Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška, Iveta Bečková,
Ján Pastorek

Letný semester 2024/2025

Posledná aktualizácia: 11. marca 2025

Obsah

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu indivíduových konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

> **Pomôcka.** Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\
i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\
i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\
i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\
i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.
\end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models$ dievča(mama), pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože i(oco) $\in i$(chlapec).

(B_3) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože (i(mama), i(Boris), i(Anna)) $\in i$(uprednostňuje).

(B_4) $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože (i(oco), i(Boris), i(Anna)) $\notin i$(uprednostňuje). ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \ldots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 5 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1)\\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o,\\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\},\\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\},\\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\},\\
i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2)\\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c,\\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\},\\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\},\\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\},\\
i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \ldots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_4$.

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.

Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky indivíduové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Alex}, \text{Beáta}, \text{Cyril}, \text{Dana}, \text{Edo}, \text{Gabika}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(A_4) žena(Dana)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(B_3) Cyril $\doteq$ oco

(B_4) žena(Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_7, B_1, \ldots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4,$$
$$i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3,$$
$$i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\},$$
$$i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\},$$
$$i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},$$

$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,7),(3,4),(7,3),(8,7)\}.$$

💡 Všimnite si, že hoci každá indivíduová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero indivíduových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, $\ldots$, A_7, ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor.

(A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.

(A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.

(A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.

(A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.

(A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.

(A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej poslucharni P42.

(A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.

(A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu indivíduovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor^1. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

💡 Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala indivíduová konštanta profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef $\doteq$ profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú indivíduovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor^1. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega^2. V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje^1:

($A_{2.1}$) profesor(o_1)

($A_{2.2}$) kolega(Jozef, o_1)

($A_{2.3}$) obeduje(Jozef)

($A_{2.4}$) obeduje(o_1)

💡 Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^1, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^1. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1. Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega^2 a nebudeme vytvárať symbol kolegyňa^2.

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové indivíduové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3.1}$) je(Jozef, p_1)

($A_{3.2}$) je(o_1, p_2)

($A_{3.3}$) žemľovka(p_1)

($A_{3.4}$) rezeň(p_2)

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2, hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom $\mathsf{obeduje}^1$.

Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *v inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie je(Jozef, žemľovka) (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie je(Jozef, žemľovka) a žemľovka(žemľovka) zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a indivíduových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom $\mathsf{chutí}^2$. Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení využije rovnosť:

($A_{4.1}$) chutí(Mária, p_2)

($A_{4.2}$) Mária $\doteq$ o_1

Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch indivíduových konštánt o_1, Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1, stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa^2 a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka^1 je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme indivíduovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5.1}$) chutí(Jozef, p_1)

($A_{5.2}$) má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6.1}$) upratovačka(o_2)

($A_{6.2}$) kolega(Jozef, o_2)

($A_{6.3}$) kolega(Mária, o_2)

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7.1}$) má_väčší_plat_ako(Mária, o_2)

($A_{7.2}$) má_väčší_plat_ako(o_2, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako^2, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako^2. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o_2), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o_2, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí^3 bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových indivíduových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny" patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

($A_{8.1}$) učí(Jozef, DAR, P42)

($A_{8.2}$) predmet(DAR)

($A_{8.3}$) posluchváreň(P42)

($A_{8.4}$) veľký(P42)

> Keďže *byť veľký* a *byť poslucháreň* sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký^1 a poslucháreň^1.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2, DAR)

> Použitie indivíduovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny indivíduových konštánt a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathcal{L}} &= \{\text{DAR}, \text{Jozef}, \text{Mária}, \text{o}_1, \text{o}_2, \text{p}_1, \text{p}_2, \text{P42}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{L}} &= \{\text{chutí}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má_rád_žemľovku}^1, \text{má_väčší_plat_ako}^2, \text{navštevuje}^2, \text{obeduje}^1,\\
&\qquad \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.
\end{aligned}$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet *Dejiny antického Ríma*
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	poslucháreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštevuje(x, y)	osoba x navštevuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predmet (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle *rozmerné*)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{10}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{11}) Eugen sa má rád.

(A_{12}) Je Učiteľom roka 2020.

(A_{13}) Matematika je povinný predmet.

(A_{14}) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

(A_{15}) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

(A_{16}) Peter má rád Matematiku.

(A_{17}) Lucia má rada Petra.

(A_{18}) Telocvik je voliteľný predmet.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

   Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

   (A_1) Janko je chlapec.

   (A_2) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

   (A_3) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

   (A_4) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

   (A_5) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

   (A_6) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli v $\mathcal{M}$ pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B, v $\mathcal{M}$ nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B, všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) (futbalista(Adam))

b) (futbalista(Adam) ∧ vlastní(Adam, BT001AA) ∧ BMW(BT001AA))

c) ¬¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam))

d) (šťastný(Adam) ↔ šťastný(¬Barbora))

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) ∧ vlastní(Adam, BT001AA) ∧ BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky ∧.

c) Postupnosť symbolov ¬¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)) je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$ľúbi, šťastný$\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Adam, Barbora$\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie ¬, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A =$ ¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)), opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B =$ (ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)). Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C =$ ľúbi(Barbora, Adam) a $D =$ šťastný(Adam) a binárna spojka b zodpovedá implikácii →.

d) Postupnosť symbolov (šťastný(Adam) ↔ šťastný(¬Barbora)) nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\ b\ B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale ¬Barbora nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. ♮

2.1.2 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) (žena(Alex) $\land$ muž(Alex))

b) $\neg$(má_rád(Alex, Alex))

c) (starší(Edo, Alex) $\to$ ($\neg$starší(Alex, Edo)))

d) (Alex $\lor$ $\neg$oco)

e) ($\neg$(muž(Alex) $\land$ žena(Alex)) $\to$ ($\neg$muž(Alex) $\lor$ $\neg$žena(Alex)))

f) ($\neg\neg$starší(Alex, Edo) $\leftrightarrow$ (starší(Alex, Edo) $\neg\land$ muž(Edo)))

2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

(($\neg$hlúpy(Adam) $\lor$ (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)))
$\to$ ľúbi(Barbora, Adam))

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

BMW(BT001AA),
vlastní(Adam, BT001AA),
(vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)),
hlúpy(Adam),
$\neg$hlúpy(Adam),
($\neg$hlúpy(Adam) $\lor$ (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))),
ľúbi(Barbora, Adam),
(($\neg$hlúpy(Adam) $\lor$ (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)))
$\to$ ľúbi(Barbora, Adam)).

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.

(($\neg$hlúpy(Adam) $\lor$ (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))) $\to$ ľúbi(Barbora, Adam))

($\neg$hlúpy(Adam) $\lor$ (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)))   ľúbi(Barbora, Adam)

$\neg$hlúpy(Adam)   (vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))

hlúpy(Adam)   vlastní(Adam, BT001AA)   BMW(BT001AA)

Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{deg}\Big(\big((\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\qquad \to \mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam})\big)\Big)\\
&= \mathrm{deg}\big((\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\big)\\
&\quad + \mathrm{deg}(\mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam}))\\
&\quad + 1\\
&= \mathrm{deg}(\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}))\\
&\quad + \mathrm{deg}((\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\quad + 1\\
&\quad + 1\\
&= \mathrm{deg}(\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam})) + 1\\
&\quad + \mathrm{deg}(\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA})) + \mathrm{deg}(\mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})) + 1\\
&\quad + 1 + 1\\
&= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}
$$

♮

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$
\begin{aligned}
&\big((\mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Hugo}) \land \mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Tereza})) \to\\
&\quad \big((\neg \mathrm{žena}(\mathrm{Hugo}) \land \mathrm{muž}(\mathrm{Hugo})) \to \mathrm{brat}(\mathrm{Hugo}, \mathrm{Tereza})\big)\big)
\end{aligned}
$$

2.1.5 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte nasledujúce funkcie nad jeho formulami:

a) $\mathrm{atoms}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$
atoms(A) je množina všetkých atómov vyskytujúcich sa vo formule A;

b) $\mathrm{acnt}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acnt(A) je počet výskytov atómov vo formule A;

c) $\mathrm{acount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acount(A, a) je počet výskytov atómu a vo formule A;

d) $\mathrm{subfs}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$
subfs(A) je množina všetkých podformúl formuly A;

e) $\mathrm{pcount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
pcount(A) je počet výskytov zátvoriek vo formule A;

f) cons : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\{\neg, \land, \lor, \to\})$
cons(A) je množina všetkých logických spojok vyskytujúcich sa vo formule A;

g) ccount : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
ccount(A) je počet výskytov logických spojok vo formule A;

h) bccount : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \{\land, \lor, \to\} \to \mathbb{N}$
bccount(A, b) je počet výskytov binárnej spojky b vo formule A.

Riešenie. f)

Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každý atóm $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ a pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\text{cons}(a) &= \emptyset \\
\text{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \text{cons}(A) \\
\text{cons}((A \land B)) &= \{\land\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B) \\
\text{cons}((A \lor B)) &= \{\lor\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B) \\
\text{cons}((A \to B)) &= \{\to\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)
\end{aligned}$$

Pretože prípady pre rôzne binárne výrokové spojky sú si navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky atómy $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\text{cons}(a) &= \emptyset \\
\text{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \text{cons}(A) \\
\text{cons}((A\ b\ B)) &= \{b\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)
\end{aligned}$$

♮

2.1.6 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Príklad. [Tvrdenie 2.12] Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupnosť symbolov A je formulou jazyka $\mathcal{L}$ vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$.

b) Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)\,.$$

c) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\text{acnt}(A) \leq \deg(A) + 1\,.$$

d) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\text{pcount}(A) \leq 4\deg(A) + 2\,.$$

Riešenie príkladu a). Tvrdenie a) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupne dokážeme obe implikácie vhodnou indukciou.

($\Leftarrow$) Predpokladáme, že A je formulou v jazyku $\mathcal{L}$. Existenciu vytvárajúcej postupnosti pre A dokážeme štrukturálnou indukciou na A:

1. Báza indukcie: Ak A je atóm (či už predikátový alebo rovnostný), jednoprvková postupnosť (A) je vytvárajúcou postupnosťou pre A.
2. Indukčný krok:
   1. Indukčný predpoklad: Nech A je formula a nech pre A existuje vytvárajúca postupnosť.

      Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $\neg A$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_m$ taká, že $A_m = A$. Zostrojme postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{m+1})$. Nech A_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

      Ak $i = m+1$, tak $A_{m+1} = \neg A = \neg A_m$ a $m < m+1$, takže A_{m+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

      Ak $1 \leq i \leq m$, tak A_i tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

      Preto $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $\neg A$, je to aj vytvárajúca postupnosť pre $\neg A$.
   2. IP: Nech A a B sú formuly a nech existuje vytvárajúca postupnosť pre A a existuje vytvárajúca postupnosť pre B.

      Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $(A\ b\ B)$ pre ľubovoľnú binárnu spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ taká, že $A_m = A$, a vytvárajúca postupnosť $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ taká, že $B_n = B$. Zostrojme postupnosť

      $$(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1}) = (A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n, (A\ b\ B))$$

Nech C_i pre nejaké $1 \leq i \leq m + n + 1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m + n + 1$, tak $C_{m+n+1} = (A \ b \ B) = (A_m \ b \ B_n) = (C_m \ b \ C_{m+n})$, pričom zrejme $m < m + n + 1$ a $m + n < m + n + 1$, takže C_{m+n+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak $C_i = A_i$ spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_1, A_2, \dots, C_m) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

Ak $m + 1 \leq i \leq m + n$, tak prvok $C_i = B_{i-m}$ tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_{m+n}) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $(A \ b \ B)$, je to vytvárajúca postupnosť pre $(A \ b \ B)$.

($\Rightarrow$) Implikácia *Ak existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$, tak A je formulou jazyka $\mathcal{L}$*, vyplýva z tvrdenia: *Pre každé kladné prirodzené číslo n, ak $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_n je formula.* Toto tvrdenie dokážeme úplnou indukciou na n.

Nech n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Indukčný predpoklad: Nech pre každé kladné prirodzené číslo $m < n$ je pravda, že ak $(A_1, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_m je formula.

Dokážme tvrdenie pre n. Predpokladajme, že $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Potom pre jej posledný prvok, postupnosť symbolov A_n v jazyku $\mathcal{L}$ môže nastať niektorá z týchto možností:

- A_n je atóm. Potom A_n je samozrejme formula.
- $A_n = \neg A_i$ pre nejaké $i < n$. Ľahko sa presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$, je podľa indukčného predpokladu postupnosť symbolov A_i formula. Potom ale aj $A_n = \neg A_i$ je formula.
- $A_n = (A_i \ b \ A_j)$ pre nejakú binárnu spojku $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$ a pre nejaké $i < n$ a $j < n$. Opäť sa ľahko presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ aj $(A_1, \dots, A_j)$ sú vytvárajúce postupnosti v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$ aj $j < n$, sú podľa indukčného predpokladu postupnosti symbolov A_i aj A_j formuly. Potom ale aj $A_n = (A_i \ b \ A_j)$ je formula. ♮

Riešenie príkladu b).

Pripomeňme, že funkciu atoms : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ sme zadefinovali na prednáške (Def. 3.17). Predpokladáme, že funkciu subfs : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ ste zadefinovali pri riešení predchádzajúceho cvičenia 2.1.5.

Tvrdenie b) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly A.

1. Báza indukcie: Nech A je atóm. Potom $\mathrm{atoms}(A) = \{A\}$. Taktiež $\mathrm{subfs}(A) = \{A\}$, a teda platí $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$.

2. Indukčné kroky:

2.1. Indukčný predpoklad: Nech A je ľubovoľná formula a nech pre ňu tvrdenie platí, teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$. Dokážme tvrdenie aj pre $\neg A$:

Z definície funkcie atoms vieme, že $\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A)$. Súčasne podľa definície funkcie subfs máme $\mathrm{subfs}(\neg A) = \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\}$. Keďže podľa indukčného predpokladu $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$, dostávame

$$\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\} = \mathrm{subfs}(\neg A),$$

teda $\mathrm{atoms}(\neg A) \subseteq \mathrm{subfs}(\neg A)$.

2.2. IP: Nech A a B sú ľubovoľné formuly a nech tvrdenie pre ne platí (teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$ a $\mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(B)$). Dokážme ho aj pre $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$:

Podľa definícií funkcií atoms a subfs vieme, že pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} & \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) = \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ \text{a} \quad & \mathrm{subfs}((A\ b\ B)) = \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}. \end{aligned}$$

Vďaka IP platí $\mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}$, a teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$.

Túto úvahu môžeme stručnejšie a azda aj prehľadnejšie zapísať takto:

Podľa IP a definícií funkcií atoms a subfs pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ &\overset{\text{IP}}{\subseteq} \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \\ &\subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{subfs}((A\ b\ B)), \end{aligned}$$

teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$. ♮

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologických formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{profesor}^1, \text{hlúpy}^1, \text{sčítaný}^1\}$. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{\text{barča}, \text{janči}, \text{karči}\} \\ i(\text{Karol}) &= \text{karči} \\ i(\text{profesor}) &= \{\text{karči}, \text{janči}\} \end{aligned}$$

$$i(\text{hlúpy}) = \{\text{janči}\}$$
$$i(\text{sčítaný}) = \{\text{barča}, \text{karči}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zdola nahor* a postupom *zhora nadol*.

$$\big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Riešenie. 1. spôsob — zdola nahor: Pravdivosť danej formuly určíme podľa definície 2.21 postupným vyhodnotením všetkých prvkov jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\begin{array}{l}\text{profesor}(\text{Karol}), \quad \text{sčítaný}(\text{Karol}), \quad \text{hlúpy}(\text{Karol}), \quad \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}), \\ (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})), \quad \big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)\end{array}$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$,
   tak $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$,
   tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

Vyhodnotenie spôsobom *zdola nahor* môžeme prehľadnejšie zapísať do tabuľky, v ktorej $h = \text{hlúpy}$, $p = \text{profesor}$, $s = \text{sčítaný}$ a $K = \text{Karol}$:

	$p(K)$	$s(K)$	$h(K)$	$\neg h(K)$	$(\neg h(K) \land s(K))$	$(p(K) \to (\neg h(K) \land s(K)))$
$\mathcal{M}$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$

alebo (trocha menej prehľadne):

	(	profesor(Karol)	$\to$	(	$\neg$	hlúpy(Karol)	$\land$	sčítaný(Karol)	))
$\mathcal{M}$		$\models$	$\models$		$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	

Nesmieme pritom zabúdať, že odvodenie je založené na definícii 2.21 pravdivosti formuly v štruktúre.

Aby prvá tabuľka nebola príliš široká, celkom prirodzene sme si konkrétne symboly jazyka $\mathcal{L}$ označili meta premennými p, s, h a K. Tieto premenné nie sú súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, slúžia nám, aby sme mohli stručne písať o jeho symboloch (predložka *o* sa po grécky povie *meta*) . Konkrétne symboly (napr. Karol) si môžeme predstaviť ako konkrétne reťazce (`'Karol'`) napríklad v jazyku Python. Meta premenné (napr. K) ako pythonovské *premenné*, do ktorých reťazce priraďujeme. Skrátený zápis $\neg h(K)$ formuly ¬hlúpy(Karol) zodpovedá (oveľa menej prehľadnému) pythonovskému výrazu $\texttt{'¬'} + h + \texttt{'('} + K + \texttt{')'}$.

2. spôsob — zhora nadol: Podľa definície 2.21 vzťahu pravdivosti ($\models$) a podľa definície danej štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$\mathcal{M} \models (\text{profesor(Karol)} \to (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)}))$

vtt

$\mathcal{M} \not\models \text{profesor(Karol)}$ alebo $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})$

vtt | vtt

$i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor})$ | $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy(Karol)}$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný(Karol)})$

nepravda | vtt | vtt

$\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy(Karol)}$ | $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$

vtt | pravda

$i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$

pravda

Pretože pri vyhodnocovaní implikácie sme zistili, že jej antecedent profesor(Karol) nie je nepravdivý v $\mathcal{M}$, museli sme vyhodnotiť aj konzekvent (¬hlúpy(Karol) ∧ sčítaný(Karol)). Ten je konjunkciou dvoch formúl, o ktorých sme zistili, že sú pravdivé v $\mathcal{M}$. Preto je v $\mathcal{M}$ pravdivý aj konzekvent, a teda celá implikácia.

Istou výhodou vyhodnocovania pravdivosti zhora nadol je, že ho niekedy môžeme ukončiť skôr. Keby sme napríklad zistili, že antecedent implikácie je nepravdivý, mohli by sme hneď skonštatovať, že implikácia je pravdivá a konzekventom sa nezaoberať. ♮

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\
i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6,\\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\},\\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\},\\
i(\text{má\_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i(\text{brat}) &= \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,6)\},\\
i(\text{rodič}) &= \{(1,1),(2,5),(2,6),(1,5),(3,4),(4,2),(1,6),(5,6),(6,5)\},\\
i(\text{starší}) &= \{(2,1),(5,6),(6,5)\},
\end{aligned}
$$

zistite postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé. Tipnite si, či je formula formula A_3 pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$ a overte svoje tip postupom *zhora nadol* pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry (🎮) v prieskumníku štruktúr.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) $\to$ $\neg$starší(Alex, Bruno))

(A_2) ($\neg$má_rád(Alex, Bruno) $\leftrightarrow$ $\neg$má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) $\big($(rodič(Bruno, Hugo) $\land$ rodič(Bruno, Tereza)) $\to$
$\big($($\neg$žena(Hugo) $\land$ muž(Hugo)) $\to$ brat(Hugo, Tereza)$\big)\big)$

2.2.3 Príklad. Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) $\land$ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) $\leftrightarrow$ učiteľ(Karol))

(A_3) ($\neg$profesor(Karol) $\to$ ($\neg$pozná(Karol, Alena) $\lor$ $\neg$vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol $\not\doteq$ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_4$.

💡 Hľadanie štruktúry je najlepšie začať tak, že sa snažíme splniť tzv. fakty — atomické formuly a ich negácie.

Pri zložitejších formulách nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy majú byť v hľadanej štruktúre pravdivé. Napr. pre najkomplikovanejšiu formulu A_3 tak zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Interpretáciu predikátu vychádza[2] ľahko zvolíme tak, aby $(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{vychádza})$, môže byť napríklad prázdna. Samozrejme, často takúto slobodu nemáme a musíme hľadať iné možnosti, ako zabezpečiť pravdivosť zložitých formúl.

Nech

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}\\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}\\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}
$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.2.1. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) kniha(k325)

(A_3) má_autora(Sofiina_voľba, Styron)

(A_4) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ má_autora(Kto_chytá_v_žite, Salinger))

(A_5) (¬(číta(Adam, k325) ∧ obdivuje(Dana, Adam)) →
¬(má_titul(k325, Sofiina_voľba) ∨ má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_6) (má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬má_titul(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 (Na motívy Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1]) Uvažujme jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{triangle}^1, \text{square}^1, \text{circle}^1, \text{red}^1, \text{green}^1, \text{blue}^1, \text{larger}^2, \text{same\_color}^2\}$ pre doménu rovinných geometrických útvarov so zamýšľaným významom predikátových symbolov:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
red(x)	x je červený
green(x)	x je zelený
blue(x)	x je modrý
larger(x, y)	x je väčší než y
same_color(x, y)	x je rovnakej farby ako y

a formuly v tomto jazyku:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \neg(\mathsf{red}(\mathsf{B}) \to (\mathsf{square}(\mathsf{B}) \to \mathsf{triangle}(\mathsf{C})))\\
A_2 &= \neg((\mathsf{blue}(\mathsf{C}) \land \neg\mathsf{triangle}(\mathsf{C})) \leftrightarrow \mathsf{larger}(\mathsf{D}, \mathsf{C}))\\
A_3 &= ((\mathsf{circle}(\mathsf{C}) \lor \mathsf{circle}(\mathsf{B})) \to (\mathsf{larger}(\mathsf{B}, \mathsf{C}) \land \neg\mathsf{green}(\mathsf{D})))\\
A_4 &= ((\mathsf{red}(\mathsf{B}) \land \mathsf{square}(\mathsf{B})) \to (\mathsf{blue}(\mathsf{A}) \leftrightarrow \mathsf{blue}(\mathsf{C})))\\
A_5 &= (\mathsf{green}(\mathsf{C}) \to \neg\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_6 &= (\neg\mathsf{red}(\mathsf{C}) \lor \mathsf{green}(\mathsf{C}))\\
A_7 &= (\neg\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{D}) \leftrightarrow \mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_8 &= (\neg(\mathsf{triangle}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{triangle}(\mathsf{C})) \to \mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_9 &= \neg(\mathsf{blue}(\mathsf{C}) \land \mathsf{square}(\mathsf{C}))\\
A_{10} &= (\neg\mathsf{triangle}(\mathsf{A}) \to (\mathsf{triangle}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{triangle}(\mathsf{C})))\\
A_{11} &= (\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{C}) \to (\mathsf{square}(\mathsf{D}) \land \neg\mathsf{red}(\mathsf{D})))
\end{aligned}
$$

Zostrojte model $\mathcal{M} = (D, i)$ teórie $\{A_1, \dots, A_{11}\}$, v ktorom interpretácie predikátov zároveň spĺňajú nasledujúce podmienky vyplývajúce z ich zamýšľaného významu:

12. Každý útvar má práve jednu farbu, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{red}, \mathsf{green}, \mathsf{blue}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{red})$, $i(\mathsf{green})$, $i(\mathsf{blue})$ sú navzájom disjunktné.
13. Každý útvar má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{triangle}, \mathsf{square}, \mathsf{circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{triangle})$, $i(\mathsf{square})$, $i(\mathsf{circle})$ sú navzájom disjunktné.
14. Relácia $i(\mathsf{larger})$ je *ostrým čiastočným usporiadaním* na D, teda je ireflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

15. Relácia $i(\text{same\_color})$ je *reláciou ekvivalencie* na D (teda je reflexívna, symetrická a tranzitívna), v ktorej sú si vzájomne ekvivalentné všetky útvary rovnakej farby (čiže pre všetky $x, y, z \in D$ súčasne platí $(x, y) \in i(\text{same\_color})$ vtt $x, y \in i(\text{red})$ alebo $x, y \in i(\text{green})$ alebo $x, y \in i(\text{blue})$).

Pre každú štvorprvkovú doménu a každú interpretáciu konštánt v nej existuje *práve jedna* interpretácia predikátov spĺňajúca všetky podmienky.

Pomôcka. Preložte si všetky formuly do prirodzeného jazyka a snažte sa pochopiť ich význam. Pokúste sa medzi nimi nájsť také, z ktorých priamo vyplývajú konkrétne fakty o (ne)pravdivosti atómov (nie iba alternatívy). Následne hľadajte formuly, ktoré vám z týchto faktov umožnia odvodiť ďalšie. Alternatívy zvažujte, iba keď je to naozaj nevyhnutné.

2.2.6 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu:

a) s binárnymi spojkami $\to$ (implikácia) a $\not\to$ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \not\to B)$ je „A a nie je pravda, že B“.

b) s binárnymi spojkami $\to$ (implikácia) a $\veebar$ (exkluzívne alebo, XOR), pričom neformálny význam $(A \veebar B)$ je: buď je pravdivé A, alebo je pravdivé B, ale nie obe súčasne.

Formuly podľa vašich definícií nebudú obsahovať iné spojky okrem vyššie uvedených.

Zadefinujte štandardné spojky ($\land, \lor, \neg$) ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zadefinovali $\leftrightarrow$ v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} =$ {Dominika, Fernando, Elena, Fero, Gabika, Spain, Slovakia, Databases, Programming, Logics, Informatics, Combinatorics, Slovak_l, Czech_l, 1} a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} =$ {student^1, professor^1, works^1, has_classmate^2, comes_from^2, supervises^2, passed^2, grad_exam^3}, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
student(x)	x je študent*ka
works(x)	x pracuje
professor(x)	x je profesor*ka
has_classmate(x, y)	x má spolužiaka*čku y
comes_from(x, y)	x pochádza z y
supervises(x, y)	x je školiteľom y
passed(x, y)	x absolvoval y
grad_exam(x, y, z)	x dostal na maturite z y hodnotenie z

(A_1) Študentka Dominika má spolužiaka Fernanda, ktorý je zo Španielska.

(A_2) Fernando je, samozrejme, tiež študent, napriek tomu, že popri štúdiu aj pracuje.

(A_3) Elena je profesorka a školí Dominiku alebo Fernanda.

(A_4) Fernanda tiež volajú Fero.

(A_5) Ak Dominika absolvovala aj databázy alebo programovanie, aj logiku, tak je Elena jej školiteľkou.

(A_6) Pretože "byť spolužiakom*čkou" je symetrický vzťah, je Gabika Fernandovou spolužiačkou rovnako, ako je on jej spolužiakom.

(A_7) Fero absolvoval programovanie iba za predpokladu, že nedostal na maturite z informatiky jednotku.

(A_8) Ak ju nedostal, potom musel absolvovať aj kombinatoriku.

(A_9) Dominika určite neabsolvovala ani kurz slovenčiny, ani češtiny, pokiaľ nie je zo zahraničia.

(A_{10}) Buď Dominika alebo Gabika je zo Slovenska (no nie obe).

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.

(A_3) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.

(A_4) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_5) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_6) Lucia sa preto hrá buď so svojím obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.

(A_7) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_8) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.

(A_9) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.

(A_{10}) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.

(A_{11}) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

(A_{12}) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.

(A_{13}) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).

(A_{14}) Luciino autíčko je ale modré.

(A_{15}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{16}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{17}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{18}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.

2.3.4 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, časník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)

(A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.

(A_2) Gigi je žena.

(A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.

(A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.

(A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.

(A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.

(A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.

(A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.

(A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.

(A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.

(A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.

(A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým nekamaráti.

(A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.

(A_{14}) Bonus: Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.

(A_{15}) Bonus: Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne** a **osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.

2.3.5

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

(A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.

(A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.

(A_9) Ak by to, že Marienka *je Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku $\mathcal{L}$ ďalej sformalizujte formulami B_1, B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T.

c) Pre každú z formúl B_1, B_2, B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T.

   Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.

2.3.6 Sformalizujte nasledujúce skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený indivíduovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínsach.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:

a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry $\mathcal{M}_1$ takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.

b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

2.3.7 (Podľa Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1])

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{triangle}^1, \mathsf{square}^1, \mathsf{circle}^1, \mathsf{small}^1, \mathsf{medium}^1, \mathsf{large}^1, \mathsf{same\_size}^2, \mathsf{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
small(x)	x je malý
medium(x)	x je stredne veľký
large(x)	x je veľký
same_size(x, y)	x a y majú rovnakú veľkosť
larger(x, y)	x je väčší než y

(A_1) Ak A je trojuholník, tak B je tiež trojuholník.

(A_2) C je trojuholník, ak je ním B.

(A_3) A a C sú oba trojuholníky, iba ak aspoň jeden z nich je veľký.

(A_4) A je trojuholník, no C nie je veľký.

(A_5) Ak C je malý a D je kruh, tak D nie je ani veľký, ani malý.

(A_6) C je stredne veľký iba ak žiadny z D, E, F nie je štvorec.

(A_7) D je malý kruh, jedine že by A bol malý.

(A_8) E je veľký práve vtedy, keď je pravda, že D je veľký, ak a iba ak je taký F.

(A_9) D a E sú rovnakej veľkosti.

(A_{10}) D a E majú rovnaký tvar.

(A_{11}) F je buď štvorec alebo kruh, ak je veľký.

(A_{12}) C je väčší než E, iba ak B je väčší ako C.

Pomôcka. Môže sa vám zdať, že na vyjadrenie niektorých vzťahov v jazyku chýbajú predikáty. Vyjadrite ich zložitejšími formulami použitím existujúcich predikátov.

b) Zistite, aké tvary a veľkosti musia mať útvary A, … , F, aby boli pravdivé výroky A_1–A_{12}. Predpokladajte pritom, že každý z útvarov má práve jeden z uvedených tvarov a práve jednu z uvedených veľkostí.

c) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T, kde útvary A, … , F majú tvar a veľkosť, ktoré ste určili v predchádzajúcom bode.

Interpretácie predikátov v $\mathcal{M}$ musia pritom mať zamýšľaný význam, teda mať nasledujúce dodatočné vlastnosti:

- každý geometrický má práve jednu veľkosť, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{small}, \text{medium}, \text{large}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{small})$, $i(\text{medium})$, $i(\text{large})$ sú disjunktné;
- každý geometrický má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{triangle}, \text{square}, \text{circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{triangle})$, $i(\text{square})$, $i(\text{circle})$ sú disjunktné;
- interpretácia predikátu same_size je relácia ekvivalencie na D taká, že pre všetky $x, y \in D$:

$$\begin{aligned}&(x, y) \in i(\text{same\_size}) \text{ vtt}\\ &\quad x, y \in i(\text{small}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{medium}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{large});\end{aligned}$$

- interpretácia predikátu larger je ostré čiastočné usporiadanie na D, pričom pre každé $x, y \in D$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in i(\text{larger}) \text{ vtt } & x \in i(\text{large}) \text{ a } y \in i(\text{medium}) \cup i(\text{small}),\\ & \text{alebo } x \in i(\text{medium}) \text{ a } x \in i(\text{small}).\end{aligned}$$

2.3.8 (Na motívy Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1]) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{E}, \text{F}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{triangle}^1, \text{square}^1, \text{circle}^1, \text{small}^1, \text{medium}^1, \text{large}^1, \text{same\_size}^2, \text{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
small(x)	x je malý
medium(x)	x je stredne veľký
large(x)	x je veľký
same_size(x, y)	x je rovnako veľký ako y
larger(x, y)	x je väčší než y

(A_1) D je malý, ak je taký aj C.

(A_2) C je trojuholník, hoci nie je veľký.

(A_3) Ak A je kruh, tak aj B je kruh.

(A_4) A je malý a B je veľký, iba ak aspoň jeden z nich je kruh.

(A_5) D je kruh, iba ak žiadny z A, B, C nie je kruh.

(A_6) Ak E je malý štvorec, tak F nie je kruh ani trojuholník.

(A_7) E je veľký, pokiaľ A nie je stredne veľký trojuholník.

(A_8) A a B sú rovnakej veľkosti.

(A_9) B a C majú rovnaký tvar.

(A_{10}) C je veľký, ak a iba ak je pravda, že D je malý práve vtedy, keď je taký E.

(A_{11}) C je buď veľký alebo malý, ak je to kruh.

(A_{12}) A je väčší než D, iba ak je D väčší než E.

Pomôcka. Môže sa vám zdať, že na vyjadrenie niektorých vzťahov v jazyku chýbajú predikáty. Vyjadrite ich zložitejšími formulami použitím existujúcich predikátov.

2.4 Ohodnotenia

2.4.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ}, \text{pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}\\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}\\
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}
$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s $\mathcal{M}$, musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka $\mathcal{L}$, t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v $\mathcal{M}$ pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t, v opačnom prípade hodnotu f.

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PA}_{\mathcal{L}} = \{&\text{učiteľ(Alena)}, \text{učiteľ(Karol)},\\
&\text{pozná(Alena, Alena)}, \text{pozná(Karol, Karol)}, \text{pozná(Alena, Karol)}, \text{pozná(Karol, Alena)}\}
\end{aligned}
$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{aligned}
i(\text{Alena}) &\in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ(Alena)} & v = \{&\text{učiteľ(Alena)} \mapsto t,\\
i(\text{Karol}) &\notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ(Karol)} & &\text{učiteľ(Karol)} \mapsto f,\\
(i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) &\notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Alena, Alena)} & &\text{pozná(Alena, Alena)} \mapsto f,\\
(i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) &\notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Karol, Karol)} & &\text{pozná(Karol, Karol)} \mapsto f,\\
(i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) &\in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Alena, Karol)} & &\text{pozná(Alena, Karol)} \mapsto t,\\
(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) &\in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Karol, Alena)} & &\text{pozná(Karol, Alena)} \mapsto t\}
\end{aligned}$$ ♮

2.4.2 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{študent}^1, \text{profesor}^1, \text{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned}
v = \{&\text{študent(Adam)} \mapsto t, & &\text{študent(Karol)} \mapsto f,\\
&\text{profesor(Adam)} \mapsto f, & &\text{profesor(Karol)} \mapsto t,\\
&\text{učí(Adam, Karol)} \mapsto f, & &\text{učí(Karol, Adam)} \mapsto f\}
\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na $\operatorname{dom} v$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na $\operatorname{dom} v$, teda na definičnom obore ohodnotenia v, potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v $\mathcal{M}$, teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$\begin{aligned}
&v(\text{študent(Adam)}) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \text{študent(Adam)}, && \text{teda } i(\text{Adam}) \in i(\text{študent});\\
&v(\text{študent(Karol)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{študent(Karol)}, && \text{teda } i(\text{Karol}) \notin i(\text{študent});\\
&v(\text{profesor(Adam)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{profesor(Adam)}, && \text{teda } i(\text{Adam}) \notin i(\text{profesor});\\
&v(\text{profesor(Karol)}) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \text{profesor(Karol)}, && \text{teda } i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor});\\
&v(\text{učí(Adam, Karol)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Adam, Karol)}, && \text{teda } (i(\text{Adam}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{učí});\\
&v(\text{učí(Karol, Adam)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Karol, Adam)}, && \text{teda } (i(\text{Karol}), i(\text{Adam})) \notin i(\text{učí}).
\end{aligned}$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraďuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v $\mathcal{M}$. Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned}
D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\},\\
i(\text{Adam}) &= s667,\\
i(\text{Karol}) &= p830.
\end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n-tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned} i(\text{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\ i(\text{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\ i(\text{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}. \end{aligned}$$

$\natural$

2.4.3

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné so štruktúrou $\mathcal{M}$.

b) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá\_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\text{hračka(Woody)} \mapsto t, & &\text{hračka(Andy)} \mapsto f, \\ &\text{chlapec(Andy)} \mapsto t, & &\text{chlapec(Woody)} \mapsto f, \\ &\text{hrá\_sa(Andy, Woody)} \mapsto t, & &\text{hrá\_sa(Woody, Andy)} \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

3 Výrokovologické vyplývanie, vlastnosti a vzťahy formúl

3.1 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť

3.1.1 Majme výrokovologickú teóriu T:

$$T = \left\{ \begin{aligned} &A_1\colon \big(\mathsf{tancuje\_s(A,B)} \to (\mathsf{frajer(A)} \lor \mathsf{spieva(A)})\big), \\ &A_2\colon (\neg\mathsf{tancuje\_s(A,B)} \lor \neg\mathsf{spieva(A)}), \\ &A_3\colon (\neg\mathsf{spieva(A)} \to \mathsf{frajer(A)}) \end{aligned} \right\}.$$

O každej z formúl X_1–X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T, b) je nezávislá od T, alebo c) ani z T nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

(X_1) $(\mathsf{tancuje\_s(A,B)} \to \mathsf{frajer(A)})$,

(X_2) $\neg\mathsf{spieva(A)}$,

(X_3) $(\neg\mathsf{spieva(A)} \land \neg\mathsf{frajer(A)})$.

? Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

3.1.2 Príklad. (Variácia na Smullyana [3]) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrewsa a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie.

Riešenie sme rozdelili na kroky, ktoré by ste mali aplikovať pri každej neformálne zadanej úlohe.

i. Formalizácia. Zistenia A_1–A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{vinný}^1\}$ (kde vinný(x) znamená, že x je vinný).

Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto s kým pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebujeme reprezentovať indivíduovými konštantami alebo predikátovými symbolmi, pretože hovoria iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom vinný^1.

Teória T je nasledovná:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \to \mathsf{vinný}(\mathsf{B})), \\ A_2\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \lor \mathsf{vinný}(\mathsf{B})) \end{array} \right\}.$$

ii. Určenie formálnych problémov. Aby sme odpovedali na otázky o vine, nevine a nemožnosti o nich rozhodnúť, musíme vyriešiť tieto formálne logické problémy:

- Overiť výrokovologickú *splniteľnosť teórie T*.

  Ak je T nesplniteľná, zistené skutočnosti si protirečia, neopisujú žiaden stav sveta, preto sa na ich základe nedá rozhodnúť o (ne)vine podozrivých.

- Pre obe indivíduové konštanty $c \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$ zistiť, či *formula* vinný(c) *výrokovologicky vyplýva z teórie T* (potom c je určite vinný), *formula* ¬vinný(c) *vyplýva z T* (c je určite *ne*vinný), a či *je formula* vinný(c) *nezávislá od T* (o vine c nemožno rozhodnúť).

  Pre každého podozrivého teda riešime 3 formálne problémy. Pochopiteľne, ak zistíme, že je T nesplniteľná, tieto problémy už riešiť netreba.

iii. Riešenie formálneho problému. Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Zostrojíme všetky výrokové ohodnotenia tých atomických formúl, ktoré sa vyskytujú v T, a zistíme, či je aspoň v jednom pravdivá. Keď nájdeme prvý model, musíme nájsť všetky, aby sme následne mohli vyhodnotiť vyplývanie zaujímavých formúl z T, resp. ich nezávislosť od T:

	v_i		T			
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	(vinný(A) → vinný(B))	(vinný(A) ∨ vinný(B))
v_1	f	f	$\nvDash_p$	$\nvDash_p$	$\vDash_p$	$\nvDash_p$
v_2	t	f	$\vDash_p$	$\nvDash_p$	$\nvDash_p$	$\vDash_p$
v_3	f	t	$\nvDash_p$	$\vDash_p$	$\vDash_p$	$\vDash_p$
v_4	t	t	$\vDash_p$	$\vDash_p$	$\vDash_p$	$\vDash_p$

iv. Výsledky riešenia formálneho problému. Zistili sme, že T je *splniteľná* (viď def. 3.5), keďže napr. $v_3 \vDash_p T$. Teória má dva modely, v_3 a v_4. Pomocou nich určíme, aké vzťahy s teóriou T majú formuly zaujímavé pre odpoveď na neformálnu otázku z úlohy:

- Formula vinný(A) *nevyplýva z T* ($T \nvDash_p$ vinný(A)), pretože existuje model T, a to v_3, v ktorom vinný(A) nie je pravdivá (def. 3.7). Zároveň však $v_4 \vDash_p$ vinný(A), takže vinný(A) *je od T nezávislá* (def. 3.10). A $T \nvDash_p$ ¬vinný(A), lebo $v_4 \nvDash_p$ ¬vinný(A).
- Formula vinný(B) *vyplýva z T ($T \vDash_p$* vinný(B)*)*, pretože je pravdivá vo všetkých (oboch) modeloch T (stručnejšie: $v_i \vDash_p$ vinný(B) pre $i \in \{3, 4\}$) . Od T *nie je nezávislá*, lebo neexistuje model T, v ktorom by bola nepravdivá. Formula ¬vinný(B) *nevyplýva z T*, lebo napr. $v_3 \nvDash_p$ ¬vinný(B).

v. Interpretácia (vyvodenie neformálnych záverov z formálnych). Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých:

- Brown je určite vinný, pretože $T \vDash_p$ vinný(B).
- Nikto z podozrivých nie je istotne nevinný, keďže pre žiadne $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ neplatí $T \vDash_p$ ¬vinný(c).
- O Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť, lebo formula vinný(A) je nezávislá od T.

Uvedomme si ešte raz, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \vDash_p$ vinný(B) urobiť len vďaka tomu, že sme predtým **overili splniteľnosť** T. Ak by bola teória T nesplniteľná, vyplývala by z nej každá formula, teda vinný(B) aj ¬vinný(B). Na základe takejto teórie by sme nemohli vyvodiť žiadne zmysluplné závery. ♮

3.1.3 (Variácia na Smullyana [3]) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z lúpeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Parkera. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Miles nikdy nepracuje sám, teda lúpil, iba ak sa na lúpeži podieľal aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_2) Davies vždy pracuje s Parkerom.

(A_3) Parker sa s Milesom neznáša, preto určite nelúpili spolu.

(A_4) Z lúpeže môžu byť vinní len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

a) Využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite, koho z podozrivých môže inšpektor s istotou obviniť, koho môže bez obáv prepustiť, lebo sa krádeže určite nezúčastnil, a koho musí prepustiť pre nedostatok dôkazov.

b) Aké by boli vaše závery, keby inšpektor zistil aj nasledujúcu skutočnosť?

(A_5) Milesa videli dvaja spoľahliví svedkovia utekať s lupom z obchodného domu, takže je určite vinný.

Pomôcka. Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

3.1.4 (Variácia na Smullyana [3]) Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.

(A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.

(A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.

(A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

3.1.5 Jožko ide ráno na prechádzku, pričom o aktuálnom počasí má tieto informácie:

1. Ak neprší, tak svieti slnko.
2. Ak prší, tak dúhu vidno, iba ak aj svieti slnko.
3. Vonku vidno dúhu a prší, hoci nesvieti slnko. Alebo neprší.

Na základe týchto informácií usúdil, že na prechádzke:

x) *určite* potrebuje *slnečné* okuliare;

y) bez dáždnika *určite zmokne*;

z) *nedá sa rozhodnúť*, či na prechádzke *uvidí* alebo *neuvidí dúhu*.

Zistite o každom Jožkovom závere, či je správny.

Vašou úlohou je:

i. Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.

ii. Určiť, aké logické problémy zodpovedajú záverom x)–z) (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).

iii. Určiť, akou metódou budete riešiť logické problémy, ktoré ste určili, a vyriešiť ich.

iv. Sformulovať formálne výsledky.

v. Rozhodnúť o správnosti záverov x)–z) na základe výsledkov riešenia logických problémov (teda interpretovať ich).

Pomôcka. Na formalizáciu a sformulovanie logických problémov vám postačia 3 predikátové atómy.

⚠ Závery sú 3 a každému zodpovedá jeden logický problém. **Navyše** všetky závery ovplyvňuje **ďalší** dôležitý logický problém, ktorý musíme vyriešiť ako prvý.

3.1.6 (Ghidini a Serafini [2]) Prechádzate labyrintom a ocitnete sa na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Dá sa na základe uvedených informácií rozhodovať o tom, ktoré cesty vedú a ktoré nevedú do stredu labyrintu?
ii. O ktorých cestách môžete s istotou povedať, že vedú do stredu labyrintu?
iii. Ktoré z ciest určite nevedú do stredu labyrintu?
iv. O ktorých cestách sa nedá rozhodnúť, že do stredu labyrintu vedú alebo nevedú?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.
b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam i–iv (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).
c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili.
d) Zodpovedať otázky i–iv na základe riešení logických problémov.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 3 predikátové atómy.

Vyriešenie samotnej hádanky je len malá časť tejto úlohy. Dôsledne vyriešte všetky podúlohy.

3.1.7 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Ak Minister nie je schopný, Premiér ho odvolá. Alebo je Premiérov kamarát.

(A_2) Minister je Premiérov kamarát, ak ho Premiér neodvolal.

(A_3) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémii, je schopný.

(A_4) Premiér Ministra neodvolal, napriek tomu, že Minister proti pandémii účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov A_1–A_4:

(C_1) je Minister schopný,

(C_2) Premiér Ministra odvolá,

(C_3) Minister je Premiérov kamarát.

Pomôcka. V tomto zadaní chápeme Ministra a Premiéra ako konkrétne osoby, nie ako roly nejakých nepomenovaných osôb.

3.1.8 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Keď Rusko zaútočilo na Ukrajinu, tak porušilo Budapeštianske memorandum alebo Putin klame.

(A_2) Rusko je agresor, ak porušilo Budapeštianske memorandum a na Ukrajinu zaútočilo.

(A_3) Rusko neporušilo Budapeštianske memorandum, len ak Putin neklame.

(A_4) Ak to, že Rusko zaútočilo na Ukrajinu, znamená, že porušilo Budapeštianske memorandum, tak Putin klame.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti zistite, ktoré z nasledujúcich výrokov (C_1)–(C_3) sú na základe výrokov (A_1)–(A_4) určite pravdivé, určite nepravdivé, a o ktorých to nemožno rozhodnúť:

(C_1) Putin klame,

(C_2) Rusko Budapeštianske memorandum neporušilo,

(C_3) Rusko je agresor, iba ak zaútočilo na Ukrajinu.

3.1.9 Inšpektor NAKA Činčila vyšetruje úplatkársku kauzu, v ktorej figurujú štyria podozriví z poskytnutia alebo prijatia úplatku: JH, MK, TG a DT. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Ak podlácali JH aj MK, tak podplatili TG.

(A_2) Podplácal aj MK alebo úplatok prijal TG, ak podplácal JH.

(A_3) TG berie úplatok, iba ak ani DT neobíde nasucho.

(A_4) Ak nepodplácal JH, tak bol určite podplatený DT.

Kto je v tejto kauze z podplácania alebo brania úplatku podľa indícií určite vinný, kto určite nevinný a o koho vine nemožno rozhodnúť?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.
b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam o vine zo zadania (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).
c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili. Zdôvodnite ich, teda napr. vysvetlite, prečo vaša pravdivostná tabuľka ukazuje, že formula/teória je splniteľná.
d) Zodpovedať otázky zo zadania na základe riešení logických problémov.

3.2 Vlastnosti výrokovologických formúl

3.2.1 Príklad. Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{pekné}, \text{rýchle}, \text{ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{moje\_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné(moje\_auto)}$, $R = \text{rýchle(moje\_auto)}$ a $E = \text{ekologické(moje\_auto)}$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $(\neg(P \wedge E) \to (\neg P \wedge \neg E))$
b) $((P \vee \neg P) \wedge \neg(E \vee \neg E))$
c) $(P \to (P \to (P \to P)))$
d) $(P \wedge (E \vee \neg(P \to R)))$
e) $(((P \to P) \to P) \to \neg P)$
f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$
g) $((P \wedge \neg P) \vee (P \vee \neg P))$
h) $(P \wedge \neg P)$
i) $(((P \to R) \to P) \to P)$
j) $\neg\neg\neg(P \vee P)$
k) $((P \wedge E) \to (\neg P \wedge E))$
l) $\neg((P \vee R) \vee (\neg P \vee E))$
m) $\big(((E \vee \neg R) \wedge (P \to \neg R)) \to (\neg R \to (\neg P \wedge E))\big)$
n) $\big((P \to (\neg R \to E)) \wedge ((\neg P \vee \neg E) \wedge \neg(P \to R))\big)$

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \wedge E) \to (\neg P \wedge \neg E))$, podľa tvrdení 3.19 a 4.3 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A:

Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i							
	P	E	$\neg P$	$\neg E$	$(P \land E)$	$\neg(P \land E)$	$(\neg P \land \neg E)$	$(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *nie je pravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models_p A$, teda A *je pravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *je nepravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models_p A$, teda *nie je pravda*, že A je *nepravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* nesplniteľná. ♮

3.2.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{ľúbi}\}$ a $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{P}, \text{L}\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \to \neg\text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \land (\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

(X_2) $(\neg(\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \land \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \leftrightarrow (\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \neg\text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

(X_3) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \to \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \land \neg(\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

3.2.3 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$.

O každej z nasledujúcich formúl v jazyku $\mathcal{L}$ rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) $\neg(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$

(X_2) $((\neg A \to \neg B) \wedge (A \vee B))$

(X_3) $\neg((\neg A \to B) \wedge \neg(A \vee B))$

(X_4) $((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$

Riešenie pre X_1.

⚠ Pretože formuly A a B nemusia byť atomické, **nemôžeme** vymenovať ich ohodnotenia tak ako v riešení úlohy 3.2.1. $v(A)$ nie je definované, ak A nie je predikátový atóm. Nevieme ani to, aké atómy formuly A a B obsahujú (a možno sú ich tisíce), takže nemôžeme vymenovať ani všetky ohodnotenia týchto atómov. Navyše na rozdiel od atómov môžu byť formuly A a B tautológiami či nesplniteľnými (nezávisle od seba) a v tom prípade neexistujú ohodnotenia, v ktorých by boli nepravdivé resp. pravdivé.

Môžeme však zobrať ľubovoľné ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ a skúmať rôzne prípady pravdivosti ($\models_p$) formúl A a B v tomto ohodnotení. Kvôli prehľadnosti zapíšeme možné prípady do tabuľky. **Všimnite si** však, ako sa táto tabuľka **líši** od tabuľky z riešenia úlohy 3.2.1.

Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistime, v ktorých prípadoch je vo v pravdivá formula X_1:

	A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(Y \leftrightarrow Z)$	$\neg(Y \leftrightarrow Z)$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$

Označili sme $Y := \neg(A \wedge B)$ a $Z := (\neg A \vee \neg B)$, teda $X_1 = \neg(Y \leftrightarrow Z)$.

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. Ako vidíme, v každom prípade je formula X_1 nepravdivá.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: X_1 je nepravdivá v každom ohodnotení v pre jazyk $\mathcal{L}$.

Z definícií vlastností formúl teda vyplýva, že formula X_1:

i. nie je tautológia,

ii. nie je splniteľná,

iii. je falzifikovateľná,

iv. je nesplniteľná. ♮

Riešenie pre X_2. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Preskúmajme, ako pravdivosť a nepravdivosť formúl A a B vo v ovplyvňuje pravdivosť formuly X_2:

	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \to \neg B)$	$(A \lor B)$	$((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. V prípade, že $v \models_p A$, je formula X_2 vo v pravdivá, kým v opačnom prípade je nepravdivá.

Tento výsledok sa **nedá** jednoducho zovšeobecniť. Bez ďalších informácií o formulách A a B nemôžeme rozhodnúť **o žiadnej** z požadovaných vlastností formuly X_2.

Tento záver môže na prvý pohľad vyzerať prehnane pesimisticky. Z tabuľky sa predsa **zdá**, že by X_2 mala byť splniteľná aj falzifikovateľná a nemala by byť tautológia ani nesplniteľná. **Ale nie je to tak**, pretože A a B nemusia byť atomické formuly, a preto pre ne niektoré z prípadov rozoberaných v tabuľke **nemusia nastať**:

Keď zvolíme formulu A tak, že je nesplniteľná (napr., $(a \land \neg a)$ pre nejaký predikátový atóm a jazyka $\mathcal{L}$), nebudú existovať žiadne ohodnotenia, kde by A bola pravdivá. Potom môžu nastať iba prípady z prvých dvoch riadkov našej tabuľky, teda v *každom ohodnotení* bude formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá, a teda bude nesplniteľná a zároveň falzifikovateľná (a nebude taulógia ani splniteľná).

Ak ale napríklad vyberieme za A tautológiu a za B nesplniteľnú formulu, v *každom ohodnotení* nastane iba 3. prípad, preto $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ bude tautológia (a teda splniteľná atď.).

Ako posledný príklad uvažujme, že A bude nejaký predikátový atóm a z jazyka $\mathcal{L}$ a $B = \neg a$. Potom v ohodnotení v_1, kde $v_1(a) = f$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá (2. prípad). Naopak v ohodnotení v_2, kde $v_2(a) = t$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ pravdivá (3. prípad). Pri tejto voľbe formúl A a B bude teda formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ splniteľná aj falzifikovateľná. ♮

3.3 Ekvivalentnosť formúl

3.3.1 Príklad. Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{f}^1, \mathrm{h}^1, \mathrm{b}^1, \mathrm{NHL}^1, \mathrm{i}^1, \mathrm{r}^1, \mathrm{m}^1\}$, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL, i značí inteligentná, r značí rozumná, a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{M}, \mathrm{E}\}$, kde M značí Miro, E značí Eva, sú (sémanticky) ekvivalentné

a) de Morganove pravidlá:
$\neg(\mathrm{f}(\mathrm{M}) \land \mathrm{h}(\mathrm{M}))$ a $(\neg\mathrm{f}(\mathrm{M}) \lor \neg\mathrm{h}(\mathrm{M}))$,

$\neg(\mathsf{f(M)} \lor \mathsf{h(M)})$ a $(\neg\mathsf{f(M)} \land \neg\mathsf{h(M)})$;

b) $(\mathsf{h(M)} \to (\mathsf{b(M)} \to \mathsf{NHL(M)})$ a $((\mathsf{h(M)} \land \mathsf{b(M)}) \to \mathsf{NHL(M)}))$;

c) $\neg(\mathsf{i(E)} \land (\mathsf{r(E)} \lor \mathsf{b(E)}))$ a $(\neg\mathsf{i(E)} \lor \neg\mathsf{r(E)}) \land (\neg\mathsf{i(E)} \lor \neg\mathsf{b(E)}))$.

d) $\neg\big(\mathsf{i(E)} \to (\mathsf{r(E)} \land \mathsf{b(E)})\big)$ a $\big(\neg(\mathsf{i(E)} \to \mathsf{r(E)}) \lor (\mathsf{i(E)} \land \neg\mathsf{b(E)})\big)$

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme pravdivosť formúl $\neg(\mathsf{f(M)}\land\mathsf{h(M)})$ a $(\neg\mathsf{f(M)}\lor\neg\mathsf{h(M)})$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých predikátových atómov, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i						
	f(M)	h(M)	¬f(M)	¬h(M)	(f(M) ∧ h(M))	¬(f(M) ∧ h(M))	(¬f(M) ∨ ¬h(M))
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \models_p \neg(\mathsf{f(M)} \land \mathsf{h(M)})$ vtt $v_i \models_p (\neg\mathsf{f(M)} \lor \neg\mathsf{h(M)})$. Z toho, z tvrdenia 3.19 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.9 vyplýva, že formuly $\neg(\mathsf{f(M)} \land \mathsf{h(M)})$ a $(\neg\mathsf{f(M)} \lor \neg\mathsf{h(M)})$ sú ekvivalentné.

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

♮

3.3.2 Príklad. Nasledujúce dvojice formúl sú výrokovologicky ekvivalentné pre všetky formuly A, B, C v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Dokážte to rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom výrokovologickom ohodnotení podobne ako v príklade 3.2.3.

a) *Nahradenie implikácie a ekvivalencie*

Implikácia je ekvivalentná disjunkcii negovaného antecedentu (ľavej strany) s konzekventom (pravou stranou).

i. $(A \to B) \Leftrightarrow_p (\neg A \lor B)$

Ekvivalenciu $(A \leftrightarrow B)$ sme zadefinovali ako skratku za $((A \to B) \land (B \to A))$. Alternatívne by sme ju mohli zadefinovať aj podľa nasledujúcej ekvivalencie:

ii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_p ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))$

❓ Kedy je táto ekvivalencia výhodná pri úpravách formúl do CNF? Kedy je naopak výhodná naša definícia $\leftrightarrow$ konjunkciou dvoch implikácií?

b) *Asociatívnosť*

Binárne spojky $\wedge$, $\vee$ a skratka $\leftrightarrow$ sú asociatívne:

i. $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \wedge (B \wedge C))$

ii. $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \vee (B \vee C))$

iii. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

⚠ Implikácia $\rightarrow$ samozrejme **nie je** asociatívna.

c) *Komutatívnosť a obmena implikácie*

Binárne spojky $\wedge$, $\vee$ a skratka $\leftrightarrow$ sú komutatívne:

i. $(A \wedge B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \wedge A)$

ii. $(A \vee B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \vee A)$

iii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \leftrightarrow A)$

Implikácia $\rightarrow$ samozrejme **nie je** komutatívna, ale je ekvivalentná so svojou *obmenou*:

iv. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg B \rightarrow \neg A)$

d) *Zákon dvojitej negácie a De Morganove zákony*

Tieto zákony pravdepodobne poznáte:

i. $\neg\neg A \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

ii. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg A \vee \neg B)$

iii. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg A \wedge \neg B)$

Pomocou nahradení z časti a) sa z nich dajú ľahko odvodiť analogické zákony pre implikáciu a ekvivalenciu:

iv. $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \wedge \neg B)$

v. $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \leftrightarrow \neg B)$

e) *Distributívnosť*

Konjunkciu môžeme distribuovať do disjunkcie ($\Rightarrow$) a aj ju z nej vyňať ($\Leftarrow$). Rovnako disjunkciu môžeme distribuovať do/vyňať z konjunkcie:

i. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

ii. $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Implikácia je pozoruhodná tým, že ju môžeme distribuuovať do konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ba aj ekvivalencie v jej konzekvente (t.j., na jej pravej strane), a tiež môžeme vyňať spoločný antecedent (pravú stranu implikácie).

iii. $(A \to (B \land C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \to B) \land (A \to C))$

iv. $(A \to (B \lor C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \to B) \lor (A \to C))$

v. $(A \to (B \to C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \to B) \to (A \to C))$

vi. $(A \to (B \leftrightarrow C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \to B) \leftrightarrow (A \to C))$

f) *Identita, idempotencia a absorpcia*

Pripojením ľubovoľnej tautológie $\top$ (napr. $(B \lor \neg B)$) k akejkoľvek formule konjunkciou sa nezmení jej význam. Tautológie sa teda voči konjunkcii správajú podobne ako jednotka voči násobeniu. Analogický vzťah je medzi nesplniteľnými formulami $\bot$ (napr. $(B \land \neg B)$) a disjunkciou. Týmto dvom faktom sa hovorí aj *zákony identity*.

i. $(A \land \top) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

ii. $(A \lor \bot) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Naopak nesplniteľné formuly voči konjunkcii a tautológie voči disjunkcii sa správajú ako nula voči násobeniu:

iii. $(A \land \bot) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} \bot$

iv. $(A \lor \top) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} \top$

Spojky $\land$ a $\lor$ sú *idempotentné*, teda ich aplikácia na tú istú formulu nemení jej význam.

v. $(A \land A) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

vi. $(A \lor A) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Zákony *absorpcie*: Keď formulu A disjunkciou pripojíme ku konjunkcii A s ľubovoľnou formulou B, nepridali sme žiadnu novú informáciu (pridaná konjunkcia sa „absorbuje“ do A). To isté platí o pripojení A konjunkciou k $(A \lor B)$.

vii. $(A \lor (A \land B)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

viii. $(A \land (A \lor B)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Pri úprave formuly do CNF nám tieto ekvivalencie umožňujú zbaviť sa zdvojených podformúl, zrejmých tautológií alebo nesplniteľných podformúl a absorbovateľných podformúl, ktoré môžu vzniknúť napríklad aplikáciou distributívnych zákonov.

⚠ Platia rovnaké varovania ako v príklade 3.2.3. Postupujeme rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom ohodnotení.

Riešenie pre d) iv. pravidlo negácie disjunkcie. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné výrokovologické ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistime, v ktorých prípadoch $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$:

	A	B	$(A \to B)$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$(A \land \neg B)$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. Obe sú pravdivé, keď $v \models_p A$ a $v \not\models_p B$, inak sú obe nepravdivé. Teda v každom prípade $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$ pre každé ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$. Podľa definície ekvivalentnosti formúl 4.9 teda $\neg(A \to B) \Leftrightarrow_p (A \land \neg B)$. ♮

3.4 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

3.4.1 Príklad. Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom $\mathrm{z} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$ taká, že

a) A je výrokovologicky splniteľná *vtt* B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$).

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk podľa predpokladov. Jazyk $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{ P\_c_1\_\dots\_c_n{}^1 \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1},\ \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_1}(P) = n,\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \}.$$

Každý predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}_2$ je teda unárny a vznikne spojením (pomocou podčiarnikov) niektorého pôvodného predikátového symbolu P a toľkých pôvodných indivíduových konštánt, aká je arita predikátu P. Jazyk $\mathcal{L}_2$ obsahuje všetky možné také kombinácie.

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}_1$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $P(c_1, \dots, c_n)$ nahradíme atómom $P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$, pre všetky $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, kde n je arita predikátového symbolu P. (Teda napr. ak $A = $ (ľúbi(Peter, Lucia) $\to$ naliala(Lucia, Peter, Pivo)), tak $B = $ (ľúbi_Peter_Lucia(z) $\to$ naliala_Lucia_Peter_Pivo(z)).)

Dokážme najprv časť a), $\Rightarrow$: Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})) = v_1(P(c_1, \dots, c_n)), \qquad \text{pre každý } P\_c_1\_ \dots \_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}.$$

Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A:

- Nech A je atomická formula. Ak A je predikátový atóm, má tvar $A = P(c_1, \dots, c_n)$, pre nejaký n-árny predikátový symbol $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a nejaké indivíduové konštanty $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$.

  Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako (t.j. $v_1(A) = v_2(B)$), vidíme, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$.

  Ak A je rovnostný atóm, tvrdenie preň triviálne platí. 💡 Tvrdenie máme dokázať iba pre výrokovologické formuly, teda také, v ktorých sa rovnosť nevyskytuje.

- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1. Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre $\neg$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \not\models_p A_1$ vtt $v_2 \not\models_p B_1$ vtt $v_2 \models_p B$.

- Nech A je v tvare $(A_1 \land A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \land B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\land$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \models_p A_1$ a $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_1$ a $v_2 \models_p B_2$ vtt $v_2 \models_p B$.

- Nech A je v tvare $(A_1 \lor A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \lor B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\lor$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

- Nech A je v tvare $(A_1 \to A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \to B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\to$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), $\Leftarrow$ je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(P(c_1, \dots, c_n)) = v_2(P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})),$$

pre všetky $P^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva, že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) výrokovologické formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{7\}, \\ i_2(\mathrm{z}) &= 7, \\ i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n) &= \begin{cases} \{7\}, & \text{ak } (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P), \\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases} \end{aligned}$$

pre každý $P\_c_1\_\dots\_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$.

Ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula (a teda $B = P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) = 7 \in i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.

Dokážme teraz časť b), $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{ \heartsuit_c \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \}, \\ i_1(c) &= \heartsuit_c && \text{pre každú } c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}, \\ i_1(P) &= \{ (\heartsuit_{c_1}, \dots, \heartsuit_{c_n}) \mid i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n),\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \} \\ & && \text{pre každý } P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \text{ kde } n \text{ je arita } P. \end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade $\Leftarrow$. Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula, a teda $B = P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly.

V dôkaze časti b) v smere $\Leftarrow$ samozrejme nezáleží na konkrétnom objekte, ktorý použijeme v doméne D_2.

Podobne ani v smere $\Rightarrow$ nie sú podstatné konkrétne objekty v doméne D_1, pokiaľ zabezpečíme, že každej indivíduovej konštante sa dá priradiť unikátny prvok domény, teda že interpretácia konštánt bude injektívna funkcia (prečo?). My sme si zvolili doménu pozostávajúcu zo symbolov $\heartsuit_c$ pre každú konštantu c. Rovnako dobre by sme mohli konštanty zoradiť do postupnosti a i-tu konštantu interpretovať jej poradovým číslom i. Dokonca by ako D_1 poslúžila priamo množina všetkých konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ — takej štruktúre sa hovorí *herbrandovská interpretácia*. ♮

3.4.2 Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ = {prof_Mráček, doc_Uhladená, Kiki, Veve, študent_1, …, študent_7, Mat_1, …, Mat_4, Prog_1, Prog_2, null, A, B, …, FX, riadny, 1.opravný, 2.opravný} a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ = {milý^1, prísny^1, študent^1, učiteľ^1, usilovný^1, školiteľ^2, učiteľ_predmetu^2, hodnotenie^5}.

Dokážte, že existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenou množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ = {platí^2} taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje výrokovologická formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

3.4.3 Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštantánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Pomôcka. Riešenie cvičenia 3.4.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 3.4.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk $\mathcal{L}_1$ preložiť do jazyka $\mathcal{L}_2$ tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte", iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny indivíduových konštánt.

3.4.4 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho indivíduová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých indivíduových konštánt konštantou a.

Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.

b) Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

3.4.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$, nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v $\mathcal{L}$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.

b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

d) Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.

e) $T \models_p (X \to Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models_p Y$.

f) Ak $T \models_p (X \lor Y)$, tak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$.

g) Ak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \lor Y)$.

h) Ak $T \models_p (X \to Y)$, tak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$.

i) Ak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \to Y)$.

j) Ak $T \models_p (X \to Y)$, tak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$.

k) Ak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \to Y)$.

l) $T \models_p X$ a $T \models_p Y$ vtt $T \models_p (X \land Y)$.

m) Formula $(X \to Y)$ je nesplniteľná vtt X je tautológia a Y je nesplniteľná.

n) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.

o) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T, tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X.

p) Ak $T \models_p (A \to B)$, tak $T \cup \{\neg B\} \models_p \neg A$.

q) Ak $T \not\models_p (A \land B)$, tak $T \models_p \neg A$ alebo $T \models_p \neg B$.

r) Ak $T \not\models_p (A \lor B)$, tak $T \not\models_p A$ a $T \not\models_p B$.

s) Ak $T \models_p (A \to B)$, tak $T \not\models_p (A \land \neg B)$.

t) Nech T je teória a X je formula. Ak T je nesplniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p X$.

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.

Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.13c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models_p X$ je postačujúcou ($\Rightarrow$) aj nutnou ($\Leftarrow$) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

($\Rightarrow$) ak $\{\} \models_p X$, tak X je tautológia; ($\Leftarrow$) ak X je tautológia, $\{\} \models_p X$.

($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie $\to$). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

($\Rightarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models_p X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá teória $\{\}$, je pravdivá aj formula X. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v.

Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly z $\{\}$ sú pravidvé vo v, a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_p \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X, potom máme, že $v \models_p X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v, teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

Keď máme dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

($\Leftarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Predpokladajme, že $v \models_p \{\}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X, teda z $\{\}$ vyplýva X, čo bolo treba dokázať.

> Jasnejšia formulácia tvrdenia „*Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X,*“ je „*Pre všetky ohodnotenia v, ak $v \models_p \{\}$, tak $v \models_p X$*“. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Dokázaním tvrdení ($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sme dokázali tvrdenie a).

> Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku *rozboru prípadov*, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.10 a tvrdenia 4.13c)($\Leftarrow$).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

> Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).
>
> Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.
>
> Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:
>
> Podľa predpokladu v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj X. To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
>
> Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.
>
> Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.
>
> - Ak existuje v, v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
> - Ak neexistuje v, v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť.**
>
>   Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v, v ktorom je T pravdivá“ nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením ***konkrétnej*** teórie T a formuly X, pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{a\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{p\}$, teóriu $T = \{(p(a) \land \neg p(a))\}$ a formulu $X = p(a)$. T je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v

je implikácia „ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$“ pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho ***kontrapríkladov***.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Predpokladajme, že $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, a zistime, či $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v, pre ktoré platí $v \models_{\mathrm{p}} T$, ale $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_{\mathrm{p}} T$, tak $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_{\mathrm{p}} T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_{\mathrm{p}} X$, a teda $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T, X a ohodnotenie v, pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením ***konkrétneho*** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{p}\}$, teóriu $T = \{\mathsf{p}(\mathsf{a})\}$ a formulu $X = \mathsf{p}(\mathsf{b})$. Potom $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{\mathsf{p}(\mathsf{a}) \mapsto t, \mathsf{p}(\mathsf{b}) \mapsto f\}$ máme $v \models_{\mathrm{p}} T$ a $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{\mathsf{p}(\mathsf{a}) \mapsto t, \mathsf{p}(\mathsf{b}) \mapsto t\}$ máme $w \models_{\mathrm{p}} T$ a $w \models_{\mathrm{p}} X$, teda $w \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Preto $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. ♮

4 Dôkazy a výrokovologické tablá

4.1 Vyplývanie v tablách

4.1.1 Príklad. (Smullyan [3]) Na políciu predviedli troch podozrivých Bakerovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

1. Doyle je vinný, ak je Bakerová vinná a Mills nevinný.
2. Doyle nikdy nepracuje sám.
3. Bakerová nikdy nepracuje s Doyleom.
4. Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Bakerovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Je na základe týchto zistení:

x) Mills určite vinný?

y) Doyle určite nevinný?

Úlohu riešte pomocou tablového kalkulu. Dôkaz vyplývania formuly preložte do slovenčiny.

Pri riešení tejto *neformálne* zadanej úlohy postupujeme podobne ako v príklade 3.1.2. Rozdiel je len v tom, akými prostriedkami vyriešime formálne problémy.

Riešenie. i. Formalizácia. Na formalizáciu poznatkov z vyšetrovania a otázky nám postačia atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Bakerová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills}, \text{Doyle}, \text{Bakerová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si atomické formuly označíme nasledovne: $M = \text{vinný(Mills)}$, $D = \text{vinný(Doyle)}$ a $B = \text{vinný(Bakerová)}$.

Zistenia 1–4 sformalizujeme teóriou $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

$$A_1 = ((B \land \neg M) \to D)),$$
$$A_2 = (D \to (B \lor M)),$$
$$A_3 = (B \to \neg D),$$
$$A_4 = (B \lor (M \lor D)).$$

Otázky sa týkajú formúl: x) M a y) $\neg D$. To, že sa otázka týka atomickej formuly alebo jej negácie, samozrejme, nie je pravidlo.

ii. Určenie formálnych problémov. Na zodpovedanie otázok musíme vyriešiť **tri** formálne logické problémy:

w) Je teória T výrokovologicky splniteľná?

> Tento problém musíme riešiť, pretože nemôžeme niekoho obviniť na základe vzájomne si odporujúcich zistení. Podobne je to v akejkoľvek neformálnej úlohe.

x) Vyplýva formula M z teórie T?

y) Vyplýva formula $\neg D$ z teórie T?

> Otázky sú priamo zamerané na Millsovu vinu a Doyleovu nevinu, preto nám na jej zodpovedanie stačí vyriešiť tieto dva formálne problémy. V príklade 3.1.2 bola otázka komplikovanejšia a viedla k 6 formálnym problémom.

iii. Riešenie formálnych problémov. w) Na overenie splniteľnosti teórie T stačí nájsť jej ľubovoľný model, teda také ohodnotenie v, že $v \models_p T$. Ľahko si overíme, že takýmto modelom je napríklad

$$v_0 = \{M \mapsto t, D \mapsto f, B \mapsto f\}.$$

> Model sme našli krátkou úvahou: Povedzme, že je atóm M pravdivý. Potom je pravdivá prvá (nepravdivý antecedent implikácie), druhá (pravdivý konzekvent) aj štvrtá formula (pravdivý jeden disjunkt). Na splnenie tretej formuly stačí nepravdivosť D alebo nepravdivosť B.
>
> Ak model neviete nájsť podobne, nateraz vám neostáva iné, ako skúšať možné ohodnotenia jedno po druhom a zastaviť sa na prvom, ktoré bude modelom. Neskôr uvidíme, že na overenie splniteľnosti sa dá využiť aj tablo formalizujúce našu úvahu.

x)

> Pred formálnym riešením problému vyplývania sa nad ním oplatí zamyslieť neformálne:
>
> Vyplýva M z T? Predpokladajme sporom, že to tak nie je. Potom v nejakom ohodnotení v je T pravdivá a M nepravdivá. Pretože A_4 je pravdivá (je súčasťou pravdivej teórie), musí byť pravdivá formula B alebo D. Lenže ak je pravdivá B, z pravdivosti A_1 a nepravdivosti M vyplýva, že je pravdivá D. To je v spore s pravdivosťou A_3. Ak je pravdivá D, z pravdivosti A_2 a nepravdivosti M dostávame, že je pravdivá B. To je opäť v spore s pravdivosťou A_3. Keďže sme vo všetkých možných prípadoch dospeli k sporu, úvodný predpoklad je nepravdivý, a teda M naozaj vyplýva z T. Táto úvaha nám pomôže zostrojiť tablový dôkaz formuly M z teórie T.

To, že formula M = vinný(Mills), vyplýva z teórie T (teda $T \vDash_p M$, resp. $T \vDash_p$ vinný(Mills)), sa pokúsime dokázať nájdením uzavretého tabla pre množinu označených formúl $T_M^+ = \{\mathbf{T}\,A \mid A \in T\} \cup \{\mathbf{F}\,M\} = \{\mathbf{T}\,A_1, \mathbf{T}\,A_2, \mathbf{T}\,A_3, \mathbf{T}\,A_4, \mathbf{F}\,M\}$.

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T_M^+
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T_M^+
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T_M^+
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T_M^+
5. $\mathbf{F}\,M$ T_M^+

- 6. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$ — $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$; 9. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 10$ — $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\,\neg M$ $\beta 10$; 13. $\mathbf{T}\,M$ $\alpha 12$ — $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 1$ — $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 15$ — $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\,D$ $\beta 2$ — $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$ — $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$; 23. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 22$ — $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 19$ — $*$ 5, 24

y)

Zamyslime sa teraz, či z T vyplýva $\neg D$. Opäť predpokladajme sporom, že by v nejakom ohodnotení bola pravdivá T a nepravdivá $\neg D$, a teda pravdivá D. Potom sú pravdivé A_1 aj A_4. Aby bola pravdivá A_3, musí byť nepravdivá A. Aby bola pravdivá A_2, musí byť pravdivá M. Ohodnotenie, ktoré je v súlade s predpokladom teda nemôže byť celkom ľubovoľné, ale existuje a je kontrapríkladom pre vyplývanie $\neg D$ z T.

Skonštruujeme ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$, ktoré je modelom T a nie je modelom $\neg D$:

$$v_1 = \{A \mapsto f, D \mapsto t, M \mapsto t\}.$$

iv. Formálne výsledky.

w) Našli sme model T (ohodnotenie v_0), takže T je splniteľná.

x) Zostrojili sme uzavreté tablo pre množinu T_M^+, teda formula M je dokázateľná z teórie T ($T \vdash_p M$). Preto podľa dôsledku 5.18 vety o korektnosti $T \vDash_p$ vinný(Mills).

y) Našli sme ohodnotenie v_1, ktoré je modelom T, ale nie je modelom formuly $\neg D$. Preto podľa definície 3.7 výrokovologického vyplývania $T \nvDash_p$ ¬vinný(Doyle).

v. Interpretácia. Tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zistení 1 — 4. Pretože zároveň vieme, že tieto zistenia sú splniteľné, polícia na ich základe môže usúdiť, že Mills je určite vinný.

Tvrdenie, že Doyle je nevinný zo zistení 1 — 4 nevyplýva. Polícia teda nemôže usúdiť, že Doyle je určite nevinný.

Neformálny dôkaz. Napíšme teraz s pomocou tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení 1 — 4 vyplýva, že Mills je vinný.

Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo“ (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že zistenia 1 — 4 sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa zistenia 4 je vinný aspoň jeden z trojice Bakerová, Mills, Doyle — preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

V prípade, že je vinná Bakerová (6), podľa zistenia 3 nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa zistenia 1 však potom nemôže byť pravda, že je vinná Bakerová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Bakerová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný (17). Podľa zistenia 2 je potom vinná Bakerová alebo Mills (18, 19). Vina Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Bakerovej (20) musíme na základe zistenia 3 uvažovať nevinu Doyla (21, 22), čo je tiež spor.

Použitie pravidla β na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \vee (M \vee D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak X, tak Y, a platí X, platí aj Y.“ V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách 2 a 3.

Keď sa pravidlo β použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tolens: „Pretože ak X, tak Y, a neplatí Y, neplatí ani X.“ To sa hodí pre implikáciu 1.

Preskúmali sme všetky možnosti, akými by zistenia 1–4 mohli byť pravdivé, ale Mills by bol nevinný. Žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu. Preto Mills je vinný, ak sú pravdivé zistenia 1 — 4. Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami 1 — 4. □

Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo“. „Skutočné“ dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodia nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie“ čítať ako priamy dôkaz. Formulu M označenú znamienkom **F** chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom **T** stále chápeme ako *predpoklady*.

Dôkaz (priamy). Predpokladajme, že zistenia 1 — 4 sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5) . Podľa zistenia 4 je vinný niekto z podozrivých Bakerová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16) , dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Bakerová (6) . Podľa zistenia 3 teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9) . Preto podľa zistenia 1 nie je pravda, že Bakerová je vinná a Mills je nevinný (10, 14) . Teda Bakerová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12) , čiže Mills je vinný (13) .

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17) . Podľa zistenia 2 je vinná Bakerová alebo je vinný Mills (19) . Keby bola vinná Bakerová (20) , podľa zistenia 3 by bol Doyle nevinný (21, 22) , čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24) .

Z predpokladu pravdivosti zistení 1 — 4 sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla β na implikáciu $\mathbf{T}(X \to Y)$ — nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak X, tak Y, a máme dokázať Y, postačí dokázať X."

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \to Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá α s dôsledkami $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak X, tak Y. Predpokladajme teda X a dokážme Y."

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdu využitie napríklad pri čítaní tabiel v iných úlohách. ♮

4.1.2 Dokážte, že $T \vDash_{\mathrm{p}} X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ a T je splniteľná, kde:

(A_1) $\big(\mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}) \lor (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \lor \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_2) $(\mathsf{kapela}(\mathsf{PinkFloyd}) \land \mathsf{hraciaKonzola}(\mathsf{FerovaPS}))$

(A_3) $(\neg\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}) \to \mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}))$

(A_4) $\big(\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}) \to (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \lor \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_5) $\neg\big(\mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}) \land (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \land \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_6) $(\mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}) \to \mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}))$

(A_7) $(\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \to \neg\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}))$

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) $(\neg\mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}) \to \mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}))$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

4.1.3 Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) $(\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \to \neg\mathsf{prsi}(\mathsf{den}))$

(A_2) $(\mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den}) \to (\mathsf{prsi}(\mathsf{den}) \lor \mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den})))$

(A_3) $(\mathsf{vikend}(\mathsf{den}) \to \neg\mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den}))$

(A_4) $\big((\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \to \mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}))$
$\land ((\neg\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \land \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den})) \to \neg\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}))\big)$

(A_5) $(\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}) \to \neg\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}))$

výrokovologicky vyplýva

(X) $((\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \land \mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den})) \to \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den}))$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

4.1.4 Dokážte, že z tvrdení:

(A_1) Vianočný darček kúpil otec alebo ho kúpila mama.

(A_2) Darček kúpil otec a Ondrej je šťastný, len ak to bude spoločný darček s Hankou a aj ona je šťastná.

(A_3) Určite sa nestane, aby ani Ondrej ani Hanka neboli šťastní.

(A_4) Otec neznáša nakupovanie, takže sa z toho vždy vyvlečie.

vyplýva tvrdenie:

(X) Ak by bol Ondrej šťastný, iba ak by darček kúpil otec, tak nakupovala mama a Hanka je šťastná.

Tvrdenia sformalizujte v jazyku s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{kúpil}^2, \mathsf{šťastný}^1\}$, dokážte vyplývanie tablom a dôkaz prepíšte do čo najprirodzenejšej slovenskej formy.

4.1.5 O trojici detí sme sa dozvedeli tieto informácie:

1. Janko sa hrá s autíčkom alebo s bábikou.
2. Ak by to, že sa nehrá s autíčkom znamenalo, že sa hrá s bábikou, tak sa určite nehrá s vláčikom.
3. Miško, ak sa hrá s autíčkom alebo s vláčikom, je šťastný.
4. Hanka je šťastná, ak je aspoň jeden z chlapcov šťastný.

Je na základe týchto informácií isté, že *ak sa Janko nehrá s vláčikom, len ak sa s ním hrá Miško, tak sú Miško aj Hanka šťastní*?

Na zodpovedanie otázky tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablo.

⚠ Podobne ako v príklade 4.1.1 (a na rozdiel od úloh 4.1.2 a 4.1.3), v tejto odpovedáte na neformálnu otázku. Preto potrebujete overiť splniteľnosť sformalizovanej teórie.

⚠ Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

💡 Vaše tablo by malo mať **najviac 28 uzlov**.

4.1.6 Petra rada pletie. Nedávno dostala novú priadzu a chystá sa z nej niečo upliesť. O priadzi a pletení všeobecne máme tieto informácie:

1. Petra si upletie sveter, čiapku, ponožky alebo šál.
2. Priadza je buď hrubá alebo tenká.
3. Priadza je bavlnená, vlnená alebo akrylová, pričom prípustné sú aj zmesi týchto materiálov.
4. Na sveter je potrebná hrubá priadza bez obsahu bavlny (inak by nebol dosť teplý).
5. Vlna „hryzie“. Takže ak priadza obsahuje vlnu, nehodí sa na šál ani ponožky.
6. Ponožky sa dajú upliesť iba z tenkej priadze.
7. Petra sa oblieka štýlovo a chce, aby jej kúsky navzájom ladili. Preto čiapku si upletie jedine, ak si k nej upletie aj šál. Rovnako šál by si neupletla bez čiapky.

Zistite, či na základe uvedených skutočností môžeme s istotou tvrdiť, že:

a) Ak je priadza tenká, tak nie je vlnená.

b) Ak si Petra upletie sveter, nemôže si už upliesť čiapku.

Aké tri formálne logické problémy musíme vyriešiť, aby sme zodpovedali neformálne otázky zo zadania? Vyriešte príslušné formálne problémy, sformulujte a zdôvodnite výsledky a intepretujte ich, aby ste odpovedali na neformálne otázky.

4.1.7 Predmet môže študent úspešne absolvovať iba vtedy, keď odovzdá domáce úlohy a úspešne absolvuje (spraví) riadny alebo náhradný test. Náhradný test môžu písať iba tí, čo boli chorí, ale keďže býva ľahký, tak ho aj hneď spravia (teda iba chorí mohli spraviť náhradný test). Riadny test spravia iba tí, ktorí sa učili alebo aspoň riešili domáce úlohy. Študenti, ktorí odovzdali domáce úlohy, ich buď riešili alebo odpísali. Odpisujú ich ale iba flákači, čo sa neučia.

Dokážte v tablovom kalkule, že ak som predmet úspešne absolvoval a nebol som pri tom chorý, musel som riešiť domáce úlohy.

4.1.8 Pomocou tablového kalkulu vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Keď Katka nakreslí obrázok, je na ňom buď mačka alebo pes. Obrázok mačky Katkin pes vždy hneď roztrhá. Ak jej pes roztrhá obrázok, Katka je smutná.

   Dokážte, že ak Katka nakreslila obrázok a je šťastná (nie je smutná), tak na jej obrázku je pes.

b) Bez práce nie sú koláče. Ak niekto nemá ani koláče, ani chleba, tak bude hladný. Na chlieb treba múku.

   Dokážte, že ak niekto nemá múku a je najedený (nie je hladný), tak pracoval.

c) Bez oblakov niet dažďa (ak nie sú oblaky, nemôže pršať). Ak je cesta mokrá, tak prší alebo práve prešlo umývacie auto. Umývacie autá nechodia v sobotu (ak je sobota, tak umývacie autá nechodia).

   Dokážte, že ak je sobota a je mokrá cesta, tak je oblačno.

4.1.9 (Smullyan [3]) Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia (X) a (Y).

(X) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

(Y) McDonnald je vinný.

4.2 Tautológie v tablách

4.2.1 Príklad. Dokážte v tablovom kalkule, že pre ľubovoľné formuly A, B v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú nasledujúce formuly tautológiami:

$X_1 = (A \to A)$

$X_2 = ((A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$

$X_3 = ((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$

Riešenie pre X_3.

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že tablo pre množinu označených formúl môžeme konštruovať aj bez toho, aby sme poznali všetky ich detaily, teda v našom prípade podformuly A a B.

Zoberme ľubovoľné formuly A a B. Aby sme dokázali, že formula $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia, stačí podľa dôsledku 5.19 nájsť uzavreté tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$.

Pre formuly $(X \leftrightarrow Y)$ nemáme ani nepotrebujeme špeciálne tablové pravidlá, pretože sme $\leftrightarrow$ zadefinovali ako skratku. S formulou $(X \leftrightarrow Y)$ pracujeme rovnako ako s konjunkciou $((X \to Y) \wedge (Y \to X))$.

<table>
<tr><td colspan="2">1. $\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ S^+</td></tr>
<tr>
<td>
2. $\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$ $\beta1$
3. $\mathbf{T}(\neg A \to \neg B)$ $\alpha2$
4. $\mathbf{F}(B \to A)$ $\alpha2$
5. $\mathbf{T}\,B$ $\alpha4$
6. $\mathbf{F}\,A$ $\alpha4$
<table>
<tr>
<td>7. $\mathbf{F}\,\neg A$ $\beta3$
8. $\mathbf{T}\,A$ $\alpha7$
$*$ 6, 8</td>
<td>9. $\mathbf{T}\,\neg B$ $\beta3$
10. $\mathbf{F}\,B$ $\beta9$
$*$ 6, 10</td>
</tr>
</table>
</td>
<td>
11. $\mathbf{F}((B \to A) \to (\neg A \to \neg B))$ $\beta1$
12. $\mathbf{T}(B \to A)$ $\alpha11$
13. $\mathbf{F}(\neg A \to \neg B)$ $\alpha11$
14. $\mathbf{T}\,\neg A$ $\alpha13$
15. $\mathbf{F}\,\neg B$ $\alpha13$
16. $\mathbf{F}\,A$ $\alpha14$
17. $\mathbf{T}\,B$ $\alpha15$
<table>
<tr>
<td>18. $\mathbf{F}\,B$ $\beta12$
$*$ 17, 18</td>
<td>19. $\mathbf{T}\,A$ $\beta12$
$*$ 19, 16</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}\,X_3\}$, teda formula X_3 je dokázateľná ($\vdash_p X_3$). Preto podľa dôsledku 5.19 je X_3 tautológia. ♮

4.2.2 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) *Základné tautológie*

Medzi základné zákony výrokovej aj prvorádovej logiky patria *princíp vylúčenie tretieho* (formula je pravdivá alebo nepravdivá, tretia možnosť nie je) a *princíp bezospornosti* (A a $\neg A$ nemôžu byť súčasne pravdivé). Vyjadrujú ich prvé dve z nasledujúcich tautológií. Zvyšné dve sú jednoduché fakty o implikácii a ekvivalencii.

i. $(A \lor \neg A)$
ii. $\neg(A \land \neg A)$
iii. $(A \to A)$
iv. $(A \leftrightarrow A)$

b) *Vlastnosti implikácie*

V niektorých formálnych dokazovacích systémoch sa ako jedna zo základných vlastností používa prvá tautológia z nasledujúcej skupiny, ktorá hovorí, že ak A implikuje aj $(B \to C)$ aj B, tak implikuje aj C. Slabšou formou tejto vlastnosti druhá tautológia – *tranzitivita implikácie* (alebo tiež zákon hypotetického sylogizmu).

i. $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$
ii. $\big(((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C))\big)$

Nie celkom zrejmá tautológia iii. sa nazýva *Peircov zákon*. V niektorých formálnych systémoch môže slúžiť ako náhrada zákona vylúčenia tretieho. Tautológia iv. je komplikovanejšou verziou tohto zákona.

iii. $\big(((A \to B) \to A) \to A)\big)$
iv. $\big((C \to A) \to \big(((A \to B) \to C) \to A\big)\big)$

c) *Princíp dôkazu sporom a zákon Dunsa Scota*

Prvá z nasledujúcich tautológií je základom princípu dôkazu sporom (ak $\neg A$ implikuje $\neg B$, tak ak je pravdivé B, musí byť pravdivé A). Druhá je jej slabšou variáciou.

i. $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$
ii. $\big(((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A)\big)$

Tretej tautológii sa hovorí *zákon Dunsa Scota* a dá sa chápať ako „z nemožného vyplýva čokoľvek" – za predpokladu $\neg A$ je implikácia s antecedentom A (ktorý nemôže byť pravdivý) pravdivá bez ohľadu na to, aký je konzekvent B.

iii. $(\neg A \to (A \to B))$

d) *Modus ponens, modus tolens a eliminácia ekvivalencie*

Tieto tautológie vyjadrujú známe pravidlá *modus ponens* a *modus tolens* na odvodzovanie dôsledkov implikácie.

i. $\big(((A \to B) \land A) \to B\big)$

ii. $\big(((A \to B) \land \neg B) \to \neg A\big)$

Analogickým pravidlám pre ekvivalenciu sa hovorí *eliminácia ekvivalencie*.

i. $\big(((A \leftrightarrow B) \land A) \to B\big)$

ii. $\big(((A \leftrightarrow B) \land B) \to A\big)$

iii. $\big(((A \leftrightarrow B) \land \neg A) \to \neg B\big)$

iv. $\big(((A \leftrightarrow B) \land \neg B) \to \neg A\big)$

e) *Introdukcie*

Nasledujúce tautológie vyjadrujú postačujúce podmienky pre pravdivosť formúl s jednotlivými binárnymi spojkami.

i. $\big(A \to (B \to (A \land B))\big)$

ii. $(A \to (A \lor B))$

iii. $(A \to (B \to A))$

f) *Eliminácie*

Na nasledujúce tautológie sa dá pozerať ako na nutné a postačujúce podmienky toho, že C je logickým dôsledkom formuly tvorenej binárnou spojkou. Napríklad prostredná tautológia vyjadruje, že C je dôsledkom disjunkcie vtt, keď je dôsledkom každého s disjunktov. Hovorí sa im aj *eliminácie* (na pravej strane sa už binárna spojka z antecedentu nevyskytuje).

i. $\big(((A \land B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))\big)$

ii. $\big(((A \lor B) \to C)) \leftrightarrow ((A \to C) \land (B \to C))\big)$

iii. $\big(((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((\neg A \to C) \land (B \to C))\big)$

g) *Vlastnosti ekvivalencie*

Ekvivalencia je tranzitívna, podobne ako implikácia.

i. $\big(((A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)\big)$

Disjunkciu aj implikáciu je možné distribuovať do (a vyňať z) ekvivalencie. Čo je prekvapivejšie, implikácia sa do vnútra ekvivalencie dá distribuovať ako konjunkcia.

ii. $\big((A \lor (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \leftrightarrow (A \lor C))\big)$

iii. $\big((A \to (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \to B) \leftrightarrow (A \to C))\big)$

iv. $\big((A \to (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow (A \land C))\big)$

Exkluzívna disjunkcia (XOR) je ekvivalentná s negáciou ekvivalencie, o čom nás presviedčajú nasledujúce tautológie.

v. $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \lor B) \land \neg(A \land B))\big)$

vi. $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \land \neg B) \lor (\neg A \land B))\big)$

4.2.3 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Dokážte ekvivalentnosť dvojíc formúl z príkladu 3.3.2 v tablovom kalkule. Teda pre každú dvojicu $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$ z príkladu 3.3.2 dokážte tablom, že $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

Literatúra

[1] Dave Barker-Plummer, Jon Barwise, and John Etchemendy. *Language, Proof and Logic*. CSLI Publications, second edition edition, 2011.

[2] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[3] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.