

Dôkazy a výrokovologické tablá

4. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Klúka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dôkazy a výrokovologické tablá

Druhy dôkazov

Výrokovologické tablá

Rekapitulácia

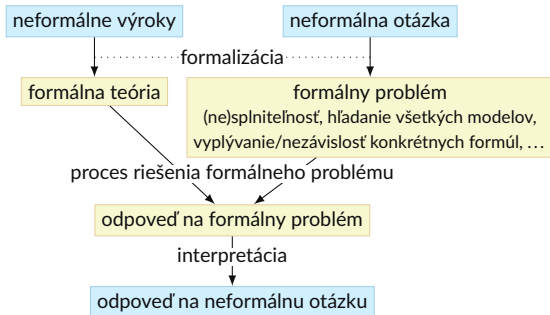
Minulý týždeň sme sa zaoberali:

- výrokovologickým **vyplývaním** formuly z teórie a nezávislosťou formuly od teórie
- vlastnosťami formúl vzhľadom na všetky ohodnotenia:
 - **tautológia**,
 - splniteľnosť,
 - falzifikovateľnosť,
 - nesplniteľnosť;
- vzťahmi formúl:
 - ekvivalencia;
- vzťahom vyplývania a ekvivalencie s tautológiami;
- transformáciou formúl medzi jazykmi so zachovaním splniteľnosti.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Riešenie slovných úloh pomocou formálnej logiky

Na 1. praktickom cvičení a v 1. domácej úlohe (AIN) sme riešili neformálne zadané problémy pomocou ich formálnej verzie:



Formálny problém sme riešili hrubou silou a sémanticky — rozborom všetkých ohodnotení. Žiadne naozajstné usudzovanie. Výsledok zodpovedal výsledku neformálneho úsudku o probléme.

V 1. domácej úlohe sme dokazovali tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti a tautológiách:

- tvrdenia v slovenčine;
- dôkazy tiež v slovenčine.

Usudzovanie, ale neformálne.

Logiku zaujíma **jazyk** a **usudzovanie**.

Výroky v slovenčine (jazyk) sme **sformalizovali**
ako **formuly** v jazyku logiky prvého rádu

- matematická „dátová štruktúra“:
postupnosti symbolov s indukčnými pravidlami konštrukcie;
- javovská dátová štruktúra:
stromy objektov podtried triedy Formula.

Dôkazy (usudzovanie) začneme **formalizovať** tento týždeň.

Čo sú dôkazy a prečo sa dokazuje

Dôkaz je úvaha, ktorá zdôvodňuje, prečo je nejaký záver logickým dôsledkom predpokladov.

Načo sú vlastne dobré **dôkazy**?

- Môžeme nimi **presvedčiť** iných o pravdivosti svojich záverov.
- Zvyčajne sú menej prácne a **pochopiteľnejšie** ako rozbor všetkých možností.

Už rozobrať 16 možností je prácne.

Ak je možností nekonečne veľa,
rozbor všetkých možností ani nie je možný.

- Odvodzovaním podľa pravidiel dôkazov môžeme skúmať, aké dôsledky má naša teória aj bez konkrétneho cieľa.

Prečo formalizovať dôkazy

Načo je dobré **formalizovať** dôkazy?

- Aby sme si ujasnili, **čo** sú dôkazy a kedy sú **správne**.
Správna argumentácia nie je dôležitá iba v matematike:
 - uvažovanie o správnosti našich programov či dopytov,
 - základ kritického/vedeckého myslenia v bežnom živote.
- Aby sme vedeli naprogramovať **dátové štruktúry** na ich reprezentáciu v počítači.
- Aby sme mohli dokazovanie **automatizovať**.
 - jeden z cieľov klasickej umelej inteligencie
- Aby sme zistili, čo sa dá a čo sa **nedá** dokázať.
 - Prakticky:
Čo sa nedá dokázať, toho dôkaz sa nedá automatizovať.
 - Filozoficky:
Hranice poznania a chápania.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Druhy dôkazov

Druhy dôkazov

V matematike sa na to používa viac typov dôkazov:

- priamy,
- sporom,
- nepriamy,
- analýzou prípadov,

ktoré sa často kombinujú.

Priamy dôkaz a analýza prípadov

Priamy dôkaz

Z predpokladov postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k požadovanému záveru.

Dôkaz analýzou (rozborom) prípadov

Keď predpoklady obsahujú **disjunkciu**, dokážeme požadovaný záver **z každého disjunkt** a ostatných predpokladov **nezávisle** od ostatných disjunktov.

Ak aj predpoklady disjunkciu neobsahujú, môžeme rozoberať prípady, že je nejaké pomocné tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty 2 · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.

Dokážme X .

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Páry 2 · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.

Dokážme X .

Ak nepríde Anka, X je pravdivé (X je implikácia a jej antecedent je nepravdivý).

Preto predpokladajme, že Anka príde.

Podľa A_1 potom musia prísť aj Betka a Cyril.

Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.

Podľa A_2 potom príde aj Evka.

Pretože podľa A_3 by Evka neprišla, ak by prišiel Fero, ale Evka príde, musí byť pravda, že Fero nepríde.

Preto je tvrdenie X opäť pravdivé (X je implikácia a jej konzekvent je pravdivý).

Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz

Dôkaz sporom

Príjmeme predpoklady, ale **spochybíme záver** — predpokladáme, že je nepravdivý.

Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k **sporu** s predpokladom alebo iným dôsledkom.

Záver teda nemôže byť nepravdivý,
preto ak sú pravdivé predpoklady, je nutne pravdivý,
vyplýva z nich.

Nepriamy dôkaz — variácia dôkazu sporom

Predpokladáme, že záver je nepravdivý. Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k nepravdivosti niektorého z predpokladov.

Tým dokážeme:

Ak je nepravdivý záver, tak sú nepravdivé predpoklady.

Obmena: Ak sú pravdivé predpoklady, je pravdivý záver.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty 2 • dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty 2 • dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Predpokladáme teda, že príde Anka a príde aj Fero.

Preto príde Fero, a teda podľa predpokladu A_3 Evka nepríde.

Zároveň vieme, že príde Anka, a podľa A_1 teda prídu aj Betka a Cyril.

Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.

Podľa A_2 potom príde aj Evka.

To je však spor z predchádzajúcim dôsledkom A_3 , že Evka nepríde.

Predpoklad, že X je nepravdivé viedol k sporu, preto X je pravdivé.

Výhody dôkazu sporom

Dôkaz sporom je veľmi konkrétna ukážka kritického, vedeckého myslenia:

1. Pochybujeme o pravdivosti tvrdenia.
2. Vyvrátením tejto pochybnosti sa presvedčíme o pravdivosti.

Má ale aj „technickú“ výhodu:

Nemusíme pri ňom až tak tápať, ako dospejeme k cieľu, pretože

- dostaneme viac predpokladov;
- máme jednoduchý cieľ: nájsť spor;
- väčšinou stačí tvrdenia iba zjednodušovať.

Odvodzovanie jednoduchých dôsledkov

Kroky dôkazu by mali odvodzovať **jednoduché dôsledky**.

Tie potom používame na odvodenie ďalších dôsledkov.

Aký dôsledok je jednoduchý?

Závisí od čitateľa dôkazu — musí byť schopný ho overiť.

Matematici (a učitelia) radi robia väčšie skoky
a nechajú čitateľa (študenta) domýšľať si, prečo ich mohli urobiť.

Vyučujúci chcú od študentov malé kroky —
aby si overili, že študent skutočne uvažuje správne.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá

Pozrime sa znova na príklad dôkazu sporom:

1. Sformalizujme ho.
2. Uvedomme si, čo vlastne dokazujeme.
3. Všímajme si, aké kroky robíme.

Príklad 5.3 (Párty 2 • formalizovaný dôkaz sporom)

Dokážme, že z teórie $T = \{A_1, A_2, A_3\}$, kde

$A_1 = (p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$ Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

$A_2 = ((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$ Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

$A_3 = (p(F) \rightarrow \neg p(E)),$ Evka nepríde, ak príde Fero.

vyplýva formula X , pričom

$X = (p(A) \rightarrow \neg p(F))$ Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Príklad 5.3 (Párty 2 • formal. dôkaz sporom, pokrač.)

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, pre nejaké ohodnotenie v platí, že

(1) $v \models_p (p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$,

(2) $v \models_p ((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$,

(3) $v \models_p (p(F) \rightarrow \neg p(E))$, ale

(4) $v \not\models_p (p(A) \rightarrow \neg p(F))$.

Podľa definície pravdivosti v ohodnotení, potom máme:

(5) $v \models_p p(A)$ zo (4) a súčasne

(6) $v \not\models_p \neg p(F)$ zo (4), teda

(7) $v \models_p p(F)$ z (6). Ďalej

(8) $v \not\models_p p(F)$, alebo (9) $v \models_p \neg p(E)$ podľa (3).

čo je (10) $v \not\models_p p(E)$ z (9). Zároveň

v spore (11) $v \not\models_p p(A)$, alebo (12) $v \models_p (p(B) \wedge p(C))$ podľa (1).

so (7), čo je (13) $v \models_p p(B)$ z (12). Potom podľa (2):

v spore (14) $v \not\models_p (p(B) \vee p(D))$, alebo (15) $v \models_p p(E)$,

s (5), (16) $v \models_p p(B)$ zo (14), spor s (10).

spor s (13);

Z takýchto dôkazov sporom vychádza **tablový kalkul** — jeden z **formálnych deduktívnych systémov** pre výrokovologickú časť logiky prvého rádu

Formálny deduktívny systém je systém odvodzovacích pravidiel na konštrukciu dôkazov vyplývania formúl z teórií.

Nami používaná verzia tablového kalkulu pochádza od Raymonda M. Smullyana [Smullyan, 1979].

Postupne si ukážeme, ako predchádzajúci dôkaz premeníme na **tablo** — formálny dôkaz v tablovom kalkule.

Označené formuly a ich sémantika

Zbavme sa najprv opakovania $v \models_p \dots$ a $v \not\models_p \dots$.

Definícia 5.4

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Nech X je výrokovologická formula jazyka \mathcal{L} .

Postupnosti symbolov **T** X a **F** X nazývame *označené formuly*.

Definícia 5.5

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, v je ohodnotenie pre \mathcal{L} a X je výrokovologická formula v \mathcal{L} . Potom

- *vo v je pravdivá **T** X* (skrátene $v \models_p \mathbf{T}X$) vtt vo v je pravdivá X ;
- *vo v je pravdivá **F** X* (skr. $v \models_p \mathbf{F}X$) vtt vo v nie je pravdivá X .

Znamienko **F** sa teda správa ako negácia a **T** nemení význam formuly.

Znamienka **F** a **T** sa *nesmú* objaviť v podformulách.

Vďaka znamienkam stačí hovoriť iba o pravdivých ozn. formulách.

Príklad 5.5 (Párty 2 • dôkaz s označenými formulami)

Predpokladajme, pre nejakom ohodnotení v sú pravdivé označené formuly

(1) $\mathbf{T}(p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$,

(2) $\mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$,

(3) $\mathbf{T}(p(F) \rightarrow \neg p(E))$, ale

(4) $\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$.

Podľa definície pravdivosti, sú vo v pravdivé:

(5) $\mathbf{T} p(A)$ zo (4) a súčasne

(6) $\mathbf{F} \neg p(F)$ zo (4), teda

(7) $\mathbf{T} p(F)$ z (6). Ďalej

(8) $\mathbf{F} p(F)$, alebo (9) $\mathbf{T} \neg p(E)$ podľa (3).

čo je (10) $\mathbf{F} p(E)$ z (9). Zároveň

v spore (11) $\mathbf{F} p(A)$, alebo (12) $\mathbf{T}(p(B) \wedge p(C))$ z (1).

so (7), čo je (13) $\mathbf{T} p(B)$ z (12). Potom podľa (2)

v spore (14) $\mathbf{F}(p(B) \vee p(D))$, alebo (15) $\mathbf{T} p(E)$,

s (5), (16) $\mathbf{F} p(B)$ zo (14), spor s (10).

spor s (13);

Všimnime si teraz kroky, ktoré sme v dôkaze robili:

- Niektoré z pravdivosti formuly **priamo odvodili** pravdivosť niektorej priamej podformuly, napr.:
 - z (4) $\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$ sme odvodili (5) $\mathbf{T} p(A)$;
 - z (4) $\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$ sme odvodili (6) $\mathbf{F} \neg p(F)$;
 - z (9) $\mathbf{T} \neg p(E)$ sme odvodili (10) $\mathbf{F} p(E)$.
- Iné viedli k **analýze prípadov** pravdivosti **oboch** priamych podformúl:
 - (2) $\mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$ viedla k analýze prípadov:
(14) $\mathbf{F}(p(B) \vee p(D))$ **alebo** (15) $\mathbf{T} p(E)$.

Priame odvodenie pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.6

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly \mathcal{L} :

Ak $v \models_p \neg X$, tak $v \not\models_p X$.

Ak $v \not\models_p \neg X$, tak $v \models_p X$.

Ak $v \models_p (X \wedge Y)$, tak $v \models_p X$.

Ak $v \models_p (X \wedge Y)$, tak $v \models_p Y$.

Ak $v \not\models_p (X \vee Y)$, tak $v \not\models_p X$.

Ak $v \not\models_p (X \vee Y)$, tak $v \not\models_p Y$.

Ak $v \not\models_p (X \rightarrow Y)$, tak $v \models_p X$.

Ak $v \not\models_p (X \rightarrow Y)$, tak $v \not\models_p Y$.

Ak $v \models_p \mathbf{T} \neg X$, tak $v \models_p \mathbf{F} X$.

Ak $v \models_p \mathbf{F} \neg X$, tak $v \models_p \mathbf{T} X$.

Ak $v \models_p \mathbf{T}(X \wedge Y)$, tak $v \models_p \mathbf{T} X$.

Ak $v \models_p \mathbf{T}(X \wedge Y)$, tak $v \models_p \mathbf{T} Y$.

Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \vee Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F} X$.

Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \vee Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F} Y$.

Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, tak $v \models_p \mathbf{T} X$.

Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F} Y$.

Zjednodušujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.6 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré priamo odvodzujú z označených formúl ich označené podformuly:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathbf{T} \neg X}{\mathbf{F} X} & \frac{\mathbf{F} \neg X}{\mathbf{T} X} & \frac{\mathbf{T}(X \wedge Y)}{\mathbf{T} X} & \frac{\mathbf{F}(X \vee Y)}{\mathbf{F} X} & \frac{\mathbf{F}(X \rightarrow Y)}{\mathbf{T} X} \\ & & \frac{\mathbf{T}(X \wedge Y)}{\mathbf{T} Y} & \frac{\mathbf{F}(X \vee Y)}{\mathbf{F} Y} & \frac{\mathbf{F}(X \rightarrow Y)}{\mathbf{F} Y} \end{array}$$

Na tieto pravidlá sa dá pozeráť ako na **špeciálne prípady jedného pravidla**, ktorému sa hovorí α , *zjednodušenie* alebo *sploštenie* (angl. *flattening*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 5.7 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je **typu α** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom α ;

α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,

α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \wedge Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{F}(X \vee Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}\neg X$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}X$
$\mathbf{F}\neg X$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}X$

Pozorovanie 5.8 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \alpha$ vtt $v \models_p \alpha_1$ a $v \models_p \alpha_2$.

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.9

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly \mathcal{L} :

- Ak $v \not\models_p (X \wedge Y)$, tak $v \not\models_p X$ alebo $v \not\models_p Y$.
Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \wedge Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F}X$ alebo $v \models_p \mathbf{F}Y$.
- Ak $v \models_p (X \vee Y)$, tak $v \models_p X$ alebo $v \models_p Y$.
Ak $v \models_p \mathbf{T}(X \vee Y)$, tak $v \models_p \mathbf{T}X$ alebo $v \models_p \mathbf{T}Y$.
- Ak $v \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$.
Ak $v \models_p \mathbf{T}(X \rightarrow Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F}X$ alebo $v \models_p \mathbf{T}Y$.

Z pozorovania 5.9 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré vedú k analýze prípadov pravdivosti priamych podformúl:

$$\frac{\mathbf{F}(X \wedge Y)}{\mathbf{F}X \mid \mathbf{F}Y}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \vee Y)}{\mathbf{T}X \mid \mathbf{T}Y}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \rightarrow Y)}{\mathbf{F}X \mid \mathbf{T}Y}$$

Aj na tieto pravidlá sa dá pozeráť ako na špeciálne prípady jedného pravidla, ktorému sa hovorí β , *vetvenie* alebo *rozdelenie* (angl. *split*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 5.10 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je **typu β** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom β ;

β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,

β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \wedge Y)$	$\mathbf{F} X$	$\mathbf{F} Y$
$\mathbf{T}(X \vee Y)$	$\mathbf{T} X$	$\mathbf{T} Y$
$\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{F} X$	$\mathbf{T} Y$

Pozorovanie 5.11 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \beta$ vtt $v \models_p \beta_1$ **alebo** $v \models_p \beta_2$.

Označovanie označených formúl a ich množín

Čo vlastne dokazujeme v našom príklade?

To, že predpoklad existencie ohodnotenia v , v ktorom sú pravdivé všetky prvky množiny označených formúl

$$\begin{aligned} S^+ = \{ & \mathbf{T}(p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C))), \\ & \mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E)), \\ & \mathbf{T}(p(F) \rightarrow \neg p(E)), \\ & \mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F)) \} \end{aligned}$$

vedie k sporu, teda že S^+ je **nesplniteľná**.

Dohoda 5.12

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+ , X_7^+ .

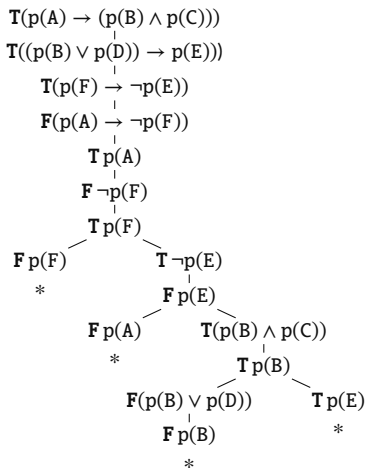
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S , T s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+ , T_3^+ .

Príklad 5.12 (Párty 2 • tablo)

1.	$\mathbf{T}(p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$	S^+			
2.	$\mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$	S^+			
3.	$\mathbf{T}(p(F) \rightarrow \neg p(E))$	S^+			
4.	$\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$	S^+			
5.	$\mathbf{T} p(A)$	$\alpha 4$			
6.	$\mathbf{F} \neg p(F)$	$\alpha 4$			
7.	$\mathbf{T} p(F)$	$\alpha 6$			
8.	$\mathbf{F} p(F)$	$\beta 3$	9.	$\mathbf{T} \neg p(E)$	$\beta 3$
	*7, 8		10.	$\mathbf{F} p(E)$	$\alpha 9$
			11.	$\mathbf{F} p(A)$	$\beta 1$
				*5, 11	
			12.	$\mathbf{T}(p(B) \wedge p(C))$	$\beta 1$
			13.	$\mathbf{T} p(B)$	$\alpha 12$
			14.	$\mathbf{F}(p(B) \vee p(D))$	$\beta 2$
			15.	$\mathbf{T} p(E)$	$\beta 2$
			16.	$\mathbf{F} p(B)$	$\alpha 14$
				*13, 16	*10, 15

Štruktúra tabla

Čo je teda tablo? Aká „dátová štruktúra“? Čo v nej musí platiť?



Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
- S^+ : Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

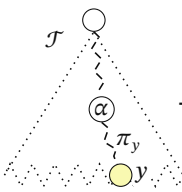
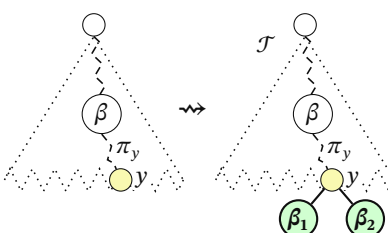
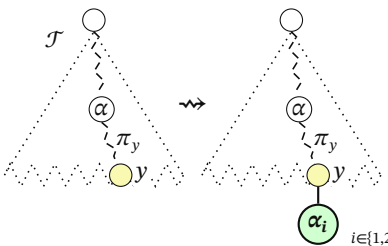
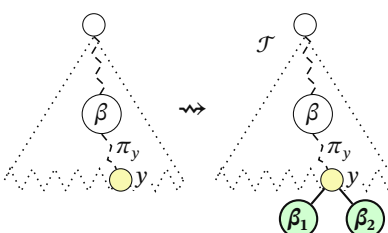
Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
 - S^+ : Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+ .

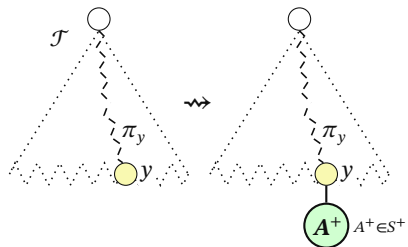
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo	Možné priame rozšírenie	Pravidlá a označené formuly v nich				
		α	α	α	α_1	α_2
		α_1	α_2	$\mathbf{T}(X \wedge Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{TY}
				$\mathbf{F}(X \vee Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{FY}
				$\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{FY}
				$\mathbf{T}\neg X$	\mathbf{FX}	\mathbf{FX}
				$\mathbf{F}\neg X$	\mathbf{TX}	\mathbf{TX}
		β		β	β_1	β_2
		β_1	β_2	$\mathbf{F}(X \wedge Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{FY}
				$\mathbf{T}(X \vee Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{TY}
				$\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{TY}

Legenda: y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	Možné priame rozšírenie	Pravidlá a označené formuly v nich
---------------	-------------------------	------------------------------------



$\overline{A^+}$

$A^+ \in S^+$

Legenda: y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.14

Vetvou tabla \mathcal{T} je každá cesta od koreňa \mathcal{T} k niektorému listu \mathcal{T} .

Označená formula X^+ sa **vyskytuje na vetve** π v \mathcal{T}

vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π .

Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Tablo \sim dôkaz sporom.

Vetvenie \sim rozbor možných prípadov.

\implies Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.15

Vetva π tabla \mathcal{T} je **uzavretá** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}X$ a $\mathbf{T}X$ pre nejakú formulu X .

Inak je π **otvorená**.

Tablo \mathcal{T} je **uzavreté** vtt každá jeho vetva je uzavretá.

Naopak, \mathcal{T} je **otvorené** vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

Príklad 5.16 (Vetvy a uzavretosť)

Určme vetvy v table a zistíme, či sú uzavreté a či je uzavreté tablo:

1.	$\mathbf{T}(p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$	S^+			
2.	$\mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$	S^+			
3.	$\mathbf{T}(p(F) \rightarrow \neg p(E))$	S^+			
4.	$\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$	S^+			
5.	$\mathbf{T} p(A)$	$\alpha 4$			
6.	$\mathbf{F} \neg p(F)$	$\alpha 4$			
7.	$\mathbf{T} p(F)$	$\alpha 6$			
8.	$\mathbf{F} p(F)$	$\beta 3$	9.	$\mathbf{T} \neg p(E)$	$\beta 3$
	*7, 8		10.	$\mathbf{F} p(E)$	$\alpha 9$
			11.	$\mathbf{F} p(A)$	$\beta 1$
				*5, 11	
			12.	$\mathbf{T}(p(B) \wedge p(C))$	$\beta 1$
			13.	$\mathbf{T} p(B)$	$\alpha 12$
			14.	$\mathbf{F}(p(B) \vee p(D))$	$\beta 2$
			15.	$\mathbf{T} p(E)$	$\beta 2$
				*10,15	

Veta 5.17 (Korektnosť tablového kalkulu [Smullyan, 1979])

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ .
Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 5.18

Nech S je výrokovologická teória, X je výrokovologická formula
a nech X je **výrokovologicky dokázateľná** z S (skrát. $S \vdash_p X$),
t.j., nech existuje uzavreté tablo pre množinu označených formúl
 $\{\mathbf{T} A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F} X\}$. Potom z S výrokovologicky vyplýva X ($S \models_p X$).

Dôsledok 5.19

Nech X je výrokovologická formula a nech X je **výrokovologicky dokázateľná** (skrát. $\vdash_p X$), t.j., nech existuje uzavreté tablo pre množinu
označených formúl $\{\mathbf{F} X\}$. Potom X je tautológia ($\models_p X$).

Spomeňte si 5.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?
2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.