

Tablá pre kvantifikátory.

Viackvantifikátorové tvrdenia

8. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Klúka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 8. prednášky

Tablá s kvantifikátormi

Logické vlastnosti a vzťahy
v logike prvého rádu

Dokazovanie s kvantifikátormi

Substitúcia a substituovateľnosť

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Rovnaký kvantifikátor

Alternácia kvantifikátorov

Postupná formalizácia a parafrázovanie

Závislosť od kontextu

Dodatky k formalizácii s jedným kvantifikátorom

Tablá s kvantifikátormi

Tablá s kvantifikátormi

Logické vlastnosti a vztáhy
v logice prvního řádu

Logické vlastnosti a vzťahy v logike prvého rádu

Minulý týždeň sme zadefinovali,
kedy je **uzavretá** formula a teória (množina uzavretých formúl)
pravdivá v danej štruktúre ($\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \models T$).

Použili sme pomocný induktívne definovaný vzťah
štruktúra **spĺňa** formulu pri ohodnotení ($\mathcal{M} \models X[e]$).
Je definovaný pre **všetky** formuly (otvorené aj uzavreté).

Pomocou štruktúr a pravdivosti môžeme pre relačnú logiku prvého
rádu skonkretizovať **logické vlastnosti a vzťahy**, ktoré už poznáme
z výrokovologickej časti logiky prvého rádu:

- splniteľnosť a nespľniteľnosť,
- „vždy pravdivé“ formuly
(vo výrokovom prípade sa volali tautológie),
- vyplývanie/logický dôsledok.

Splniteľnosť a nespľniteľnosť

Ako sme sa dohodli minule, predpokladáme, že sme si pevne zvolili ľubovoľný jazyk relačnej logiky prvého rádu \mathcal{L} . Všetky definície platia pre symboly, termy, atómy, formuly, teórie, atď. v tomto jazyku a štruktúry a ohodnotenia individuových premenných pre tento jazyk. Pretože \mathcal{L} je ľubovoľný, dajú sa definície aplikovať na všetky jazyky relačnej logiky prvého rádu.

Definícia 8.1

Nech X je uzavretá formula a T je teória.

Formula X je **prvorádovo splniteľná** vtt X je pravdivá v **nejakej** štruktúre (ekvivalentne: **existuje** štruktúra \mathcal{M} taká, že $\mathcal{M} \models X$).

Teória T je **prvorádovo splniteľná** vtt T má model (ekvivalentne: T je pravdivá v **nejakej** štruktúre; **existuje** štruktúra \mathcal{M} taká, že $\mathcal{M} \models T$).

Formula resp. teória je **prvorádovo nespľniteľná** vtt nie je prvorádovo splniteľná.

Príklad 8.2

Teória $\{\forall x(\text{človek}(x) \vee \text{myš}(x)), \forall x(\text{človek}(x) \rightarrow \neg \text{myš}(x))\}$
je prvorádovo **splniteľná**.

Je to tak preto, že je **pravdivá v štruktúre** (teda jej modelom je)
 $\mathcal{M} = (D, i)$, kde $D = \{1, 2\}$, $i(\text{človek}) = \{1\}$ a $i(\text{myš}) = \{2\}$.

Samozrejme je pravdivá v mnohých iných štruktúrach.

Platné formuly

Formulám, ktoré sú výrokovologicky pravdivé (pravdivé v každom výrokovologickom ohodnotení atómov), sme hovorili tautológie. Pre formuly, ktoré sú prvorádovo pravdivé (pravdivé v každej štruktúre), sa používa iný pojem:

Definícia 8.3

Nech X je uzavretá formula.

Formula X je **platná** (skrátene $\models X$) vtt X je pravdivá v **každej** štruktúre (teda pre **každú** štruktúru \mathcal{M} máme $\mathcal{M} \models X$).

Samozrejme,
formula **nie je platná** vtt je nepravdivá **v aspoň jednej** štruktúre.
Platnosť sa ale **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr,
lebo tých je nekonečne veľa.

Je formula
 $(\forall x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{doma}(\text{Jurko}))$
platná?

Príklad 8.4

Formula $X = (\forall x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{doma}(\text{Jurko}))$ je platná.

Dôkaz. Predpokladajme, že by X nebola platná, teda by bola nepravdivá v nejakej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$. Potom by v \mathcal{M} pri nejakom ohodnotení splnený antecedent $\forall x \text{ doma}(x)$, ale nesplnený konzekvent $\text{doma}(\text{Jurko})$, teda $i(\text{Jurko}) \notin i(\text{doma})$.

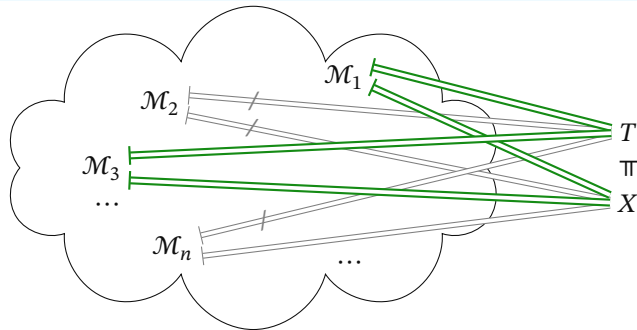
Ak je ale splnené $\forall x \text{ doma}(x)$, tak pre každé $m \in D$ máme $m \in i(\text{doma})$. Preto aj $i(\text{Jurko}) \in i(\text{doma})$, čo je spor.

Preto X je platná.

Prvorádové vyplývanie, prvorádový logický dôsledok

Definícia 8.5

Z teórie T **prvorádovo logicky vyplýva** uzavretá formula X (tiež X je **prvorádovým logickým dôsledkom** T , skrátene $T \models X$) vtt X je pravdivá v každom modeli T (ekvivalentne podrobnejšie: pre každú štruktúru \mathcal{M} platí, že ak je v \mathcal{M} pravdivá T , tak je v \mathcal{M} pravdivá X).



Nezabúdajme, že význam „ \models “ závisí od *typu* objektu na *ľavej* strane (a od prítomnosti ohodnotenia indiv. premenných):

pravdivosť:

$\text{štruktúra} \models \text{formula/teória}$

spĺnenie:

$\text{štruktúra} \models$

$\text{formula} [\text{ohodnotenie}]$

vyplývanie:

$\text{teória} \models \text{formula}$

Prvorádové vyplývanie sa **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr, rovnako ako platnosť.

Príklad 8.6

Vyplyva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}) \}$$

formula $X = \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$?

Prvorádové vyplývanie sa **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr, rovnako ako platnosť.

Príklad 8.6

Vyplyva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}) \}$$

formula $X = \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$?

Áno, vyplýva. Presvedčíme sa o tom podobnou úvahou ako v príklade platnej formuly.

Prvorádové nevyplývanie a príklad

Samozrejme, formula X **nevyplýva** z teórie T vtt
 X nie je pravdivá v **aspoň jednom** modeli T .
Tento model je **kontrapríkladom** vyplývania.

Príklad 8.7

Vyplýva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \text{tlačiareň}(\text{mojaHP}) \}$$

formula $X = \text{opraví}(\text{TServis}, \text{mojaHP})?$

Prvorádové nevyplývanie a príklad

Samozrejme, formula X **nevyplýva** z teórie T vtt X nie je pravdivá v **aspoň jednom** modeli T .
Tento model je **kontrapríkladom** vyplývania.

Príklad 8.7

Vyplýva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \text{tlačiareň}(\text{mojaHP}) \}$$

formula $X = \text{opraví}(\text{TServis}, \text{mojaHP})$?

Nie, nevyplýva. Napríklad štruktúra $\mathcal{M} = (D, i)$, kde $D = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} i(\text{TServis}) &= 1, & i(\text{tlačiareň}) &= \{2, 3\}, \\ i(\text{mojaHP}) &= 2, & i(\text{opraví}) &= \{(1, 3)\} \end{aligned}$$

je kontrapríkladom toho, že $T \models X$, pretože $\mathcal{M} \models T$, ale $\mathcal{M} \not\models X$.

Výrokovologické, prvorádové a logické vyplývanie

Podobne ako výrokovologické vyplývanie, aj prvorádové vyplývanie je **špeciálny prípad** logického vyplývania v prirodzenom jazyku.

Logické vyplývanie v prirodzenom jazyku je **bohatšie** ako prvorádové vyplývanie. Napr. pre vzťah „väčší“ v prirodzenom jazyku zvyčajne potichu predpokladáme tranzitívnosť.

Logika prvého rádu ale „nevidí“ význam predikátov.
Pozerá sa na ne len pomocou formúl, v ktorých vystupujú.

Dohoda 8.8

Nateraz budeme **stručne ale nepresne** hovoriť
„logický dôsledok“ a „vyplývanie“ namiesto
„prvorádový logický dôsledok“ a „prvorádové logické vyplývanie“.

Viac o vzťahu výrokovologického, prvorádového a logického vyplývania neskôr.

Platnosť a vyplývanie

Medzi platnými formulami a prvorádovým vyplývaním je podobný vzťah ako medzi tautológiami a výrokovologickým vyplývaním.

Tvrdenie 8.9

Nech X je uzavretá formula.

Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:

- X je platná ($\models X$);
- X vyplýva z prázdnej teórie ($\emptyset \models X$);
- X vyplýva z každej teórie (pre každú teóriu T máme $T \models X$).

Tvrdenie 8.10

Nech $T = \{A_1, \dots, A_n\}$ je konečná teória a nech X je uzavretá formula.

Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:

- formula $\left(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow X\right)$ je platná – t.j. $\models \left(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow X\right)$;
- X vyplýva z teórie T – t.j. $T \models X$.

Tvrdenie 8.11

Nech X a Y sú uzavreté formuly.

Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:

- *X je prvorádovo ekvivalentná s Y (skr. $X \Leftrightarrow Y$);*
- *formula $(X \leftrightarrow Y)$ je platná (skr. $\models (X \leftrightarrow Y)$);*
- *z $\{X\}$ prvorádovo vyplýva Y a z $\{Y\}$ prvorádovo vyplýva X (skr. $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$).*

Tablá s kvantifikátormi

Dokazovanie s kvantifikátormi

Dôkazy a tablá pre logiku prvého rádu

Dôkazy s kvantifikovanými formulami sformalizujeme pomocou rozšírenia tabiel na logiku prvého rádu.

Tablá budú obsahovať označené formuly prvého rádu.

V tablách dovoľíme aj **otvorené** formuly.

Tablové pravidlá budú zachovávať splniteľnosť tabla.

Označené formule logiky prvního řádu

Podobně jako v výrokové logice můžeme zavést označování formulí logiky prvního řádu znamienkami **T** a **F**.

Definícia 8.12

Nech \mathcal{M} je štruktúra, e je ohodnotenie individuových premenných a X je formula. Potom

- \mathcal{M} *spĺňa označenú formulu **T** X* pri ohodnotení e vtt \mathcal{M} spĺňa formulu X pri ohodnotení e ,
skrátene: $\mathcal{M} \models \mathbf{T} X[e]$ vtt $\mathcal{M} \models X[e]$;
- \mathcal{M} *spĺňa označenú formulu **F** X* pri ohodnotení e vtt \mathcal{M} *nespĺňa* formulu X pri ohodnotení e ,
skrátene: $\mathcal{M} \models \mathbf{F} X[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models X[e]$.

\mathcal{M} *spĺňa množinu označených formulí S^+* pri ohodnotení e vtt \mathcal{M} spĺňa *každú* označenú formulu A^+ z S^+ pri ohodnotení e ,
skrátene: $\mathcal{M} \models S^+[e]$ vtt pre každú $A^+ \in S^+$ máme $\mathcal{M} \models A^+[e]$.

Definícia 8.13 (Splniteľnosť označených formúl a ich množín)

Ozn. formula X^+ je **splniteľná** vtt
pre nejakú štruktúru \mathcal{M} a nejaké ohodnotenie individuových
premenných e máme $\mathcal{M} \models X^+[e]$.

Množina ozn. formúl S^+ je **splniteľná** vtt
pre nejakú štruktúru \mathcal{M} a nejaké ohodnotenie individuových
premenných e máme $\mathcal{M} \models S^+[e]$.

Príklad 8.14 (Dôkaz s pozitívnou všeobecnou kvantifikáciou)

Dokážme neformálne, ale *veľmi podrobne*, že z teórie $T = \{$

(1) $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2) $\neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$

$\}$ prvorádovo vyplýva (3) $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$.

Sporom:

Príklad 8.14 (Dôkaz s pozitívnou všeobecnou kvantifikáciou)

Dokážme neformálne, ale *veľmi podrobne*, že z teórie $T = \{$

(1) $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2) $\neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$

$\}$ prvorádovo vyplýva (3) $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$.

Sporom: Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení e .

Potom (4) $\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ je splnená v \mathcal{M} pri e .

Navyše (5) $\text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$ je nesplnená.

Pretože podľa prvého predpokladu (1) je formula

$(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$ splnená pri $e(x/d)$ pre

každé $d \in D$, musí byť splnená aj pre objekt $i(\text{môjMobil})$. Teda

(6) $(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$ je splnená pri e .

Pretože už vieme, že ľavá strana je pravdivá (4), musí byť aj pravá strana

(7) $\text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$ pravdivá. To je ale v spore so skorším

zistením (5), že táto formula je nepravdivá. □

Tablo pre dôkaz

Na väčšinu krokov v predchádzajúcom dôkaze stačia doterajšie tablové pravidlá.

- | | |
|---|------------|
| 1. $\mathbf{T} \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$ | S^+ |
| 2. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$ | S^+ |
| 3. $\mathbf{F} \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ | S^+ |
| 4. $\mathbf{T} \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ | $\alpha 3$ |
| 5. $\mathbf{F} \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$ | $\alpha 2$ |
| 6. $\mathbf{T}(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$ | ?1 |
| 7. $\mathbf{T} \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$ | MP4, 6 |
| * 5, 7 | |

Špeciálny prípad pravdivej všeobecne kvantifikovanej formuly

Doterajšie pravidlá ale nestačia na kľúčový krok, v ktorom sme z **pravdivej všeobecne kvantifikovanej** formuly (1)

$$\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$$

odvodili jej špeciálny prípad (**inštanciu**) (6) pre konštantu môjMobil:

$$(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$$

Táto formula, ale aj každá iná, ktorá vznikne analogicky dosadením hocijakého termu za premennú x , je logickým dôsledkom formuly (1).

Pravidlo pre pravdivé všeobecne kvantifikované formuly

Na tento krok potrebujeme nové pravidlo:

$$\frac{\mathbf{T} \forall x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto t\}} \gamma$$

pre každú formulu A , každú premennú x a každý **term** t ,

ak spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku — viac o nej neskôr.

$\{x \mapsto t\}$ označuje **substitúciu** — zobrazenie premenných na termy

(v tomto prípade je toto zobrazenie iba jednoprvkové).

$A\{x \mapsto t\}$ označuje **aplikáciu** substitúcie $\{x \mapsto t\}$ na formulu A —

je to formula, ktorá vznikne z formuly A nahradením **všetkých voľných výskytov** premennej x termom t .

Špeciálny prípad nepravdivej existenčne kvantifikovanej formuly

Veľmi podobná situácia nastáva pre **nepravdivú existenčne kvantifikovanú formulu**, napr.

$$\mathbf{F} \exists x (\text{opraví}(\text{TServis}, x) \wedge \text{mobil}(x)).$$

Inštancia

$$\mathbf{F}(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{Chrumko}) \wedge \text{mobil}(\text{Chrumko}))$$

je logickým dôsledkom pôvodnej označenej formuly.

Rovnako je jej logickým dôsledkom každá iná inštancia a môžeme sformulovať pravidlo:

$$\frac{\mathbf{F} \exists x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto t\}} \gamma$$

pre každú formulu A , každú premennú x a každý **term** t ,

ak (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

Dôkaz s $\mathbf{T} \forall x A$ a $\mathbf{F} \exists x A$

Pomocou nových pravidiel môžeme dokázať napr.

$\{\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

$\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x)),$

$\text{mobil}(\text{môjMobil})\} \models \exists x(\text{mobil}(x) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x)):$

1. $\mathbf{T} \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$	S^+
2. $\mathbf{T} \forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))$	S^+
3. $\mathbf{T} \text{mobil}(\text{môjMobil})$	S^+
4. $\mathbf{F} \exists x(\text{mobil}(x) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x))$	S^+
5. $\mathbf{T}(\text{mobil}(\text{môjMobil}) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$	$\gamma 2\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$
6. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$	MP5, 3
7. $\mathbf{F} \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$	$\alpha 6$
8. $\mathbf{T}(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$	$\gamma 1\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$
9. $\mathbf{F} \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$	MT8, 7
10. $\mathbf{F}(\text{mobil}(\text{môjMobil}) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}))$	$\gamma 4\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$
<hr/>	
11. $\mathbf{F} \text{mobil}(\text{môjMobil}) \quad \beta 10$	12. $\mathbf{F} \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \quad \beta 10$
* 3, 11	13. $\mathbf{T} \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \quad \alpha 12$
	* 9, 13

Príklad 8.15

Dokážme neformálne, že z teórie $T = \{$

(1) $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2) $\exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

$\}$ prvorádovo vyplýva (3) $\exists x \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x).$

Sporom: Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení e .

Dôkaz s pozitívnou existenčnou kvantifikáciou

Príklad 8.15

Dokážme neformálne, že z teórie $T = \{$

(1) $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2) $\exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

$\}$ prvorádovo vyplýva (3) $\exists x \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x).$

Sporom: Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení e .

Podľa (2) existuje v doméne objekt d taký, že $\neg \text{tlačiareň}(x)$ je splnená pri ohodnotení $e(x/d)$. **Zoberme si jeden z takýchto objektov a označme ho napríklad premennou z .** Pri $e(z/d)$ potom je (4) $\neg \text{tlačiareň}(z)$ splnená, a teda (5) $\text{tlačiareň}(z)$ je nesplnená. Podľa (1) je formula (6) $(\text{opraví}(\text{TServis}, z) \rightarrow \text{tlačiareň}(z))$ splnená. Pretože už vieme, že pravá strana je nesplnená (5), je aj ľavá strana (7) $\text{opraví}(\text{TServis}, z)$ nesplnená. Podľa predpokladu dôkazu sporom (3) je však aj jeho inštancia (8) $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, z)$ nesplnená, teda (9) je splnená $\text{opraví}(\text{TServis}, z)$, čo je v spore so skorším zistením (7). □

Pozitívna existenčná kvantifikácia a jej vlastná premenná

Kľúčovým krokom v predchádzajúcom dôkaze je označenie objektu (svedka), ktorý existuje podľa **pozitívnej existenčne** kvantifikovanej formuly

$$\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x),$$

dočasným menom — voľnou premennou z a odvodenie:

$$\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(z).$$

⚠ Táto premenná sa **predtým na vetve nesmie vyskytovať voľná**. ⚠

Musí to byť **nová, vlastná** premenná pre formulu $\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$.

Vo všeobecnosti:

$$\frac{\mathbf{T} \exists x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto y\}} \delta$$

pre každú formulu A , každú premennú x a každú **novú premennú** y ,
ak (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

Prečo vlastná premenná?

Prečo potrebuje každá pozitívna existenčná formula vlastnú premennú?

Pravidlá **musia zachovávať splniteľnosť** vetiev v table.

Konštanty a iné voľné premenné v table môžu označovať objekty s konfliktnými vlastnosťami.

Ich dosadením za existenčne kvantifikovanú premennú by sme dospieť k **falošnému** sporu.

Prečo vlastná premenná? — príklad

Vetva

n+1. \mathbf{T} tlačiareň(x)

n+2. $\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$, $i(\text{tlačiareň}) = \{1\}$ pri ohodnotení $e = \{x \mapsto 1, \dots\}$).

Vetva

n+1. \mathbf{T} tlačiareň(x)

n+2. $\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

n+3. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(z)$ ✓ $\delta 2\{x \mapsto z\}$

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$, $i(\text{tlačiareň}) = \{1\}$ pri ohodnotení $e = \{x \mapsto 1, z \mapsto 2, \dots\}$).

Chybná vetva

n+1. \mathbf{T} tlačiareň(x)

n+2. $\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

n+3. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(x)$ ✗ „ $\delta 2\{x \mapsto x\}$ “

by bola **nesplniteľná**.

Negatívna všeobecná kvantifikácia a jej vlastná premenná

Negatívna všeobecne kvantifikovaná formula

$$\mathbf{F} \forall x \text{ tlačiareň}(x),$$

znamená, že pre niektorý objekt x (**kontrapríklad**) je jej priama podformula $\text{tlačiareň}(x)$ nepravdivá.

Tento objekt teda môžeme opäť označiť novou **vlastnou premennou** formuly $\mathbf{F} \forall x \text{ tlačiareň}(x)$, napríklad u , a môžeme odvodiť:

$$\mathbf{F} \text{ tlačiareň}(u).$$

⚠ Táto premenná sa **predtým na vetve nesmie vyskytovať voľná**. ⚠

Vo všeobecnosti:

$$\frac{\mathbf{F} \forall x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto y\}} \delta$$

pre každú formulu A , každú premennú x a každú **novú premennú** y ,
ak (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

Dôkaz s pravidlami pre kvantifikátory

$\{\exists x \forall y(\text{opraví}(x, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y)),$

$\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))\}$

$\models \forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, x)):$

- | | |
|---|---------------------------|
| 1. $\mathbf{T} \exists x \forall y(\text{opraví}(x, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y))$ | S^+ |
| 2. $\mathbf{T} \forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))$ | S^+ |
| 3. $\mathbf{F} \forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, x))$ | S^+ |
| 4. $\mathbf{F}(\text{mobil}(u) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, u))$ | $\delta 3\{x \mapsto u\}$ |
| 5. $\mathbf{T} \text{mobil}(u)$ | $\alpha 4$ |
| 6. $\mathbf{F} \exists y \neg \text{opraví}(y, u)$ | $\alpha 4$ |
| 7. $\mathbf{T} \forall y(\text{opraví}(z, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y))$ | $\delta 1\{x \mapsto z\}$ |
| 8. $\mathbf{T}(\text{mobil}(u) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(u))$ | $\gamma 2\{x \mapsto u\}$ |
| 9. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(u)$ | MP8, 5 |
| 10. $\mathbf{F} \text{tlačiareň}(u)$ | $\alpha 9$ |
| 11. $\mathbf{T}(\text{opraví}(z, u) \rightarrow \text{tlačiareň}(u))$ | $\gamma 7\{y \mapsto u\}$ |
| 12. $\mathbf{F} \text{opraví}(z, u)$ | MT11, 10 |
| 13. $\mathbf{F} \neg \text{opraví}(z, u)$ | $\gamma 6\{y \mapsto z\}$ |
| 14. $\mathbf{T} \text{opraví}(z, u)$ | $\alpha 13$ |

* 12, 14

Tablové pravidlá pre logiku prvého rádu

Definícia 8.16

Pravidlami tablového kalkulu pre logiku prvého rádu sú pravidlá typu α a β pre výrokovú logiku a pravidlá:

$$\begin{array}{l} \gamma \quad \frac{\mathbf{T} \forall x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto t\}} \quad \frac{\mathbf{F} \exists x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto t\}} \quad \text{jednotne: } \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(t)} \\ \delta \quad \frac{\mathbf{F} \forall x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto y\}} \quad \frac{\mathbf{T} \exists x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto y\}} \quad \text{jednotne: } \frac{\delta(x)}{\delta_1(y)} \end{array}$$

kde A je formula, x je premenná, t je term **substituovateľný** za x v A a y je premenná **substituovateľná** za x v A .

Pri operácii rozšírenia vetvy tabla π o dôsledok niektorého z pravidiel typu δ navyše musí platiť, že **premenná y nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve π .**

Tvrdenie 8.17 (Korektnosť pravidiel γ a δ)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku \mathcal{L} , nech x a y sú premenné, nech t je term.

- Ak $\gamma(x) \in S^+$ a t je substituovateľný za x v $\gamma_1(x)$,
tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\gamma_1(t)\}$ je splniteľná.
- Ak $\delta(x) \in S^+$, y je substituovateľná za x v $\delta_1(x)$
a y sa nemá voľný výskyt v S^+ ,
tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\delta_1(y)\}$ je splniteľná.

Princíp tablových dôkazov ostáva nezmenený:

- Ak chceme dokázať, že formula X je platná, hľadáme uzavreté tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F} X\}$.
Predpokladáme teda, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení je X nesplnená a ukážeme spor.
- Podobne pre prvorádové vyplývanie $T \models X$ predpokladáme, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení sú splnené všetky formuly z T ($\mathbf{T} A$ pre $A \in T$), ale X je nesplnená ($\mathbf{F} X$) a ukážeme spor, teda hľadáme uzavreté tablo pre $S^+ = \{\mathbf{T} A \mid A \in T\} \cup \{\mathbf{F} X\}$.

Častá chyba pri pravidlách γ a δ : aplikácia na podformuly

Vetva:

1. $\mathbf{F} \text{mobil}(u)$
2. $\mathbf{T} \text{tlačiareň}(u)$
3. $\mathbf{T} (\forall x \text{tlačiareň}(x) \rightarrow \forall y \text{mobil}(y))$

je **splniteľná**

(je splnená napr. štruktúrou $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$, kde $i(\text{mobil}) = \{1\}$, $i(\text{tlačiareň}) = \{2\}$ pri ohodnotení $e = \{u \mapsto 2, \dots\}$).

V table:

1. $\mathbf{F} \text{mobil}(u)$	
2. $\mathbf{T} \text{tlačiareň}(u)$	
3. $\mathbf{T} (\forall x \text{tlačiareň}(x) \rightarrow \forall y \text{mobil}(y))$	
<hr/>	
4. $\mathbf{F} \forall x \text{tlačiareň}(x)$ ✓ $\beta 3$	5. $\mathbf{T} \forall y \text{mobil}(y)$ ✓ $\beta 3$
6. $\mathbf{F} \text{tlačiareň}(v)$ ✓ $\delta 4$	7. $\mathbf{T} \text{mobil}(u)$ ✓ $\gamma 3$
	* 7, 1

je ľavá vetva **splniteľná**

(je splnená napr. tou istou štruktúrou \mathcal{M} ako pôvodná vetva pri ohodnotení $e = \{u \mapsto 2, v \mapsto 1 \dots\}$).

Chybná vetva:

1. $\mathbf{F} \text{mobil}(u)$
2. $\mathbf{T} \text{tlačiareň}(u)$
3. $\mathbf{T} (\forall x \text{tlačiareň}(x) \rightarrow \forall y \text{mobil}(y))$
4. $\mathbf{T} (\text{tlačiareň}(u) \rightarrow \forall y \text{mobil}(y))$ ✗ „ $\gamma 3$ “
5. $\mathbf{T} \forall y \text{mobil}(y)$ MP4, 2
6. $\mathbf{T} \text{mobil}(u)$ $\gamma 5$

je **nesplniteľná**.

Tablové pravidlá sa **nikdy neaplikujú na podformuly** označenej formuly v uzle.

Tablá s kvantifikátormi

Substitúcia a substituovateľnosť

Definícia 8.18 (Substitúcia)

Substitúciou (v jazyku \mathcal{L}) nazývame každé zobrazenie $\sigma : V \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ z nejakej množiny individuových premenných $V \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ do termov jazyka \mathcal{L} .

Príklad 8.19

Keď $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, \dots, z, u_1, \dots\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Klárka}, \text{Jurko}\}$,
napríklad $\sigma_1 = \{x \mapsto \text{Klárka}, y \mapsto u, z \mapsto x\}$ je substitúcia.

Problém so substitúciou

Vetva

n+1. $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2. $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(y, y) \quad \gamma 1\{x \mapsto y\}$

n+3. $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{ pozná}(x, y)$

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$, $i(\text{pozná}) = \{(1, 2), (2, 1)\}$

pri ohodnotení $e = \{y \mapsto 1, \dots\}$).

Ale vetva

n+1. $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2. $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(y, y) \quad \gamma 1\{x \mapsto y\}$

n+3. $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{ pozná}(\mathbf{x}, y)$

n+4. $\mathbf{T} \exists y \text{ pozná}(\mathbf{y}, y) \quad \times \text{ „}\gamma\text{“ } 3\{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}\}$

je **nesplniteľná**.

Oprava: Vetva

n+1. $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2. $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(z, z) \quad \gamma 1\{x \mapsto \mathbf{z}\}$

n+3. $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{ pozná}(x, y)$

n+4. $\mathbf{T} \exists y \text{ pozná}(z, y) \quad \checkmark \gamma 3\{x \mapsto \mathbf{z}\}$

je **splniteľná**.

Definícia 8.20 (Substituovateľnosť, aplikovateľnosť substitúcie)

Nech A postupnosť symbolov (term alebo formula),
nech t, t_1, \dots, t_n sú termy a x, x_1, \dots, x_n sú premenné.

Term t je **substituovateľný** za premennú x v A vtt

nie je pravda, že

pre niektorú premennú y vyskytujúcu sa v t platí,

že v nejakej oblasti platnosti kvantifikátora $\exists y$ alebo $\forall y$ vo
formule A sa premenná x vyskytuje voľná.

Substitúcia $\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ je **aplikovateľná** na A vtt

term t_i je substituovateľný za x_i v A pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Príklad 8.21

Nech $A = \exists \underline{y}$ pozná(\underline{x}, y).

- Substitúcia $\{\underline{x} \mapsto \underline{y}, z \mapsto \text{Jurko}\}$ **nie je aplikovateľná** na A ,
lebo term y **nie je substituovateľný** za premennú x v A .
- Substitúcia $\{\underline{x} \mapsto z, y \mapsto \text{Jurko}, z \mapsto \underline{y}\}$ **je aplikovateľná** na A .

Substitúcia do postupnosti symbolov

Definícia 8.22 (Substitúcia do postupnosti symbolov)

Nech A je postupnosť symbolov,

nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia.

Ak σ je aplikovateľná na A , tak $A\sigma$ je postupnosť symbolov, ktorá vznikne **súčasným** nahradením každého **voľného** výskytu premennej x_i v A termom t_i .

Príklad 8.23

Nech $A = \exists \underline{y}$ pozná(\underline{x} , \underline{y}) a $\sigma = \{\underline{x} \mapsto z, \underline{y} \mapsto u, z \mapsto \underline{y}\}$.

Substitúcia σ je aplikovateľná na A . V A je voľná iba premenná x , dosadíme za ňu term z , ktorý neobsahuje viazanú premennú y .

Všetky výskyty y sú viazané, za ne sa nedosádza.

Premenná z sa v A nevyskytuje, nie je za čo dosadzovať.

$A\sigma = \exists \underline{y}$ pozná(z , \underline{y})

Tvrdenie 8.24

Pre každú substitúciu $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$,
každú premennú $y \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, každý symbol
konštanty $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, každý predikátový symbol $P^k \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$,
každé $i \in \{1, \dots, n\}$, každú spojku $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, všetky formuly A a B
a všetky termy $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$x_i\sigma = t_i \qquad y\sigma = y \qquad a\sigma = a$$

$$(s_1 \doteq s_2)\sigma = (s_1\sigma \doteq s_2\sigma) \quad (P(s_1, \dots, s_k))\sigma = P(s_1\sigma, \dots, s_k\sigma)$$

$$(\neg A)\sigma = \neg(A\sigma) \qquad ((A \diamond B))\sigma = (A\sigma \diamond B\sigma)$$

$$(\forall y A)\sigma = \forall y (A\sigma) \qquad (\exists y A)\sigma = \exists y (A\sigma)$$

$$(\forall x_i A)\sigma = \forall x_i (A\sigma_i) \qquad (\exists x_i A)\sigma = \exists x_i (A\sigma_i),$$

kde $\sigma_i = \sigma \setminus \{x_i \mapsto t_i\}$, za predpokladu, že σ je v danom prípade aplikovateľná.

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Viacnásobné použitie rovnakého kvantifikátora

Použitím jedného kvantifikátora vo formule sme minulý týždeň dokázali vyjadriť pomerne komplikované tvrdenia.

Ale už v príklade tabiel sme videli, že niektoré tvrdenia zodpovedajú viacerým kvantifikátorom vo formule.

Rozoberme si niekoľko typických prípadov.

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Rovnaký kvantifikátor

Viacnásobné použitie rovnakého kvantifikátora

Najjednoduchšie sú opakované použitia rovnakého kvantifikátora na začiatku formuly:

- $\exists x \exists y ((\text{človek}(x) \wedge \text{škrekok}(y)) \wedge \text{krmí}(x, y))$
- $\forall x \forall y ((\text{človek}(x) \wedge \text{škrekok}(y)) \rightarrow \text{krmí}(x, y))$


Význam je ľahké uhádnuť, aj keď je možno zrejmejší v alternatívnej forme, ktorá priamo zodpovedá aristotelovským formám obmedzenej kvantifikácie:

- $\exists x (\text{človek}(x) \wedge \exists y (\text{škrekok}(y) \wedge \text{krmí}(x, y)))$
Nejaký človek (má vlastnosť, že) krmí nejakého škrečka.
- $\forall x (\text{človek}(x) \rightarrow \forall y (\text{škrekok}(y) \rightarrow \text{krmí}(x, y)))$
Každý človek krmí každého škrečka.

Prenexové vs. hlbšie vnorené formy

Dve uvedené formy každého typu tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné, majú rovnaký význam.

Prvé formy sú **prenexové** — kvantifikátory sú na začiatku formuly.

 Nie je vždy dobré snažiť sa o prenexovú formu, v zložitejších prípadoch môže byť zavádzajúca.

Rôznosť objektov označených premennými — všeobecný prípad

Tento typ tvrdení je väčšinou bezproblémový až na jeden prípad:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

nezodpovedá tvrdeniu: *Pre každé zvieratká x a y platí, že x je väčšie od y alebo x je menšie od y .*

Slovenské každé (dve) **zvieratká** x a y znamená, že x a y označujú naozaj viacero zvieratiek. Ale v logike prvého rádu je každá premenná kvantifikovaná samostatne a **rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt**.

Rôznosť objektov označených premennými — všeobecný prípad

Tento typ tvrdení je väčšinou bezproblémový až na jeden prípad:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

nezodpovedá tvrdeniu: *Pre každé zvieratká x a y platí, že x je väčšie od y alebo x je menšie od y .*

Slovenské každé (dve) **zvieratká** x a y znamená, že x a y označujú naozaj viacero zvieratiek. Ale v logike prvého rádu je každá premenná kvantifikovaná samostatne a **rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt**. Rôznosť musíme zapísať explicitne:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

Pre ľubovoľné termy s, t je $s \neq t$ je skratka za $\neg s \doteq t$.

Rôznosť objektov označených premennými — existenčný prípad

Podobne formula

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y))$$

neznamená, že existujú **aspoň dve** zvieratká
(je ekvivalentná s $\exists x \text{zvieratko}(x)$).

Existenciu aspoň dvoch zvieratiek zabezpečí formula:

Rôznosť objektov označených premennými — existenčný prípad

Podobne formula

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y))$$

neznamená, že existujú **aspoň dve** zvieratká
(je ekvivalentná s $\exists x \text{zvieratko}(x)$).

Existenciu aspoň dvoch zvieratiek zabezpečí formula:

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y)$$

Podľa dohody zo 4. prednášky do seba vnorené vľavo uzátvorkované konjunkcie skrátene zapisujeme bez vnútorných zátvoriek.

Teda $(\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y)$

je skrátенý zápis $((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \wedge x \neq y)$.

Podobne skracujeme do seba vnorené disjunktie.

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Alternácia kvantifikátorov

Časté formuly, v ktorých sa vyskytujú oba kvantifikátory, sú ako

$$\forall x(\text{zvieratko}(x) \rightarrow \exists y(\text{človek}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$$

Hovorí, že *každé zvieratko má vlastnosť, že nejaký človek ho kŕmi*,
teda *každé zvieratko niekto kŕmi*.

Ekvivalentne sa to dá vyjadriť aj (v menej vernej) prenexovej forme:



$$\forall x \exists y(\text{zvieratko}(x) \rightarrow (\text{človek}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$$

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má_réd}(x, y)$ je ekvivalentné $\forall y \forall x \text{ má_réd}(x, y)$;
- $\exists x \exists y \text{ má_réd}(x, y)$ je ekvivalentné $\exists y \exists x \text{ má_réd}(x, y)$.

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má_réd}(x, y)$ —

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ je ekvivalentné $\forall y \forall x \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$;
- $\exists x \exists y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ je ekvivalentné $\exists y \exists x \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$.

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má_réd}(x, y)$ je ekvivalentné $\forall y \forall x \text{ má_réd}(x, y)$;
- $\exists x \exists y \text{ má_réd}(x, y)$ je ekvivalentné $\exists y \exists x \text{ má_réd}(x, y)$.

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má_réd}(x, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\exists x \forall y \text{ má_réd}(x, y)$ —

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ je ekvivalentné $\forall y \forall x \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$;
- $\exists x \exists y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ je ekvivalentné $\exists y \exists x \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$.

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\exists x \forall y \text{ má_r } \text{ád}(x, y)$ — Nieкто má rád/rada všetkých.

Poradie kvantifikovaných premenných

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall \underline{x} \exists y \text{ má_réd}(\underline{x}, y)$ – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall \underline{x} \exists y \text{ má_réd}(y, \underline{x})$ –

Poradie kvantifikovaných premenných

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Každú/-ého má niekto rád.

Poradie kvantifikovaných premenných

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Každú/-ého má niekto rád.

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall \underline{x} \exists y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall \underline{x} \exists y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ – Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists \underline{x} \forall y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ – Niekoľko má rada/rád všetkých.
- $\exists \underline{x} \forall y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ –

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists x \forall y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Niekto má rada/rád všetkých.
- $\exists x \forall y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Niekoho majú radi všetci.

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists x \forall y \text{ má_räd}(\underline{x}, y)$ — Niekto má rada/rád všetkých.
- $\exists x \forall y \text{ má_räd}(y, \underline{x})$ — Niekoho majú radi všetci.

Cvičenie: Pre každú z týchto štyroch formúl nájdite štruktúru, v ktorej je pravdivá, ale ostatné sú nepravdivé.

Kombináciou oboch kvantifikátorov s rovnosťou môžeme vyjadriť existenciu **práve jedného** (unikátneho) objektu s danou vlastnosťou:

$$\exists x(\text{škrekok}(x) \wedge \forall y(\text{škrekok}(y) \rightarrow x \doteq y))$$

Neformálne: *Nejaký škrekok je jediným škrekkom.*

Podobne sa dá vyjadriť existencia práve k objektov pre každé prirodzené číslo k .

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Postupná formalizácia a parafrázovanie

Postupná formalizácia

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q* , pričom P je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

Postupná formalizácia

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q* , pričom P je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x* : Má formu: *Nejaké P je Q* :

Postupná formalizácia

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q* , pričom P je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x* : Má formu: *Nejaké P je Q* :

$$\exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x))$$

3. Dosadíme:

Postupná formalizácia

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q* , pričom P je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x* : Má formu: *Nejaké P je Q* :

$$\exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x))$$

3. Dosadíme:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$$

Systematickým prístupom sa dajú správne sformalizovať aj veľmi zložité tvrdenia.

Viacnásobná negácia — nesprávne možnosti

- ⚠ Opatrnosť je potrebná pri formalizácii tvrdení s viacnásobnou negáciou, napríklad: „*Nijaké dieťa nechová žiadnu vretenicu.*“

Viacnásobná negácia — nesprávne možnosti

⚠ Opatrnosť je potrebná pri formalizácii tvrdení s viacnásobnou negáciou, napríklad: „*Nijaké dieťa nechová žiadnu vretenicu.*“

Tu sa ľahko stane, že pri **neopatrnej** postupnej formalizácii skončíme s chybnou formulou:

✗ $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$ —

Nie je pravda, že nejaké dieťa nemá vlastnosť,

že chová nejakú vretenicu, teda

Každé dieťa má vlastnosť, že chová nejakú vretenicu, teda

Každé dieťa chová nejakú vretenicu.

✗ $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \neg \text{chová}(x, y)))$ —

Nie je pravda, že nejaké dieťa nemá vlastnosť,

že nechová nejakú vretenicu, teda

Každé dieťa nechová nejakú vretenicu (ale môže chovať iné).

Viacnásobná negácia — parafráza a správna formalizácia

Na správne sformalizovanie „*Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu*“
je lepšie toto tvrdenie **parafrázovať**:

Na správne sformalizovanie „Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu“ je lepšie toto tvrdenie **parafrázovať**:

- Nie je pravda, že nejaké dieťa je také, že chová nejakú vretenicu.

✓ $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$

- Pre každé dieťa nie je pravda, že chová nejakú vretenicu.

✓ $\forall x(\text{dieťa}(x) \rightarrow \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$

- Pre každé dieťa x je pravda, že pre každú vretenicu y je pravda, že x nechová y .

✓ $\forall x(\text{dieťa}(x) \rightarrow \forall y(\text{vretenicu}(y) \rightarrow \neg \text{chová}(x, y)))$

Viacnásobná negácia — nesprávna parafráza

! Podľa našich skúseností študenti/-ky najčastejšie výrok

„Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu,“

nesprávne parafrázujú ako

✗ „*Neexistuje* dieťa *x* *a neexistuje* vretenica *y*,
pre ktoré je pravda, že *x* chová *y*,“

čo navyše následne sformalizujú v prenexovom tvare ako

$$\text{✗ } \neg \exists x \neg \exists y (\text{dieťa}(x) \wedge \text{vretenica}(y) \wedge \text{chová}(x, y))$$

„Každý objekt v doméne je dieťa, ktoré chová nejakú vretenicu.“

Pri parafrázovaní preto:

✗ nepoužívajte „*neexistuje* ...“,

✓ namiesto toho používajte: „*nie je pravda, že existuje* ...“;

✗ nespájajte kvantifikátory spojkami „*a*“, „*alebo*“,

✓ za kvantifikátorom začnite **vedľajšiu vetu**:

„Existuje *x* *také, že* *x* je dieťa *a* existuje *y* *také, že* ...“

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme „**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme

„**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

$$\text{človek}(x) \wedge \forall y(\text{pozná}(x, y) \rightarrow \forall z(\text{pozná}(y, z) \rightarrow \text{pozná}(x, z)))$$

Opak: človek, čo nepozná niektorého známeho svojho známeho.

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme

„**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

$$\text{človek}(x) \wedge \forall y(\text{pozná}(x, y) \rightarrow \forall z(\text{pozná}(y, z) \rightarrow \text{pozná}(x, z)))$$

Opak: človek, čo nepozná niektorého známeho svojho známeho.

$$\text{človek}(x) \wedge \neg \exists y \exists z(\text{pozná}(x, y) \wedge \text{pozná}(y, z) \wedge \neg \text{pozná}(x, z))$$

Odkaz z konzekventu — o sedliakoch a osloch

Už minule sme rozoberali zdanlivo existenčné tvrdenia typu:

Ak nejaký prvák navštevuje LPI, tak (on) je bystrý.

Postupnou formalizáciou by sme mohli dospieť k nesprávnej otvorenej formule:

✗ $(\exists x(\text{prvák}(x) \wedge \text{navštevuje}(x, \text{LPI})) \rightarrow \text{bystrý}(x)).$

✓ $\forall x((\text{prvák}(x) \wedge \text{navštevuje}(x, \text{LPI})) \rightarrow \text{bystrý}(x)).$

Vyskytujú sa aj v zložitejších kombináciách. Úderným príkladom je:

Každý sedliak, ktorý vlastní nejakého osla, ho bije.

Na existenčné tvrdenie *vlastní nejakého osla* v antecedente odkazuje zámeno *ho* v konzekvente.

Odkaz z konzekventu — nesprávne možnosti

Postupnou formalizáciou by sme mohli dostať nesprávnu formulu:

$$\text{✗ } \forall x((\text{sedliak}(x) \wedge \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y))) \rightarrow \text{bije}(x, y))$$

Keby sme sa ju pokúsili „zachrániť“ tým, že zaviažeme premennú y , mohlo by to dopadnúť rôzne, ale stále neprávne:

$$\text{✗ } \forall x(\text{sedliak}(x) \wedge \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y) \wedge \text{bije}(x, y)))$$

— *Všetko je sedliak, ktorý vlastní osla, ktorého bije.*

$$\text{✗ } \forall x(\text{sedliak}(x) \rightarrow \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y) \wedge \text{bije}(x, y)))$$

— *Každý sedliak určite vlastní osla, ktorého bije.*

Existenčný kvantifikátor teda nefunguje.

Na správne sformalizovanie je tvrdenie

Každý sedliak, ktorý vlastní nejakého osla, ho bije,

potrebné **parafrázovať** na

- *Každý sedliak bije každého osla, ktorého vlastní.*
- *Pre každého osla je pravda,
že každý sedliak, ktorý ho vlastní, ho bije.*

Z parafráz už ľahko dostaneme správne formalizácie:

- ✓ $\forall x(\text{sedliak}(x) \rightarrow \forall y((\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y)) \rightarrow \text{bije}(x, y)))$
- ✓ $\forall x(\text{osol}(x) \rightarrow \forall y((\text{sedliak}(y) \wedge \text{vlastní}(y, x)) \rightarrow \text{bije}(y, x)))$

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Závislosť od kontextu

Nejednoznačné tvrdenia

Každú minútu v New Yorku prepadne jedného človeka.

Dnes nám poskytne rozhovor.

— SNL

Vtip spočíva v potenciálnej nejednoznačnosti prvej vety.

Pravdepodobne ste ju pochopili („slabé“ čítanie)

$$\forall x(\text{minúta}(x) \rightarrow \exists y(\text{človek}(y) \wedge \text{prepadnutýPočas}(x, y)))$$

Ale druhá veta vyzdvihla menej pravdepodobný alternatívny význam

(„silné“ čítanie):

$$\exists y(\text{človek}(y) \wedge \forall x(\text{minúta}(x) \rightarrow \text{prepadnutýPočas}(x, y)))$$

Závisí od situácie, ktoré z čítaní je správne.

Formalizácia je teda **kontextovo závislá**.

Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Dodatky k formalizácii s jedným
kvantifikátorom

Niekedy potrebujeme vymenovať objekty s nejakou vlastnosťou:

- Na bunke č. 14 bývajú *Ad'a, Biba, Ciri, Dada*.

$(\text{býva_v}(\text{Ad'a}, \text{bunka14}) \wedge \dots \wedge \text{býva_v}(\text{Dada}, \text{bunka14}))$

Ekvivalentne:

Každá z Ad'a, Biba, Ciri, Dada býva v bunke č. 14.

$\forall x((x \doteq \text{Ad'a} \vee \dots \vee x \doteq \text{Dada}) \rightarrow \text{býva_v}(x, \text{bunka14}))$

- Na bunke č. 14 bývajú iba *Ad'a, Biba, Ciri, Dada*.

Každý, kto býva v bunke č. 14, je jedna z Ad'a, Biba, Ciri, Dada.

$\forall x(\text{býva_v}(x, \text{bunka14}) \rightarrow (x \doteq \text{Ad'a} \vee \dots \vee x \doteq \text{Dada}))$

Výnimky a implikátúra

Tvrdenia s výnimkami niekedy vyznievajú silnejšie, ako naozaj sú.

Mám rád všetko ovocie, okrem jablák.

Toto tvrdenie zodpovedá aristotelovskej forme: Každé P je Q ,
kde P = ovocie a nie jablko a Q = také, že ho mám rád, teda:

$$\forall x((\text{ovocie}(x) \wedge \neg \text{jablko}(x)) \rightarrow \text{mám}_\text{rád}(x))$$

Je **veľmi** lákavé z tohto tvrdenia usúdiť, že navyše znamená:
Jablká nemám rád, ale je to iba implikátúra (zdanlivý dôsledok).

K *Mám rád všetko ovocie, okrem jablák* môžeme síce prekvapivo,
ale **bez sporu** dodať:

- *Jablká milujem.*
- *Z jablák mám rád iba červené.*

V spore s tvrdením by bol dodatok: *Ale slivky nemám rád.*