

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ INFORMATIKY

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján KLUKA, Júlia PUKANCOVÁ,
Martin HOMOLA, Jozef ŠIŠKA, Iveta BEČKOVÁ,
Ján PASTOREK

Letný semester 2025/2026

Posledná aktualizácia: 16. februára 2026

Obsah

1	Atomické formuly	3
1.1	Sémantika atomických formúl	3
1.2	Formalizácia do jazyka atomických formúl	7

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{dievča}(x)$	x je žena
$\text{chlapec}(x)$	x je chlapec
$\text{sestra}(x, y)$	x je sestra y
$\text{uprednostňuje}(x, y, z)$	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

- | | |
|---|--|
| (A ₁) $\text{dievča}(\text{Anna})$ | (B ₁) $\text{dievča}(\text{mama})$ |
| (A ₂) $\text{chlapec}(\text{Boris})$ | (B ₂) $\text{chlapec}(\text{oco})$ |
| (A ₃) $\text{sestra}(\text{Anna}, \text{Boris})$ | (B ₃) $\text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Boris}, \text{Anna})$ |
| (A ₄) $\text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Anna}, \text{Boris})$ | (B ₄) $\text{uprednostňuje}(\text{oco}, \text{Boris}, \text{Anna})$ |
| (A ₅) $\text{uprednostňuje}(\text{Boris}, \text{Boris}, \text{Anna})$ | |

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirozenom jazyku.

- | | |
|---|---|
| (A ₁) Anna je dievča. | (B ₁) Mama je dievča. |
| (A ₂) Boris je chlapec. | (B ₂) Oco je chlapec. |
| (A ₃) Anna je sestra Borisa. | (B ₃) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou. |
| (A ₄) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom. | (B ₄) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou. |
| (A ₅) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou. | |

□

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku \mathcal{L} závisí od počtu individuových konštánt v jazyku \mathcal{L} (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku \mathcal{L} máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku \mathcal{L} 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti \equiv . Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku \mathcal{L} môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ┌

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\ i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\ i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\ i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\ i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}. \end{aligned}$$

Riešenie.

(A₁) dievča(Anna) je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \models \text{dievča(Anna)}$, pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A₂) $\mathcal{M} \models \text{chlapec(Boris)}$, pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A₃) $\mathcal{M} \models \text{sestra(Anna, Boris)}$, pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A₄) $\mathcal{M} \models \text{uprednostňuje(mama, Anna, Boris)}$, pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A₅) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)}$, pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B₁) $\mathcal{M} \not\models \text{dievča(mama)}$, pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

❸ **Pomôcka.** Vo všeobecnosti platí, že pre ľuboľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku \mathcal{L} vytvoriť n^k atomických formúl.

- (B₂) $\mathcal{M} \models \text{chlapec}(oco)$, pretože $i(oco) \in i(\text{chlapec})$.
- (B₃) $\mathcal{M} \models \text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Boris}, \text{Anna})$,
pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \in i(\text{uprednostňuje})$.
- (B₄) $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostňuje}(oco, \text{Boris}, \text{Anna})$,
pretože $(i(oco), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$. □

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich súčasne bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 a aby zároveň:

- a) doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 5 prvkov;
- b) doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 3 prvky;
- c) doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

- a) Štruktúra \mathcal{M}_1 s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\ i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\ i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\ i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- b) Štruktúra \mathcal{M}_2 s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\ i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\ i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\ i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- c) Nie je možné zstrojiť \mathcal{M}_3 tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 . Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto \mathcal{M}_3 by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a .

Problém nastáva už pri A_1 a B_1 . Keďže v doméne \mathcal{M}_3 je jediný prvok, musia ho po-menúvať všetky individuové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v \mathcal{M}_3 , potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. \square

1.1.5 Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex}, \text{Beáta}, \text{Cyril}, \text{Dana}, \text{Edo}, \text{Gabika}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{rodič}(x, y)$	x je rodičom y
$\text{dieťa}(u, x, y)$	u je dieťaťom matky x a otca y
$\text{starší}(x, y)$	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

- | | |
|---|---|
| (A_1) $\text{žena}(\text{Beáta})$ | (B_1) $\text{rodič}(\text{Edo}, \text{Edo})$ |
| (A_2) $\text{dieťa}(\text{Cyril}, \text{Gabika}, \text{Edo})$ | (B_2) $\text{starší}(\text{Beáta}, \text{Cyril})$ |
| (A_3) $\text{starší}(\text{Dana}, \text{Cyril})$ | (B_3) $\text{Cyril} \doteq \text{oco}$ |
| (A_4) $\text{žena}(\text{Dana})$ | (B_4) $\text{žena}(\text{Alex})$ |
| (A_5) $\text{rodič}(\text{Dana}, \text{Alex})$ | (B_5) $\text{dieťa}(\text{Beáta}, \text{Gabika}, \text{oco})$ |
| (A_6) $\text{rodič}(\text{Dana}, \text{Beáta})$ | (B_6) $\text{starší}(\text{Gabika}, \text{Cyril})$ |
| (A_7) $\text{dieťa}(\text{Alex}, \text{Dana}, \text{Cyril})$ | |

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4,$$

$$i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3,$$

$$i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\},$$

$$i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\},$$

$$i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},$$

$$i(\text{starší}) = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}.$$

💡 Všimnite si, že hoci každá individuová konštantá musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero individuových konštant môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_7 , ale súčasne nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_6 a aby zároveň:

- a) doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 9 prvkov;
- b) doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 5 prvkov;
- c) doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Jozef je profesor.
- (A_2) Jozef a jeho kolegynia profesorka obedujú.
- (A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegynia má na obed rezeň.
- (A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegynia volá, obed chuti.
- (A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.
- (A_6) Aj pani upratovačka je kolegynia Jozefa a Márie.
- (A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.
- (A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej posluchárni P42.
- (A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštěvuje.
- (A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu individuovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor¹. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

💡 Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala individuová konštantu profesor? Zmyslom slova profesor vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef \doteq profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatial) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú individuovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor¹. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegynu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegynou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega². V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú – toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje¹:

($A_{2.1}$) profesor(o_1)

($A_{2.2}$) kolega(Jozef, o_1)

($A_{2.3}$) obeduje(Jozef)

($A_{2.4}$) obeduje(o_1)

💡 Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka¹, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor¹. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký – je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1 . Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegynou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega² a nebudem vytvárať symbol kolegynia².

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategorií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové individuové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétnie porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadrieme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3,1}$) $\text{je}(\text{Jozef}, p_1)$

($A_{3,2}$) $\text{je}(o_1, p_2)$

($A_{3,3}$) $\text{žemľovka}(p_1)$

($A_{3,4}$) $\text{rezeň}(p_2)$

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2 , hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi – ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom obeduje¹.

💡 Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

💡 Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie $\text{je}(\text{Jozef}, \text{žemľovka})$ (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétnie porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme – v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštantu žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie $\text{je}(\text{Jozef}, \text{žemľovka})$ a $\text{žemľovka}(\text{žemľovka})$ zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a individuových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom chuti^2 . Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyná. Jedno z korektných riešení vyžije rovnosť:

($A_{4,1}$) $\text{chutí}(\text{Mária}, p_2)$

($A_{4,2}$) $\text{Mária} \doteq o_1$

💡 Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch individuových konštánt o_1 , Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1 , stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa² a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka¹ je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme individuovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5,1}$) chutí(Jozef, p₁)

($A_{5,2}$) má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6,1}$) upratovačka(o₂)

($A_{6,2}$) kolega(Jozef, o₂)

($A_{6,3}$) kolega(Mária, o₂)

💡 Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka¹. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7,1}$) má_väčší_plat_ako(Mária, o₂)

($A_{7,2}$) má_väčší_plat_ako(o₂, Jozef)

💡 Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako², ale úmyselné sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako². Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o₂), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o₂, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétné objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí³ bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových individuových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny“ patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

($A_{8.1}$) učí(Jozef, DAR, P42)

($A_{8.2}$) predmet(DAR)

($A_{8.3}$) poslucháreň(P42)

($A_{8.4}$) veľký(P42)

💡 Kedže byť veľký a byť poslucháreň sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký¹ a poslucháreň¹.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštěvuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvolať úplne novú (napr. študent o₃), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštěvuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštěvuje(o₂, DAR)

💡 Použitie individuovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neosťáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny individuových konštant a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{DAR}, \text{Jozef}, \text{Mária}, o_1, o_2, p_1, p_2, \text{P42}\},$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{chuti}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má_rád_žemľovku}^1, \text{má_väčší_plat_ako}^2, \text{navštěvuje}^2, \text{obeduje}^1, \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet <i>Dejiny antického Ríma</i>
Jozef, Mária, o ₁ , o ₂	konkrétné osoby
p ₁ , p ₂	konkrétné porcie jedla
P42	poslucháreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštievuje(x, y)	osoba x navštievuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
poslucháren(x)	x je poslucháren
predmet(x)	x je predmet (v zmysle <i>kurz</i>)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle <i>rozmerné</i>)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ↗

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- (A₁) Peter je muž.
- (A₂) Peter je študent.
- (A₃) Lucia je žena a študentka.
- (A₄) Lucia je staršia ako Peter.
- (A₅) Matematiku učí Eugen.
- (A₆) Peter a Lucia sú od neho mladší.
- (A₇) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.
- (A₈) Eugen má rád Luciu.
- (A₉) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

- (A₁₀) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.
- (A₁₁) Eugen sa má rád.
- (A₁₂) Je Učiteľom roka 2020.
- (A₁₃) Matematika je povinný predmet.
- (A₁₄) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.
- (A₁₅) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.
- (A₁₆) Peter má rád Matematiku.
- (A₁₇) Lucia má rada Petra.
- (A₁₈) Telocvik je voliteľný predmet.

 Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte via cerím atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.
Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.
 - (A₁) Janko je chlapec.
 - (A₂) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.
 - (A₃) Marienka je dievča – hoci ked' (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienkou. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamäta, ako to vzniklo.)
 - (A₄) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.
 - (A₅) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.
 - (A₆) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A₇) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A₈) Janko sa bojí čarodejnice.

(B₁) Marienka je chlapec.

(B₂) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B₃) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B₄) Čarodejnica Janka zjedla.

(C₁) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A , boli v \mathcal{M} pravdivé, ale súčasne boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B , v \mathcal{M} nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a forma pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v spoločnom jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A , boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B , všetky nepravdivé.

(A₁) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A₂) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A₃) Ņufko je Jankine zvieratko.

(A₄) Je to myš.

(A₅) Ņufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A₆) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A₇) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A₈) Smraďoch však v skutočnosti je Ņufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A₉) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

- (B₁) Janka sa Smradlocha bojí.
- (B₂) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.
- (B₃) Āufko je menší ako Chrumko.
- (B₄) Janka má rada Jurka.
- (B₅) Āufko a Chrumko sú deti.
- (B₆) Āufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

Literatúra