Funkčné symboly. Tablá s rovnosťou

9. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 9. prednášky

Logika prvého rádu

Logika prvého rádu

Funkčné symboly

Vzťahy s jednoznačne určenými objektmi

V niektorých vzťahoch ich predmet
vždy **existuje** a je **jednoznačne** určený/-á:

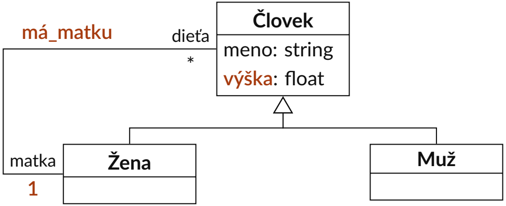
- Každý človek má **práve jednu** biologickú matku.
- Každý človek má (v danej chvíli) **práve jednu** výšku.
- Každé dve čísla majú **práve jeden** súčet (súčin, najväčší spoločný deliteľ, $\ldots$).
- Každá neprázdna konečná množina čísel má **práve jeden** maximálny prvok.

Takýto predmet potom jednoznačne pomenúvajú menné frázy ako:

- Bonifácova mama; mama Bonifácovej mamy;
- Klárkina výška; výška Jurkovej mamy;
- súčet čísel 2 a 3; súčet čísla 4 a súčinu čísel 2 a 5;
- maximálny prvok množiny $\{2, 7, 19\}$.

Vzťahy s jednoznačne určenými cieľmi v UML

UML má na modelovanie takýchto vzťahov dve možnosti:



Vzťah k jednoznačne určenému **objektu**
reprezentuje v UML vzťah s kardinalitou N:1 (má_matku).

Vzťah k jednoznačne určenej **hodnote**
reprezentuje v UML atribút (výška).

Vzťahy s jednoznačne určenými objektmi — predikát a axiómy

Takéto vzťahy môžeme popísať predikátom
a formulou pre existenciu a jednoznačnosť:

- Vzťah medzi dieťaťom a matkou môžeme vyjadriť napríklad predikátom `má_matku` s vlastnosťami existencie a jednoznačnosti:

  $$\forall x\, \exists y\, \texttt{má\_matku}(x, y)$$
  $$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2 \big((\texttt{má\_matku}(x, y_1) \land \texttt{má\_matku}(x, y_2)) \to y_1 \doteq y_2\big)$$

  alebo stručnejšie:

  $$\forall x\, \exists y \big(\texttt{má\_matku}(x, y) \land \forall y_1 (\texttt{má\_matku}(x, y_1) \to y_1 \doteq y)\big)$$

- Podobne súčet dvoch čísel (ak všetko v doméne sú čísla):

  $$\forall x\, \forall y\, \exists z \big(\texttt{súčet}(x, y, z) \land \forall z_1 (\texttt{súčet}(x, y, z_1) \to z_1 \doteq z)\big)$$

Vzťahy s jednoznačne určenými objektmi — použitie

Použitie v zložitejších formulách nie je veľmi pohodlné:

- *Bonifácova mama je vedkyňa.*

  $$\forall x(\texttt{má\_matku}(\texttt{Bonifác}, x) \to \texttt{vedec}(x))$$

  alebo

  $$\exists x(\texttt{má\_matku}(\texttt{Bonifác}, x) \land \texttt{vedec}(x))$$

  Výrok hovorí o konkrétnych objektoch (Bonifác a jeho mama), ale vo formule musíme použiť kvantifikátory.
- *Mama Klárkinej mamy má Bobyho.*

  $$\forall y \forall z\big((\texttt{má\_matku}(\texttt{Klárka}, y) \land \texttt{má\_matku}(y, z)) \to \texttt{má}(z, \texttt{Boby})\big)$$
- *Ak x delí y a z, delí aj ich súčet.*

  $$\forall x \forall y \forall z \forall u\big((\texttt{delí}(x, y) \land \texttt{delí}(x, z) \land \texttt{súčet}(y, z, u)) \\ \to \texttt{delí}(x, u)\big)$$

Binárne relácie, ktoré sú všade definované a jednoznačné sa nazývajú…

Funkcie a funkčné symboly

Binárne relácie, ktoré sú všade definované a jednoznačné
sa nazývajú zobrazenia alebo **funkcie**.

Keď f je funkcia a $(x, y) \in f$,
y sa nazýva **hodnota funkcie** f pre x
a **namiesto** y **píšeme** $f(x)$.

Reláciám zodpovedajú v logike prvého rádu predikátové symboly.
Dalo by sa zadefinovať, ako sa predikáty môžu používať ako funkcie,
ale bolo by to komplikované.

Namiesto toho jazyky logiky prvého rádu môžu obsahovať
mimologické symboly určené špeciálne na označovanie funkcií —
funkčné symboly.

Termy s funkčnými symbolmi

Vo formulách sa ani predikátové ani funkčné symboly nedajú použiť samé o sebe — potrebujú argumenty.

Funkčný symbol v jazyku má pevne daný počet argumentov — aritu (rovnako ako predikátové symboly).

Postupnosť symbolov

$$\mathit{funkčný\_symbol}(\mathit{term}_1, \dots, \mathit{term}_n)$$

označuje objekt —
hodnotu funkcie, ktorú označuje $\mathit{funkčný\_symbol}$,
pre n-ticu objektov, ktoré označujú $\mathit{term}_1, \ldots, \mathit{term}_n$.
Je to teda term, nie formula.

Funkčné symboly sa teda líšia od predikátových,
pretože $\mathit{predikátový\_symbol}(\mathit{term}_1, \dots, \mathit{term}_n)$ je formula
a jej významom je pravdivostná hodnota, nie objekt.

Funkčný symbol namiesto predikátového v atómoch

Napríklad predikát $\mathtt{má\_matku}^2$
môžeme nahradiť funkčným symbolom $\mathtt{matka}^1$.

Term $\mathtt{matka}(\mathtt{Klárka})$ potom označuje objekt — Klárkinu mamu.

Výrok *Klárkina mama je Magda*
namiesto predikátového atómu $\mathtt{má\_matku}(\mathtt{Klárka}, \mathtt{Magda})$
vyjadríme rovnostným atómom $\mathtt{matka}(\mathtt{Klárka}) \doteq \mathtt{Magda}$.

Výrok *Bonifácova mama je vedkyňa*
namiesto $\forall x(\mathtt{má\_matku}(\mathtt{Bonifác}, x) \to \mathtt{vedec}(x))$
vyjadríme atómom $\mathtt{vedec}(\mathtt{matka}(\mathtt{Bonifác}))$.

Ekvivalentne, ale zbytočne nepohodlne:
$\forall x(\mathtt{matka}(\mathtt{Bonifác}) \doteq x \to \mathtt{vedec}(x))$
$\exists x(\mathtt{matka}(\mathtt{Bonifác}) \doteq x \land \mathtt{vedec}(x))$

Podobne, keď $\mathtt{súčet}^3$ nahradíme funkčným symbolom $+^2$:

$$\begin{aligned} \mathtt{súčet}(2, 3, 5) \quad &\rightsquigarrow \quad +(2, 3) \doteq 5 \\ \forall x(\mathtt{súčet}(7, 3, x) \to \mathtt{delí}(5, x)) \quad &\rightsquigarrow \quad \mathtt{delí}(5, +(7, 3)) \end{aligned}$$

Použitie termov s funkčnými symbolmi

Term s funkčným symbolom môžeme použiť všade, kde sme používali doterajšie termy (indivíduové konštanty a premenné):

- ako argument predikátu alebo rovnosti vo formule:
  - $\forall x\ \mathtt{rodič}(\mathtt{matka}(x), x)$ — *Každého mama je jeho rodičom*;
  - $\forall x \neg\, \mathtt{matka}(x) \doteq x$ — *Nikto nie je sám sebe mamou*;
- ako argument funkčného symbolu:
  - $\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Bonifác}))$ —
    term označujúci *mamu Bonifácovej mamy*
    (Bonifácovu starú mamu z maminej strany);
  - $\mathtt{má}(\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Klárka})), \mathtt{Boby})$ —
    atóm formalizujúci výrok
    Klárkina stará mama z maminej strany má Bobyho;
  - $\exists x \neg >(\mathtt{výška}(\mathtt{matka}(x)), \mathtt{výška}(x))$ —
    Niečia mama nie je vyššia ako on/ona;
  - $\forall x \forall y \forall z\big((\mathtt{delí}(x, y) \land \mathtt{delí}(x, z)) \to \mathtt{delí}(x, +(y, z))\big)$ —
    Deliteľ sčítancov delí aj ich súčet.

Infixová notácia

Dohoda 10.1

Atómy s binárnymi predikátovými symbolmi a termy s binárnymi funkčnými symbolmi, ktoré sa skladajú z neabecedných znakov, môžeme skrátene zapisovať infixovo. Teda

- Pre každý neabecedný binárny predikátový symbol $\diamond^2$ môžeme atóm $\diamond(t_1, t_2)$ skrátiť na $t_1 \diamond t_2$ (bez zátvoriek).
- Pre každý neabecedný funkčný symbol $\circ^2$ môžeme term $\circ(t_1, t_2)$ skrátiť na $(t_1 \circ t_2)$ (so zátvorkami).

Posledné dva príklady sa sprehľadnia:

- $\exists x \neg \mathtt{výška}(\mathtt{matka}(x)) > \mathtt{výška}(x)$ — *Niečia mama nie je vyššia ako on/ona.*
- $\forall x \forall y \forall z \big((x \mid y \land x \mid z) \to x \mid (y + z)\big)$ — *Deliteľ sčítancov delí aj ich súčet.*

Zamýšľaný definičný obor a obor hodnôt funkčných symbolov

Niektoré termy s funkčnými symbolmi môžeme vytvoriť:

$$\mathtt{výška}(\mathtt{výška}(\mathtt{Jurko})), \qquad \mathtt{matka}(\mathtt{výška}(\mathtt{Klárka})),$$

ale nemusia dávať intuitívny zmysel.

Zamýšľaný definičný obor a obor hodnôt funkcie označenej funkčným symbolom môžeme vyjadriť formulami:

$$\forall x\big(\mathtt{človek}(x) \to \big(\mathtt{človek}(\mathtt{matka}(x)) \land \mathtt{žena}(\mathtt{matka}(x))\big)\big)$$
$$\forall x\big(\mathtt{človek}(x) \to \mathtt{dĺžka}(\mathtt{výška}(x))\big)$$

Nič to ale nezmení na tom, že funkcia je definovaná na celej doméne.

Funkčné symboly — zhrnutie

	Funkčný symbol	Predikátový symbol
aplikácia na argumenty	$\mathtt{matka}(t)$	$\mathtt{rodič}(t_1, t_2)$
syntaktický typ aplikácie	term	atóm
význam aplikácie	objekt (*matka t*)	pravdivostná hodnota (výroku t_1 *je rodičom* t_2)
podmienky použitia	$\mathtt{matka}(t)$ existuje a je jednoznačne určená pre každé t	t_2 nemusí existovať ani byť jednoznačne určená pre každé t_1
reťazenie aplikácií	$\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(t))$	$\cancel{\mathtt{rodič}(t_1, \mathtt{rodič}(t_2, t_3))}$ $(\mathtt{rodič}(t_1, t_2) \land \mathtt{rodič}(t_2, t_3))$

Logika prvého rádu

Syntax logiky prvého rádu

Definícia syntaxe logiky prvého rádu

Keď do definícií doterajšej relačnej logiky prvého rádu
zahrnieme funkčné symboly,
dostaneme konečne (úplnú) logiku prvého rádu.

Musíme:

- pridať funkčné symboly medzi symboly jazyka,
- rozšíriť termy o aplikácie funkčných symbolov a vnáranie.

Atomické formuly a formuly zadefinujeme zdanlivo rovnako ako doteraz, ale využitím nových termov.

Symboly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 10.2

Symbolmi jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ sú:

indivíduové premenné z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$;

mimologické symboly:

indivíduové konštanty z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$,

funkčné symboly z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$,

predikátové symboly z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly: *logické spojky* — unárna $\neg$ a binárne $\wedge$, $\vee$ a $\rightarrow$,

symbol rovnosti $\doteq$ a *kvantifikátory* — *existenčný* $\exists$ a *všeobecný* $\forall$;

pomocné symboly: (,) a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné. Logické ani pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $s \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}^{+}$.

Označovanie symbolov jazyka logiky prvého rádu

Dohoda 10.3

Keď budeme hovoriť o ľubovoľných symboloch jazyka $\mathcal{L}$, budeme ich zvyčajne označovať nasledovnými meta premennými podľa potreby s dolnými indexmi:
indivíduové premenné budeme označovať malými písmenami z konca abecedy (x, y, z); indivíduové konštanty malými písmenami zo začiatku abecedy (a, b, c, d, e); funkčné symboly písmenami f, g, h; predikátové symboly písmenami P, Q, R.

Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolov, konkrétnych aj označených meta premennými: $\mathtt{pes}^1$, $<^2$, P^5, $\mathtt{matka}^1$, f^2.

Termy jazyka logiky prvého rádu

Keďže argumentmi funkčných symbolov sú termy, ktoré môžu tiež obsahovať funkčné symboly, musíme termy zadefinovať **induktívne**.

Definícia 10.4

Množina $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ ***termov*** jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

i. každá indivíduová premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ patrí do $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ (teda $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$);
ii. každá indivíduová konštanta $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ patrí do $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ (teda $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$);
iii. ak f je funkčný symbol s aritou n a $t_1, \dots, t_n$ patria do $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $f(t_1, \dots, t_n)$ patrí do $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ je ***term*** jazyka $\mathcal{L}$ a nič iné nie je termom jazyka $\mathcal{L}$.

Dohoda 10.5

Termy označujeme písmenami t, s, r s prípadnými dolnými indexmi.

Príklad 10.6

Nech $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Jurko}, \mathtt{Iveta}\}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, x, y, z, u_1, v_1, x_1, y_1, \dots\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{matka}^1, \mathtt{výška}^1\}$.

Podľa i. a ii. bodu definície sú termami: $\mathtt{Jurko}$, $\mathtt{Iveta}$, u, v, x, …

Podľa iii. bodu definície sú termami:
$\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko})$, $\mathtt{matka}(\mathtt{Iveta})$,
$\mathtt{matka}(u)$, $\mathtt{matka}(v)$, …
$\mathtt{výška}(\mathtt{Jurko})$, $\mathtt{výška}(\mathtt{Iveta})$,
$\mathtt{výška}(u)$, $\mathtt{výška}(v)$, …
$\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko}))$,
$\mathtt{matka}(\mathtt{výška}(\mathtt{Jurko}))$,
$\mathtt{výška}(\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko}))$,
$\mathtt{výška}(\mathtt{výška}(\mathtt{Jurko}))$, …,
$\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(x)))$, …

Atomické formuly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 10.7 (Atomické formuly)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$, kde t_1 a t_2 sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$. Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Znenie tejto definície sa takmer nezmenilo, ale zmenili sa pojmy *term* a *jazyk*, ktoré sa v nej používajú. Definuje preto iné postupnosti symbolov ako doteraz.

Formuly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 10.8

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých ***formúl*** jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

i. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. Inak povedané, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

ii. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju ***negácia*** formuly A.

iii. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne ***konjunkcia***, ***disjunkcia*** a ***implikácia*** formúl A a B.

iv. Ak x je indivíduová premenná a A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne ***existenčná*** a ***všeobecná kvantifikácia*** formuly A vzhľadom na x.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

Skracovanie zápisu formúl

Dohoda 10.9

Zápis formúl môžeme skracovať nasledujúcim spôsobom:

- Negáciu rovnostného atómu $\neg s \doteq t$ skrátene zapisujeme $s \not\doteq t$.
- Ak $\circ \in \{\land, \lor\}$, tak $((A \circ B) \circ C)$ môžeme skrátiť na $(A \circ B \circ C)$.
- Binárnym spojkám priradíme **prioritu**:
  najvyššiu prioritu má $\land$, **strednú** $\lor$, **najnižšiu** $\to$.
  Ak spojka $\circ$ má **vyššiu** prioritu ako $\diamond$, tak v každej formule môžeme podformulu $((A \circ B) \diamond X)$ skrátiť na $(A \circ B \diamond X)$ a podformulu $(X \diamond (A \circ B))$ skrátiť na $(X \diamond A \circ B)$.
- Vonkajší pár zátvoriek okolo celej formuly môžeme vždy vynechať, napr. $(\forall x(a \doteq x \lor P(x)) \to P(b))$ skrátime na $\forall x(a \doteq x \lor P(x)) \to P(b)$.

⚠ **Neodstraňujeme** (ale ani nepridávame) zátvorky okolo priamych podformúl negácie a kvantifikátorov, ani okolo implikácie vnorenej v implikácii.

Príklad 10.10

Formulu

$$\Big(\exists x\,\forall y\big(S(x) \land \big(P(y) \to ((\neg Z(x,y) \lor R(x,y)) \lor Q(y))\big)\big) \to \forall x\big((U(x) \land V(x)) \to Q(x)\big)\Big)$$

môžeme maximálne skrátiť na

Príklad 10.10

Formulu

$$\bigl(\exists x\, \forall y\bigl(S(x) \land \bigl(P(y) \to ((\neg Z(x,y) \lor R(x,y)) \lor Q(y))\bigr)\bigr) \to \forall x\bigl((U(x) \land V(x)) \to Q(x)\bigr)\bigr)$$

môžeme maximálne skrátiť na

$$\exists x\, \forall y\bigl(S(x) \land \bigl(P(y) \to \neg Z(x,y) \lor R(x,y) \lor Q(y)\bigr)\bigr) \to \forall x\bigl(U(x) \land V(x) \to Q(x)\bigr).$$

Skrátený zápis

$$P(a,x) \land (x \doteq b \lor P(x,b) \lor R(x)) \to P(f(a),x) \lor b \doteq f(x) \land P(a,b)$$

vznikol z formuly

Skracovanie zápisu formúl

Príklad 10.10

Formulu

$$\big(\exists x\,\forall y\big(S(x)\land\big(P(y)\to((\neg Z(x,y)\lor R(x,y))\lor Q(y))\big)\big)\to\forall x\big((U(x)\land V(x))\to Q(x)\big)\big)$$

môžeme maximálne skrátiť na

$$\exists x\,\forall y\big(S(x)\land\big(P(y)\to\neg Z(x,y)\lor R(x,y)\lor Q(y)\big)\big)\to\forall x\big(U(x)\land V(x)\to Q(x)\big).$$

Skrátený zápis

$$P(a,x)\land(x\doteq b\lor P(x,b)\lor R(x))\to P(f(a),x)\lor b\doteq f(x)\land P(a,b)$$

vznikol z formuly

$$\big(\big(P(a,x)\land((x\doteq b\lor P(x,b))\lor R(x))\big)\to\big(P(f(a),x)\lor(b\doteq f(x)\land P(a,b))\big)\big).$$

Logika prvého rádu

Sémantika logiky prvého rádu

Štruktúry

Rozšírme štruktúru tak, aby dávala význam aj funkčným symbolom:

Definícia 10.11

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame každú dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

doména D štruktúry $\mathcal{M}$ je ľubovoľná **neprázdna** množina;

interpretačná funkcia i štruktúry $\mathcal{M}$ je zobrazenie, ktoré

- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- **každému funkčnému symbolu f jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje funkciu $i(f) : D^n \to D$;**
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Príklad 10.12

Nájdime štruktúru pre jazyk $\mathcal{L}$, v ktorom $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, z, x_1, y_1, \ldots\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Klárka}, \mathtt{Jurko}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{matka}^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{rodič}^2, \mathtt{žena}^1\}$.

Riešenie

Štruktúrou pre tento jazyk môže byť napríklad $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👧}_{\mathrm{K}}, \text{👦}_{\mathrm{J}}, \text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}\},\\
i(\mathtt{Klárka}) &= \text{👧}_{\mathrm{K}}, \quad i(\mathtt{Jurko}) = \text{👦}_{\mathrm{J}}\\
i(\mathtt{matka}) &= \{(\text{👧}_{\mathrm{K}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{👦}_{\mathrm{J}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}), (\text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{🌍}), (\text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}), (\text{🌍}, \text{🌍})\}\\
i(\mathtt{žena}) &= \{\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👧}_{\mathrm{K}}, \text{🌍}\}\\
i(\mathtt{rodič}) &= \{(\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👧}_{\mathrm{K}}), (\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👦}_{\mathrm{J}}), (\text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{👦}_{\mathrm{J}}), (\text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👩}_{\mathrm{M}})\}
\end{aligned}$$

Všimnite si, že $i(\mathtt{matka})$ je skutočne funkcia na celej doméne.

Ohodnotenie premenných

Zmena definície štruktúry neovplyvňuje ohodnotenia premenných.

Definícia 10.13

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie indivíduových premenných je ľubovoľná funkcia $e : \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to D$ (priraďuje premenným prvky domény).

Nech ďalej v je indivíduová premenná z $\mathcal{L}$ a v je prvok D.
Zápis $e(x/v)$ označuje ohodnotenie e' indivíduových premenných, pre ktoré platí:

- $e'(x) = v$;
- $e'(y) = e(y)$, ak y je iná premenná ako x.

Hodnota termu

Termy s funkčnými symbolmi môžu byť vnorené,
vyhodnocujeme ich rekurzívne:

Definícia 10.14

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie premenných.
Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e je prvok z D označovaný $t^{\mathcal{M}}[e]$ a zadefinovaný induktívne pre všetky premenné x, konštanty a, každú aritu n, všetky funkčné symboly f s aritou n, a všetky termy $t_1, \ldots, t_n$ nasledovne:

$$x^{\mathcal{M}}[e] = e(x),$$
$$a^{\mathcal{M}}[e] = i(a),$$
$$\big(f(t_1, \dots, t_n)\big)^{\mathcal{M}}[e] = i(f)\big(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\big).$$

Hodnoty termov

Príklad 10.15

V štruktúre $\mathcal{M} = (\{\faFemale_{\mathsf{K}}, \faChild_{\mathsf{J}}, \faFemale_{\mathsf{M}}, \faFemale_{\mathsf{I}}, \faMale_{\mathsf{T}}, \faGlobe\}, i)$, $i(\mathtt{Klárka}) = \faFemale_{\mathsf{K}}$, $i(\mathtt{Jurko}) = \faChild_{\mathsf{J}}$, $i(\mathtt{matka}) = \{(\faFemale_{\mathsf{K}}, \faFemale_{\mathsf{M}}), (\faChild_{\mathsf{J}}, \faFemale_{\mathsf{M}}), (\faFemale_{\mathsf{M}}, \faFemale_{\mathsf{I}}), (\faFemale_{\mathsf{I}}, \faGlobe), (\faMale_{\mathsf{T}}, \faGlobe), (\faGlobe, \faGlobe)\}$ pri ohodnotení $e = \{x \mapsto \faChild_{\mathsf{J}}, y \mapsto \faFemale_{\mathsf{M}}, \ldots\}$ tieto termy:

$\mathtt{Klárka}$, $\quad x$, $\quad \mathtt{matka}(\mathtt{Klárka})$, $\quad \mathtt{matka}(y)$, $\quad \mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko}))$.

Príklad 10.15

V štruktúre $\mathcal{M} = (\{\text{👧}_{\mathrm{K}}, \text{🧒}_{\mathrm{J}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}\}, i)$, $i(\mathtt{Klárka}) = \text{👧}_{\mathrm{K}}$, $i(\mathtt{Jurko}) = \text{🧒}_{\mathrm{J}}$, $i(\mathtt{matka}) = \{(\text{👧}_{\mathrm{K}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{🧒}_{\mathrm{J}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}), (\text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{🌍}), (\text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}), (\text{🌍}, \text{🌍})\}$ pri ohodnotení $e = \{x \mapsto \text{🧒}_{\mathrm{J}}, y \mapsto \text{👩}_{\mathrm{M}}, \ldots\}$ tieto termy:

$\mathtt{Klárka}$, x, $\mathtt{matka}(\mathtt{Klárka})$, $\mathtt{matka}(y)$, $\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko}))$.

Riešenie

$$\mathtt{Klárka}^{\mathcal{M}}[e] = i(\mathtt{Klárka}) = \text{👧}_{\mathrm{K}} \qquad x^{\mathcal{M}}[e] = e(x) = \text{🧒}_{\mathrm{J}}$$

$$\begin{aligned}
\big(\mathtt{matka}(\mathtt{Klárka})\big)^{\mathcal{M}}[e] &= i(\mathtt{matka})\big(\mathtt{Klárka}^{\mathcal{M}}[e]\big) \\
&= i(\mathtt{matka})(\text{👧}_{\mathrm{K}}) = \text{👩}_{\mathrm{M}} \\
\big(\mathtt{matka}(y)\big)^{\mathcal{M}}[e] &= i(\mathtt{matka})\big(y^{\mathcal{M}}[e]\big) = i(\mathtt{matka})\big(e(y)\big) \\
&= i(\mathtt{matka})(\text{👩}_{\mathrm{M}}) = \text{👩}_{\mathrm{I}} \\
\big(\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Jurko}))\big)^{\mathcal{M}}[e] &= i(\mathtt{matka})\big(i(\mathtt{matka})\big(i(\mathtt{Jurko})\big)\big) = \text{👩}_{\mathrm{I}}
\end{aligned}$$

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 10.16

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, e je ohodnotenie premenných. Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu X pri ohodnotení e***
(skrátene $\mathcal{M} \models X[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x\, A[e]$ vtt pre nejaký prvok $m \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x\, A[e]$ vtt pre každý prvok $m \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \dots, t_n$, všetky premenné x a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$.

Ďalšie pojmy

Pojmy:

- pravdivosť uzavretej formuly v štruktúre,
- pravdivosť teórie v štruktúre,
- splniteľnosť,
- nesplniteľnosť,
- platná formula,
- prvorádové vyplývanie

definujeme analogicky ako v relačnej logike prvého rádu.

Príklad 10.17 (Pravdivosť formúl v štruktúre)

V štruktúre $\mathcal{M} = (\{\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👩}_{\mathrm{K}}, \text{🧒}_{\mathrm{J}}, \text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}\}, i)$, kde

$$i(\mathtt{Klárka}) = \text{👩}_{\mathrm{K}}, \quad i(\mathtt{Jurko}) = \text{🧒}_{\mathrm{J}}$$

$$i(\mathtt{matka}) = \{(\text{👩}_{\mathrm{K}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{🧒}_{\mathrm{J}}, \text{👩}_{\mathrm{M}}), (\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}), (\text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{🌍}), (\text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🌍}), (\text{🌍}, \text{🌍})\}$$

$$i(\mathtt{žena}) = \{\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👩}_{\mathrm{K}}, \text{🌍}\}$$

$$i(\mathtt{rodič}) = \{(\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{👩}_{\mathrm{K}}), (\text{👩}_{\mathrm{M}}, \text{🧒}_{\mathrm{J}}), (\text{👨}_{\mathrm{T}}, \text{🧒}_{\mathrm{J}}), (\text{👩}_{\mathrm{I}}, \text{👩}_{\mathrm{M}})\}$$

máme napríklad

$$\mathcal{M} \models \forall x\, \mathtt{žena}(\mathtt{matka}(x))$$

$$\mathcal{M} \models \forall x\, \forall y (\mathtt{žena}(x) \land \mathtt{rodič}(x, y) \to \mathtt{matka}(y) \doteq x)$$

ale

$$\mathcal{M} \not\models \forall x\, \mathtt{rodič}(\mathtt{matka}(x), x)$$

Tablá pre logiku prvého rádu

Jednotný zápis označených formúl — α a β

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula je ***typu α*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly A a B.
Takéto formuly označujeme písmenom α; α_1 označuje príslušnú formulu zo stredného stĺpca a α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(A \land B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{F}(A \lor B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{F}(A \to B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{T}\neg A$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}A$
$\mathbf{F}\neg A$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}A$

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula je ***typu β*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly A a B.
Takéto formuly označujeme písmenom β; β_1 označuje príslušnú formulu zo stredného stĺpca a β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(A \land B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{F}B$
$\mathbf{T}(A \lor B)$	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{T}B$
$\mathbf{T}(A \to B)$	$\mathbf{F}A$	$\mathbf{T}B$

Jednotný zápis označených formúl — γ a δ

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu γ)

Označená formula je ***typu*** γ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejakú formulu A a indivíduovú premennú x.
Takéto formuly označujeme $\gamma(x)$ a pre ľubovoľný term t substituovateľný za x v A príslušnú formulu z pravého stĺpca označujeme $\gamma_1(t)$.

$\gamma(x)$	$\gamma_1(t)$
$\mathbf{F}\, \exists x\, A$	$\mathbf{F} A\{x \mapsto t\}$
$\mathbf{T}\, \forall x\, A$	$\mathbf{T} A\{x \mapsto t\}$

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu δ)

Označená formula je ***typu*** δ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejakú formulu A a indivíduovú premennú x.
Takéto formuly označujeme $\delta(x)$ a pre ľubovoľnú premennú y substituovateľnú za x v A príslušnú formulu z pravého stĺpca označujeme $\delta_1(y)$.

$\delta(x)$	$\delta_1(y)$
$\mathbf{T}\, \exists x\, A$	$\mathbf{T} A\{x \mapsto y\}$
$\mathbf{F}\, \forall x\, A$	$\mathbf{F} A\{x \mapsto y\}$

Tablá pre logiku prvého rádu

Vlastnosti rovnosti

Rovnosť

Pravidlá pre α a β formuly

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

umožňujú pracovať s logickými spojkami.

Pravidlá pre γ a δ formuly

$$\frac{\gamma(x)}{\gamma_1(t)} \qquad \frac{\delta(x)}{\delta_1(y)}$$

umožňujú pracovať s kvantifikátormi.

V jazyku je ešte jeden logický symbol — rovnosť ($\doteq$).

Žiadne pravidlo s ňou zatiaľ nepracuje.

Čo potrebujeme, aby rovnosť mala očakávané vlastnosti?

Axiomatizácia rovnosti

Rovnosť by sme mohli popísať teóriou — axiomatizovať ju.

Rovnosť je reflexívna, symetrická a tranzitívna:

$$\forall x\, x \doteq x \qquad \forall x\, \forall y (x \doteq y \to y \doteq x)$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z (x \doteq y \land y \doteq z \to x \doteq z)$$

Navyše má vlastnosť kongruencie: Pre každý pár rovnajúcich sa k-tic argumentov je hodnota každého funkčného symbolu f^k je rovnaká:

$$\forall x_1\, \forall y_1 \dots \forall x_k\, \forall y_k \big(x_1 \doteq y_1 \land \dots \land x_k \doteq y_k \to$$
$$f(x_1, \dots, x_k) \doteq f(y_1, \dots, y_k)\big)$$

a každý predikátový symbol P^k je
na oboch k-ticiach splnený alebo na oboch nesplnený:

$$\forall x_1\, \forall y_1 \dots \forall x_k\, \forall y_k \big(x_1 \doteq y_1 \land \dots \land x_k \doteq y_k \to$$
$$(P(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow P(y_1, \dots, y_k))\big).$$

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

1. $\mathbf{T}\,\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$ $\qquad S^+$
2. $\mathbf{T}\,\mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), \mathtt{O}) \doteq \mathtt{K}$ $\qquad S^+$
3. $\mathbf{F}\,\mathtt{pd}(\mathtt{M}, \mathtt{O}) \doteq \mathtt{K}$ $\qquad S^+$

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

1. $\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$ $\quad S^+$
2. $\mathbf{T}\, \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), \mathtt{0}) \doteq \mathtt{K}$ $\quad S^+$
3. $\mathbf{F}\, \mathtt{pd}(\mathtt{M}, \mathtt{0}) \doteq \mathtt{K}$ $\quad S^+$
4. $\mathbf{T}\, \forall x_1\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(x_1 \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(x_1, x_2) \doteq \mathtt{pd}(y_1, y_2)\big)$ $\quad$ Kong

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

1.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$	S^+
2.	$\mathbf{T}\, \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
3.	$\mathbf{F}\, \mathtt{pd}(\mathtt{M}, 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
4.	$\mathbf{T}\, \forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big(x_1 \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(x_1, x_2) \doteq \mathtt{pd}(y_1, y_2)\big)$	Kong
5.	$\mathbf{T}\, \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathtt{pd}(y_1, y_2)\big)$	$\gamma 4\{x_1 \mapsto \mathtt{m}(\mathtt{J})\}$
6.	$\mathbf{T}\, \forall x_2 \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 5\{y_1 \mapsto \mathtt{M}\}$
7.	$\mathbf{T}\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 6\{x_2 \mapsto 0\}$
8.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, 0)$	$\gamma 7\{y_2 \mapsto 0\}$

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

1.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$	S^+
2.	$\mathbf{T}\, \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
3.	$\mathbf{F}\, \mathtt{pd}(\mathtt{M}, 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
4.	$\mathbf{T}\, \forall x_1\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(x_1 \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(x_1, x_2) \doteq \mathtt{pd}(y_1, y_2)\big)$	Kong
5.	$\mathbf{T}\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathtt{pd}(y_1, y_2)\big)$	$\gamma 4\{x_1 \mapsto \mathtt{m}(\mathtt{J})\}$
6.	$\mathbf{T}\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land x_2 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 5\{y_1 \mapsto \mathtt{M}\}$
7.	$\mathbf{T}\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq y_2 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 6\{x_2 \mapsto 0\}$
8.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0 \to \mathtt{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{pd}(\mathtt{M}, 0)$	$\gamma 7\{y_2 \mapsto 0\}$

9. $\mathbf{F}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0$ $\quad \beta 8$

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} & S^+ \\
2. & \mathbf{T}\, \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{K} & S^+ \\
3. & \mathbf{F}\, \mathrm{pd}(\mathtt{M}, 0) \doteq \mathtt{K} & S^+ \\
4. & \mathbf{T}\, \forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big(x_1 \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(x_1, x_2) \doteq \mathrm{pd}(y_1, y_2)\big) & \text{Kong} \\
5. & \mathbf{T}\, \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathrm{pd}(y_1, y_2)\big) & \gamma 4\{x_1 \mapsto \mathtt{m}(\mathtt{J})\} \\
6. & \mathbf{T}\, \forall x_2 \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big) & \gamma 5\{y_1 \mapsto \mathtt{M}\} \\
7. & \mathbf{T}\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big) & \gamma 6\{x_2 \mapsto 0\} \\
8. & \mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, 0) & \gamma 7\{y_2 \mapsto 0\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
9. & \mathbf{F}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0 & \beta 8 \\
10. & \mathbf{F}\, 0 \doteq 0 & \text{NCS}9, 1 \\
11. & \mathbf{T}\, \forall x\, x \doteq x & \text{Refl} \\
12. & \mathbf{T}\, 0 \doteq 0 & \gamma 11\{x \mapsto 0\} \\
 & * \; 10, 12 &
\end{array}
$$

Dôkazy s axiomatizovanou rovnosťou

Skúsme niečo dokázať:

1.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$	S^+
2.	$\mathbf{T}\, \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
3.	$\mathbf{F}\, \mathrm{pd}(\mathtt{M}, 0) \doteq \mathtt{K}$	S^+
4.	$\mathbf{T}\, \forall x_1\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(x_1 \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(x_1, x_2) \doteq \mathrm{pd}(y_1, y_2)\big)$	Kong
5.	$\mathbf{T}\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq y_1 \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathrm{pd}(y_1, y_2)\big)$	$\gamma 4\{x_1 \mapsto \mathtt{m}(\mathtt{J})\}$
6.	$\mathbf{T}\, \forall x_2\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land x_2 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x_2) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 5\{y_1 \mapsto \mathtt{M}\}$
7.	$\mathbf{T}\, \forall y_2 \big(\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq y_2 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, y_2)\big)$	$\gamma 6\{x_2 \mapsto 0\}$
8.	$\mathbf{T}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0 \to \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, 0)$	$\gamma 7\{y_2 \mapsto 0\}$

Left branch:

9.	$\mathbf{F}\, \mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M} \land 0 \doteq 0$	$\beta 8$
10.	$\mathbf{F}\, 0 \doteq 0$	NCS9, 1
11.	$\mathbf{T}\, \forall x\, x \doteq x$	Refl
12.	$\mathbf{T}\, 0 \doteq 0$	$\gamma 11\{x \mapsto 0\}$
	$*\ 10, 12$	

Right branch:

13.	$\mathbf{T}\, \mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), 0) \doteq \mathrm{pd}(\mathtt{M}, 0)$	$\beta 8$
	$\vdots$	

Axiómy či pravidlá?

Doteraz sme mali dokazovací systém s mnohými odvodzovacími pravidlami (α, β, $\dots$) a žiadnymi axiómami. Po pridaní axióm pre rovnosť máme systém, kde sú aj pravidlá, aj axiómy. Náš dokazovací systém je *korektný* aj *úplný*. Nie je však jediný taký.

Alternatívny dokazovací systém pre výrokovú logiku (Hilbert):

- Jediné pravidlo: modus ponens.
- Axiómy (A, B, C sú formuly):
  $A \to (B \to A)$
  $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Korektných aj úplných dokazovacích systémov môžeme navrhnúť hocikoľko. Z hľadiska logických vlastností budú „ekvivalentné“, môžu sa však v praxi líšiť výpočtovými vlastnosťami a (ne)intuitívnosťou.

Tablá pre logiku prvého rádu

Tablové pravidlá pre rovnosť

Leibnitzovo pravidlo

Dôkazy s axiómami rovnosti sú prácne aj v jednoduchých prípadoch.

Kongruencia sa však dá induktívne zovšeobecniť na ľubovoľné formuly — *Leibnitzovo pravidlo*:
V každej formule môžeme nahradiť rovné rovným.

1. $\mathbf{T}\,\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq \mathtt{M}$ $\quad S^+$
2. $\mathbf{T}\,\mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), \mathtt{0}) \doteq \mathtt{K}$ $\quad S^+$
3. $\mathbf{F}\,\mathrm{pd}(\mathtt{M}, \mathtt{0}) \doteq \mathtt{K}$ $\quad S^+$
4. $\mathbf{T}\,\mathrm{pd}(\mathtt{M}, \mathtt{0}) \doteq \mathtt{K}$ $\quad$ Leibnitz$1, 2$

$*\ 3, 4$

Ale naozaj?

1. $\mathbf{T}\,\mathtt{m}(\mathtt{J}) \doteq x$ $\quad S^+$
2. $\mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(\mathtt{m}(\mathtt{J}), x) \doteq \mathtt{K}$ $\quad S^+$
3. $\mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(x, x) \doteq \mathtt{K}$ $\quad$ Leibnitz?$1, 2$

znova konflikt s viazanou premennou

Leibnitzovo pravidlo presne

Leibnitzovo pravidlo: V každej formule môžeme nahradiť rovné rovným.

- Čo znamená „nahradiť“?
- Kedy môžeme nahrádzať bez ohrozenia vyplývania?

Substitúcia $\{x \mapsto t\}$ nahrádza premennú termom.

Pomocou **substituovateľnosti** sme vylúčili prípady, keď by substitúcia odvodila nesprávne „dôsledky“.

Leibnitzovo pravidlo potrebuje nahradiť jeden term t_1 druhým t_2.
Dá sa to popísať substitúciami?
Potom by sme možno nepotrebovali špeciálne podmienky pre korektnosť Leibnitzovho pravidla.

Leibnitzovo pravidlo presne

Podľa rovnosti $\mathtt{m(J)} \doteq \mathtt{M}$ chceme nahradiť term $t_1 = \mathtt{m(J)}$ termom $t_2 = \mathtt{M}$ v označenej formule:

$$A_1^+ = \mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(\mathtt{m(J)}, x) \doteq \mathtt{K}$$

1. Predstavíme si, že na mieste nahrádzaného termu je nová premenná q:
   $A^+ = \mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(q, x) \doteq \mathtt{K}$
2. Pôvodná formula A_1^+ vznikne z A^+ substitúciou t_1 za q:
   $A_1^+ = \mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(\mathtt{m(J)}, x) \doteq \mathtt{K}$
   $= A^+\{q \mapsto \mathtt{m(J)}\}$
3. Nová formula A_2^+ vznikne z A^+ substitúciou t_2 za q:
   $A_2^+ = A^+\{q \mapsto \mathtt{M}\}$
   $= \mathbf{T}\,\exists x\,\mathrm{pd}(\mathtt{M}, x) \doteq \mathtt{K}$

Leibnitzovo pravidlo pomocou substitúcií

Vyjadrenie Leibnitzovho pravidla pomocou substitúcií:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_2 \\ A^+\{q \mapsto t_1\}\end{array}}{A^+\{q \mapsto t_2\}}$$

pre všetky termy t_1 a t_2, označené formuly A^+ a premenné q také, že t_1 a t_2 sú substituovateľné za q v A^+.

Prečo kladieme podmienku aj na t_1? Ak by sa t_1 nachádzal v A^+ na mieste, kde by niektorá jeho premenná mala viazaný výskyt, jeho nahradením by sme mohli zmeniť význam formuly.

Leibnitzovo pravidlo — obmedzenia

Automaticky dostávame **rozumné obmedzenia**:

Nemôžeme nahradiť term $t_1 = \mathtt{m(J)}$ termom $t_2 = \underline{x}$ vo formule:

$$\begin{aligned} A_1^+ &= \mathbf{T}\,\exists \underline{x}\, \mathrm{pd}(\mathtt{m(J)}, \underline{x}) \doteq \mathtt{K} \\ &= A^+\{q \mapsto \mathtt{m(J)}\} \\ A^+ &= \mathbf{T}\,\exists \underline{x}\, \mathrm{pd}(q, \underline{x}) \doteq \mathtt{K} \end{aligned}$$

lebo $\underline{x}$ **nie je substituovateľná** za q v A^+ ($\underline{x}$ je viazaná v mieste voľného výskytu q).

Vlastnosti rovnosti a Leibnitzovo pravidlo

Leibnitzovým pravidlom odvodíme kongruenciu, nie však reflexivitu.
Po pridaní pravidla pre reflexivitu odvodíme aj symetriu a tranzitivitu.

$$\frac{}{\mathbf{T}\, t_0 \doteq t_0}$$

Symetriu potom odvodíme postupnosťou krokov:

1. $\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_2$		
2. $\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_1$	reflexivita	$\mathbf{T}\, q \doteq t_1 \{q \mapsto t_1\}$
3. $\mathbf{T}\, t_2 \doteq t_1$	Leibnitz 1 a 2	$\mathbf{T}\, q \doteq t_1 \{q \mapsto t_2\}$

Tranzitivitu odvodíme:

1. $\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_2$		$\mathbf{T}\, t_1 \doteq q \{q \mapsto t_2\}$
2. $\mathbf{T}\, t_2 \doteq t_3$		
3. $\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_3$	Leibnitz 2 a 1	$\mathbf{T}\, t_1 \doteq q \{q \mapsto t_3\}$

Tablá pre logiku prvého rádu

Tablá pre logiku prvého rádu

Tablové pravidlá pre logiku prvého rádu

Definícia 11.1

Tablovými pravidlami pre logiku prvého rádu sú:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2} \qquad\qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

$$\frac{\gamma(x)}{\gamma_1(t)} \qquad\qquad \frac{\delta(x)}{\delta_1(y)}$$

$$\frac{}{\mathbf{T}\, t_0 \doteq t_0} \qquad\qquad \frac{\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_2 \quad A^+\{x \mapsto t_1\}}{A^+\{x \mapsto t_2\}}$$

pre všetky ozn. formuly α, β, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ príslušných typov a všetky im zodpovedajúce α_1, α_2, β_1, β_2, $\gamma_1(t)$ a $\delta_1(y)$, všetky termy t_0, všetky ozn. formuly A^+, všetky termy t_1 a t_2 substituovateľné za x do príslušnej A^+.

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 11.2

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skr. ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a je skonštruovaný induktívne podľa nasledovných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a ℓ je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{S^+}$**:** Ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.
  - $\boldsymbol{\alpha}$**:** Ak sa na vetve π_ℓ (ceste z koreňa do ℓ) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$**:** Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti ℓ pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 11.2 (pokračovanie)

- **γ:** Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula $\gamma(x)$, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci $\gamma_1(t)$ pre ľubovoľný term t substituovateľný za x v $\gamma_1(x)$.
- **δ:** Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula $\delta(x)$, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci $\delta_1(y)$ pre ľubovoľnú premennú y, ktorá je substitovateľná za x v $\delta_1(x)$ a nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve π_ℓ.
- **L:** Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje $\mathbf{T}\, t_1 \doteq t_2$ pre nejaké termy t_1 a t_2 a označená formula $A^+\{x \mapsto t_1\}$ pre nejakú A^+, v ktorej sú t_1 a t_2 substituovateľné za x, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci $A^+\{x \mapsto t_2\}$.
- **R:** Ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci označenú formulu $\mathbf{T}\, t \doteq t$ pre ľubovoľný term t.

Korektnosť prvorádových tabiel

Veta 11.3 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl.
Ak existuje uzavreté tablo $\mathcal{T}$ pre S^+, tak je množina S^+ nesplniteľná.

Ak je množina S^+ splniteľná, každé tablo pre S^+ má otvorenú vetvu.

Pri prvorádovom table však nemožno hovoriť o úplnosti otvorenej vetvy (pravidlá γ, δ, **L**, **R** umožňujú pridať nekonečne veľa formúl).

Prečo vyžadujeme neprázdnu doménu?

Uvažujme v table formulu $\mathbf{T}\,\exists x\, x \doteq x$. Možno na ňu aplikovať pravidlo δ, dostaneme $\mathbf{T}\, u \doteq u$. Ak je doména vždy neprázdna, táto formula je splnená v ľubovoľnej štruktúre pri ohodnotení $e = \{u \mapsto d\}$, kde d je ľub. prvok domény. Ak však doména môže byť prázdna, formula splnená niekedy nebude: v štruktúrach s prázdnou doménou nevieme zmysluplne hovoriť o žiadnom ohodnotení premenných. To spochybňuje pravidlo δ — sotva je legitímne ho použiť, ak nemožno ohodnotiť novú voľnú premennú, ktorú pridáva do tabla.

Problém tiež nastane pri formule $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)$. Táto formula je dokázateľná v mnohých bežných dokazovacích systémoch, ale nebola by splnená v štruktúrach s prázdnou doménou, teda ani platná. Tieto dokazovacie systémy by sme tak museli komplikovane upravovať.

Vlastnosti kvantifikátorov

Zoslabenie všeobecného kvantifikátora a premenovanie premenných

Tvrdenie 12.1

Pre každú formulu A a všetky premenné x a y také,
že y je substituovateľná za x v A máme:

i. $\forall x\, A \models \exists x\, A$

ii. $\forall x\, A \models \forall y\, A\{x \mapsto y\}$

iii. $\exists x\, A \models \exists y\, A\{x \mapsto y\}$

iv. $\forall x\, A \models \exists y\, A\{x \mapsto y\}$

v. $\models \forall y(\forall x\, A \to A\{x \mapsto y\})$

vi. $\models \exists y(A\{x \mapsto y\} \to \forall x\, A)$

vii. $\neg \exists y\, A\{x \mapsto y\} \models \forall y(\exists x\, A \to A\{x \mapsto y\})$

Prvorádovo ekvivalentné formuly

Definícia 12.2

Formuly X a Y sú *prvorádovo ekvivalentné*, skrátene $X \Leftrightarrow Y$, vtt pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ a každé ohodnotenie e máme $\mathcal{M} \models X[e]$ vtt $\mathcal{M} \models Y[e]$.

Tvrdenie 12.3

Nech X a Y sú formuly a nech $\mathrm{free}(X) \cup \mathrm{free}(Y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

a) $X \Leftrightarrow Y$;

b) *formula $\forall x_1 \cdots \forall x_n (X \leftrightarrow Y)$ je platná;*

c) *existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}(X \leftrightarrow Y)\}$.*

De Morganove a distributívne zákony pre kvantifikátory

Tvrdenie 12.4

Pre každú formulu A a každú premennú x máme:

i. $\neg \forall x\, A \Leftrightarrow \exists x \neg A$,

ii. $\neg \exists x\, A \Leftrightarrow \forall x \neg A$.

Tvrdenie 12.5

Pre všetky formuly A a B a každú premennú x máme:

i. $\exists x(A \lor B) \Leftrightarrow (\exists x\, A \lor \exists x\, B)$

ii. $\forall x(A \land B) \Leftrightarrow (\forall x\, A \land \forall x\, B)$

iii. $\exists x(A \land B) \vDash (\exists x\, A \land \exists x\, B)$

iv. $(\forall x\, A \lor \forall x\, B) \vDash \forall x(A \lor B)$

Obrátené vyplývania k iii. a iv. neplatia!

Špeciálne distributívne zákony

Tvrdenie 12.6

Pre každú formulu A, každú premennú x
*a pre každú formulu C, v ktorej sa x **nevyskytuje voľná**:*

i. $\exists x(A \lor C) \Leftrightarrow \exists x\, A \lor C$

ii. $\forall x(A \lor C) \Leftrightarrow \forall x\, A \lor C$

iii. $\forall x(A \land C) \Leftrightarrow \forall x\, A \land C$

iv. $\exists x(A \land C) \Leftrightarrow \exists x\, A \land C$

v. $\exists x\, C \Leftrightarrow C$

vi. $\exists x(A \to C) \Leftrightarrow (\forall x\, A \to C)$

vii. $\forall x(A \to C) \Leftrightarrow (\exists x\, A \to C)$

viii. $\forall x(C \to A) \Leftrightarrow (C \to \forall x\, A)$

ix. $\exists x(C \to A) \Leftrightarrow (C \to \exists x\, A)$

x. $\forall x\, C \Leftrightarrow C$