SAT solvery

6. prednáška
Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 6. prednášky

SAT solvery

- Problém výrokovologickej splniteľnosti (SAT)
- Výpočtová zložitosť: teória a prax (*informatívne*)
- Algoritmy na riešenie problému splniteľnosti
- Backtracking
- DPLL a sledované literály
- CDCL
- Ďalšie aspekty (*informatívne*)
- Verifikácia hardvéru (*informatívne*)
- Kombinatorické problémy (*informatívne*)
- SMT solvery (*informatívne*)

Časti tejto prednášky sa netreba učiť na skúšku, slúžia len na ilustráciu historických či vecných súvislostí a rozšírenie všeobecného prehľadu. Sú označené slovom „*informatívne*“ na slajde alebo v názve podkapitoly.

SAT solvery

SAT solvery

Problém výrokovologickej splniteľnosti (SAT)

Problém SAT

Definícia 5.1 (Problém SAT)

Problémom výrokovologickej splniteľnosti (SAT) je problém určenia toho, či je daná množina výrokovologických formúl splniteľná.

- Zvyčajne sa redukuje na problém splniteľnosti klauzálnej teórie (teda formuly v CNF).
- *SAT solver* je program, ktorý rieši problém SAT.

Príklad 5.2

Nech a, b, c sú predikátové atómy.
Nech $S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$.
Je množina klauzúl S splniteľná?

Problém SAT

Súvisiace problémy:

- AllSAT — nájsť všetky ohodnotenia, pre ktoré je formula splnená
- #SAT — zistiť počet ohodnotení, pre ktoré je formula splnená
- MaxSAT — zistiť najväčší možný počet klauzúl formuly v CNF, ktoré je možné splniť súčasne
- weighted MaxSAT — klauzuly majú rôznu váhu a maximalizujeme súčet váh splnených klauzúl
- 3-SAT — klauzuly majú ≤ 3 literály (NP-ťažké)
- 2-SAT — klauzuly majú ≤ 2 literály (P)

Problém SAT

Praktické využitie:

- verifikácia hardvéru (Intel i7)
- verifikácia softvéru (Windows 7 device drivers)
- manažment softvérových závislostí (Eclipse plugins, Python Conda)
- konfigurácia produktov (Daimler)
- bioinformatika, kryptológia
- expertné systémy, letová kontrola, rozvrhovanie, …

História (*informatívne*)

- výrazný pokrok v rokoch 1996–2001, keď sa SAT solvery stali dostatočne rýchle pre praktické využitie
- od r. 2002 každoročne SAT Competition
- o.i. kategória „Glucose hack“ — modifikácia existujúceho solvera nesmie presiahnuť 1000 znakov
- desiatky SAT solverov s otvoreným zdrojovým kódom
- 2013+ SAT *configuration* competition: pre obmedzený okruh vstupov možno dosiahnuť zrýchlenie typicky 2–10×
  (4,5× pre verifikáciu hardvéru)

SAT solvery

Výpočtová zložitosť: teória a prax (*informatívne*)

Výpočtová zložitosť — teória

- **zložitosť algoritmu** — počet krokov výpočtu ako funkcia veľkosti vstupu n (nezávisí od hardvéru)

Výpočtová zložitosť — teória

- **zložitosť algoritmu** — počet krokov výpočtu ako funkcia veľkosti vstupu n (nezávisí od hardvéru)
- **zložitosť problému** — zložitosť optimálneho algoritmu riešiaceho daný problém; je známa len veľmi výnimočne, napr. triedenie porovnávaním je $\mathrm{O}(n \log n)$

Výpočtová zložitosť — teória

- **zložitosť algoritmu** — počet krokov výpočtu ako funkcia veľkosti vstupu n (nezávisí od hardvéru)
- **zložitosť problému** — zložitosť optimálneho algoritmu riešiaceho daný problém; je známa len veľmi výnimočne, napr. triedenie porovnávaním je $\mathrm{O}(n \log n)$
- zložitosť porovnávame za predpokladu n idúceho do nekonečna

Výpočtová zložitosť — teória

- od cca 1970 problémy delíme na „ľahké“ (známy polynomiálny algoritmus, trieda P) a „ťažké“ (nik nepozná polynomiálny algoritmus, triedy NP, PSPACE…)
- veľa ťažkých problémov patrí do NP: riešenie je možné overiť v polynomiálnom čase

Výpočtová zložitosť — teória

- od cca 1970 problémy delíme na „ľahké“ (známy polynomiálny algoritmus, trieda P) a „ťažké“ (nik nepozná polynomiálny algoritmus, triedy NP, PSPACE…)
- veľa ťažkých problémov patrí do NP: riešenie je možné overiť v polynomiálnom čase
- napriek rozsiahlemu výskumu vôbec nevieme, či $P \neq NP$
- niektoré problémy sú nerozhodnuteľné (vieme dokázať, že nemôže existovať algoritmus)

Výpočtová zložitosť — prax

- 2^n je lepšie ako n^{100}
  (ale ak sme na niečo našli polynomiálny algoritmus, zväčša sme do pár rokov našli aj prakticky použiteľný polyn. algoritmus)

Výpočtová zložitosť — prax

- 2^n je lepšie ako n^{100}
  (ale ak sme na niečo našli polynomiálny algoritmus, zväčša sme do pár rokov našli aj prakticky použiteľný polyn. algoritmus)
- asymptotické porovnávanie ignoruje konštanty, a tie sú niekedy podstatné (napr. v quicksorte sa nepoužíva lineárny algoritmus na hľadanie mediánu)

Výpočtová zložitosť — prax

- 2^n je lepšie ako n^{100}
  (ale ak sme na niečo našli polynomiálny algoritmus, zväčša sme do pár rokov našli aj prakticky použiteľný polyn. algoritmus)
- asymptotické porovnávanie ignoruje konštanty, a tie sú niekedy podstatné (napr. v quicksorte sa nepoužíva lineárny algoritmus na hľadanie mediánu)
- teoreticky najlepšie algoritmy neraz nie sú implementované — sú výhodné len pre obrovské vstupy (ktoré sa možno ani nezmestia do pamäte)

Výpočtová zložitosť — prax

- 2^n je lepšie ako n^{100}
  (ale ak sme na niečo našli polynomiálny algoritmus, zväčša sme do pár rokov našli aj prakticky použiteľný polyn. algoritmus)
- asymptotické porovnávanie ignoruje konštanty, a tie sú niekedy podstatné (napr. v quicksorte sa nepoužíva lineárny algoritmus na hľadanie mediánu)
- teoreticky najlepšie algoritmy neraz nie sú implementované — sú výhodné len pre obrovské vstupy (ktoré sa možno ani nezmestia do pamäte)
- hardvér je neraz dôležitejší ako algoritmus (hodinky dnes majú viac výkonu ako niekdajšie superpočítače)
- niekedy je podstatný špecializovaný hardvér (napr. Bitcoin mining, AI)

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby
- niekedy využívame pravdepodobnostné algoritmy, ktoré napr. negarantujú čas behu v najhoršom prípade, ale „takmer vždy“ sú rýchle

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby
- niekedy využívame pravdepodobnostné algoritmy, ktoré napr. negarantujú čas behu v najhoršom prípade, ale „takmer vždy“ sú rýchle
- NP-úplné problémy sú teoreticky ekvivalentné, ale v praxi výrazne odlišné (edge colouring vs. circular edge colouring)

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby
- niekedy využívame pravdepodobnostné algoritmy, ktoré napr. negarantujú čas behu v najhoršom prípade, ale „takmer vždy“ sú rýchle
- NP-úplné problémy sú teoreticky ekvivalentné, ale v praxi výrazne odlišné (edge colouring vs. circular edge colouring)
- algoritmy s veľkou zložitosťou občas fungujú prekvapivo dobre, najmä ak sú doplnené efektívnymi heuristikami

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby
- niekedy využívame pravdepodobnostné algoritmy, ktoré napr. negarantujú čas behu v najhoršom prípade, ale „takmer vždy“ sú rýchle
- NP-úplné problémy sú teoreticky ekvivalentné, ale v praxi výrazne odlišné (edge colouring vs. circular edge colouring)
- algoritmy s veľkou zložitosťou občas fungujú prekvapivo dobre, najmä ak sú doplnené efektívnymi heuristikami
- klasická teória zložitosti nezohľadňuje nerovnomernú distribúciu vstupov vyskytujúcich sa v praxi

Výpočtová zložitosť — prax

- strojový čas je lacnejší ako ľudský; komplexita alg. prináša chyby
- niekedy využívame pravdepodobnostné algoritmy, ktoré napr. negarantujú čas behu v najhoršom prípade, ale „takmer vždy“ sú rýchle
- NP-úplné problémy sú teoreticky ekvivalentné, ale v praxi výrazne odlišné (edge colouring vs. circular edge colouring)
- algoritmy s veľkou zložitosťou občas fungujú prekvapivo dobre, najmä ak sú doplnené efektívnymi heuristikami
- klasická teória zložitosti nezohľadňuje nerovnomernú distribúciu vstupov vyskytujúcich sa v praxi
- pre problém splniteľnosti sú praktické vstupy aj 10–100× väčšie, než naznačuje teória

Problém SAT

- prvý problém s dokázanou NP-úplnosťou
- teoretická zložitosť najlepších algoritmov cca 1.3^n v najhoršom prípade
- ale v praxi riešiteľný pre tisíce až milióny premenných/atómov

SAT solvery

Algoritmy na riešenie problému splniteľnosti

História (*informatívne*)

História (*informatívne*)

- hrubá sila (tabuľka všetkých ohodnotení)
- backtracking
- DPLL [1960]
- CDCL (conflict-driven clause learning) [1996]
- watched literals [2001]
- VSIDS heuristic [2001]
- VSIDS combined with machine learning [Maple 2016+]

Tabuľková metóda

Tabuľková metóda:

- Skúma *všetky* ohodnotenia predikátových atómov
- Trvá $O(s \cdot 2^n)$ krokov,
  - n je počet atómov a s je súčet veľkostí klauzúl
  - 2^n ohodnotení, pre každé treba zistiť, či sú všetky klauzuly pravdivé
- Zaberá priestor $O(k \cdot 2^n)$
  - k je počet klauzúl
  - Pamätáme si (píšeme na papier) celú tabuľku
- Tabuľka slúži aj ako dôkaz prípadnej nesplniteľnosti
  - kratší dôkaz nesplniteľnosti než kompletný záznam činnosti algoritmu riešiaceho SAT zatiaľ nemáme
  - ak by existoval dôkaz s polynomiálnou dĺžkou, bolo by NP = coNP

SAT solvery

Backtracking

Naivný backtracking v Pythone

```
#!/usr/bin/env python3
class Sat(object):
    def __init__(self, n, clauses):
        self.n, self.clauses, self.solution = n, clauses, None
    def checkClause(self, v, c):
        return any( ( v[abs(lit)] if lit > 0 else not v[abs(lit)] )
                    for lit in c )
    def check(self, v):
        return all( self.checkClause(v, cl) for cl in self.clauses )
    def solve(self, i, v):
        if i >= self.n: # ohodnotili sme vsetky atomy
            if self.check(v):
                self.solution = v
                return True
            return False
        for b in [True, False]:
            v[i] = b
            if self.solve(i+1, v):
                return True
        return False
Sat(20, [[]]).solve(0, {})
```

Čas: $O(s \cdot 2^n)$, priestor: $O(s+n)$;

n — počet atómov,

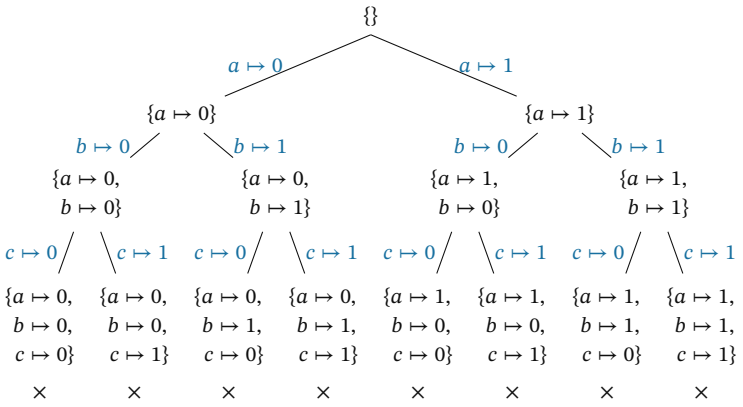
s — súčet veľkostí klauzúl

Strom prehľadávania ohodnotení

$S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$

$\times$ znamená $v \not\models_{\mathrm{p}} S$

$f := 0, t := 1$



Priebežné vyhodnocovanie klauzúl

Strom ohodnotení:

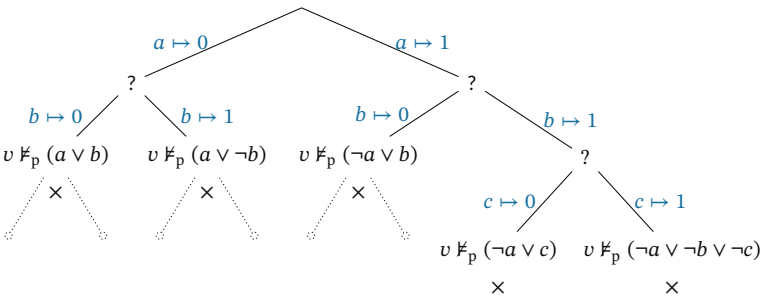
- List — ohodnotenie všetkých premenných
- Každý uzol — *čiastočné ohodnotenie*
- Ohodnotenie v uzle je *rozšírením* ohodnotenia v rodičovi
- Niektoré klauzuly sa dajú vyhodnotiť aj v čiastočnom ohodnotení
  - V čiastočnom ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 1\}$
    sa dá určiť pravdivosť $(a \vee b)$, $(a \vee \neg b)$, $(\neg a \vee b)$ z našej S
- Ak nájdeme nepravdivú, môžeme hneď „backtracknúť“ —
  zastaviť prehľadávanie vetvy a vrátiť sa o úroveň vyššie
  - V čiastočnom ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 0\}$
    je nepravdivá $(a \vee b)$ z S

Prehľadávanie s priebežným vyhodnocovaním

$S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$

× znamená $v \not\models_{\mathrm{p}} S$

? znamená zatiaľ žiadna nepravdivá klauzula



Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Nech v je čiastočné ohodnotenie, v ktorom $v(a) = 1$.

V každom rozšírení ohodnotenia v:

- sú pravdivé klauzuly obsahujúce a
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \vDash_{\mathrm{p}} (a \vee b)$
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \vDash_{\mathrm{p}} (a \vee \neg b)$
- je pravdivá klauzula $(\ell_1 \vee \cdots \vee \neg a \vee \cdots \vee \ell_n)$ obsahujúca $\neg a$ vtt je pravdivá zjednodušená klauzula $(\ell_1 \vee \cdots \vee \cdots \vee \ell_n)$
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \vDash_{\mathrm{p}} (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$ vtt $\{a \mapsto 1, ...\} \vDash_{\mathrm{p}} (\neg b \vee \neg c)$

Takže množinu S môžeme zjednodušiť:

- klauzuly s a môžeme vynechať;
- klauzuly s $\neg a$ môžeme zjednodušiť.

Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Množinu klauzúl

$S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$

môžeme *zjednodušiť podľa* $a \mapsto 1$ na

$S|_{a \mapsto 1} = \{ \quad b, \quad (\neg b \vee \neg c), \quad c \quad \}.$

Analogicky môžeme S zjednodušiť podľa $a \mapsto 0$ na

$S|_{a \mapsto 0} = \{ \quad b, \quad \neg b \quad \}.$

Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Definícia 5.3

Nech P je predikátový atóm, S je množina klauzúl, (t, f) je dvojica pravdivostných hodnôt. Potom definujeme

$$S|_{P \mapsto f} = \{(\ell_1 \vee \cdots \vee \cdots \vee \ell_n) \mid (\ell_1 \vee \cdots \vee P \vee \cdots \vee \ell_n) \in S\} \cup \{C \mid C \in S, \text{v } C \text{ sa nevyskytuje } P \text{ ani } \neg P\}$$

$$S|_{P \mapsto t} = \{(\ell_1 \vee \cdots \vee \cdots \vee \ell_n) \mid (\ell_1 \vee \cdots \vee \neg P \vee \cdots \vee \ell_n) \in S\} \cup \{C \mid C \in S, \text{v } C \text{ sa nevyskytuje } P \text{ ani } \neg P\}$$

$$S|_{\neg P \mapsto t} = S|_{P \mapsto f}$$

$$S|_{\neg P \mapsto f} = S|_{P \mapsto t}$$

Tvrdenie 5.4

Nech P je predikátový atóm, S je množina klauzúl, (t, f) dvojica pravdivostných hodnôt. Nech $b \in \{t, f\}$ a v je ohodnotenie také, že $v(P) = b$. Potom $v \models_{\mathrm{p}} S$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} S|_{P \mapsto b}$.

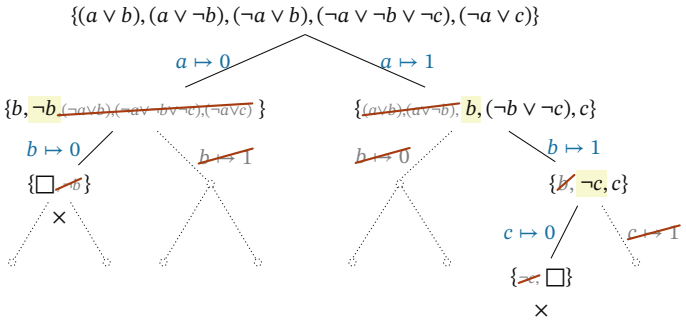
Propagácia jednotkových klauzúl

Nech $T = \{(a \vee \neg b), (a \vee b \vee c)\}$.
Začnime zjednodušením podľa $a \mapsto 0$:

- $T' := T|_{a \mapsto 0} = \{\neg b, (b \vee c)\}$
  - $\neg b$ — ***jednotková klauzula*** (*unit clause* alebo iba ***unit***)
  - T' spĺňajú **iba** ohodnotenia v, kde $v(b) = 0$
  - Takže T' zjednodušíme podľa $b \mapsto 0$
- $T'' := T'|_{b \mapsto 0} = \{c\}$
  - c — jednotková klauzula
  - T'' spĺňajú iba ohodnotenia v, kde $v(c) = 1$
  - Takže T'' zjednodušíme podľa c
- $T''' := T''|_{c \mapsto 1} = \{\}$ prázdna, pravdivá v hocijakom ohodnotení. Podľa tvrdenia 5.4:
  - T'' je pravdivá v každom ohodnotení, kde $v(c) = 1$.
  - T' je pravdivá v každom ohodnotení, kde $v(b) = 0$, $v(c) = 1$.
  - T je pravdivá v ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 0, c \mapsto 1\}$.

Prehľadávanie so zjednodušovaním klauzúl a unit propagation

Propagácia jednotkových klauzúl (***unit propagation***) je proces opakovaného rozširovania ohodnotení podľa jednotkových klauzúl a zjednodušovania.



Eliminácia nezmiešaných literálov

Všimnime si literál P v množine klauzúl:

$$T = \{(\neg a \vee \neg b \vee c), (\neg a \vee P), (\neg b \vee P), a, b, \neg c\}$$

Literál P je ***nezmiešaný*** (angl. *pure*) v T:
P sa vyskytuje v T, ale jeho komplement $\neg P$ sa tam nevyskytuje.

Nech $T' := T|_{P \mapsto 1} = \{(\neg a \vee \neg b \vee c), a, b, \neg c\}$

- Ak nájdeme ohodnotenie $v \vDash_p T'$,
  tak $v_0 := v[P \mapsto 0]$ aj $v_1 := v[P \mapsto 1]$ sú modelmi T'
  a v_1 je navyše modelom T, teda T je splniteľná.
- Ak je T' nesplniteľná,
  tak je nesplniteľná každá jej nadmnožina, teda aj T.

Z hľadiska splniteľnosti sú klauzuly obsahujúce P nepodstatné.
Stačí uvažovať $T|_{P \mapsto 1}$.

Eliminácia nezmiešaných literálov

Definícia 5.5

Nech P je predikátový atóm.
Komplementom literálu P je $\neg P$. *Komplementom literálu $\neg P$* je P.

Komplement literálu ℓ označujeme $\bar{\ell}$.

Definícia 5.6

Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.
Literál ℓ je ***nezmiešaný*** (*pure*) v S vtt ℓ sa vyskytuje v niektorej klauzule z S, ale jeho komplement $\bar{\ell}$ sa nevyskytuje v žiadnej klauzule z S.

Tvrdenie 5.7

Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.
Ak ℓ je nezmiešaný v S, tak S je splniteľná vtt $S|_{\ell \mapsto 1}$ je splniteľná.

SAT solvery

DPLL a sledované literály

DPLL

Algoritmus 5.8 (Davis and Putnam [1960], Davis et al. [1962])

1: **def** DPLL(Φ, υ)**:**
2: **if** Φ obsahuje prázdnu klauzulu**:**
3: **return** False
4: **if** υ ohodnocuje všetky atómy**:**
5: **return** True
6: **while** existuje jednotková (unit) klauzula ℓ vo Φ**:**
7: $\Phi, \upsilon =$ unit-propagate(ℓ, Φ, υ)
8: **while** existuje nezmiešaný (pure) literál ℓ vo Φ**:**
9: $\Phi, \upsilon =$ pure-literal-assign(ℓ, Φ, υ)
10: $x =$ choose-branch-atom(Φ, υ)
11: **return** DPLL($\Phi|_{x \mapsto t}, \upsilon(x \mapsto t)$) **or** DPLL($\Phi|_{x \mapsto f}, \upsilon(x \mapsto f)$)

Technika sledovaných literálov (watched literals)

Aby sme nemuseli zjednodušovať množinu klauzúl:

- Pre každú klauzulu vyberieme 2 **sledované literály**.

  $(\neg a^{\text{👁}} \vee \neg b^{\text{👁}} \vee \neg c)$
- Sledovaný literál musí byť **nenastavený** alebo **true**, ak sa to dá.
- Ak sa sledovaný literál stane *true*: nič nemusíme robiť.

  $\{a \mapsto 0\} \qquad (\neg a^{\text{👁}} \vee \neg b^{\text{👁}} \vee \neg c)$
- Ak sa sledovaný literál stane *false*: musíme nájsť iný.

  $\{a \mapsto 1\} \qquad (\neg a^{\text{🙈}} \vee \neg b^{\text{👁}} \vee \neg c^{\text{👁}})$

  Ak iný nie je, práve sme vyrobili jednotkovú klauzulu
  (všetky literály okrem druhého sledovaného sú *false*),

  $\{a \mapsto 1, b \mapsto 1\} \qquad (\neg a \vee \neg b^{\text{👁}}_{\perp} \vee \underline{\neg c}^{\text{👁}}_{u})$

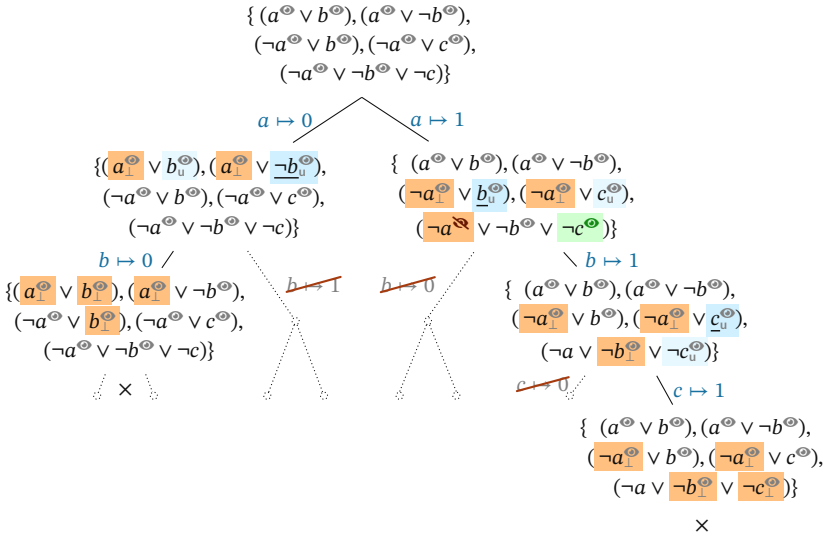
  alebo spor (aj druhý sledovaný je už *false*).

  $\{a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 0\} \qquad (\neg a^{\text{👁}}_{\perp} \vee c^{\text{👁}}_{\perp})$
- Keď backtrackujeme: nič nemusíme robiť
  (možno sa niektoré sledované literály stanú *nenastavenými*).

Technika sledovaných literálov (watched literals)

- netreba v každom kroku prepisovať skúmanú formulu
- pri unit propagation máme priamo odkaz na relevantné klauzuly, nemusíme prepisovať všetky ani hľadať ich vo formule
- žiadna práca pri kroku naspäť
- pre 3-SAT sa ušetrí len málo, preto preferovaná veľkosť klauzúl je výrazne viac ako 3 (dosiahne sa predspracovaním vstupu)
- nezlepšuje asymptotickú zložitosť, ale veľmi užitočné v praxi

Prehľadávanie s unit propagation a sledovaním



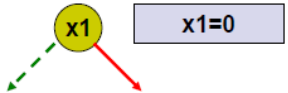
SAT solvery

CDCL

CDCL — conflict-driven clause learning

Step 1

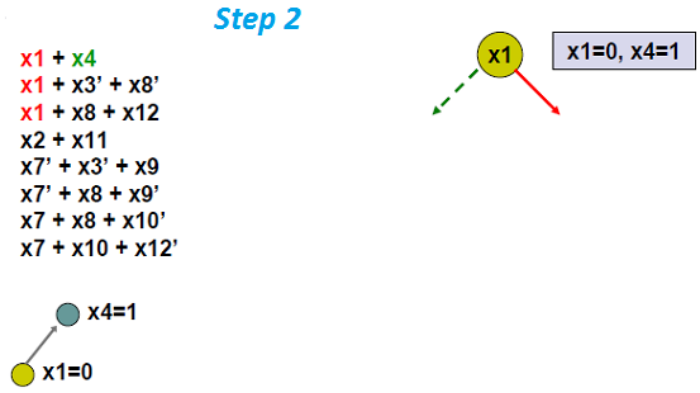
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'



x1=0

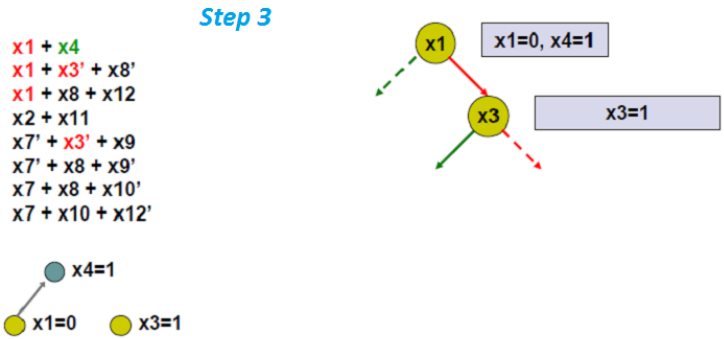
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning



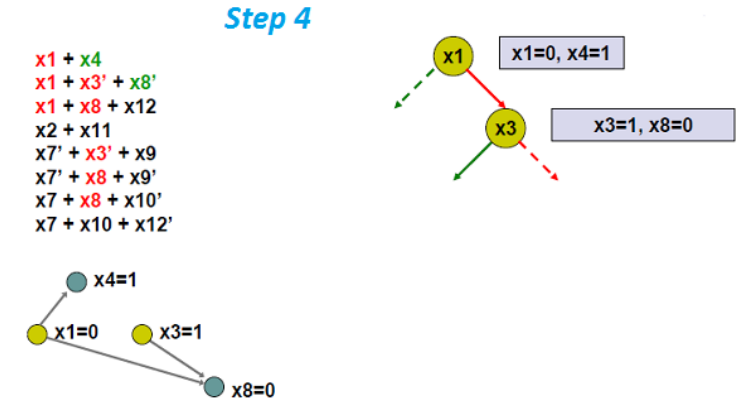
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning



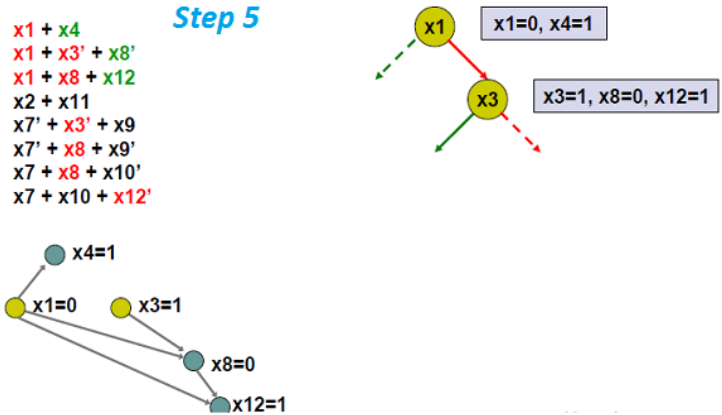
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning



(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning

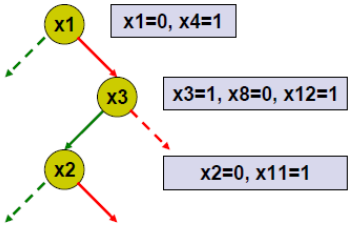


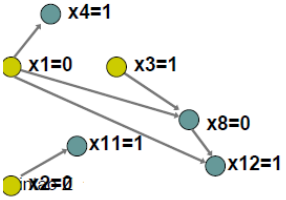
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning

Step 7

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'



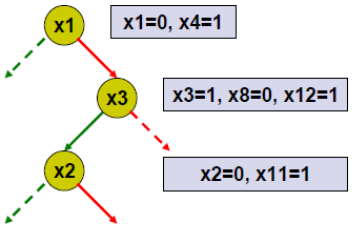


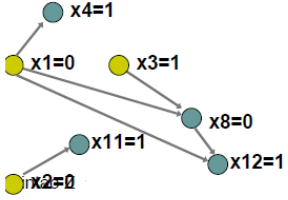
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning

Step 8

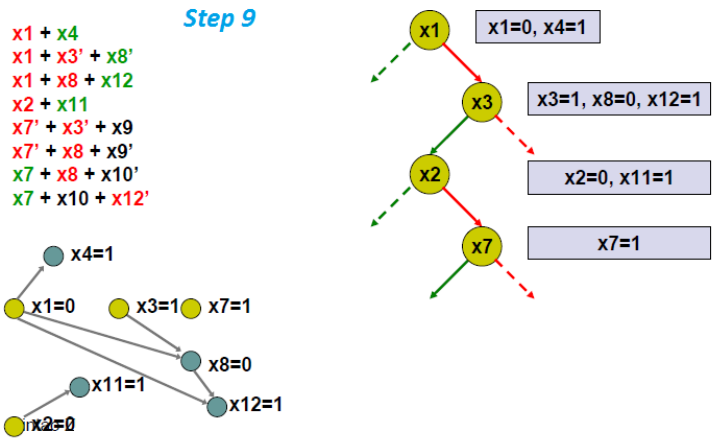
x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'





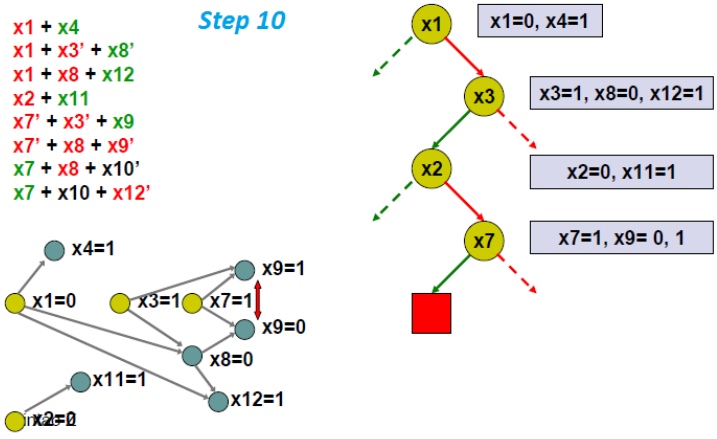
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning



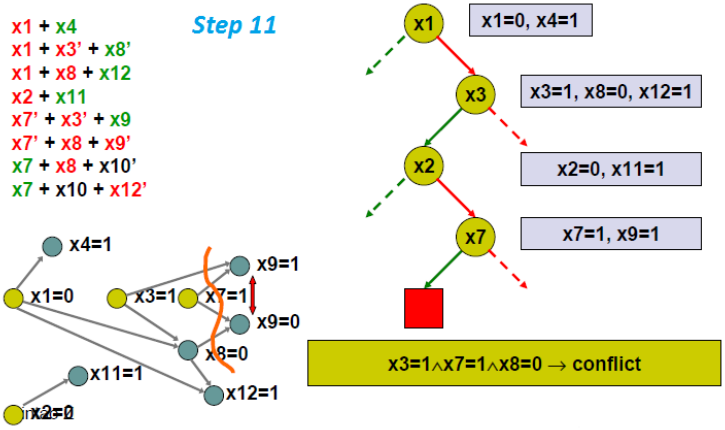
(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning

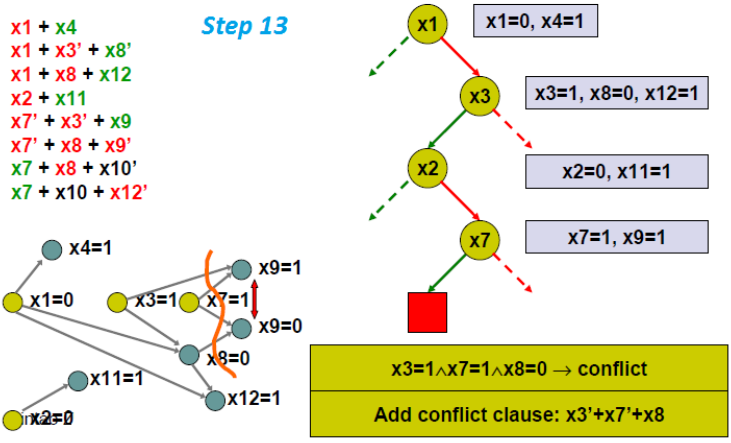


(žltá — rozhodnutie, šedá — unit propagation)

CDCL — conflict-driven clause learning

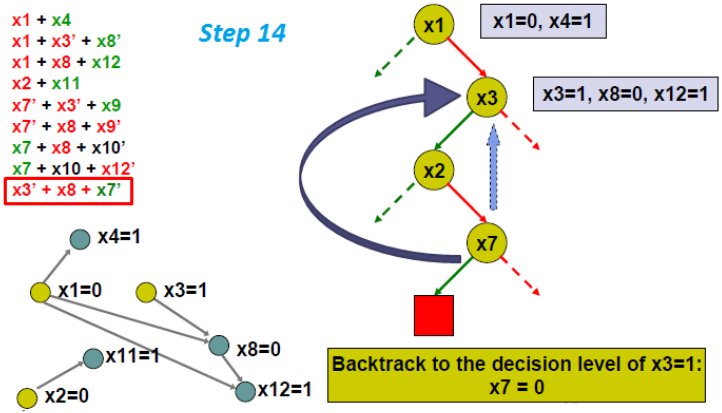


CDCL — conflict-driven clause learning



Uvedený rez nie je jediný, mohli by sme pridať $x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_7$.

CDCL — conflict-driven clause learning

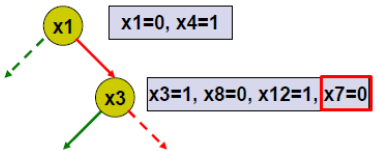


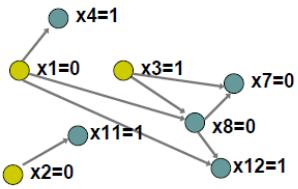
Návrat do bodu, kde pridaná klauzula vynúti ohodnotenie jednej doteraz neohodnotenej premennej (čo zabráni vzniku tohto konfliktu kdekoľvek v podstrome).

CDCL — conflict-driven clause learning

x1 + x4
x1 + x3' + x8'
x1 + x8 + x12
x2 + x11
x7' + x3' + x9
x7' + x8 + x9'
x7 + x8 + x10'
x7 + x10 + x12'
x3' + x8 + x7'

Step 15





CDCL — conflict-driven clause learning

- vytvárame implikačný graf

CDCL — conflict-driven clause learning

- vytvárame implikačný graf
- keď nájdeme konflikt, zvolíme rez oddeľujúci rozhodnutia od konfliktu a odvodíme novú klauzulu, ktorá konfliktu predchádza *(learning)*; ak je takých rezov viac, heuristikou niektorý vyberieme

CDCL — conflict-driven clause learning

- vytvárame implikačný graf
- keď nájdeme konflikt, zvolíme rez oddeľujúci rozhodnutia od konfliktu a odvodíme novú klauzulu, ktorá konfliktu predchádza *(learning)*; ak je takých rezov viac, heuristikou niektorý vyberieme
- vrátime sa k predposlednému z rozhodnutí, ktoré viedli ku konfliktu (nie chronologicky — preskočíme rozhodnutia o literáloch nesúvisiacich s konfliktom)

CDCL — conflict-driven clause learning (*informatívne*)

Problémy (viac v [Zhang]):

- exponenciálne veľa klauzúl, ktoré takto možno odvodiť; ktoré si pamätať a ako dlho?
  riešenie: rôzne heuristiky, aktívna oblasť výskumu (Kruger et al. [2022])

CDCL — conflict-driven clause learning (*informatívne*)

Problémy (viac v [Zhang]):

- exponenciálne veľa klauzúl, ktoré takto možno odvodiť; ktoré si pamätať a ako dlho?
  riešenie: rôzne heuristiky, aktívna oblasť výskumu (Kruger et al. [2022])
- čas výpočtu má distribúciu s ťažkým chvostom (fat-tailed — pre niektoré postupnosti rozhodnutí trvá výpočet výrazne dlhšie ako pre iné)
  riešenie: občasný reštart backtrackingu (napr. „Luby restarts“, založené na štatistickej analýze náhodných procesov)

Ako vybrať nasledujúci literál? (*informatívne*)

- voľba literálu pre ďalšie rozhodnutie má výrazný efekt na čas výpočtu

Ako vybrať nasledujúci literál? (*informatívne*)

- voľba literálu pre ďalšie rozhodnutie má výrazný efekt na čas výpočtu
- heuristika VSIDS: „additive bumping, multiplicative decay“
- pre každý literál počítame počet jeho výskytov v odvodených klauzulách (t.j. konfliktoch)
- periodicky toto skóre predelíme konštantou (zdôrazníme tak nedávno naučené klauzuly)

Ako vybrať nasledujúci literál? (*informatívne*)

- voľba literálu pre ďalšie rozhodnutie má výrazný efekt na čas výpočtu
- heuristika VSIDS: „additive bumping, multiplicative decay“
- pre každý literál počítame počet jeho výskytov v odvodených klauzulách (t.j. konfliktoch)
- periodicky toto skóre predelíme konštantou (zdôrazníme tak nedávno naučené klauzuly)
- prekvapivo efektívne, využíva sa vo mnohých súčasných solveroch

Ako vybrať nasledujúci literál? (*informatívne*)

- voľba literálu pre ďalšie rozhodnutie má výrazný efekt na čas výpočtu
- heuristika VSIDS: „additive bumping, multiplicative decay“
- pre každý literál počítame počet jeho výskytov v odvodených klauzulách (t.j. konfliktoch)
- periodicky toto skóre predelíme konštantou (zdôrazníme tak nedávno naučené klauzuly)
- prekvapivo efektívne, využíva sa vo mnohých súčasných solveroch
- heuristika LRB [Maple 2016]: reinforcement learning (multi-armed bandit problem)
- pravidelné prepínanie medzi VSIDS a LRB

SAT solvery

Ďalšie aspekty (*informatívne*)

Predspracovanie

- všetky moderné SAT solvery venujú značnú pozornosť predspracovaniu formuly
- počet premenných je zvyčajne podstatnejší ako veľkosť formuly

Predspracovanie

- všetky moderné SAT solvery venujú značnú pozornosť predspracovaniu formuly
- počet premenných je zvyčajne podstatnejší ako veľkosť formuly
- rezolvenciou možno znížiť počet klauzúl (ale narastie ich veľkosť)

Predspracovanie

- všetky moderné SAT solvery venujú značnú pozornosť predspracovaniu formuly
- počet premenných je zvyčajne podstatnejší ako veľkosť formuly
- rezolvenciou možno znížiť počet klauzúl (ale narastie ich veľkosť)
- rezolvenciou možno znížiť počet premenných (ale výrazne narastie počet klauzúl)

Predspracovanie

- všetky moderné SAT solvery venujú značnú pozornosť predspracovaniu formuly
- počet premenných je zvyčajne podstatnejší ako veľkosť formuly
- rezolvenciou možno znížiť počet klauzúl (ale narastie ich veľkosť)
- rezolvenciou možno znížiť počet premenných (ale výrazne narastie počet klauzúl)
- poradie klauzúl nemá zásadný vplyv na dĺžku výpočtu
- redundantné klauzuly môžu pomôcť

Predspracovanie

- desiatky rôznych techník, často doménovo špecifických
- napr. neúplné BDD reprezentácie umožňujú získať klauzuly, ktoré nemožno odvodiť počas CDCL

Predspracovanie

- desiatky rôznych techník, často doménovo špecifických
- napr. neúplné BDD reprezentácie umožňujú získať klauzuly, ktoré nemožno odvodiť počas CDCL
- cryptominisat akceptuje XOR-klauzuly a pri predspracovaní sa na ne díva ako na sústavu lineárnych rovníc nad $\mathbb{Z}_2$ a používa Gaussovu elimináciu

Predspracovanie

- desiatky rôznych techník, často doménovo špecifických
- napr. neúplné BDD reprezentácie umožňujú získať klauzuly, ktoré nemožno odvodiť počas CDCL
- cryptominisat akceptuje XOR-klauzuly a pri predspracovaní sa na ne díva ako na sústavu lineárnych rovníc nad $\mathbb{Z}_2$ a používa Gaussovu elimináciu
- pri „ľahkých“ inštanciách môže predspracovanie zabrať viac času než následné riešenie, treba nájsť vhodný kompromis
- v niektorých prípadoch zase predspracovanie zvyšuje dobu následného riešenia

Vstupné formuly

- niektoré problémy prirodzene vedú skôr k disjunktívnej normálnej forme, štandardný algoritmus úpravy potom vytvára exponenciálne veľkú CNF

Vstupné formuly

- niektoré problémy prirodzene vedú skôr k disjunktívnej normálnej forme, štandardný algoritmus úpravy potom vytvára exponenciálne veľkú CNF
- riešenie: ekvisplniteľné formuly (*equisatisfiable*)

$$\bigvee_i (a_i \wedge b_i \wedge c_i)$$

$$\left(\bigvee_i z_i\right) \wedge \bigwedge_i \left[(\overline{z_i} \vee a_i) \wedge (\overline{z_i} \vee b_i) \wedge (\overline{z_i} \vee c_i)\right]$$

(nie ekvivalentné, lebo sú tam premenné navyše, ale jedna je splniteľná práve vtedy, keď druhá)

Neúplné solvery

- šanca na rýchle objavenie ohodnotenia, v ktorom je formula pravdivá
- neúplné solvery negarantujú dôkaz nesplniteľnosti
- založené na heuristikách (random walks, genetic algoritms, simulated annealing…)

Neúplné solvery

- šanca na rýchle objavenie ohodnotenia, v ktorom je formula pravdivá
- neúplné solvery negarantujú dôkaz nesplniteľnosti
- založené na heuristikách (random walks, genetic algoritms, simulated annealing…)
- úspešné využitie metód štatistickej fyziky (napr. survey propagation pre 3-SAT), lebo náhodný SAT vykazuje podobné správanie (*threshold*, *clustering*)
- automatizované plánovanie: bežne kombinácia neúplného a úplného solvera

Ďalšie aspekty

- existujúce solvery nie sú dobre paralelizovateľné: vedia použiť mnoho vlákien, ale s otáznym efektom (ak chceme riešiť niekoľko vstupných inštancií, je lepšie riešiť každú v osobitnom vlákne)

Ďalšie aspekty

- existujúce solvery nie sú dobre paralelizovateľné: vedia použiť mnoho vlákien, ale s otáznym efektom (ak chceme riešiť niekoľko vstupných inštancií, je lepšie riešiť každú v osobitnom vlákne)
- solvery sú konfigurovateľné (lingeling: 300 parametrov); na optimalizáciu na úzkej triede vstupov možno použiť strojové učenie
- zmeny parametrov vedú typicky k zrýchleniu 2–10×

SAT solvery

Verifikácia hardvéru (*informatívne*)

Ukážka aplikácie SAT solverov

- verifikácia hardvéru je azda najvýznamnejšia oblasť využitia — bez moderných procesorov nevieme robiť žiadne iné výpočty
- softvér sa vymení ľahko, vymieňať hardvér je prakticky nemožné alebo neekonomické; nedá sa opraviť časť procesora
- pri desiatkach miliónov tranzistorov nemáme inú dostatočne výkonnú alternatívu

Metódy verifikácie hardvéru a softvéru

1. Simulácia
   - užitočná, ale nič nezaručuje
   - je ťažké až nemožné zachytiť všetky možné stavy, v ktorých sa má systém používať

Metódy verifikácie hardvéru a softvéru

1. Simulácia
   - užitočná, ale nič nezaručuje
   - je ťažké až nemožné zachytiť všetky možné stavy, v ktorých sa má systém používať
2. Formálna verifikácia
   - v princípe úplný matematický dôkaz správnosti
   - nedá sa použiť pre fyzickú vrstvu, ale ideálna pre logickú

Metódy verifikácie hardvéru a softvéru

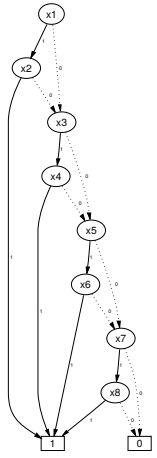
1. Simulácia
   - užitočná, ale nič nezaručuje
   - je ťažké až nemožné zachytiť všetky možné stavy, v ktorých sa má systém používať
2. Formálna verifikácia
   - v princípe úplný matematický dôkaz správnosti
   - nedá sa použiť pre fyzickú vrstvu, ale ideálna pre logickú
   - používa sa zriedka — drahá a vyžaduje vysokú odbornosť
   - atómové elektrárne, vesmírne lety, veľké série procesorov

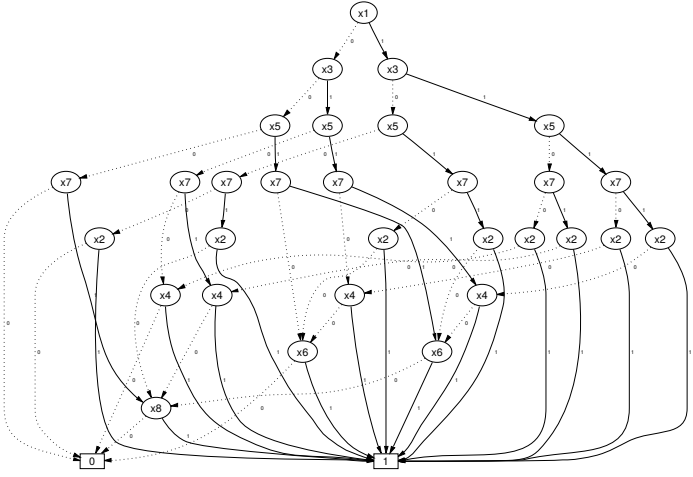
Verifikácia hardvéru

- ekvivalencia booleovských výpočtových okruhov (napr. po optimalizácii)
- dôkaz invariantov
- *safety*: is a state reachable?
- *liveness*: is a state T always reached after S?

Binary decision diagrams (BDDs)

$$f(x_1, \ldots, x_8) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + x_7x_8$$





Verifikácia hardvéru: BDDs

- využívané desaťročia
- nevýhody:
  - poradie premenných musí byť vo všetkých vetvách rovnaké
  - poradie má významný efekt na veľkosť diagramu
  - diagramy môžu byť exponenciálne veľké

Bounded model checking (BMC)

- vyjadrenie verifikačných problémov cez splniteľnosť výrokovologických formúl [Biere et al. 1999]
- rozvinieme k krokov výpočtu, skontrolujeme neporušenosť invariantov, zvýšime k
- vyjadrenie v CNF, rieši sa SAT solverom
- riešiteľné vstupy: 0.4M premenných, 7M klauzúl [2004]

SAT solvery

Kombinatorické problémy (*informatívne*)

Kombinatorické problémy

- pre mnoho problémov v diskrétnej matematike je SAT solver jediné v súčasnosti použiteľné riešenie
- pre určité problémy sú špecializované solvery rýchlejšie (napr. TSP)
- pre riešiteľné inštancie sú neraz rýchlejšie špecifické heuristiky
- SAT solverom sa darí výborne, ak počet premenných rastie s veľkosťou problému lineárne (napr. farbenia grafov)

3-edge-colouring of cubic graphs

Rôzne spôsoby vyjadrenia regulárnosti hranového 3-farbenia pre graf, ktorý má všetky vrcholy stupňa 3:

1. incidentné hrany majú navzájom rôzne farby
2. v každom vrchole je každá farba použitá na práve jednej hrane
3. farby hrán incidentných s každým jedným vrcholom tvoria trojicu z povoleného pevného zoznamu trojíc
4. formula založená na combinatorial nullstellensatz

3-edge-colouring of cubic graphs

- $O(n)$ premenných, $O(n)$ klauzúl, veľkosť formuly $O(n)$
- čas výpočtu pre rôzne solvery a ich konfigurácie: nízka variácia, cca 4×
- voľne koreluje s veľkosťou formuly

3-edge-colouring of cubic graphs

- $O(n)$ premenných, $O(n)$ klauzúl, veľkosť formuly $O(n)$
- čas výpočtu pre rôzne solvery a ich konfigurácie: nízka variácia, cca 4×
- voľne koreluje s veľkosťou formuly
- všetky možnosti fungujú lepšie ako formulácia cez ILP (integer linear programming) a riešenie GLPK či Gurobi

3-edge-colouring of cubic graphs

- $O(n)$ premenných, $O(n)$ klauzúl, veľkosť formuly $O(n)$
- čas výpočtu pre rôzne solvery a ich konfigurácie: nízka variácia, cca 4×
- voľne koreluje s veľkosťou formuly
- všetky možnosti fungujú lepšie ako formulácia cez ILP (integer linear programming) a riešenie GLPK či Gurobi
- pre grafy do 50–100 vrcholov vyhráva backtracking (najmä ak sú zafarbiteľné)
- SAT solvery fungujú aj pre tisíce vrcholov
- absencia krátkych kružníc v grafe (čiže lokálne vyzerá ako strom) predlžuje výpočet

Symetria

- Ak je vstupná formula symetrická (má mnoho automorfizmov), solver bude opakovane preverovať „rovnaké“ časti priestoru možných riešení.
- Oplatí sa symetriu odstraňovať, napr. odstránime permutácie farieb, predpíšeme na fixnú hranu konkrétnu farbu, prvý vrchol na hľadanej hamiltonovskej kružnici apod.
- Symetrické premenné možno zoradiť lexikograficky a pridať klauzuly popisujúce $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$ (čiže ak by pre niektoré spĺňajúce ohodnotenie boli niektoré x_i pravdivé, vyberieme také ohodnotenie, že to postupne budú $x_1, x_2, \ldots$).
- Existujú špecializované knižnice práve na tento účel (napr. BreakID), je za tým 30 rokov výskumu.

Hamiltonovské kružnice

1. premenné $x_{v,i}$ — true ak v je i-ty vrchol kružnice
2. každá pozícia na kružnici má priradený vrchol
3. žiadne dva vrcholy nemajú priradenú tú istú pozíciu
4. každý vrchol je použitý najviac raz
5. každé dva po sebe idúce vrcholy na kružnici sú spojené hranou

Hamiltonovské kružnice

1. premenné $x_{v,i}$ — true ak v je i-ty vrchol kružnice
2. každá pozícia na kružnici má priradený vrchol
3. žiadne dva vrcholy nemajú priradenú tú istú pozíciu
4. každý vrchol je použitý najviac raz
5. každé dva po sebe idúce vrcholy na kružnici sú spojené hranou

- $O(n^2)$ premenných, $O(n^3)$ klauzúl!
- pre kubické grafy funguje do 40–50 vrcholov, podobne ako backtracking
- ak má byť redukcia na SAT naozaj efektívna, potrebujeme cca lineárne veľa premenných
- premenných aspoň $n \log n$, lebo kódujeme permutácie do bitov (ale neplatí pre postupy, ktoré kružnicu priamo nehľadajú, len akosi inak rozhodujú o existencii)

Hamiltonovské kružnice

- hamiltonovská kružnica je súvislý 2-faktor (podgraf s vrcholmi stupňa práve 2)
- pomocou booleovskej formuly možno stupeň vrcholo ľahko popísať lokálne
- CNF s veľkosťou $O(n)$

Hamiltonovské kružnice

- hamiltonovská kružnica je súvislý 2-faktor (podgraf s vrcholmi stupňa práve 2)
- pomocou booleovskej formuly možno stupeň vrcholo ľahko popísať lokálne
- CNF s veľkosťou $O(n)$
- stačí overiť súvislosť každého 2-faktora — AllSAT
- málo dostupných solverov: clasp, BDD_MINISAT_ALL
- pre skúmané grafy rýchlejšie ako redukcia na SAT, ale počet 2-faktorov rastie exponenciálne
- pre kubické grafy funguje do cca 40 vrcholov (milióny 2-faktorov)

AllSAT

- z každého SAT solvera možno spraviť AllSAT solver (stačí po každom nájdenom riešení pridať na vstup klauzulu, ktorá ho zakazuje)
- neefektívne, klauzuly objavené CDCL zakaždým zahodíme, keď nanovo štartuje výpočet po objavení riešenia
- vstupná formula narastá príliš rýchlo (napr. pre CryptoMiniSat možno takto realisticky nájsť desaťtisíce riešení, ale nie milióny)
- iná možnosť: obmedziť skoky pre non-chronological backtracking

AllSAT

- doteraz najlepšie riešenie: *formula-BDD caching* [Toda 2015]
- dá sa pridať k akémukoľvek backtrackingu, ak vopred zafixujeme poradie premenných
- zruší prínosy VSIDS (vyberáme si len hodnotu, nie premennú, ktorú ideme ohodnotiť)
- BDD_MINISAT_ALL je náročný na pamäť, ale ako jediný dokáže pracovať s miliardami riešení
- prekvapivo vie v niektorých prípadoch dokázať nesplniteľnosť rýchlejšie ako SAT solvery

SAT solvery

SMT solvery (*informatívne*)

Motivácia

- SAT solvery sú veľmi rýchle pre booleovskú logiku (log. spojky).
- Booleovské formuly však ponúkajú len obmedzené vyjadrovacie možnosti, napr. aritmetika sa dá robiť bitovo, ale je to pomalé, zložité a vzdialené od pôvodných pojmov, ktoré modelujeme.
- Problémy reálneho sveta si často vyžadujú bohatšie teórie, napr. s poliami a funkciami.
- SMT solvery rozširujú SAT tak, aby riešili tieto komplexné požiadavky.

Čo je SMT solver?

- SMT — Satisfiability Modulo Theories.
- SMT solver rozhoduje splniteľnosť formuly s výrokovologickou štruktúrou, ale zároveň berie do úvahy doplnkové teórie (*background theories*), ktoré sa vymykajú výrokovej logike:
  - Linear Integer Arithmetic (LIA)
  - Uninterpreted Functions (UF)
  - polia, bitové vektory, dátové typy
- Background theories sú fragmentmi prvorádovej logiky, ktoré zahŕňajú len špecifické predikáty so štandardnou interpretáciou a vyhýbajú sa tak algoritmickej nerozhodnuteľnosti.

SMT formuly

SMT formuly:

- Obsahujú premenné rôznych typov, napr. celé čísla, reálne čísla, polia.
- Kombinujú logickú štruktúru ($\wedge, \vee, \neg$) s atómami pochádzajúcimi z doplnkových teórií.
- Príklad (LIA + UF + Boolean):

$$\underbrace{(a + b \leq 5)}_{\text{LIA}} \vee \underbrace{(f(a) = g(f(b)))}_{\text{UF}} \wedge \underbrace{(a \geq 0)}_{\text{LIA}} \wedge \underbrace{(c = True)}_{\text{Boolean}}$$

- SAT solver nerozumie vnútornej štruktúre atómov, len vie, ktorý podriadený solver daný atóm rozozná.

Algoritmus DPLL(T)

1. **SAT Solver:** navrhuje ohodnotenia atómov.
2. **Theory Solver:** overuje konzistentnosť týchto ohodnotení vzhľadom na doplnkové teórie.
3. Interakcia:
   - SAT solver vykonáva DPLL/CDCL.
   - Ak SAT solver nájde spĺňajúce ohodnotenie, zavolá podriadený solver pre príslušnú teóriu, aby skontroloval, či je priradenie prípustné.
   - Ak podriadený solver odhalí neprípustnosť, SAT solver sa naučí novú klauzulu — theory learn step.

Algoritmus DPLL(T): príklad

- Vstupná formula obsahuje LIA atómy

  $A_1 = (x = 4), \qquad A_2 = (x \geq 0), \qquad A_3 = (y = x{+}2), \qquad A_4 = (y > 5).$

- SAT solver navrhne, že A_1, A_2, A_3 budú true, A_4 false.
- LIA solver nájde nesúlad pre $A_1, A_3, \neg A_4$.
- SAT solver pridá klauzulu $\neg A_1 \vee \neg A_3 \vee A_4$ (*theory learn step*).

Aplikácie

Využitie:

- automatizované dokazovanie tvrdení,
- formálna verifikácia softvéru,
- overovanie hardvéru,
- testovanie a ladenie softvéru.

Napr. Microsoft vyvinul Z3 a niekoľko ďalších nástrojov založených na SMT; použil ich v systémoch ako SAGE na odhalenie viac ako 1000 kritických bezpečnostných chýb vo Windows a Office. Amazon používa internú knižnicu TLS s názvom s2n, navrhnutú špeciálne tak, aby bola malá a dala sa formálne verifikovať; denne spúšťajú miliardy výpočtov SMT na všetko od bootovacieho kódu AWS a operačných systémov IoT až po kryptografické knižnice a sieťové konfigurácie (link).

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

T. Kruger et al. Too much information: Why CDCL solvers need to forget learned clauses. *Plos One*, 2022. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC9417043/.

L. Zhang. SAT-Solving: From Davis-Putnam to Zchaff and beyond. [Online] https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/propm/papers/Zhang/sat_course1.pdf, https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/propm/papers/Zhang/sat_course2.pdf, https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/propm/papers/Zhang/sat_course3.pdf.