^{2\cdot 1+2} + 2^{6\cdot 1+1}$; y el resultado vale para $n = 1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \in \mathbb{N}$ vale

$$11|3^{2k+2} + 2^{6k+1} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : 3^{2k+2} + 2^{6k+1} = 11q \qquad \text{(HI)}$$

(se puede probar que q debe ser un número natural), entonces

$$11|3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : 3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 11m. \qquad (^*)$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} &= 3^{2+(2k+2)} + 2^{6+(6k+1)} \\ &= 3^2 \cdot 3^{2k+2} + 2^6 \cdot 2^{6k+1} \\ &= 9 \cdot 3^{2k+2} + (9 + 55) \cdot 2^{6k+1} \\ &= 9 \cdot 3^{2k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} + 55 \cdot 2^{6k+1} \\ &= 9 \cdot (3^{2k+2} + 2^{6k+1}) + 55 \cdot 2^{6k+1} && \text{(F.C.)} \\ &= 9(11q) + 55 \cdot 2^{6k+1} && \text{(HI)} \\ &= 11 \cdot (9q + 5 \cdot 2^{6k+1}) && \text{(F.C.)} \end{aligned}$$

Ahora bien, como $k \geq 1$, se cumple que $6k + 1 \geq 7 > 0$, y por lo tanto $2^{6k+1} \in \mathbb{N}$. Así, podemos tomar $m := 9q + 5 \cdot 2^{6k+1} \in \mathbb{Z}$ (como podemos considerar $q \in \mathbb{N}$, entonces $m \in \mathbb{N}$), y esto prueba (*).
De todo lo anterior, por el principio de inducción, podemos concluir que el enunciado vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta alternativa: Notemos que $3^{2n+2}+2^{6n+1} = 9^n\cdot 9+64^n\cdot 2$. Como el resto de dividir 64 por 11 es 9, tenemos que $9^n\cdot 9+64^n\cdot 2$ es divisible por 11 si $9^n\cdot 9+9^n\cdot 2$ lo es, y este último es $9^n(9+2)$ que claramente es divisible por 11. Este tipo de solución se entenderá más con el tema de *Congruencias*.

b) $3^{2n+2}-8n-9$ es divisible por 64.
Rta: Se demostrará la fórmula por inducción sobre n.
Caso base. $n=1$. En este caso,

$$3^{2\cdot 1+2}-8\cdot 1-9 = 3^4-8-9 = 81-17 = 64,$$

de donde $64 \mid \left(3^{2\cdot 1+2}-8\cdot 1-9\right)$; y el resultado vale para $n=1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k\in\mathbb{N}$ vale

$$64 \mid \left(3^{2k+2}-8k-9\right) \tag{HI}$$

entonces

$$64 \mid \left(3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9\right) \tag{*}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9 &= 9\cdot 3^{2k+2}-8k-17 \\ &= 9\cdot(3^{2k+2}-8k-9+8k+9)-8k-17 \\ &= 9\cdot(3^{2k+2}-8k-9)+9\cdot(8k+9)-8k-17 \\ &= 9\cdot(3^{2k+2}-8k-9)+72k+81-8k-17 \\ &= 9\cdot(3^{2k+2}-8k-9)+64(k+1). \end{aligned}$$

El primer término es múltiplo de 64 por HI y el segundo es $64(k+1)$ que claramente es múltiplo de 64; y esto prueba (*).
Así, por el principio de inducción, podemos concluir que el enunciado vale para todo $n\in\mathbb{N}$.

(13) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar la respuesta.

a) $\forall n\in\mathbb{N},\ 3^n+1$ es múltiplo de n.
Rta: Falso, contraejemplo $n=3$.

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ 3n^2+1$ es múltiplo de 2.
Rta: Falso, contraejemplo $n=2$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\cdot(5n+2)$ es múltiplo de 2.
Rta: Verdadero. Si n es par, $5n+2$ es par y por lo tanto $(n+1)\cdot(5n+2)$ es múltiplo de 2. Si n es impar, $n+1$ es par y $2\mid(n+1)\cdot(5n+2)$.

(14) Probar que para todo $n\in\mathbb{Z}$, n^2+2 no es divisible por 4.

Rta: Razonemos por el absurdo, es decir, supongamos que $4\mid(n^2+2)$. Notemos que esto implica que n^2+2 es un número par (por ejercicio 9 *b)*).

Caso 1. Si n es impar, entonces n^2+2 es impar, Absurdo! (por la observación anterior).

Caso 2. Si n es par, entonces $4 \mid n^2$, $4 \mid (n^2+2) \implies 4 \mid (n^2+2-n^2)$, es decir, $4 \mid 2$, Absurdo! (ya que $4 > 2$).

Como en ambos casos llegamos a un absurdo, entonces se debe cumplir que $4 \nmid (n^2+2)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

Rta: Como n no es divisible por 3, debe ser $n = 3q \pm 1$, para algún $q \in \mathbb{Z}$. Si q fuese impar entonces n sería par, por lo tanto $q = 2m$, con $m \in \mathbb{Z}$, y obtenemos el resultado.

(16) *a)* Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
Rta: Sea $n \in \mathbb{Z}$. Debemos probar que $6 \mid n(n+1)(n+2)$. Si alguno de los tres enteros es cero, entonces el resultado ya se cumple pues $6 \mid 0$. Además, si $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces $(-a)(-b)(-c) = -(abc)$. De todo lo anterior, basta con probar que $6 \mid n(n+1)(n+2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se puede hacer por inducción, pero usaremos números combinatorios: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}.$$

Por lo tanto, $n(n+1)(n+2) = 6 \cdot \binom{n+2}{3}$, y como $\binom{n+2}{3} \in \mathbb{N}$, se sigue que $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Rta alternativa: Por el ejercicio (10), sabemos que $2 \mid n(n+1)(n+2)$. Como $(2,3) = 1$, basta probar que $3 \mid n(n+1)(n+2)$. Para esto, consideremos los restos de dividir a n por 3:

- Si $n = 3q$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces
$$n(n+1)(n+2) = 3q(n+1)(n+2).$$
- Si $n = 3p+1$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, entonces $n+2 = 3(p+1)$, de donde $n(n+1)(n+2) = 3n(n+1)(p+1)$.
- Si $n = 3r+2$, para algún $r \in \mathbb{Z}$, luego $n+1 = 3(r+1) \Rightarrow n(n+1)(n+2) = 3n(r+1)(n+2)$.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.
Rta: Sea $n \in \mathbb{Z}$. Debemos demostrar que $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$. Como $24 \mid 0$, y si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ entonces $(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$, basta con probar que $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}.$$

Por lo tanto, $n(n+1)(n+2)(n+3) = 24 \cdot \binom{n+3}{4} \Rightarrow 24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Rta alternativa: Por el inciso a) sabemos que $3 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$. Como $(3,8)=1$, basta probar que $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$. Para esto, consideremos si n es par ó impar:

- Si $n = 2q$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces
$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= 2q(n+1)(2q+2)(n+3) \\ &= 4q(q+1)(n+1)(n+3). \end{aligned}$$
Pero, $q(q+1) = 2r$, para algún $r \in \mathbb{Z}$, de donde
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 8r(n+1)(n+3).$$
- Si $n = 2p+1$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, entonces
$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= n(2p+2)(n+2)(2p+4) \\ &= 4n(p+1)(p+2)(n+2). \end{aligned}$$
Pero, $(p+1)(p+2) = 2s$, para algún $s \in \mathbb{Z}$, luego
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 8sn(n+2).$$

c) Sea $m \geq 2$. Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.
Rta: Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \geq 2$. Debemos ver que
$$m! \mid n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1)). \tag{*}$$
Primero notemos lo siguiente:
(i) Si algún factor es cero, es decir, si $n=0$ ó $n=-1$ ó $n=-2$ ó…ó $n = 1-m$, la propiedad ya se cumple pues $m! \mid 0$.
(ii) Si $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, entonces
$$(-a_1)\cdot(-a_2)\cdots(-a_k) = (-1)^k(a_1 \cdot a_2 \cdots a_k).$$
Por lo tanto, basta ver (*) para todo $n \in \mathbb{N}$, con $m \geq 2$ fijo. En efecto,
$$\begin{aligned} \binom{n+(m-1)}{m} &= \frac{(n+(m-1))!}{(n-1)!m!} \\ &= \frac{(n+(m-1))(n+(m-2))\cdots n(n-1)!}{(n-1)!m!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}{m!} \end{aligned}$$
lo cual implica que (*) es válida, ya que todo número combinatorio es un natural.

(17) Probar que si a y b son enteros entonces a^2+b^2 es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

Rta: Los restos posibles de dividir por 7 son 0,1,2,3,4,5,6. Los restos de sus cuadrados son $0,1,2,4$. La única suma de dos de ellos que da un múltiplo de 7 es $0+0=0$. Luego a^2+b^2 sólo puede ser divisible por 7 si a y b lo son. En el caso de 3, tenemos que los restos de cuadrados posibles son 0 y 1, y para que la suma de 0 solo puede ser $0+0$, como en el caso anterior. Para el caso del 5, tenemos 1^2+2^2 es divisible por 5 pero 1 y 2 no lo son.

(18) Encontrar

a) $(7469, 2464)$.

Rta: Por el *Algoritmo de la División* y el *Algoritmo de Euclides*, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
7469 = 3 \cdot 2464 + 77 & \Rightarrow & (7469, 2464) = (2464, 77). \\
2464 = 32 \cdot 77 + 0 & \Rightarrow & (2464, 77) = (77, 0).
\end{array}$$

Por lo tanto, $(7469, 2464) = (77, 0) = 77$.

b) $(2689, 4001)$.

Rta: Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
4001 = 2689 + 1312 & \Rightarrow & (4001, 2689) = (2689, 1312). \\
2689 = 2 \cdot 1312 + 65 & \Rightarrow & (2689, 1312) = (1312, 65). \\
1312 = 20 \cdot 65 + 12 & \Rightarrow & (1312, 65) = (65, 12). \\
65 = 5 \cdot 12 + 5 & \Rightarrow & (65, 12) = (12, 5). \\
12 = 2 \cdot 5 + 2 & \Rightarrow & (12, 5) = (5, 2). \\
5 = 2 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow & (5, 2) = (2, 1). \\
2 = 2 \cdot 1 + 0 & \Rightarrow & (2, 1) = (1, 0).
\end{array}$$

Así, $(2689, 4001) = (1, 0) = 1$.

c) $(2447, -3997)$.

Rta: Hallemos primero (3997,2447):

$$\begin{array}{rcl}
3997 = 2447 + 1550 & \Rightarrow & (3997, 2447) = (2447, 1550). \\
2447 = 1550 + 897 & \Rightarrow & (2447, 1550) = (1550, 897). \\
1550 = 897 + 653 & \Rightarrow & (1550, 897) = (897, 653). \\
897 = 653 + 244 & \Rightarrow & (897, 653) = (653, 244). \\
653 = 2 \cdot 244 + 165 & \Rightarrow & (653, 244) = (244, 165). \\
244 = 165 + 79 & \Rightarrow & (244, 165) = (165, 79). \\
165 = 2 \cdot 79 + 7 & \Rightarrow & (165, 79) = (79, 7). \\
79 = 11 \cdot 7 + 2 & \Rightarrow & (79, 7) = (7, 2). \\
7 = 3 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow & (7, 2) = (2, 1). \\
2 = 2 \cdot 1 + 0 & \Rightarrow & (2, 1) = (1, 0).
\end{array}$$

Luego, $(2447, -3997) = (2447, 3997) = (1, 0) = 1$.

d) $(-1109, -4999)$.

Rta: $(-1109, -4999) = (1109, 4999) = (1, 0) = 1$, ya que

$$\begin{array}{rcl}
4999 = 4 \cdot 1109 + 563 & \Rightarrow & (4999, 1109) = (1109, 563). \\
1109 = 563 + 546 & \Rightarrow & (1109, 563) = (563, 546). \\
563 = 546 + 17 & \Rightarrow & (563, 546) = (546, 17). \\
546 = 32 \cdot 17 + 2 & \Rightarrow & (546, 17) = (17, 2). \\
17 = 8 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow & (17, 2) = (2, 1). \\
2 = 2 \cdot 1 + 0 & \Rightarrow & (2, 1) = (1, 0).
\end{array}$$

(19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35, *Rta:* $(14, 35) = 7 = -2 \cdot 14 + 35$.

b) 11 y 15, *Rta:* $(11, 15) = 1 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11$.

c) 12 y 52, *Rta:* $(12, 52) = 4 = 52 - 4 \cdot 12$.

d) 12 y -52, *Rta:* $(12, -52) = 4 = -4 \cdot 12 - (-52)$.

e) 12 y 532, *Rta:* $(12, 532) = 4 = -44 \cdot 12 + 532$.

f) 725 y 441,
Rta:

$$\begin{aligned}
725 &= 441 \cdot 1 + 284 & &\Rightarrow & 284 &= 725 - 441\\
441 &= 284 \cdot 1 + 157 & &\Rightarrow & 157 &= 441 - 284\\
284 &= 157 \cdot 1 + 127 & &\Rightarrow & 127 &= 284 - 157\\
157 &= 127 \cdot 1 + 30 & &\Rightarrow & 30 &= 157 - 127\\
127 &= 30 \cdot 4 + 7 & &\Rightarrow & 7 &= 127 - 30 \cdot 4\\
30 &= 7 \cdot 4 + 2 & &\Rightarrow & 2 &= 30 - 7 \cdot 4\\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 & &\Rightarrow & 1 &= 7 - 2 \cdot 3\\
2 &= 1 \cdot 2 + 0. & & & &
\end{aligned}$$

Luego, $(725, 441) = 1$ y

$$\begin{aligned}
1 &= 7 - 2 \cdot 3\\
&= 7 - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 = 7 \cdot 13 - 30 \cdot 3\\
&= (127 - 30 \cdot 4) \cdot 13 - 30 \cdot 3 = 127 \cdot 13 - 55 \cdot 30\\
&= 127 \cdot 13 - 55 \cdot (157 - 127) = 68 \cdot 127 - 55 \cdot 157\\
&= 68 \cdot (284 - 157) - 55 \cdot 157 = 68 \cdot 284 - 123 \cdot 157\\
&= 68 \cdot 284 - 123 \cdot (441 - 284) = 191 \cdot 284 - 123 \cdot 441\\
&= 191 \cdot (725 - 441) - 123 \cdot 441 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441.
\end{aligned}$$

Es decir, $1 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441$.

g) 606 y 108.
Rta:

$$\begin{aligned}
606 &= 108 \cdot 5 + 66 & &\Rightarrow & 66 &= 606 - 108 \cdot 5\\
108 &= 66 \cdot 1 + 42 & &\Rightarrow & 42 &= 108 - 66\\
66 &= 42 \cdot 1 + 24 & &\Rightarrow & 24 &= 66 - 42\\
42 &= 24 \cdot 1 + 18 & &\Rightarrow & 18 &= 42 - 24\\
24 &= 18 \cdot 1 + 6 & &\Rightarrow & 6 &= 24 - 18\\
18 &= 6 \cdot 3 + 0 & & & &
\end{aligned}$$

Así, $(606, 108) = 6$ y

$$\begin{aligned} 6 &= 24 - 18 \\ &= 24 - (42 - 24) = 2 \cdot 24 - 42 \\ &= 2 \cdot (66 - 42) - 42 = 2 \cdot 66 - 3 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 66 - 3 \cdot (108 - 66) = 5 \cdot 66 - 3 \cdot 108 \\ &= 5 \cdot (606 - 108 \cdot 5) - 3 \cdot 108 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108. \end{aligned}$$

Es decir, $6 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108$.

(20) Probar que no existen enteros a y b que satisfagan $a + b = 100$ y $(a, b) = 3$.

Rta: Si $(a, b) = 3$ entonces $3 \mid a$, $3 \mid b$ y por lo tanto $3 \mid a + b = 100$, Absurdo! ya que $100 = 3 \cdot 33 + 1$.

(21) *a)* Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
Rta: Como a y b son coprimos, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = ra + sb$, por lo tanto $c = rac + sbc$, y como a divide ambos sumandos, $a \mid c$.

b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
Rta: Tenemos que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $ap = c = bq$. Como a y b son coprimos, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = ra + sb$. Multiplicando por c a la última igualdad, obtenemos $c = rac + sbc = rabq + sbap = (rq + sp)ab$. Por lo tanto, $a \cdot b \mid c$.

(22) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

Rta: Como $(a, b) = 10$, entonces $a = 10p$, $b = 10q$, con p, q números naturales. Además,

$$100 = [a, b] = \frac{ab}{(a, b)} = \frac{ab}{10}.$$

Por lo tanto, $10^3 = ab = (10p)(10q) = 10^2 pq$, esto es $pq = 10$. Ahora bien, sabemos que los divisores positivos de 10 son $\{1, 2, 5, 10\}$, de donde: $p = 1, q = 10$ ó $p = 10, q = 1$ ó $p = 2, q = 5$ ó $p = 5, q = 2$. Luego, $a = 10, b = 100$ ó $a = 100, b = 10$ ó $a = 20, b = 50$ ó $a = 50, b = 20$.

Ejercicio adicional (e.a.): Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, y $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(ka, kb) = k(a, b)$.

Rta: Sea $d := (a, b)$, luego $d \mid a$ y $d \mid b$. De donde, $kd \mid ka$ y $kd \mid kb$. Por la definición del máximo común divisor, se sigue que

$$kd \mid (ka, kb). \tag{*}$$

De otro lado, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $d = ra + sb$, y por lo tanto $kd = r(ka) + s(kb)$. Así,

$$(ka, kb) \mid kd, \tag{**}$$

ya que (ka, kb) divide a cualquier combinación entera de ka y kb.

De (*) y (**), por *Proposición 3.2.3.*, se debe cumplir que:

$$k(a,b) = kd = (ka, kb).$$

(23) *a)* Probar que si $d \in \mathbb{N}$ es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a,b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.

Rta: Existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $a = dp$ y $b = dq$. Luego, $\dfrac{a}{d} = p$ y $\dfrac{b}{d} = q$. De donde,

$$\frac{(a,b)}{d} = \frac{(dp,dq)}{d} \overset{\text{e.a.}}{=} \frac{d(p,q)}{d} = (p,q) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a,b)}$ y $\dfrac{b}{(a,b)}$ son coprimos.

Rta: usar el inciso anterior con $d = (a,b)$.

(24) Probar que 3 y 5 son números primos.

Rta: 3 no es divisible por 2 y 5 no es divisible por 2 ni por 3.

(25) Dar todos los números primos positivos menores que 100.

Rta: 2,3,5,7, están en la lista. Por el criterio de la raíz debemos ver cuales números del 8 al 100 no son divisibles por 2, 3, 5 ni 7. Estos son: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

(26) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

Rta: $\sqrt{113} < 11$ y 113 no es divisible por 2, 3, 5 y 7, por lo tanto es primo. $123 = 3 \cdot 41$ luego no es primo. 131 es primo, pues $\sqrt{131} < 12$ y 131 no es divisible por 2, 3, 5, 7 y 11. 151 es primo, pues $\sqrt{151} < 13$ y 151 no es divisible por 2, 3, 5, 7 y 11. 199 es primo, pues $\sqrt{199} < 15$ y 199 no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11 y 13. 503 es primo, pues $\sqrt{503} \sim 22.42... < 23$ y 503 no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

(27) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n+1$ y $n(n+1)$ son coprimos.

Rta: Tenemos que $d = (2n+1, n(n+1)) \geq 1$. Si $d > 1$, entonces existe un primo p tal que $p \mid d$, por tanto $p \mid (2n+1)$ y $p \mid n(n+1)$. Ahora, como p es primo y $p \mid n(n+1)$, entonces $p \mid n$ o $p \mid (n+1)$.

Caso 1: $p \mid n$. Como $p \mid n$ y $p \mid (2n+1) \Rightarrow p \mid ((2n+1) - 2n) = 1$, absurdo!

Caso 2: $p \mid (n+1)$. Como $p \mid (n+1)$ y $p \mid (2n+1) \Rightarrow p \mid (2(n+1) - (2n+1)) = 1$, absurdo!

Es decir, en cualquier caso llegamos a un absurdo. El absurdo vino de suponer que $d > 1$. De donde, se debe cumplir que $d = 1$.

Rta alternativa: Si $(a, b) = 1$ y $(a, c) = 1$ entonces $(a, b \cdot c) = 1$, ya que un primo que divida a $b \cdot c$ debe dividir a b ó a c y entonces no puede dividir a a. Como $(2n+1, n) = 1 = (2n+1, n+1)$ entonces $(2n+1, n(n+1)) = 1$.

Observación: $1 = (2n+1)(2n+1) - 4n(n+1) \iff (2n+1, n(n+1)) = 1$.

(28) Demostrar que si $a \cdot b$ es un cuadrado y $(a, b) = 1$, entonces a y b son cuadrados.

Rta: Sean $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $(a, b) = 1$. Podemos asumir que $a > 1$ y $b > 1$, ya que si alguno es cero (no ambos) ó alguno es uno (pueden ser ambos) el resultado se cumple.

Luego, $a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ y $b = \prod_{i=1}^{s} q_i^{n_i}$, donde $r, s, m_i, n_i \in \mathbb{N}$; p_i y q_i son primos (distintos entre sí) positivos tales que $p_i \neq q_j$ para todo i, j (pues $(a, b) = 1$). Por lo tanto, la factorización de $a \cdot b$ es:

$$a \cdot b = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r} \cdot q_1^{n_1} \cdots q_s^{n_s}.$$

Ahora, supongamos que $a \cdot b$ es un cuadrado, digamos $a \cdot b = c^2$. Se sigue que $a \cdot b$ y c tienen los mismos factores primos (los divisores primos de c^2, son divisores primos de c), y por lo tanto c tendrá una factorización de la forma $c = p_1^{c_1} \cdots p_r^{c_r} \cdot q_1^{d_1} \cdots q_s^{d_s}$, con $c_i, d_i \in \mathbb{N}$. Así,

$$a \cdot b = c^2 = p_1^{2c_1} \cdots p_r^{2c_r} \cdot q_1^{2d_1} \cdots q_s^{2d_s}$$

De donde, por la unicidad del Teorema Fundamental de la Aritmética (T.F.A.): $m_i = 2c_i$, $n_j = 2d_j$ para todo $i, j \implies a$ y b son cuadrados.

(29) *a)* Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.

Rta: Supongamos que $\sqrt{5}$ es racional, es decir $\sqrt{5} = \dfrac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$, luego $5 = \sqrt{5}^2 = \dfrac{n^2}{m^2}$ y haciendo pasaje de término obtenemos $5m^2 = n^2$. Sea $m = 5^r m_1$ y $n = 5^s n_1$ donde m_1, n_1 no tienen el primo 5 en su descomposición en factores primos (es decir $(5, m_1) = (5, n_1) = 1$), y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$. Luego $5m^2 = 5 \cdot 5^{2r} m_1^2 = 5^{2r+1} m_1^2$ y $n^2 = 5^{2s} n_1^2$, y por lo tanto $5^{2r+1} m_1^2 = 5^{2s} n_1^2$. Por la unicidad del T.F.A., tenemos que $2r + 1 = 2s$, lo cual es absurdo (un número no puede ser ambos par e impar). El absurdo vino de suponer que $\sqrt{5}$ es un número racional, así que $\sqrt{5}$ no lo es.

b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.

Rta: Como en el ejercicio anterior debemos ver que $15m^2 = n^2$ nos lleva a un absurdo. Ahora bien, si $m = 3^r m_1$ y $n = 3^s n_1$ con 3 coprimo con m_1 y n_1, y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$, tenemos que $3^{2r+1} 5 m_1^2 = 3^{2s} n_1^2 \Rightarrow 2r + 1 = 2s$, absurdo.

c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
Rta: En este caso suponemos que $\sqrt{8} = n/m$, luego $8m^2 = n^2$. Si $m = 2^r m_1$ y $n = 2^s n_1$ con $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$, tenemos que $2^3 \cdot 2^{2r} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$, por lo tanto $2^{2r+3} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$. Luego $2r + 3 = 2s$ lo cual es absurdo pues un impar no puede ser igual a un par.

(30) *a)* Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.
Rta: Si fuera racional tendríamos $\sqrt[3]{4} = n/m$ y por lo tanto (elevando al cubo) $4 = n^3/m^3$, o equivalentemente, $2^2 m^3 = n^3$. Si $m = 2^r m_1$ y $n = 2^s n_1$ con $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$, tenemos $2^2 m^3 = 2^2 \cdot 2^{3r} m_1^3 = 2^{3r+2} m_1^3$ y $n^3 = 2^{3s} n_1^3$. Por lo tanto $3r + 2 = 3s$ lo cual es absurdo, pues $3r + 2$ no es múltiplo de 3 (tiene resto 2) y $3s$ sí lo es.

b) Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es un número racional.
Rta: Esquema (completar los detalles):

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{54} = \frac{n}{m} \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \cdot 3^3 \cdot m^4 = n^4 \\ &\Rightarrow \quad 2^{4r+1} 3^3 m_1^4 = 2^{4s} n_1^4 \\ &\Rightarrow \quad 4r + 1 = 4s \quad \text{absurdo!.} \end{aligned}$$

c) Probar que no existen enteros m, n no nulos tal que $21n^5 = m^5$.
Rta: Esquema (completar los detalles):

$$\begin{aligned} 21n^5 = m^5 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot 7^{5r+1} \cdot n_1^5 = 7^{5s} \cdot m_1^5 \\ &\Rightarrow \quad 5r + 1 = 5s \quad \text{absurdo!.} \end{aligned}$$

(31) Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$$

Rta: el miembro de la derecha no es divisible por ninguno de los primeros k primos, luego o es el $(k+1)$-ésimo primo, p_{k+1}, o es divisible por un primo q tal que $p_{k+1} < q$. Por lo tanto, debe ser un número mayor o igual que el $(k+1)$-ésimo primo.

(32) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

Recordar: Si $a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ y $b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$, entonces

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i} \quad \text{y} \quad [a, b] = \prod_{i=1}^{r} p_i^{h_i}$$

donde para todo $1 \leq i \leq r$, $k_i = \min\{m_i, n_i\}$ y $h_i = \max\{m_i, n_i\}$.

a) $a = 12$ y $b = 15$. *Rta:* $a = 2^2 \cdot 3$, $b = 3 \cdot 5$, $(a, b) = 3$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

b) $a = 11$ y $b = 13$. *Rta:* $(a, b) = 1$, $[a, b] = 11 \cdot 13 = 143$.

c) $a = 140$ y $b = 150$. *Rta:* $a = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $(a, b) = 2 \cdot 5 = 10$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$.

d) $a = 225$ y $b = 44$. *Rta:* $a = 3^2 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 11$, $(a, b) = 1$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$.

e) $a = 60$ y $b = 70$. *Rta:* $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $(a, b) = 2 \cdot 5$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.