Dôkazy a výrokovologické tablá

4. prednáška
Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 4. prednášky

- Dôkazy a výrokovologické tablá
  - Druhy dôkazov
  - Výrokovologické tablá

Rekapitulácia

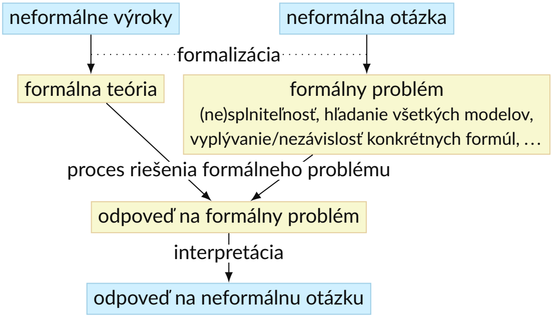
Minulý týždeň sme sa zaoberali:

- výrokovologickým **vyplývaním** formuly z teórie a nezávislosťou formuly od teórie
- vlastnosťami formúl vzhľadom na všetky ohodnotenia:
  - **tautológia**,
  - splniteľnosť,
  - falzifikovateľnosť,
  - nesplniteľnosť;
- vzťahmi formúl:
  - ekvivalencia;
- vzťahom vyplývania a ekvivalencie s tautológiami;
- transformáciou formúl medzi jazykmi so zachovaním splniteľnosti.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Riešenie slovných úloh pomocou formálnej logiky

Na 1. praktickom cvičení a v 1. domácej úlohe (AIN) sme riešili neformálne zadané problémy pomocou ich formálnej verzie:



Formálny problém sme riešili hrubou silou a sémanticky — rozborom všetkých ohodnotení. Žiadne naozajstné usudzovanie. Výsledok zodpovedal výsledku neformálneho úsudku o probléme.

Dôkazy neformálnych meta tvrdení

V 1. domácej úlohe sme dokazovali tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti a tautológiách:

- tvrdenia v slovenčine;
- dôkazy tiež v slovenčine.

Usudzovanie, ale neformálne.

Formalizácia dôkazov

Logiku zaujíma jazyk a usudzovanie.

Výroky v slovenčine (jazyk) sme sformalizovali
ako formuly v jazyku logiky prvého rádu

- matematická „dátová štruktúra":
  postupnosti symbolov s induktívnymi pravidlami konštrukcie;
- javovská dátová štruktúra:
  stromy objektov podtried triedy `Formula`.

Dôkazy (usudzovanie) začneme formalizovať tento týždeň.

Čo sú dôkazy a prečo sa dokazuje

Dôkaz je úvaha, ktorá zdôvodňuje, prečo je nejaký záver logickým dôsledkom predpokladov.

Načo sú vlastne dobré **dôkazy**?

- Môžeme nimi **presvedčiť** iných o pravdivosti svojich záverov.
- Zvyčajne sú menej prácne a **pochopiteľnejšie** ako rozbor všetkých možností.

  Už rozobrať 16 možností je prácne.

  Ak je možností nekonečne veľa,
  rozbor všetkých možností ani nie je možný.
- Odvodzovaním podľa pravidiel dôkazov môžeme skúmať, aké dôsledky má naša teória aj bez konkrétneho cieľa.

Prečo formalizovať dôkazy

Načo je dobré formalizovať dôkazy?

- Aby sme si ujasnili, čo sú dôkazy a kedy sú správne.
  Správna argumentácia nie je dôležitá iba v matematike:
  - uvažovanie o správnosti našich programov či dopytov,
  - základ kritického/vedeckého myslenia v bežnom živote.
- Aby sme vedeli naprogramovať dátové štruktúry na ich reprezentáciu v počítači.
- Aby sme mohli dokazovanie automatizovať.
  - jeden z cieľov klasickej umelej inteligencie
- Aby sme zistili, čo sa dá a čo sa nedá dokázať.
  - Prakticky:
    Čo sa nedá dokázať, toho dôkaz sa nedá automatizovať.
  - Filozoficky:
    Hranice poznania a chápania.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Druhy dôkazov

Druhy dôkazov

V matematike sa na to používa viac typov dôkazov:

- priamy,
- sporom,
- nepriamy,
- analýzou prípadov,

ktoré sa často kombinujú.

Priamy dôkaz a analýza prípadov

Priamy dôkaz

Z predpokladov postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k požadovanému záveru.

Dôkaz analýzou (rozborom) prípadov

Keď predpoklady obsahujú **disjunkciu**, dokážeme požadovaný záver **z každého disjunktu** a ostatných predpokladov **nezávisle** od ostatných disjunktov.
Ak aj predpoklady disjunkciu neobsahujú, môžeme rozoberať prípady, že je nejaké pomocné tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty 2 · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.
Dokážme X.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty 2 · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.
Dokážme X.

Ak nepríde Anka, X je pravdivé (X je implikácia a jej antecedent je nepravdivý).

Preto predpokladajme, že Anka príde.
Podľa A_1 potom musia prísť aj Betka a Cyril.
Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.
Podľa A_2 potom príde aj Evka.
Pretože podľa A_3 by Evka neprišla, ak by prišiel Fero, ale Evka príde,
musí byť pravda, že Fero nepríde.
Preto je tvrdenie X opäť pravdivé (X je implikácia a jej konzekvent je pravdivý).

Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz

Dôkaz sporom

Príjmeme predpoklady, ale **spochybníme záver** —
predpokladáme, že je nepravdivý.
Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov
dospejeme k **sporu** s predpokladom alebo iným dôsledkom.
Záver teda nemôže byť nepravdivý,
preto ak sú pravdivé predpoklady, je nutne pravdivý,
vyplýva z nich.

Nepriamy dôkaz — variácia dôkazu sporom

Predpokladáme, že záver je nepravdivý. Postupným
odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme
k nepravdivosti niektorého z predpokladov.
Tým dokážeme:
Ak je nepravdivý záver, tak sú nepravdivé predpoklady.
Obmena: Ak sú pravdivé predpoklady, je pravdivý záver.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty 2 · dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty 2 · dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Predpokladáme teda, že príde Anka a príde aj Fero.
Preto príde Fero, a teda podľa predpokladu A_3 Evka nepríde.
Zároveň vieme, že príde Anka, a podľa A_1 teda prídu aj Betka a Cyril.
Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.
Podľa A_2 potom príde aj Evka.
To je však spor z predchádzajúcim dôsledkom A_3, že Evka nepríde.

Predpoklad, že X je nepravdivé viedol k sporu,
preto X je pravdivé.

Výhody dôkazu sporom

Dôkaz sporom je veľmi konkrétna ukážka kritického,
vedeckého myslenia:

1. Pochybujeme o pravdivosti tvrdenia.
2. Vyvrátením tejto pochybnosti sa presvedčíme o pravdivosti.

Má ale aj „technickú“ výhodu:
Nemusíme pri ňom až tak tápať, ako dospejeme k cieľu, pretože

- dostaneme viac predpokladov;
- máme jednoduchý cieľ: nájsť spor;
- väčšinou stačí tvrdenia iba zjednodušovať.

Odvodzovanie jednoduchých dôsledkov

Kroky dôkazu by mali odvodzovať jednoduché dôsledky.

Tie potom používame na odvodenie ďalších dôsledkov.

Aký dôsledok je jednoduchý?

Závisí od čitateľa dôkazu — musí byť schopný ho overiť.

Matematici (a učitelia) radi robia väčšie skoky
a nechajú čitateľa (študenta) domýšľať si, prečo ich mohli urobiť.

Vyučujúci chcú od študentov malé kroky —
aby si overili, že študent skutočne uvažuje správne.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá

Jednoduché dôsledky podľa definície pravdivosti formúl

Pozrime sa znova na príklad dôkazu sporom:

1. Sformalizujme ho.
2. Uvedomme si, čo vlastne dokazujeme.
3. Všímajme si, aké kroky robíme.

Príklad dôkazu sporom s formulami

Príklad 5.3 (Párty 2 · formalizovaný dôkaz sporom)

Dokážme, že z teórie $T = \{A_1, A_2, A_3\}$, kde

$A_1 = (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C})))$	Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
$A_2 = ((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \to \mathtt{p}(\mathtt{E}))$	Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
$A_3 = (\mathtt{p}(\mathtt{F}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{E}))$,	Evka nepríde, ak príde Fero.

vyplýva formula X, pričom

$X = (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$	Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Príklad 5.3 (Párty 2 · formal. dôkaz sporom, pokrač.)

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, pre nejaké ohodnotenie υ platí, že

(1) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C})))$,

(2) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} ((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \to \mathtt{p}(\mathtt{E}))$,

(3) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} (\mathtt{p}(\mathtt{F}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{E}))$, ale

(4) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$.

Podľa definície pravdivosti v ohodnotení, potom máme:

(5) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{A})$ zo (4) a súčasne

(6) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} \neg\mathtt{p}(\mathtt{F})$ zo (4), teda

(7) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{F})$ z (6). Ďalej

(8) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{F})$, alebo (9) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} \neg\mathtt{p}(\mathtt{E})$ podľa (3).

čo je	(10) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{E})$ z (9). Zároveň		
v spore	(11) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{A})$, alebo	(12) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C}))$ podľa (1).	
so (7),	čo je	(13) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{B})$ z (12). Potom podľa (2):	
	v spore	(14) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D}))$, alebo	(15) $\upsilon \models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{E})$,
	s (5),	(16) $\upsilon \not\models_{\mathrm{p}} \mathtt{p}(\mathtt{B})$ zo (14),	spor s (10).
		spor s (13);	

Tablový kalkul

Z takýchto dôkazov sporom vychádza tablový kalkul —
jeden z formálnych deduktívnych systémov
pre výrokovologickú časť logiky prvého rádu

Formálny deduktívny systém je systém odvodzovacích pravidiel na konštrukciu dôkazov vyplývania formúl z teórií.

Nami používaná verzia tablového kalkulu
pochádza od Raymonda M. Smullyana [Smullyan, 1979].

Postupne si ukážeme, ako predchádzajúci dôkaz premeníme na tablo — formálny dôkaz v tablovom kalkule.

Označené formuly a ich sémantika

Zbavme sa najprv opakovania $v \models_{\mathrm{p}} \cdots$ a $v \not\models_{\mathrm{p}} \cdots$.

Definícia 5.4

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Nech X je výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nazývame ***označené formuly***.

Definícia 5.5

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a X je výrokovologická formula v $\mathcal{L}$. Potom

- *vo v je pravdivá $\mathbf{T}\,X$* (skrátene $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X$) vtt vo v je pravdivá X;
- *vo v je pravdivá $\mathbf{F}\,X$* (skr. $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$) vtt vo v nie je pravdivá X.

Znamienko $\mathbf{F}$ sa teda správa ako negácia a $\mathbf{T}$ nemení význam formuly.
Znamienka $\mathbf{F}$ a $\mathbf{T}$ sa nesmú objaviť v podformulách.
Vďaka znamienkam stačí hovoriť iba o pravdivých ozn. formulách.

Príklad 5.5 (Párty 2 · dôkaz s označenými formulami)

Predpokladajme, pre nejakom ohodnotení v sú pravdivé označené formuly

(1) $\mathbf{T}(\mathtt{p(A)} \rightarrow (\mathtt{p(B)} \wedge \mathtt{p(C)}))$,

(2) $\mathbf{T}((\mathtt{p(B)} \vee \mathtt{p(D)}) \rightarrow \mathtt{p(E)})$,

(3) $\mathbf{T}(\mathtt{p(F)} \rightarrow \neg\mathtt{p(E)})$, ale

(4) $\mathbf{F}(\mathtt{p(A)} \rightarrow \neg\mathtt{p(F)})$.

Podľa definície pravdivosti, sú vo v pravdivé:

(5) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(A)}$ zo (4) a súčasne

(6) $\mathbf{F}\,\neg\mathtt{p(F)}$ zo (4), teda

(7) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(F)}$ z (6). Ďalej

(8) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(F)}$, alebo (9) $\mathbf{T}\,\neg\mathtt{p(E)}$ podľa (3).

- čo je v spore so (7),
- (10) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(E)}$ z (9). Zároveň
  (11) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(A)}$, alebo (12) $\mathbf{T}(\mathtt{p(B)} \wedge \mathtt{p(C)})$ z (1).
  - čo je v spore s (5),
  - (13) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(B)}$ z (12). Potom podľa (2)
    (14) $\mathbf{F}(\mathtt{p(B)} \vee \mathtt{p(D)})$, alebo (15) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(E)}$,
    - (16) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(B)}$ zo (14), spor s (13);
    - spor s (10).

Kroky odvodenia

Všimnime si teraz kroky, ktoré sme v dôkaze robili:

- Niektoré z pravdivosti formuly **priamo odvodili** pravdivosť niektorej priamej podformuly, napr.:
  - z (4) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \rightarrow \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$ sme odvodili (5) $\mathbf{T}\,\mathtt{p}(\mathtt{A})$;
  - z (4) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \rightarrow \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$ sme odvodili (6) $\mathbf{F}\,\neg\mathtt{p}(\mathtt{F})$;
  - z (9) $\mathbf{T}\,\neg\mathtt{p}(\mathtt{E})$ sme odvodili (10) $\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{E})$.
- Iné viedli k **analýze prípadov** pravdivosti **oboch** priamych podformúl:
  - (2) $\mathbf{T}((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \rightarrow \mathtt{p}(\mathtt{E}))$ viedla k analýze prípadov: (14) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D}))$ **alebo** (15) $\mathbf{T}\,\mathtt{p}(\mathtt{E})$.

Priame odvodenie pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.6

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:

Ak $v \models_p \neg X$, *tak* $v \not\models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}\neg X$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,X$.
Ak $v \not\models_p \neg X$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}\neg X$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \models_p (X \land Y)$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}(X \land Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \models_p (X \land Y)$, *tak* $v \models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}(X \land Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,Y$.
Ak $v \not\models_p (X \lor Y)$, *tak* $v \not\models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \lor Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,X$.
Ak $v \not\models_p (X \lor Y)$, *tak* $v \not\models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \lor Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,Y$.
Ak $v \not\models_p (X \rightarrow Y)$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \not\models_p (X \rightarrow Y)$, *tak* $v \not\models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,Y$.

Zjednodušujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.6 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré priamo odvodzujú z označených formúl ich označené podformuly:

$$\frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{T}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,Y}$$

Na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na **špeciálne prípady jedného pravidla**, ktorému sa hovorí α, *zjednodušenie* alebo *sploštenie* (angl. *flattening*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 5.7 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je ***typu α*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 5.8 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_{\mathrm{p}} \alpha$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} \alpha_1$ ***a*** *$v \models_{\mathrm{p}} \alpha_2$.*

Analýza prípadov pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.9

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:

- *Ak $v \not\models_{\mathrm{p}} (X \land Y)$, tak $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \not\models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \land Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,Y$.
- *Ak $v \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}(X \lor Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,Y$.
- *Ak $v \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$, tak $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}(X \to Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,Y$.

Rozvetvujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.9 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré vedú k analýze prípadov pravdivosti priamych podformúl:

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{T}\,Y}$$

Aj na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na špeciálne prípady jedného pravidla, ktorému sa hovorí β, *vetvenie* alebo *rozdelenie* (angl. *split*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 5.10 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je **typu β** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 5.11 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

*Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \beta$ vtt $v \models_p \beta_1$ **alebo** $v \models_p \beta_2$.*

Označovanie označených formúl a ich množín

Čo vlastne dokazujeme v našom príklade?

To, že predpoklad existencie ohodnotenia v, v ktorom sú pravdivé všetky prvky množiny označených formúl

$$
\begin{aligned}
S^+ = \{\, & \mathbf{T}(\mathtt{p(A)} \to (\mathtt{p(B)} \land \mathtt{p(C)})),\\
& \mathbf{T}((\mathtt{p(B)} \lor \mathtt{p(D)}) \to \mathtt{p(E)}),\\
& \mathbf{T}(\mathtt{p(F)} \to \neg\mathtt{p(E)}),\\
& \mathbf{F}(\mathtt{p(A)} \to \neg\mathtt{p(F)}) \,\}
\end{aligned}
$$

vedie k sporu, teda že S^+ je **nesplniteľná**.

Dohoda 5.12

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X_7^+.

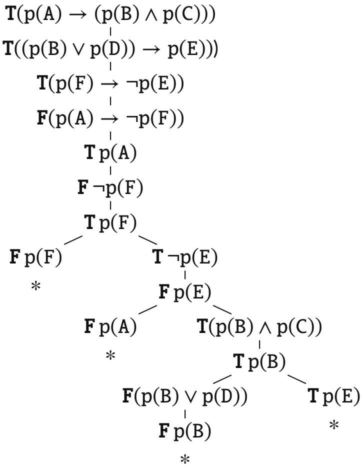
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T_3^+.

Príklad 5.12 (Párty 2 · tablo)

<table>
<tr><td colspan="4">1. $\mathbf{T}(\mathrm{p(A)} \to (\mathrm{p(B)} \land \mathrm{p(C)}))$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. $\mathbf{T}((\mathrm{p(B)} \lor \mathrm{p(D)}) \to \mathrm{p(E)})$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. $\mathbf{T}(\mathrm{p(F)} \to \neg\mathrm{p(E)})$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. $\mathbf{F}(\mathrm{p(A)} \to \neg\mathrm{p(F)})$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. $\mathbf{T}\,\mathrm{p(A)}$ $\alpha 4$</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. $\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p(F)}$ $\alpha 4$</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. $\mathbf{T}\,\mathrm{p(F)}$ $\alpha 6$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">8. $\mathbf{F}\,\mathrm{p(F)}$ $\beta 3$
$*7, 8$</td><td colspan="3">9. $\mathbf{T}\,\neg\mathrm{p(E)}$ $\beta 3$</td></tr>
<tr><td colspan="3">10. $\mathbf{F}\,\mathrm{p(E)}$ $\alpha 9$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">11. $\mathbf{F}\,\mathrm{p(A)}$ $\beta 1$
$*5, 11$</td><td colspan="2">12. $\mathbf{T}(\mathrm{p(B)} \land \mathrm{p(C)})$ $\beta 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">13. $\mathbf{T}\,\mathrm{p(B)}$ $\alpha 12$</td></tr>
<tr><td>14. $\mathbf{F}(\mathrm{p(B)} \lor \mathrm{p(D)})$ $\beta 2$</td><td rowspan="2">15. $\mathbf{T}\,\mathrm{p(E)}$ $\beta 2$
$*10,15$</td></tr>
<tr><td>16. $\mathbf{F}\,\mathrm{p(B)}$ $\alpha 14$
$*13, 16$</td></tr>
</table>

Štruktúra tabla

Čo je teda tablo? Aká „dátová štruktúra“? Čo v nej musí platiť?



Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre* S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - **α**: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - **α**: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - **β**: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - $\boldsymbol{S^+}$: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

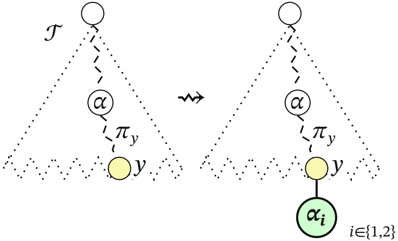
Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - $\boldsymbol{S^+}$: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

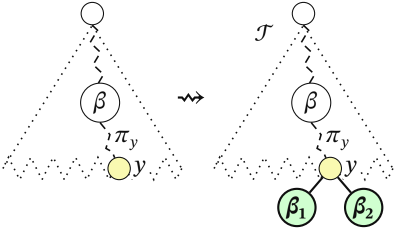
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo	**Možné priame rozšírenie**	**Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



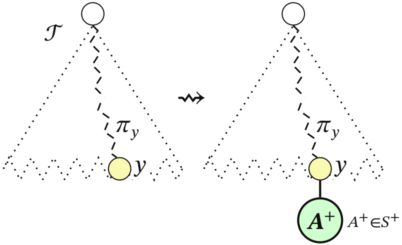
$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	Možné priame rozšírenie	Pravidlá a označené formuly v nich



$$\frac{}{A^+} \qquad\qquad A^+ \in S^+$$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.14

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$
vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π.
Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \mathrm{formulas}(\pi)$.

Tablo $\sim$ dôkaz sporom. Vetvenie $\sim$ rozbor možných prípadov.
$\Longrightarrow$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.15

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je ***uzavretá*** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je uzavreté*** vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Príklad — vetvy a uzavretosť

Príklad 5.16 (Vetvy a uzavretosť)

Určme vetvy v table a zistime, či sú uzavreté a či je uzavreté tablo:

<table>
<tr><td>1.</td><td>$\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{A}) \rightarrow (\mathrm{p}(\mathrm{B}) \land \mathrm{p}(\mathrm{C})))$</td><td>$S^+$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mathbf{T}((\mathrm{p}(\mathrm{B}) \lor \mathrm{p}(\mathrm{D})) \rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{E}))$</td><td>$S^+$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{F}) \rightarrow \neg\mathrm{p}(\mathrm{E}))$</td><td>$S^+$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathrm{A}) \rightarrow \neg\mathrm{p}(\mathrm{F}))$</td><td>$S^+$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{A})$</td><td>$\alpha 4$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p}(\mathrm{F})$</td><td>$\alpha 4$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{F})$</td><td>$\alpha 6$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>8. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{F})$ $\beta 3$
$*7, 8$</td>
<td>
9. $\mathbf{T}\,\neg\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\beta 3$
10. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\alpha 9$
<table>
<tr>
<td>11. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{A})$ $\beta 1$
$*5, 11$</td>
<td>
12. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{B}) \land \mathrm{p}(\mathrm{C}))$ $\beta 1$
13. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{B})$ $\alpha 12$
<table>
<tr>
<td>14. $\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathrm{B}) \lor \mathrm{p}(\mathrm{D}))$ $\beta 2$</td>
<td>15. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\beta 2$
$*10,15$</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Veta 5.17 (Korektnosť tablového kalkulu [Smullyan, 1979])

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 5.18

*Nech S je výrokovologická teória, X je výrokovologická formula a nech **X je výrokovologicky dokázateľná z S** (skrát. $S \vdash_{\mathrm{p}} X$), teda existuje uzavreté tablo pre množinu označených formúl $\{\, \mathbf{T}\, A \mid A \in S \,\} \cup \{\mathbf{F}\, X\}$. Potom z S výrokovologicky vyplýva X ($S \vDash_{\mathrm{p}} X$).*

Dôsledok 5.19

*Nech X je výrokovologická formula a nech **X je výrokovologicky dokázateľná** (skrát. $\vdash_{\mathrm{p}} X$), teda existuje uzavreté tablo pre množinu označených formúl $\{\mathbf{F}\, X\}$. Potom X je tautológia ($\vDash_{\mathrm{p}} X$).*

Spomeňte si 5.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?
2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.