Výrokovologické spojky a ohodnotenia

2. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2025/2026

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 2. prednášky

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
  - modely stavu sveta,
  - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
  - konštanty označujú objekty,
  - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení **výrokovologickými spojkami**.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy **boolovská funkcia**, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí **iba** od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby šiel na prechádzku s ich psom. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá sa zo školy vráti až o 19:30.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna.
Nezávisí iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov
(ale od existencie vzťahu príčina-následok medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je funkciou na pravdivostných hodnotách. □

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Boolovské spojky

Negácia

Negácia $\neg$ je **unárna** spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že* … “, predpone *ne*-.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa **nezátvorkuje**.

Okolo argumentu negácie **nepridávame** zátvorky,
ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2

$\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})$	Karol **nie** je doma.
$\neg\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol}$	Jarka **nie** je Karol.
$\neg\neg\neg\mathtt{poslúcha}(\mathtt{Cilka})$	**Nie** je pravda, že **nie** je pravda, že Cilka **ne**poslúcha.
$\cancel{(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$	nesprávna
$\cancel{\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$	syntax

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

- ✓ $\neg\,\texttt{Jarka} \doteq \texttt{Karol}$ — Jarka **nie** je Karol.
- ✗ $\neg(\texttt{Jarka} \doteq \texttt{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie
„«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu.
   Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách.
   Konštanty označujú objekty domény.
   Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3

Formulu $\neg\,\tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

Konjunkcia

Konjunkcia $\land$ je binárna spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma aj Karol je doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka je v škole, no Karol je doma.
  $(\mathtt{v\_škole}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Ani Jarka nie je doma, ani Karol tam nie je.
  $(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Nielen Jarka je chorá, ale aj Karol je chorý.
  $(\mathtt{chorý}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{chorý}(\mathtt{Karol}))$

Zloženú formulu vždy zátvorkujeme.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- Jarka aj Karol sú doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Karol sa potkol a spadol.
  $(\mathtt{potkol\_sa}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{spadol}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy a otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{mama}) \land \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{otec}))$

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je ruský špión.
  $(\mathtt{Rus}(\mathtt{Eismann}) \land \mathtt{\check{s}pi\acute{o}n}(\mathtt{Eismann}))$
- Boby je malý čierny psík.
  $((\mathtt{mal\acute{y}}(\mathtt{Boby}) \land \mathtt{\check{c}ierny}(\mathtt{Boby})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Boby}))$

Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť,
ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu **stráca**:

- Jarka a Karol sa stretli **a** išli do kina.
  $$\big(\mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Karol}) \land \\ \big(\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})\big)\big)$$
- Jarka a Karol išli do kina **a** stretli sa.
  $$\big(\big(\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})\big) \land \\ \mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Karol})\big)$$

Disjunkcia

Disjunkcia $\vee$ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či* v **inkluzívnom** význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež *„alebo aj/i“* a častice *respektíve*, *eventuálne*, *poprípade*, *prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma **alebo** Karol je doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \vee \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Bobyho kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol.
  $(\mathtt{kúpe}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}) \vee \mathtt{kúpe}(\mathtt{Karol}, \mathtt{Boby}))$

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{v\_\check{s}kole}(\mathtt{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy alebo otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{mama}) \lor \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{otec}))$
- Boby je čierny či tmavohnedý psík.
  $\big((\mathtt{\check{c}ierny}(\mathtt{Boby}) \lor \mathtt{tmavohned\acute{y}}(\mathtt{Boby})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Boby})\big)$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie *„buď …, alebo … “*, *„buď …, buď … “*, *„alebo …, alebo … “* spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú exkluzívnu disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*buď* …, *alebo* … “, „*buď* …, *buď* … “, „*alebo* …, *alebo* … “ spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú exkluzívnu disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$\big((\mathtt{vybitá}(\mathtt{batéria}) \lor \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka})) \land \\ \lnot(\mathtt{vybitá}(\mathtt{batéria}) \land \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka}))\big).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti,
o ktorých vieme, že sú vzájomne výlučné
(na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole.
  (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Viď *Znalosti na pozadí* ďalej.

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované.
Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Boby šťastný.
  - ❓ $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - ❓ $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby}))\big)$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Boby je šťastný.
  - ❓ $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - ❓ $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby}))\big)$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*):
  - Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Boby šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - Doma je Karol alebo Jarka a Boby je šťastný.
    Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Boby je šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
- Kombinácie spojok *buď* …, *alebo* …; *alebo* …, *alebo* …; *aj* …, *aj* …; *ani* …, *ani* …; a pod.
  - Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Boby šťastný, alebo jedno aj druhé.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)\big)$
  - Alebo je doma Karol, alebo je doma Jarka a Boby je šťastný, alebo aj aj.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)\big)$

Jednoznačnosť rozkladu

Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Boby šťastný.
Aj Karol je doma, aj Jarka je doma, alebo je Boby šťastný.

- Má čiarka vplyv na význam tvrdenia?
- Chybovosť pri čiarkach je vysoká, pravidlá nie sú jednoznačné a v čase sa menia.
- Pri formalizácii pomáhajú dodatočné znalosti (napr. o spoločnom fungovaní Karola, Jarky, Bobyho).

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na najkratšiu nasledujúcu formulu — oblasť platnosti tohto výskytu.

- $((\neg\,\mathtt{doma(Karol)} \land \mathtt{doma(Jarka)}) \lor \mathtt{šťastný(Boby)})$
- $(\neg\,(\mathtt{doma(Karol)} \land \mathtt{doma(Jarka)}) \lor \mathtt{šťastný(Boby)})$

Argument negácie je uzátvorkovaný práve vtedy, keď je priamo vytvorený binárnou spojkou:

✔ $\neg\neg(\mathtt{doma(Karol)} \land \mathtt{doma(Jarka)})$

✘ $\neg(\neg(\mathtt{doma(Karol)} \land \mathtt{doma(Jarka)}))$

Interakcia negácie s alebo v slovenčine

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

Zvyčajné chápanie v slovenčine je A.

Formalizácii B zodpovedá
„Nie je pravda, že je doma Jarka alebo Karol.“

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Implikácia

Implikácia

Implikácia $\rightarrow$ je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak* …, *tak* … .

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A **antecedent** a podformule B **konzekvent**.

Formula vytvorená implikáciou je **nepravdivá** v **jedinom** prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

⚠ Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak* …, *tak* …:

Napr. veta „*Ak* by *Sarah prišla*, *Jim* by *prišiel tiež*" je nepravdivá, keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady, keď *ak* …, *tak* … vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

Keď …, *potom* … má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia tiež nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, **ak** príde Kim. Jim príde, **iba ak** príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú **podmienkami** hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi **podstatný rozdiel**:

Jim príde, <u>**ak** príde Kim</u>. Jim príde, <u>**iba ak** príde Kim</u>.

postačujúca podmienka

nutná podmienka

Postačujúca podmienka

Jim príde, ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, stačí, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \to A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, pokiaľ príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, iba ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, je nevyhnutné, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \to B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, iba pokiaľ príde Kim.
- Jim príde iba spolu s Kim.
- Jim nepríde bez Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

*Z logiky prejdete, **ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Stačilo by prísť na obe časti skúšky a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

*Z logiky prejdete, **iba ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Prísť na obe časti skušky **je nutné**, ale na prejdenie to *nestačí*.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \to B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A, tak B.
- Ak A, tak aj B.
- Ak A, B.
- Pokiaľ A, [tak (aj)] B.
- A, iba/len/jedine ak/pokiaľ(/keď) B.
- A nastane iba spolu s B.
- A nenastane bez B.
- B, ak/pokiaľ(/keď) A.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim.
  $(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \leftrightarrow \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne.
  $(\mathtt{párne}(\mathtt{n}) \leftrightarrow \mathtt{párne}(\mathtt{n}^2))$
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus.
  $(\mathtt{Nemec}(\mathtt{Müller}) \leftrightarrow \mathtt{Rus}(\mathtt{Stirlitz}))$

Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu,
že A je nutnou **aj** postačujúcou podmienkou B.

Budeme ju preto považovať za **skratku** za formulu

$$\big((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)\big).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole,
  inak má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je s ním Boby.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenia a považovať ich za skratky, podobne ako ekvivalenciu.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Správnosť a vernosť formalizácie

Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula,
ktorá je pravdivá **za tých istých okolností** ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto **za tých istých okolností** znamená **v tých istých štruktúrach**.

Vernosť formalizácie

Výrok *„Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma“*
sa dá **správne** formalizovať ako

$$\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

ale rovnako **správna** je aj formalizácia

$$(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň **uprednostňujeme** formalizácie, ktoré **vernejšie** zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu,
a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so **znalosťami na pozadí** (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie **samostatnými formulami**.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia **vyznievajú** silnejšie, ako naozaj sú:

- „*Prílohou sú zemiaky* alebo *šalát*“
  môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- „*Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %*“
  znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočnú časť významu tvrdenia
nemôžeme poprieť v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu „*Karol a Jarka sú doma*“
  dodáme „*Ale Karol nie je doma,*“ dostaneme sa do sporu.
  Takže „*Karol je doma*“
  je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú **môžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva ***konverzačná implikatúra*** (H. P. Grice). **Nie je skutočnou časťou významu** pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát.
  Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.

  Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.
  Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.
  Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.

  Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete*, iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %*,“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením.
  Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.

Formalizácia je ťažká

- Jedna formula môže byť rozdelená do viac viet.
  Nech x je kladné reálne. Potom $x^2 > 0$.
- Niektoré tvrdenia sú vnútorne veľmi zložité.
  Postupnosť prvočísel usporiadaných podľa veľkosti je rastúca.
- Existujú jazyky, kde pre niektoré logické spojky neexistuje slovo, využívajú sa iné prvky gramatiky.
- Logickú spojku občas treba hádať z kontextu.
  It's raining. The game is cancelled.
  It's raining *and therefore* the game is cancelled.
- Aj intonácia môže ovplyvniť formalizáciu.
  I said I *might* go.
  I did not say I am surely going, I only suggested the possibility.

Formalizácia je ťažká

- Mnohé tvrdenia z praxe majú veľmi ďaleko od ideálnych jazykových schém (či už z hľadiska aplikácie gramatických pravidiel alebo formalizácie do presného jazyka).
  „Na druhej strane si myslím, že Slovensko, niekedy žiaľbohu a niekedy je to aj chvalabohu, že žiaľbohu, na Slovensku predsa len tá pracovná sila je ešte stále lacnejšia a teraz, chvalabohu, že je lacnejšia."
- Jednotlivci majú svojské vnímanie jazykových konštruktov založené na ich osobnej histórii a niekedy sa nezhodnú. Trénovacie množiny pre AI modely tak sú nekonzistentné a výsledok trénovania nemôže byť dokonalý.

Formalizácia je ťažká

Aj najlepšie súčasné AI systémy potrebujú s formalizáciou ľudskú pomoc. Z článku o AlphaGeometry (2025, parafrázované):

> *A major weakness is the need to manually transform input problems from natural language into a domain-specific language. Automating this process is an active area of research. It is significantly more complicated than translation between human languages.*
>
> *Formalization frequently requires re-formulating the original problem into an alternative **equivalent** form, and disambiguating the nuances in the original problem statement. **Automated formalization thus demands significant background knowledge and problem-solving skills** on its own. Using Gemini prompts containing examples obtained manually, we are able to formalize 30 out of 39 formalizable IMO geometry problems.*

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme zadefinovať — presne a záväzne — ich syntax (skladbu) a sémantiku (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovej logiky

Definícia 2.4

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- ***indivíduové konštanty*** z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a ***predikátové symboly*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

- ***výrokovologické spojky*** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, ***symbol negácie***, ***symbol konjunkcie***, ***symbol disjunkcie***, ***symbol implikácie***);
- a ***symbol rovnosti*** $\doteq$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená ***arita*** $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \to (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Formuly jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.6

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. *Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$* je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju *negácia* formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame *formulou* jazyka $\mathcal{L}$.

Definícia 2.6

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. ***Množina*** $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ***formúl jazyka*** $\mathcal{L}$ je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju ***negácia*** formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne ***konjunkcia***, ***disjunkcia*** a ***implikácia*** formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

Dohoda 2.7

Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.
Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) \colon \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zobrazenie na formulách definované ako $(A \leftrightarrow B) = \big((A \to B) \land (B \to A)\big)$ pre každé dve formuly A a B.

Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že
$\big(\neg \texttt{príde}(\texttt{Kim}) \rightarrow (\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah}))\big)$ je formula?
Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli vytvoriť?

Vytvárajúca postupnosť

Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že
$\big(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$ je formula?
Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli vytvoriť?

Definícia 2.10

Vytvárajúcou postupnosťou nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovej logiky je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Indukcia (vzhľadom) na konštrukciu formuly

Veta 2.11 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P,*

2.1. *ak formula A má vlastnosť P, tak aj $\neg A$ má vlastnosť P,*

2.2. *ak formuly A a B majú vlastnosť P, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12

Postupnosť symbolov A je výrokovologickou formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A.

Osnova dôkazu.

($\Rightarrow$) Indukciou na konštrukciu formuly

($\Leftarrow$) Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti $\square$

vtt skracuje „*vtedy a len vtedy, keď*“.

Výrokovologické formuly by sa dali alternatívne zadefinovať ako postupnosti symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktoré existuje vytvárajúca postupnosť nad $\mathcal{L}$.

Výhoda: Dĺžka vytvárajúcej postupnosti je číslo, tvrdenia o všetkých formulách sa potom dajú dokazovať matematickou alebo úplnou indukciou.

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl“ jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) najmenšia množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \land B$, $A \lor B$ a $A \rightarrow B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou“ jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula“
$(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \rightarrow \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \rightarrow \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$?

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- *X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna binárna spojka $b \in \{\land, \lor, \to\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly
podľa definície formúl:

$$\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}),$$
$$\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})),$$
$$((\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$$

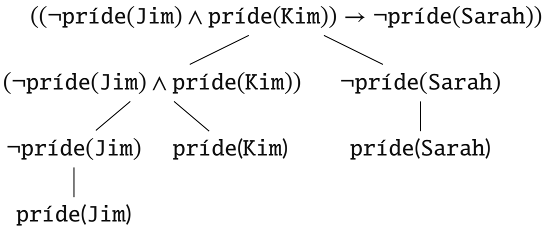
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné, *ktoré* z predchádzajúcich formúl
  sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly
bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom formuly

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Definícia 2.14

Vytvárajúci strom T formuly X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \; b \; B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl — Podformuly

Definícia 2.15 (Priama podformula)

Pre všetky formuly A a B:

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

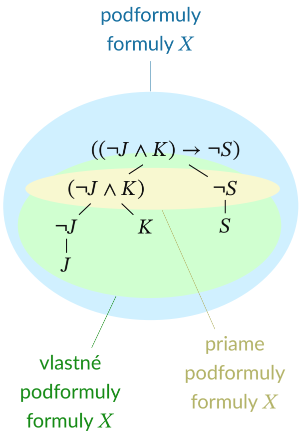
Definícia 2.16 (Podformula)

Vzťah ***byť podformulou*** je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X, Y a Z:

- X je podformulou X.
- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Formula X je ***vlastnou podformulou*** formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

$X = ((\neg J \wedge K) \to \neg S)$



Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17

Aký je stupeň formuly $\big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \land \neg(\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\big)$?

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme? Podobne ako formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)

Pre všetky formuly A a B a všetky n, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Každá atomická formula je stupňa 0.
- Ak formula A je stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak formula A je stupňa n_1 a formula B je stupňa n_2, tak formuly $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly (stručnejšie))

Stupeň $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Je táto funkcia dobre zadefinovaná? — Áno, vďaka jednoznačnosti rozkladu.

Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. *báza indukcie: každá formula stupňa 0 má vlastnosť P,*
2. *indukčný krok: pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Sémantika výrokovologických formúl

Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovej logiky popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou **štruktúr**.

Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry sa takmer nemení:

Definícia 2.20

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
i je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia 2.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovej logiky. Reláciu *formula A je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$* ($\mathcal{M} \models A$) definujeme **induktívne** pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty c_1, $c_2, \ldots, c_n$, a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \ldots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \ldots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

kde $\mathcal{M} \not\models A$ skracuje *A nie je pravdivá v $\mathcal{M}$*.

Skratka **vtt** znamená „*vtedy a len vtedy, keď*“.

Informatická analógia:

štruktúra	$\sim$	stav pamäte
formula	$\sim$	program
relácia $\models$	$\sim$	interpreter

Príklad 2.22

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\texttt{Kim}) = 1$, $i(\texttt{Jim}) = 2$, $i(\texttt{Sarah}) = 3$, $i(\texttt{p}) = \{1, 3\}$.

Zistime, či $\mathcal{M} \models$ $\big(\neg(\texttt{p}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{p}(\texttt{Kim})) \rightarrow \neg\texttt{p}(\texttt{Sarah})\big)$.

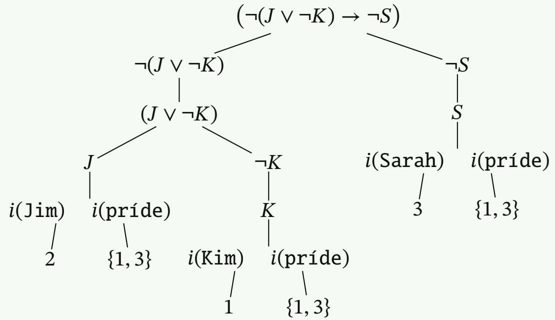
Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $(\neg(J \lor \neg K) \to \neg S)$
  - $\neg(J \lor \neg K)$
    - $(J \lor \neg K)$
      - $\mathcal{M} \not\models J$
        - $i(\mathtt{Jim}) \notin i(\mathtt{príde})$
          - 2
          - $\{1, 3\}$
      - $\neg K$
        - $\mathcal{M} \models K$
          - $i(\mathtt{Kim}) \in i(\mathtt{príde})$
            - 1
            - $\{1, 3\}$
  - $\neg S$
    - $\mathcal{M} \models S$
      - $i(\mathtt{Sarah}) \in i(\mathtt{príde})$
        - 3
        - $\{1, 3\}$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

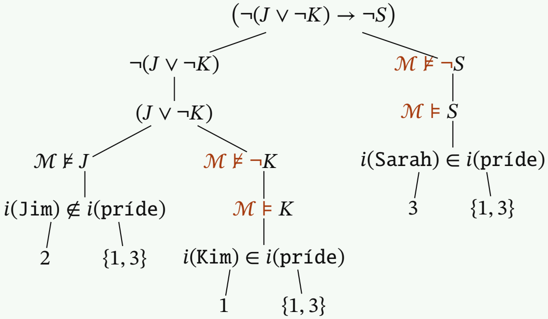
Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

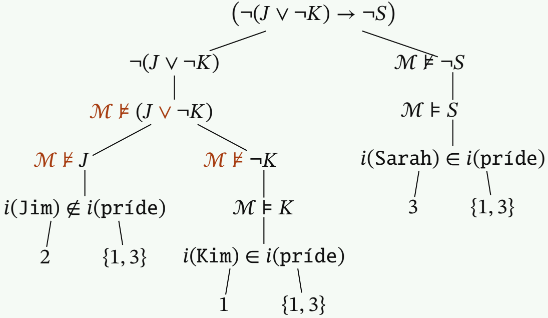
Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \ldots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \ldots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

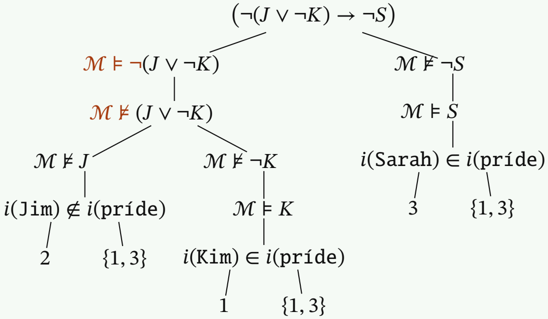
Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\texttt{Kim}) = 1$, $i(\texttt{Jim}) = 2$, $i(\texttt{Sarah}) = 3$, $i(\texttt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \texttt{príde}(\texttt{Kim})$, $J = \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a $S = \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $\mathcal{M} \not\models (\neg(J \lor \neg K) \to \neg S)$
  - $\mathcal{M} \models \neg(J \lor \neg K)$
    - $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$
      - $\mathcal{M} \not\models J$
        - $i(\mathtt{Jim}) \notin i(\mathtt{príde})$
          - 2
          - $\{1, 3\}$
      - $\mathcal{M} \not\models \neg K$
        - $\mathcal{M} \models K$
          - $i(\mathtt{Kim}) \in i(\mathtt{príde})$
            - 1
            - $\{1, 3\}$
  - $\mathcal{M} \not\models \neg S$
    - $\mathcal{M} \models S$
      - $i(\mathtt{Sarah}) \in i(\mathtt{príde})$
        - 3
        - $\{1, 3\}$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\texttt{Kim}) = 1$, $i(\texttt{Jim}) = 2$, $i(\texttt{Sarah}) = 3$, $i(\texttt{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \texttt{príde}(\texttt{Kim})$, $J = \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a $S = \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	J	K	$\neg K$	$(J \lor \neg K)$	$\neg(J \lor \neg K)$	S	$\neg S$	$(\neg(J \lor \neg K) \to \neg S)$
$\mathcal{M}$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

V záhlaví tabuľky je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

Toto poznáte zo strednej školy, ale vieme jasnejšie pomenovať, čo sa deje.

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$\mathcal{M} \models \big((\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})\big)$?

Označme $K = \texttt{príde}(\texttt{Kim})$, $J = \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a $S = \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$ alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})\big)$?

Označme $K = \texttt{príde}(\texttt{Kim})$, $J = \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a $S = \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$ alebo $\mathcal{M} \models \neg S$
vtt $\mathcal{M} \not\models J$ a $\mathcal{M} \not\models \neg K$, alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$\mathcal{M} \models \big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})\big)$?

Označme $K = \texttt{príde}(\texttt{Kim})$, $J = \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a $S = \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$

vtt $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$ alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ a $\mathcal{M} \not\models \neg K$, alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ a $\mathcal{M} \models K$, alebo $\mathcal{M} \not\models S$

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$$\mathcal{M} \models \big((\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)?$$

Označme $K = \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $J = \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ a $S = \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$

vtt $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$ alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ a $\mathcal{M} \not\models \neg K$, alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ a $\mathcal{M} \models K$, alebo $\mathcal{M} \not\models S$

vtt $i(\mathtt{Jim}) \in i(\mathtt{príde})$ a $i(\mathtt{Kim}) \notin i(\mathtt{príde})$,
alebo $i(\mathtt{Sarah}) \notin i(\mathtt{príde})$.

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Teórie a ich modely

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je **teória** súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 2.25

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.

Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

Definícia 2.26

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať ***teóriou*** v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 2.27

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{ & ((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Jim})) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\} \end{aligned}$$

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta,
v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 2.28 (Model teórie o party)

$$\mathcal{M} = (\{\mathrm{k}, \mathrm{j}, \mathrm{s}, \mathrm{e}, \mathrm{h}\}, i),$$

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathrm{k}, \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathrm{j}, \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathrm{s},$$

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathrm{k}, \mathrm{j}, \mathrm{e}\};$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M} \models ((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \\ \mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \end{array}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Definícia 2.29 (Model)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je ***pravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** T.

Teória T je ***nepravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{ & ((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})), \\ & (\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})), \\ & (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})), \\ & (\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))\} \end{aligned}$$

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model,
má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}\}, i_1) & \mathcal{M}_1' = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, 0, 1\}, i_1') & \mathcal{M}_1'' = (\{2, 4, 6\}, i_1'') & \cdots \\ i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_1'(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_1''(\mathtt{Kim}) = 2 & \\ i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_1'(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_1''(\mathtt{Jim}) = 4 & \\ i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_1'(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_1''(\mathtt{Sarah}) = 6 & \\ i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}\} & i_1'(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, 1\} & i_1''(\mathtt{príde}) = \{2, 4\} & \end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti všetkých predikátových atómov
$\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

V T_{party} na ničom inom nezáleží.

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1) & \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) & \mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3) \\
i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_2(\mathtt{Kim}) = 1 & i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_2(\mathtt{Jim}) = 2 & i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_2(\mathtt{Sarah}) = 3 & i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} \\
i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\} & i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\} & i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}
\end{array}
$$

môžeme skonštruovať to isté ohodnotenie predikátových atómov:

$$
\begin{array}{ll}
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f & \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}).
\end{array}
$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Výrokovologické formuly, teórie a ohodnotenia

Definícia 2.30

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré **neobsahujú symbol rovnosti**. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 2.31

Nech (f, t) je usporiadaná dvojica ***pravdivostných hodnôt***, $f \neq t$, kde f predstavuje ***nepravdu*** a t predstavuje ***pravdu***.
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene ***ohodnotením***, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivostné hodnoty môžu byť ľubovoľné, pokiaľ sú rôzne. Napríklad v unixovom shelli sa 0 chápe ako pravda a akákoľvek nenulové hodnoty ako nepravda. Aj v historických logických textoch 0 označovala pravdu.

Na tomto predmete sa však budeme držať súčasnej konvencie:

Dohoda 2.32

Ak neuvedieme inak, za dvojicu pravdivostných hodnôt (f, t) považujeme $(0, 1)$.

Odbočka: O rigoróznom prístupe

Snažíme sa vybudovať logiku „poriadnejšie“ ako na strednej škole.

Preto:

- Pravdivostnú hodnotu priraďujeme atómom pomocou ohodnotení (alebo predtým štruktúr).
  - ✗ $\texttt{príde}(\texttt{Kim}) = 1$ — Postupnosť symbolov sa nemôže rovnať číslu.
  - ✓ $v\big(\texttt{príde}(\texttt{Kim})\big) = 1$, kde v je výrokovologické ohodnotenie, ktoré súčasne priraďuje hodnoty aj všetkým ostatným atómom jazyka. Nie je problém, keď $v_1\big(\texttt{príde}(\texttt{Kim})\big) = 1$ a $v_2\big(\texttt{príde}(\texttt{Kim})\big) = 0$ pre nejaké ohodnotenie $v_2 \neq v_1$.
- Ohodnotenie v je definované iba pre atómy.
  - ✗ Hodnota $v\big((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\big)$ nie je definovaná.

Ako zistíme, či je zložená formula pravdivá pri nejakom výrokovologickom ohodnotení? Pomocou relácie $\models_{\mathrm{p}}$ podobnej $\models$.

Pravdivosť formúl pri výrokovologickom ohodnotení

Definícia 2.33

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu ***výrokovologická formula A je pravdivá pri ohodnotení v*** ($v \models_p A$) definujeme **induktívne** pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \land B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \lor B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \to B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde $v \not\models_p A$ skracuje A *nie je pravdivá vo* v.

Dolný index p v označení relácie $\models_p$/$\not\models_p$ označuje *propozičnú* (výrokovologickú) pravdivosť.

V čom je rozdiel oproti pravdivosti formuly v štruktúre ($\models$)?

- Pravdivosť predikátových atómov určuje ohodnotenie, nie štruktúra.
- Pre rovnostné atómy je $\models_p$ nedefinovaná.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 2.34

Vyhodnoťme formulu

$$X = \big((\mathtt{p}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim})\big) \to \mathtt{p}(\mathtt{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\mathtt{p}(\mathtt{Kim}) \mapsto t,\ \mathtt{p}(\mathtt{Jim}) \mapsto t,\ \mathtt{p}(\mathtt{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	$\mathtt{p}(\mathtt{Kim})$	$\mathtt{p}(\mathtt{Jim})$	$\mathtt{p}(\mathtt{Sarah})$	$\neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim})$	$(\mathtt{p}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim}))$	X
v	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou

Definícia 2.35

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky,
nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty,
$v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$
a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné na S*** vtt
pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné*** vtt
sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 2.36

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz.

Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:
($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.
($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. □

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.37 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky,
kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.37 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky,
je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathtt{Kim} \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathtt{Jim} \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{Sarah}$$

predikát $\mathtt{príde}$ ako množinu tých c, pre ktoré $v(\mathtt{príde}(c)) = t$:

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}\}$$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Ako zostrojíme štruktúru zhodnú s ohodnotením pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 2.38

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky,
nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty
a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$
$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Štruktúram zo syntaktického materiálu sa hovorí herbrandovské.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.39

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.
Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.39

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.
*Potom **pre každú výrokovologickú formulu** $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.*

Dôkaz (indukciou na konštrukciu formuly).

1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.
1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_p X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$ podľa def. zhodnosti v a $\mathcal{M}$.
2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X.
Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_p \neg X$ vtt (podľa def. $\models_p$) $v \not\models_p X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.
2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické. Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_p (X \to Y)$ vtt $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$. Podobne pre ďalšie spojky. □