Práctico 4
Matemática Discreta I – Año 2019/1
FAMAF

1. *a*) Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin tener que hacer la división. (Ayuda: $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$).
   b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es divisible por 3.
3. Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a 0 si n es par y 1 si n es impar.
4. *a*) Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.
   b) Decir por cuáles de los números del 2 al 11 son divisibles los siguientes números:

   12342   5176   314573   899.

5. Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que
$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod 3.$$
6. Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15}.
7. Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:
   a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$;
   b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.
8. Hallar todos los x que satisfacen:

   a) $x^2 \equiv 1 \ (4)$
   b) $x^2 \equiv x \ (12)$
   c) $x^2 \equiv 2 \ (3)$
   d) $x^2 \equiv 0 \ (12)$
   e) $x^4 \equiv 1 \ (16)$
   f) $3x \equiv 1 \ (5)$

9. Sean a, b, $m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ tales que $d \mid a$, $d \mid b$ y $d \mid m$. Probar que la ecuación $a \cdot x \equiv b\,(m)$ tiene solución si y sólo si la ecuación
$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \left(\frac{m}{d}\right)$$
tiene solución.
10. Resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $2x \equiv -21 \ (8)$ *b*) $2x \equiv -12 \ (7)$ *c*) $3x \equiv 5 \ (4)$.

11. Resolver la ecuación $221x \equiv 85\ (340)$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.

12. (i) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$36\,x \equiv 8 \quad (20)$$

usando el método visto en clase.

(ii) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $-8 < x < 30$.

13. (i) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$21\,x \equiv 6 \quad (30)$$

usando el método visto en clase.

(ii) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $0 < x < 35$.

14. Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *inversible módulo* m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1\,(\,m)$.

   a) ¿Es 5 inversible módulo 17?

   b) Probar que t es inversible módulo m, si y sólo si $(t, m) = 1$.

   c) Determinar los inversibles módulo m, para $m = 11, 12, 16$.

15. Encontrar los enteros cuyos cuadrados divididos por 19 dan resto 9.

16. Probar que todo número impar a satisface: $a^4 \equiv 1(16)$, $a^8 \equiv 1(32)$, $a^{16} \equiv 1(64)$. ¿Se puede asegurar que $a^{2^n} \equiv 1(2^{n+2})$?

17. Encontrar el resto en la división de a por b en los siguientes casos:

   a) $a = 11^{13} \cdot 13^8$; $\quad b = 12$;

   b) $a = 4^{1000}$; $\quad b = 7$;

   c) $a = 123^{456}$; $\quad b = 31$;

   d) $a = 7^{83}$; $\quad b = 10$.

18. Obtener el resto en la división de 2^{21} por 13; de 3^8 por 5 y de 8^{25} por 127.

19. *a*) Probar que no existen enteros no nulos tales que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

   b) Probar que no existen números racionales no nulos a, b, r tales que $3(a^2+b^2) = 7r^2$.

20. Probar que si $(a, 1001) = 1$ entonces 1001 divide a $a^{720} - 1$.

(*): ejercicios opcionales de mayor dificultad.

21. (*) ¿Para qué valores de n es $10^n - 1$ divisible por 11?
22. (*) Probar que para ningún $n \in \mathbb{N}$ se puede partir el conjunto $\{n, n+1, \ldots, n+5\}$ en dos partes disjuntas no vacías tales que los productos de los elementos que las integran sean iguales.
23. (*) El número 2^{29} tiene nueve cifras y todas distintas. ¿Cuál dígito falta? (No está permitido el uso de calculadora).