La pâte feuilletée

Barbara Francisco 1ère, Gulliver Larsonneur Ter

Lycées Saint Paul, Marguerite de Valois, Charles Coulomb

05 - 07 avril 2019

Découpage de l'exposé

1. Présentation du problème
2. Modélisation du problème
   - Illustration
   - Mise en équations
3. Les différents cycles
   - Au bout de n étapes
   - Au bout de n étapes exactement
4. Une propriété intéressante...
5. Une coquille aventurière..

Présentation du problème

Un pâtissier réalise une pâte de la manière suivante :

- Il dispose une pâte 1 m$\times$1 m sur un plan de travail
- A l'aide d'un rouleau à pâtisserie il l'étale en une pâte de 2 m de long (toujours sur 1 m de large)
- Il la replie sur elle-même de manière à obtenir un carré de 1 m$\times$1 m

Il réalise cette opération un grand nombre de fois.
Le pâtissier aperçoit une petite coquille tombée dans la pâte. Après une étape, elle a changé de place, après une seconde étape, elle a à nouveau bougé, etc.

Remarque : Une extension et un pliage correspondent à une étape de la fabrication de la pâte feuilletée.

Modélisation du problème

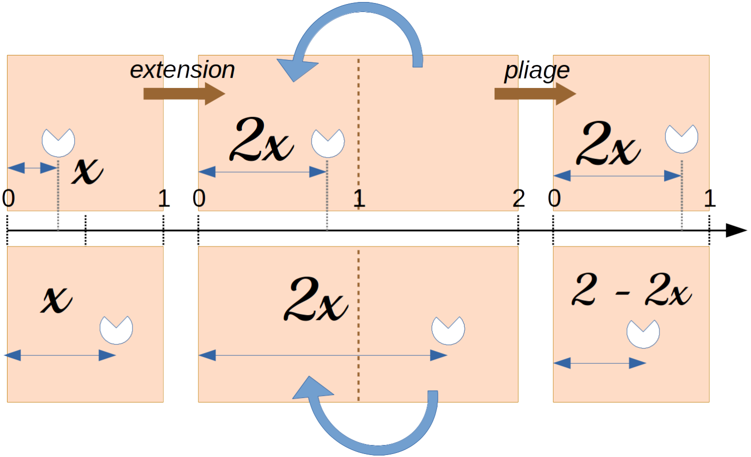

FIGURE – Comment se déplace la coquille ?

Modélisation du problème

Soit x la position de la coquille avant pliage donc $x \in [0;1]$.
Soit $f(x)$ une fonction qui associe à x sa position après pliage.

- Si $x \leq \frac{1}{2}$: $f(x) = 2x$
- Si $x > \frac{1}{2}$: $f(x) = 2 - 2x$

Modélisation du problème

En partant de x, les coquilles prendront donc les positions suivantes :

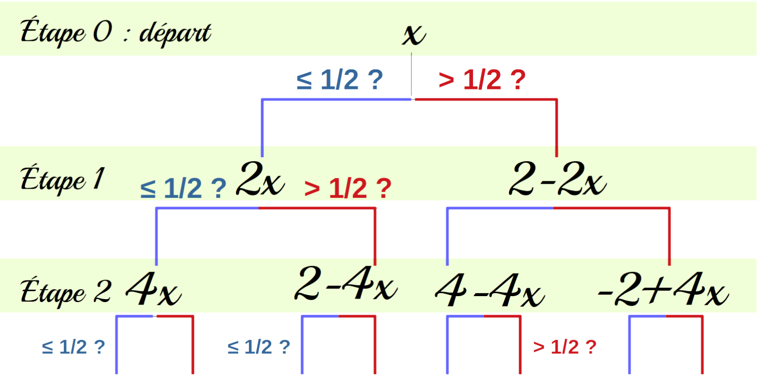

FIGURE – Arbre des possibilités

Modélisation du problème

Quelles sont les positions x telles que la coquille revienne à sa position initiale au bout de n étapes ?

D'après le graphe, il suffit d'écrire qu'à l'étape n, la position est celle de l'étape 0, càd x.
Pour $n = 2$, on écrit donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 4x &= x \\ 2-4x &= x \\ 4-4x &= x \\ -2+4x &= x \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'ensemble des 2^2 solutions S_2 : $S_2 = \left\{0, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right\}$

Les différents cycles

Exemples, n=3 et n=4

De la même manière, nous obtenons pour $n = 3$ et $n = 4$:

Exemples suivants

- **n = 3** : $S_3 = \left\{0, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$
- **n = 4** : $S_4 = \left\{0, \frac{2}{17}, \frac{4}{17}, \frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{10}{17}, \frac{12}{17}, \frac{14}{17}, \frac{16}{17}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{6}{15}, \frac{8}{15}, \frac{10}{15}, \frac{12}{15}, \frac{14}{15}\right\}$

soit 2^3 et 2^4 positions respectivement.

On déduit, à partir du graphe et des exemples :

Conjecture

Après n étapes, la coquille revient à sa position x si :

- $x = \dfrac{2i}{2^n - 1}$, ou
- $x = \dfrac{2j}{2^n + 1}$

avec i, j des entiers tels que $i \in [\![1; 2^{n-1}[\![$ et $j \in [\![0; 2^{n-1}]\!]$, soit 2^n positions initiales possibles.

Démontrons cette conjecture !

Pour démontrer les formules précédentes nous allons procéder de la manière suivante :

- A l'aide du graphe, on détermine une formule qui donne les positions $P(x)$, qui sont de la forme $P(x) = ax + b$:
- On en déduit une expression de x, en résolvant $P(x) = x$

$\rightarrow$ Ainsi, on détermine les positions $P(x)$ qui coïncident avec x.

Modélisation du problème

Démonstration

Soit n l'étape en cours et $P_n(x)$ une position possible de la coquille.
A l'étape $n+1$, $P_n(x)$ est multiplié par 2 ou bien par -2, en fonction de sa valeur par rapport à $\frac{1}{2}$.
$\rightarrow$ Partant de 0, au bout de n étapes, le coefficient a de x sera donc de la forme $\pm 2^n$.

Remarque : a et b sont toujours de signes contraires.
En effet, l'opération $x \mapsto 2-2x$ est la seule des deux à faire apparaître b, qui est alors de signe opposé à a.
Comme l'opération $x \mapsto 2x$ ne change le signe ni de a, ni de b, il y en aura toujours un positif et un négatif.

Les différents cycles

Démonstration

Cherchons ensuite la valeur de b dans $P_n(x) = ax + b$, où $P_n(x)$ représente une position possible au rang n. On peut, à partir de l'analyse du graphe, deviner la forme de b. Encore faut-il prouver sa justesse.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété :

Toutes les positions de la coquille au bout de n étapes sont données par $P_n(x) = ax - 2^n + 2k$ avec $k \in [\![1; 2^n]\!]$

Nous choisissons de démontrer cette proposition par récurrence.

Modélisation du problème

- *Initialisation*

  Soit $n = 1$. L'arbre nous donne $S_1 = \{2x, 2-2x\}$ on a donc $b = 0$ et $b = 2$. La formule, elle, nous donne avec $k \in [\![1; 2^n]\!]$ c'est à dire $k \in [\![1; 2^1]\!]$:

  - Soit $k = 1$, $b = -2^1 + 2 \times 1 = 0$ et
  - Soit $k = 2$, $b = -2^1 + 2 \times 2 = 2$

  Les résultats sont bien identiques, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

- *Hérédité*

Supposons maintenant $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence les positions de la coquille sont données par $P_n(x) = ax + b$ avec $b = -2^n + 2k$,

à l'étape suivante b sera donc de la forme :

$$b = \begin{cases} \quad 2 \times (-2^n + 2k) = \quad -2^{n+1} + 2 \times 2k & (\text{cas } x \mapsto 2x) \\ 2- \quad 2 \times (-2^n + 2k) = 2 + 2^{n+1} - 2 \times 2k & (\text{cas } x \mapsto 2 - 2x) \end{cases}$$

Les différents cycles

Démonstration

Au rang n, on obtient donc deux listes de b :

- l'une allant de $b = -2^{n+1} + 4$ $(k = 1)$ à $b = 2^{n+1}$ $(k = 2^n)$
- l'autre de $b = 2^{n+1} + 2$ $(k = 1)$ à $b = -2^{n+1} + 2$ $(k = 2^n)$

Chacune allant de 4 en 4, et puisqu'elles sont séparées de 2, elles ne se croisent pas. Rassemblées, elles prennent toutes les valeurs paires de $b = -2^{n+1} + 2$ à $b = 2^{n+1}$.

On obtient alors l'expression : $b = -2^{n+1} + 2k$ avec $k \in [\![1; 2^{n+1}]\!]$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier n. $\blacksquare$

Les différents cycles

Démonstration

Nous venons donc de montrer que $P_n(x) = ax - 2^n + 2k$.

D'après ce qui a été dit précédemment, a et b sont de signes contraires donc :

- si $-2^n + 2k \geq 0$ alors $k \geq 2^{n-1}$ et donc $a < 0$
- si $-2^n + 2k < 0$ alors $k < 2^{n-1}$ et donc $a > 0$

Finalement on obtient :

$$P_n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2^n + 2k \text{ pour } k \in [\![1; 2^{n-1}[\![\\ -2^n x - 2^n + 2k \text{ pour } k \in [\![2^{n-1}; 2^n]\!] \end{cases}$$

Si on veut à présent, que la position atteinte au rang n soit égale à celle de départ, il faut résoudre l'équation $x = P_n(x)$, soit :

- Si $k \in [\![1;2^{n-1}[\![$:

$$x = 2^n x - 2^n + 2k \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2k}{2^n - 1}$$

- Si $k \in [\![2^{n-1};2^n]\!]$:

$$x = -2^n x - 2^n + 2k \quad \text{d'où} \quad x = \frac{-2^n + 2k}{2^n + 1}$$

Les différents cycles

Démonstration

En changeant l'intervalle de k, cette dernière solution s'écrit aussi $x = \dfrac{2k}{2^n+1}$ avec $k \in [\![0; 2^{n-1}]\!]$

On obtient bien les 2^n solutions énoncées dans la conjecture :

$$x = \begin{cases} \dfrac{2k}{2^n-1} \text{ avec } k \in [\![1; 2^{n-1}[\![\\ \dfrac{2k}{2^n+1} \text{ avec } k \in [\![0; 2^{n-1}]\!] \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Les cycles uniques

Au bout de exactement *n* étapes

Combien existe t-il de positions telles que la coquille revienne pour la **première** fois à sa position initiale au bout de *n* étapes ?

Les cycles uniques

Au bout de exactement n étapes

2^n ? Non.

Pour répondre à cette question, pas besoin d'équation mais de bon sens !

Prenons une coquille revenue à sa position initiale au bout de 3 étapes, elle reviendra donc à cette même position tous les multiples de 3 étapes.

Donc pour que la coquille revienne pour la **première** fois à sa position initiale, après n étapes, il faut soustraire au nombre total de possibilités, toutes celles correspondant aux diviseurs de n.

Les cycles uniques

Au bout de exactement *n* étapes

Pour un nombre premier, comme 5, il faut enlever au nombre de possibilités, celles dont les positions reviennent toutes les 1 étape.
Les seuls diviseurs d'un nombre premier étant 1 et lui-même, le seul "sous-"cycle à prendre en compte est celui de longueur 1.
Or à chaque étape, deux positions se conservent : $x = 0$ et $x = \dfrac{2}{3}$.

Si l'on nomme T_n le nombre des possibilités pour n étapes, on aura $T_5 = 2^5 - 2 = 30$.

Les cycles uniques

Au bout de exactement n étapes

Par contre, pour 10 qui a 3 diviseurs $1, 2, 5$ (sans compter lui même), il faut enlever les coquilles qui reviennent à leur position toutes les 1 étape, 2 étapes et 5 étapes.

Ceci nous amène à :
$T_{10} = 2^{10} - T_5 - T_2 - T_1 = 2^{10} - (2^5 - 2) - (2^2 - 2) - 2 = 990$ solutions.

Attention à ne pas oublier d'enlever les cycles de ces diviseurs également : si on avait laissé $2^{10} - 2^5 - 2^2 - 2$, on aurait enlevé trop de fois le cycle de 1 (il est compris dans 1, dans 2 et dans 5), il faut donc bien penser à soustraire "le nombre de position telles que la coquille revienne pour la première fois à sa position initiale au bout de q étapes" ou q est le diviseur considéré.

Une propriété intéressante...

Nombres premiers et divisibilité

Lorsque n est premier, nous venons de voir que $T_n = 2^n - 2$.

Or, il se trouve que quel que soit n premier, $2^n - 2$ est divisible par n.
Et on peut le prouver sans équations !

Supposons que l'on ait une telle position x_1, montrons que l'on peut en trouver $n-1$ autres.
Sur un cycle n, la coquille est en positions successives x_1 puis x_2, x_3, $\ldots$, x_n, et enfin x_1.
Ces positions sont toutes distinctes.
Maintenant, si au lieu de choisir x_1 comme position initiale on choisit la suivante soit x_2, alors après n étapes, la coquille retrouvera sa position x_2 pour la première fois.

Une propriété intéressante...

On montre bien qu'à chaque solution comptée dans T_n, il existe $n-1$ autres solutions distinctes qui lui sont associées. Si n est premier T_n un multiple de n, ou encore 2^n-2 est un multiple de n. ■

Et on peut généraliser !
Supposons que l'on plie notre pâte non pas en deux mais en a parts en rabattant la partie la plus haute à chaque étape. Le même raisonnement s'applique : notre arbre sera constitué, non pas de 2^n mais de a^n branches au bout de n étapes.
Pour n premier il y aura donc a^n-a solutions.

Une propriété intéressante...

On en déduit donc que quelque soit a, quelque soit n avec n premier, $a^n - a$ est un multiple de n !

Ce résultat est un célèbre théorème : le petit théorème de Fermat,

$$a^n - a \equiv 0 \pmod{p}$$

Une coquille aventurière

Et irrationnelle ?

Existe t-il des positions telles que la coquille ne revienne jamais deux fois à une même place ?

D'après les formules précédemment énoncées : $x = \dfrac{2^n - 2i}{2^n - 1}$, et $x = \dfrac{2j}{2^n + 1}$
On sait donc que pour que x revienne à sa position initiale il faut qu'il soit rationnel (qu'il s'exprime sous la forme d'une fraction d'entiers).

Ainsi, si x est irrationnel, les transformations étant rationnelles, la coquille ne passera jamais par une même position deux fois. ■

Remerciements

Merci à **Charles Dossal**, chercheur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, pour ce sujet et pour les questions supplémentaires, ne faisant intervenir que de la réflexion.

Merci à **M. Robuchon et autres professeurs** grâce à qui l'atelier MATh.en.JEANS est rendu possible.

Merci pour votre attention !

Avez-vous des questions ?