Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2019/1
FAMAF

Soluciones

1. Hallar el cociente y el resto de la división de:
   a) 135 por 23, *Rta:* $135 = 23 \times 5 + 20$ $q = 5, r = 20$
   b) -135 por 23, *Rta:* $-135 = 23 \times (-6) + 3$ $q = -6, r = 3$
   c) 135 por -23, *Rta:* $-135 = 23 \times (-6) + 3$ $q = -6, r = 3$
   d) -135 por -23, *Rta:* $135 = 23 \times 5 + 20$ $q = 5, r = 20$
   e) 127 por 99, *Rta:* $127 = 99 \times 1 + 28$, $q = 1, r = 28$
   f) -98 por -73. *Rta:* $98 = 73 \times 1 + 25$, $q = 1, r = 25$
2. *a*) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
   Rta: $a = b \cdot (q + 1) + r - b$, con $0 \leq r - b < b$ por lo tanto el cociente es $q + 1$ y el resto $r - b$.
   b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
   Rta: $a = b \cdot (q - 1) + r + b$, con $0 \leq r + b < b$ por lo tanto el cociente es $q - 1$ y el resto $r + b$.
3. Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la division por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.
   Rta: El resto del cuadrado (cubo) de m es el resto del cuadrado (cubo) del resto de m. Por lo tanto hay que calcular los restos de r^2 con $0 \leq r \leq m$. Así tenemos para $m = 3, r \in \{0, 1\}$; $m = 4, r \in \{0, 1\}$; $m = 5, r \in \{0, 1, 4\}$; $m = 7, r \in \{0, 1, 4, 2\}$; $m = 8, r \in \{0, 1, 4\}$; $m = 11, r \in \{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$.
4. Expresar en base 10 los siguientes enteros:
   a) $(1503)_6$ *Rta:* $1{,}216 + 5{,}36 + 0{,}6 + 3 = 399$
   b) $(1111)_2$ *Rta:* $8 + 4 + 2 + 1 = 15$
   c) $(1111)_12$ *Rta:* $12^3 + 12^2 + 12^1 + 1 = 12^4 - 1 = 144^2 - 1 = 143 \times 145$.
   d) $(123)_4$ *Rta:* $1{,}16 + 2, 4 + 3 = 27$.
   e) $(12121)_3$ *Rta:* $3^4 + 2{,}3^3 + 3^2 + 2{,}3^1 + 3 = 81 + 54 + 9 + 6 + 3 = 153$.
   f) $(1111)_5$ *Rta:* $=5^4 - 1 = 624$.
5. Convertir
   a) $(133)_4$ a base 8, *Rta:* $4^2 + 3{,}4 + 3 = 2{,}8 + 1{,}8 + 4 + 3 = 3{,}8 + 7 = (37)_8$.

b) $(B38)_16$ a base 8, *Rta:* $12.(16)^2{+}3{,}16{+}8 = 6(8)^3{+}6{,}8{+}8 = 6{,}8^3{+}7{,}8 = (6010)_8$.

c) $(3506)_7$ a base 2, *Rta:* $3{,}7^3 + 5{,}7^2 + 6 = (11)_2(111)_2^3 + (101)_2(111)_2^2 + (110)_2$.

d) $(1541)_6$ a base 4. *Rta:* $6^3 + 5{,}6^2 + 4{,}6 + 1 = 54{,}4 + 45{,}4 + 6{,}4 = 105{,}4 = (26{,}4 + 1)4 = (6{,}4 + 2)4^2 + 4 = 4^4 + 2{,}4^3 + 2{,}4^2 + 4 = (12210)_4$.

6. Calcular:

a) $(2234)_5 + (2310)_5$ *Rta:* $(4544)_5 = (10044)_5$

b) $(10101101)_2 + (10011)_2$ *Rta:* $(11000000)_2$.

7. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.

Rta: a y b no pueden ser nulos y si tienen distinto signo su producto es negativo, podemos suponer que son ambos positivos o negativos. Si $a > 1$ entonces $1 = ab > b > 0$ es absurdo. Igualmente si $a < -1$ entonces $1 = ab > -b > 0$. Luego $a = \pm 1$ y entonces $b = \pm 1$.

b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

Rta: Tenemos $b|a \Rightarrow a = bq$ y $a|b \Rightarrow b = ap$ luego $a = apq$ y $a \neq 0 \Rightarrow pq = 1$. El inciso a) dice que $p = q = 1$ o $p = q = -1$ de donde se sigue el resultado buscado.

c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

Rta: Este es un corolario del inciso *b)* tomando $b = 1$ ya que $1|a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$ y $a|(b - c)$.

Rta: Como $b = aq$ y $c = ap$, $b \pm c = a(q \pm p)$.

e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.

Rta: Se puede usar el inciso anterior con $b = 0$.

f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

Rta: Si $b = aq$ entonces $b.c = aqc \Rightarrow a|b.c$.

8. Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.

Rta: $0 = 2 \times 0$ y $1 = 2 \times 0 + 1$.

b) Si b es par y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

Rta: $b = 2q, c = bp \Rightarrow c = 2qp \Rightarrow c$ es par. $(b| - b)$.

c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.

Rta: $2|b, 2|c \Rightarrow 2|b+c$.

d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.

Rta: Dicho número a no puede ser 0 y por el ejercicio 7 b) $2|a$ y $a|2$ entonces $a = \pm 2$.

e) La suma de un número par y uno impar es impar.

Rta: $a = 2q, b = 2p+1 \Rightarrow a+b = 2(q+p)+1$.

f) $b+c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

Rta: $b = 2q, c = 2p \Rightarrow b+c = 2(q+p); b = 2q+1, c = 2p+1 \Rightarrow b+c = 2q+1+2p+1 = 2(q+p+1)$.

9. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

Rta: $n = 2q \Rightarrow n^2 = 2(2q^2)$. $n = 2q+1 \Rightarrow n^2 = 4q^2+4q+1 = 2(2q^2+2q)+1$.

10. Probar que $n(n+1)$ es par para todo n entero.

Rta: Si $n = 2q, n(n+1) = 2q(2q+1)$ es par. Si $n = 2q+1, n(n+1) = (2q+1)(2q+1+1) = 2(q+1)(2q+1)$.

11. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

Rta: Falso, contraejemplo: $6|12 = 4 \times 3$ pero 6 no divide a 4 ni divide a 3.

b) $a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

Rta: Falso, contraejemplo: $6|5 = 1$ per 6 no divide a 5 ni a 1.

c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.

Rta: Falso, contraejemplo: $6|12$ y $4|12$ pero 24 no divide a 12.

d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a+b) \mid c$.

Rta: Falso, contraejemplo: $2|6$ y $3|6$ pero 5=2+3 no divide a 6.

e) a, b, $c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.

Rta: Verdadero, $b \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq c$ y $c \geq 1 \Rightarrow bc \geq b$.

12. Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

Rta: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$. Como el resto de dividir 64 por 11 es 9, tenemos que $9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$ es divisible por 11 si $9^n \cdot 9 + 9^n \cdot 2$ lo es y este último es $9^n(9+2)$ que claramente es divisible por 11.

Rta Alternativa: podemos probar por inducción, si $n = 0$ es claro. Supongamos $11|3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ (HI). Debemos probar que

$$11|3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 11|3^{2n+4} + 2^{6n+7}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} 3^{2n+4} + 2^{6n+7} &= 3^2 3^{2n+2} + 2^6 2^{6n+1} \\ &= 9 \cdot 3^{2n+2} + 64 \cdot 2^{6n+1} \\ &= 9(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}. \end{aligned}$$

Es claro que el primer término es divisible por 11 por HI. El segundo término es $55 \cdot 2^{6n+1}$ que es divisible por 11, pues 55 lo es. Concluyendo $9(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}$ es divisible por 11 y por lo tanto $11|3^{2n+4} + 2^{6n+7}$ lo es.

b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

Rta: Lo haremos por inducción. El caso base es $n = 1$ y en ese caso debemos ver que $64|3^{2\cdot1+2} - 8 \cdot 1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64$, lo cual esta bien. Supongamos que $64|3^{2n+2} - 8n - 9$ (HI), entonces debemos probar que $64|3^{2(n+1)+2} - 8(n + 1) - 9 = 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17$.
Ahora bien

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9 + 8n + 9) - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 9 \cdot (8n + 9) - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 72n + 81 - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n + 1). \end{aligned}$$

El primer término es múltiplo de 64 por HI y el segundo es $64(n + 1)$ que claramente es múltiplo de 64.

13. Decir si es verdadero o falso justificando:

a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rta: Falso, contraejemplo $n = 3$.

b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rta: Falso, contraejemplo $n = 2$.

c) $(n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rta: Verdadero, si n es par, $5n+2$ es par y por lo tanto $(n+1)\cdot(5n+2)$ es múltiplo de 2. Si n es impar $n+1$ es par y $2|(n+1)\cdot(5n+2)$.

14. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, n^2+2 no es divisible por 4.

    Rta: Si n es impar n^2+2 es impar y por lo tanto no es divisible por 4. Si n es par n^2 es divisible por 4 y como 4 no divide a 2 entonces no divide a n^2+2 .

15. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

    Rta: Como n no es divisible por 3, debe ser $n = 3q \pm 1$. Si q fuese impar entonces n sería par, por lo tanto $q = 2m$ y tenemos el resultado.

16. *a*) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

    Rta: Como los pares e impares se alternan dados dos consecutivos uno de ellos debe ser par. Similarmente cada tres consecutivos habrá uno que es divisible por 3 (ya que al dividirlos por 3 sus restos son tres números distintos entre 0 y 2, o sea que uno de los restos debe ser 0). Entonces $n(n+1)(n+2)$ tiene que ser divisible por 2 y por 3 y como estos son coprimos debe ser divisible por 6.

    b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

    Rta: Como en el ejercicio anterior, ahora tenemos que uno de los números es divisible por 4 y otro de los restantes es divisible por 2. Entonces el producto es divisible por 8 y también hay uno que es múltiplo de 3 por lo cual el producto es divisible por $24 = 3 \times 8$.

    Rta Alternativa: el producto de cuatro enteros consecutivos es de la forma $n(n-1)(n-2)(n-3)$. Ahora bien,

    $$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

    Por un teorema de la teórica sabemos que $\binom{n}{4}$ es un número entero, por lo tanto $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ es entero, lo cual quiere decir que $4!|n(n-1)(n-2)(n-3)$ (y $4! = 24$).

17. Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

    Rta: Si un primo p divide a a entonces divide a ab y por ser este un cuadrado $p^2|ab$, por ser coprimos p no divide a b y entonces p^2 debe dividir a a. El resultado se sigue por el principio de buen orden tomando el ab más chico que contradice la proposición y considerando $ab/p^2, a/p^2, b$.

18. Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?
Rta: Los restos posibles de dividir por 7 son 0,1,2,3,4,5,6. Los restos de sus cuadrados son 0,1,4,2. La única suma de dos de ellos que da 0 es $0+0=0$. Luego $a^2 + b^2$ sólo puede ser divisible por 7 si a y b lo son. En el caso de 3 tenemos tenemos que los restos de cuadrados posibles son 0 y 1 y para que la suma de 0 solo puede ser $0 + 0$ como en el caso anterior. Para el caso 5 tenemos $1^2 + 2^2$ es divisible por 5 pero 1 y 2 no lo son.

19. Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.
Rta 1: $7469 = 3 \cdot 2464 + 77$, $2464 = 32 \cdot 77$ Por lo tanto $(2469, 2464) = 77$.
Rta 2: $4001 = 2689+1312$, $2689 = 2\cdot1312+65$, $1312 = 20\cdot65+12$, $65 = 5\cdot12+5$, $12 = 2 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Por lo tanto$(2689, 4001) = 1$.
Rta 3: $-3997 = (-2)2447 + 897$, $2447 = 2 \cdot 897 + 653$, $897 = 653 + 244$, $653 = 2 \cdot 244 + 165$, $244 = 165 + 79$, $165 = 2 \cdot 79 + 7$, $79 = 11 \cdot 7 + 2$, $7 = 3 \cdot +1$. Por lo tanto $(2447, -3997) = 1$.
Rta 4: $4999 = 4 \cdot 1109 + 563; 1109 = 2 \cdot 563 - 17; 563 = 33 \cdot 17 + 2; 17 = 8 \cdot 2 + 1$. Por lo tanto $(-1109, -4999) = 1$.

20. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:
    a) 14 y 35, *Rta:* $35 = 2 \cdot 14 + 7; 14 = 2 \cdot 7; (14, 35) = -2 \cdot 14 + 35$.
    b) 11 y 15, *Rta:* $15 = 11 + 4; 11 = 2 \cdot 4 + 3; 4 = 3 + 1; 1 = 4 - 3 =$
    $$= 15 - 11 - (11 - 2 \cdot (15 - 11)) = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11.$$
    c) 12 y 52, *Rta:* $(12, 52) = 4 = 52 - 4 \cdot 12$.
    d) 12 y -52, *Rta:* $(12, -52) = 4 = -4 \cdot 12 + (-52)$.
    e) 12 y 532. *Rta:* $(12, 532) = 4 = -44 \cdot 12 + 532$.

21. Mostrar que 725 y 441 son coprimos y encontrar enteros m, n tales que $m \cdot 725 + n \cdot 441 = 1$.

Rta:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
725 &=& 441 \cdot 1 + 284 & \Rightarrow & 284 &=& 725 - 441 \\
441 &=& 284 \cdot 1 + 157 & \Rightarrow & 157 &=& 441 - 284 \\
284 &=& 157 \cdot 1 + 127 & \Rightarrow & 127 &=& 284 - 157 \\
157 &=& 127 \cdot 1 + 30 & \Rightarrow & 30 &=& 157 - 127 \\
127 &=& 30 \cdot 4 + 7 & \Rightarrow & 7 &=& 127 - 30 \cdot 4 \\
30 &=& 7 \cdot 4 + 2 & \Rightarrow & 2 &=& 30 - 7 \cdot 4 \\
7 &=& 2 \cdot 3 + 1 & \Rightarrow & 1 &=& 7 - 2 \cdot 3 \\
2 &=& 1 \cdot 2 + 0. & & & &
\end{array}
$$

Luego $(725, 441) = 1$ y

$$
\begin{aligned}
1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\
&= 7 - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 = 7 \cdot 13 - 30 \cdot 3 \\
&= (127 - 30 \cdot 4) \cdot 13 - 30 \cdot 3 = 127 \cdot 13 - 55 \cdot 30 \\
&= 127 \cdot 13 - 55 \cdot (157 - 127) = 68 \cdot 127 - 55 \cdot 157 \\
&= 68 \cdot (284 - 157) - 55 \cdot 157 = 68 \cdot 284 - 123 \cdot 157 \\
&= 68 \cdot 284 - 123 \cdot (441 - 284) = 191 \cdot 284 - 123 \cdot 441 \\
&= 191 \cdot (725 - 441) - 123 \cdot 441 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441.
\end{aligned}
$$

Es decir, $1 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441$.

22. Dado un entero a, $a \neq 0$, hallar $(0, a)$.
    Rta: $(0, a) = a$.

23. Calcular el máximo común divisor entre 606 y 108 y expresarlo como combinación lineal de esos números.

Rta:

$$\begin{aligned}
606 &= 108 \cdot 5 + 66 & \Rightarrow && 66 &= 606 - 108 \cdot 5 \\
108 &= 66 \cdot 1 + 42 & \Rightarrow && 42 &= 108 - 66 \\
66 &= 42 \cdot 1 + 24 & \Rightarrow && 24 &= 66 - 42 \\
42 &= 24 \cdot 1 + 18 & \Rightarrow && 18 &= 42 - 24 \\
24 &= 18 \cdot 1 + 6 & \Rightarrow && 6 &= 24 - 18 \\
18 &= 6 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

Luego $(606, 108) = 6$ y

$$\begin{aligned}
6 &= 24 - 18 \\
&= 24 - (42 - 24) = 2 \cdot 24 - 42 \\
&= 2 \cdot (66 - 42) - 42 = 2 \cdot 66 - 3 \cdot 42 \\
&= 2 \cdot 66 - 3 \cdot (108 - 66) = 5 \cdot 66 - 3 \cdot 108 \\
&= 5 \cdot (606 - 108 \cdot 5) - 3 \cdot 108 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108.
\end{aligned}$$

Es decir, $6 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108$.

24. Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
Rta: Si $(x, y) = 3$ entonces $3|x, 3|y$ y por lo tanto $3|x + y = 100$, absurdo.

25. *a*) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
Rta: Como a y b son coprimos existen r y s tales que $1 = ra + sb$ por lo tanto $c = rac + sbc$ y como a divide ambos sumandos, $a|c$.

    b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
Rta: Como a y b son coprimos existen r y s tales que $1 = ra + sb$. Además $ap = c = bq$, entonces $c = rac + sbc = rabq + sbap = (rq + sp)ab$. Por lo tanto $ab|c$.

26. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.
Rta: Si a es coprimo con b y con c entonces a es coprimo con bc, ya que un primo que divida a $b \cdot c$ debe dividir a b o a c y entonces no puede dividir a a. Como $2n + 1$ es coprimo con n y con $n + 1$ entonces es coprimo con $n(n + 1)$ y por lo tanto es coprimo con $\frac{n(n+1)}{2}$.

Más explícitamente: $1 = 2n+1-2\cdot n; 1 = 2(n+1)-(2n+1) \Rightarrow (2n+1, n) = 1 = (2n+1, n+1)$. Entonces $1 = (2n+1-2\cdot n)(2(n+1)-(2n+1)) = (2n+1)(1+2n)-4n(n+1) = (2n+1)(1+2n)-8\frac{n(n+1)}{2}$ y esto implica $2n+1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

Rta Alternativa: si p es un primo que divide a $\frac{n(n+1)}{2}$, p debe dividir a $n(n+1)$ y por ser primo debe dividir a n o a $n+1$. Si además se pide que $p|2n+1$ que es coprimo con n y $n+1$, entonces $p|1$ absurdo.

27. Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números
    a) a = 12 y b = 15. *Rta:* 60
    b) a = 11 y b = 13. *Rta:* 143
    c) a = 140 y b = 150. *Rta:* 2100
    d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$. *Rta:* $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$
    e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$. *Rta:* $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

28. Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a,b) = 10$ y $[a,b] = 100$.
    Rta: Es claro que $(a/10, b/10) = 1$ y $[a/10, b/10] = 10$. Como $[a/10, b/10] = \dfrac{(a/10)(b/10)}{(a/10, b/10)} = (a/10)(b/10)$, tenemos que $(a/10)(b/10) = 10$, por lo tanto $\{a/10, b/10\} \in \{\{1, 10\}, \{2,5\}\}$. Es decir, $a = 10, b = 100$ ó $a = 20, b = 50$ ó al revés.

29. *a*) Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a,b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.
    Rta: $d|a, d|b \Rightarrow d|(a,b) \Rightarrow (a,b) = dq$. Como $a = (a,b)r; b = (a,b)s$ con $(r,s) = 1$, se tiene $a/d = qr; b/d = qs$ con $(r,s) = 1$. Por lo tanto $(a/d, b/d) = q = (a,b)/d$.
    b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a,b)}$ y $\dfrac{b}{(a,b)}$ son coprimos.
    Rta: usar el inciso anterior con $d = (a,b)$.

30. Probar que 3 y 5 son números primos.
    Rta: 3 no es divisible por 2 y 5 no es divisible por 2 ni por 3.

31. Determinar cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
    Rta: 113 es primo, $123 = 3 \cdot 41$, 131 es primo, 151 es primo, 199 es primo, 503 es primo.

32. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

Rta: 2,3,5,7, están en la lista, luego siguen todos aquellos que no sean divisibles por 2,3,5 ni 7, es decir: 11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

33. Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

Rta: el miembro de la derecha no es divisible por ninguno de los primeros k primos luego o es el $k+1$-ésimo primo, o es divisible por un primo mayor que este. Por lo tanto debe ser un número mayor o igual que el $k+1$-ésimo primo.