Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2025/2026
Posledná aktualizácia: 24. februára 2026

Obsah

1. prednáška

Úvod
Atomické formuly a štruktúry

---

0 Úvod

0.1 O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať

- správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania
- od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

Historicky sa logika venovala najmä filozofickým hľadiskám, dnes kladieme väčší dôraz na výpočtové aspekty.

Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. (Úzko súvisí s jazykom: čím viac možno v jazyku vyjadriť, tým ťažšie je definovať či algoritmicky rozhodovať logické vyplývanie.)

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

Príklad 0.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „*Môžu* noví známi prísť na párty tak, aby boli *všetky podmienky splnené*? Ak áno, v akých zostavách?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n	n			
n	n	p	p	p	p	n
n	p	n	p	p	n	
n	p	p	p	p	n	
p	n	n	p	p	p	p
p	n	p	p	n		
p	p	n	p	p	p	p
p	p	p	p	n		

Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

⊨ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,

⊭ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 0.2. Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé *vždy, keď* je pravdivá teória?

V našom príklade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky P0, …, P3 splnené?

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie P0, P1, P2, P3 sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.
- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.

⋮

Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 0.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, ak má vlastnosť, že *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver *je logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, existuje *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú *predpoklady pravdivé*, ale *záver je nepravdivý*.

Príklad 0.5. Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

K	J	S	
n	n	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Matematická logika

Matematická logika

- modeluje jazyk, jeho sémantiku a usudzovanie ako matematické objekty (množiny, postupnosti, zobrazenia, stromy);
- rieši logické problémy matematickými metódami.

Rozvinula sa koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia hlavne vďaka *Hilbertovmu programu* — snahe vybudovať základy matematiky bez sporov a paradoxov, mechanizovať overovanie dôkazov alebo priamo hľadanie matematických viet.

Matematická logika a informatika

Informatika sa vyvinula z matematickej logiky (J. von Neumann, A. Turing, A. Church, …)

Väčšina *programovacích jazykov* obsahuje logické prvky:

- `all(x > m for x in arr)`,

fragmenty niektorých sú priamo preložiteľné na logické formuly:

- `SELECT t1.x FROM t1 JOIN t2 ON t1.y = t2.y WHERE t1.y > 25`,

niektoré (Prolog, Datalog) sú podmnožinou logických jazykov.

Metódami logiky sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Matematická logika a informatika

Veľa otázok v logike je *algoritmických*:

- Možno usudzovanie pre danú triedu jazykov automatizovať?
- Dá sa nájsť dôkaz pre tvrdenia s takouto štruktúrou dostatočne rýchlym algoritmom?

Výpočtová logika hľadá algoritmické riešenia problémov pre rôzne triedy logických jazykov. Aplikovateľné na iné ťažké problémy (grafové, plánovacie, vysvetľovanie, . . .) vyjadriteľné v príslušnej triede.

Logika umožňuje hľadať všeobecné odpovede.

- Ak možno vlastnosť grafu popísať *prvorádovou formulou s najviac dvomi kvantifikátormi* a zároveň ..., existuje pomerne rýchly algoritmus, ktorý rozhodne, či daný graf túto vlastnosť má.

Matematická logika a informatika

Automatizované dokazovače: napr. v r. 1996 počítač dokázal Robbins Conjecture, ktorá odolávala ľudskej snahe 60 rokov.

Donedávna malo automatizované dokazovanie nepresvedčivé výsledky a niektoré oblasti výskumu boli relatívne mŕtve, napr. expertné systémy.

S novými modelmi umelej inteligencie však ožíva, napr. AlphaProof rieši 84 % úloh z IMO ’24 (formalizovaných).

Formálne jazyky a formalizácia

Matematická logika nepracuje s prirodzeným jazykom, ale s jeho zjednodušenými modelmi — *formálnymi jazykmi*.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax a sémantika.
- Obchádzajú problémy prirodzeného jazyka:

viacznačnosť slov, nejednoznačné syntaktické vzťahy, zložitá syntaktická analýza, výnimky, obraty s ustáleným významom, …

- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …

Problémy z iných oblastí opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *sformalizovať*, a potom naň môžeme použiť aparát mat. logiky.

Formalizácia vyžaduje cvik — trocha veda, trocha umenie.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Chlieb sa predáva v potravinách. Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  > Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; …
  >
  > — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. ⇝ $k = 3 \cdot m$, $k + m = 12$
Koľko rokov majú Karol a Mária?

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty. $\mathsf{p}(\mathsf{K}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{J}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{S})$

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim. $\mathsf{p}(\mathsf{K}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{S})$

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. $\mathsf{p}(\mathsf{J}) \to \mathsf{p}(\mathsf{K})$

P3: Sarah nepôjde bez Jima. $\neg\mathsf{p}(\mathsf{J}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{S})$

Všimnite si, koľko vetných konštrukcií v slovenčine zodpovedá jednej formálnej spojke $\to$.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorými sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — G. Frege, G. Peano, C. S. Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$$

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky,

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

- kalkul elementárnej aritmetiky: na počítanie s číslami, zlomkami,
- kalkul lineárnej algebry: riešenie lineárnych rovníc,
- kalkul matematickej analýzy: derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc

$\vdots$

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

Symbolické vs. aproximačné výpočty

Symbolický výpočet:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \\ (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Symboly majú jasný význam, výpočet pozostáva z overiteľných krokov, ktoré samé osebe „dávajú zmysel“. Aproximačný výpočet:

$$\begin{aligned} &x^2 = 2 \\ &x \in (1, 2) \\ &x \in (1.4, 1.5) \\ &\quad\ldots \\ &x \approx 1.4142 \end{aligned}$$

Kroky výpočtu nenesú samé osebe zmysel, sú to len aritmetické operácie, výsledok je nespoľahlivý.

Symbolické vs. aproximačné výpočty

Symbolické:

- úprava výrazov
- derivovanie elem. funkcií
- matematické dôkazy
- expertné systémy(kľúč na určovanie druhu húb)

Aproximačné / data-driven:

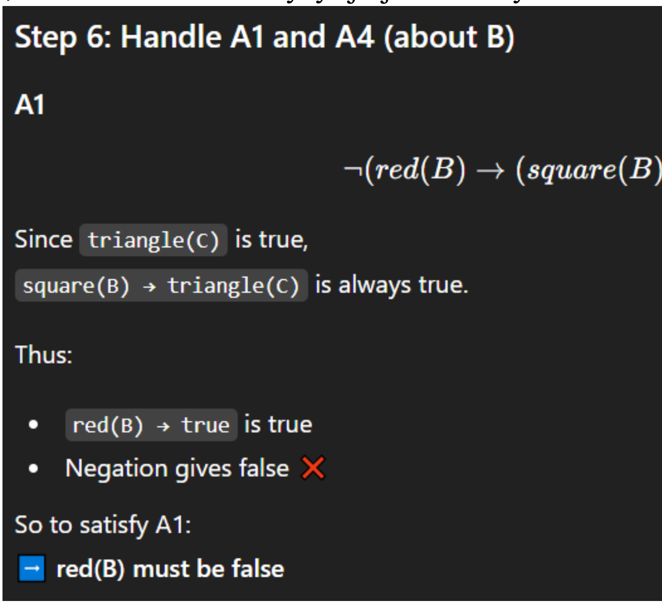
- numerická optimalizácia

- strojové učenie
- neurónové siete
- LLM (ChatGPT)

Symbolické vs. aproximačné výpočty

Nevýhodou výpočtov založených na dátach je chýbajúca kontrola nad smerovaním výpočtu a nemožnosť pochopenia/overenia.

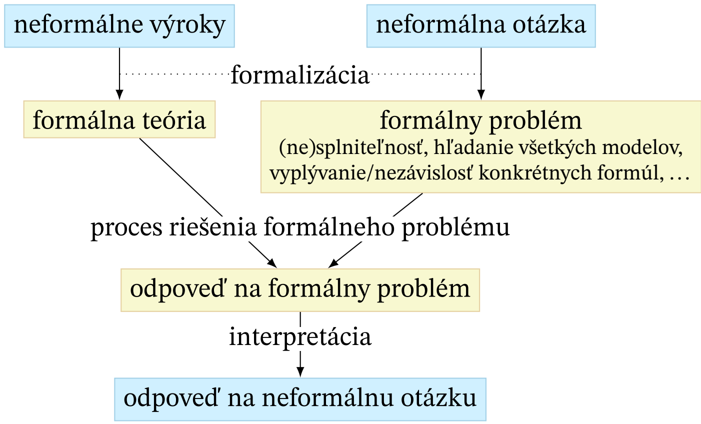
Napr. ChatGPT generuje text, ktorý je **„pravdepodobný“** (vzhľadom na texty v trénovacích vstupoch). Nevie merať ani overovať správnosť. Na začiatku nezvládal ani sčítanie jednociferných čísel; užitočnosť a spoľahlivosť LLM výrazne stúpne, ak majú prístup ku kalkulačke, ktorá vie robiť symbolickú aritmetiku. Gemini Deep Think získal 35 bodov zo 42 (83 %) z neformalizovaných úloh z IMO ’25, ale LLM stále robia chyby aj v jednoduchých výrokovologických úvahách.



ChatGPT/GPT-5.2, 6. 2. 2026

V kontraste s tým **symbolické kalkuly garantujú správnosť**. Ukážeme si dva (tablá a rezolvenciu), existuje mnoho ďalších (napr. AlphaProof používa Lean).

Schéma riešenia problémov pomocou logiky



0.2 O kurzoch LPI a UdML

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

Prevedieme vás základmi matematickej a výpočtovej logiky pre (postupne čoraz zložitejšie) fragmenty jazykov logiky prvého rádu.

Teoretická časť:

- Matematické definície logických pojmov (výrok, model, logický dôsledok, dôkaz, …)
- *Dôkazy* ich vlastností

Praktická časť

- *Dátové štruktúry* na reprezentáciu logických objektov
- *Algoritmické* riešenie logických problémov
- *Formalizácia* rôznych problémov v logických jazykoch a ich *riešenie* nástrojmi na riešenie logických problémov

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — je popísaná na oficiálnych webových stránkach predmetov:

1-AIN-412 https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Logic_for_CS

1-INF-210 http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~mazak/vyucba/udml/

1 Atomické formuly a štruktúry

1.1 Výroky

Problémy s výrokmi

Čo je *výrok*? Oznamovacia veta,

- ktorej sa dá priradiť pravdivostná hodnota.
- pre ktorú má zmysel otázka na jej platnosť, správnosť, pravdivosť.

Ukážeme si, prečo je formalizácia pomocou výrokov nedostatočná.

- Nech x je kladné reálne číslo. Potom $x^2 > 0$.
- Počet hviezd je nepárny.
- Zajtra vznikne jadro hélia.
- Odteraz až navždy každú sekundu vznikne jadro hélia.

Problémy s výrokmi

- Postupnosť $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ je rastúca.
  - Je to výrok?
  - Ako vieme, ako bude postupnosť pokračovať?
  - Aký je význam troch bodiek ako symbolu? Môže byť súčasťou výroku popis algoritmu?
  - Môže byť výrok nekonečne dlhý?

Problémy s výrokmi

- Bu bayonot emas.
  - Znamená „toto nie je výrok“ v uzbečtine. Aký jazyk je prípustný?
  - Čo ak má v rôznych jazykoch ten istý reťazec rôzny význam?
  - Môže výrok hovoriť o sebe?

    Môže to viesť k paradoxom: Zoberme množinu X všetkých množín, ktoré *neobsahujú* samé seba. Je veta „X patrí do X“ výrok? Nemôže to byť ani pravda, ani nepravda, pritom to vyzerá ako neškodné matematické tvrdenie.

Problémy s výrokmi

Ako navrhnúť jazyk logiky?

- Bez akýchkoľvek odkazov na pravdivosť (ale zároveň aby pravdivosť bolo možné bez paradoxov neskôr definovať).

- Presný a jednoznačný: vieme pomocou jednoduchých pravidiel rozhodnúť, či reťazec je tvrdením v jazyku alebo nie.

- Logická štruktúra (spojky, kvantifikátory) musí byť oddelená od popisovaného sveta.

Jazyky logiky prvého rádu

Na tomto predmete postupne vybudujeme *logiku prvého rádu* — triedu (rodinu) formálnych logických jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)
- mechanizmus priraďovania významu

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, ktorá odkazuje na popisovaný svet. Pomocou nej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu (atómy) zodpovedajú jednoduchým výrokom — nemajú žiadnu vnútornú logickú štruktúru.

Pozitívne jednoduché vety o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti jednotlivých konkrétnych pomenovaných objektov.

Príklady 1.1.

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobyho v piatok.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✗ Niekto je doma.

Atomické formuly sa skladajú z *indivíduových konštánt* a *predikátových symbolov*.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené *objekty*.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

Príklady 1.2. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduová konštanta:

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Yeti*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt z domény, ktorú chceme prvorádovým jazykom opísať,

- *môže* byť pomenovaný aj *viacerými* indivíduovými konštantami (napr. Prva_prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- *nemusí* mať žiadne meno.

Predikátové symboly a arita

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré označujú *vlastnosti alebo vzťahy*.

Zodpovedajú

- prísudkom v slovenských vetách,
- množinám alebo reláciám v matematike,
- identifikátorom funkcií s boolovskou návratovou hodnotou.

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Dohoda 1.3. Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad beží^1, vidí^2, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4.

$\text{pes}(x)$	x je pes
$\text{čierne}(x)$	x je čierne
$\text{beží}(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 1.5.

$\text{vidí}(x, y)$	x vidí y
$\text{dal}(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

Príklad 1.6. Predikát $\mathsf{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne.

Predikát $\mathsf{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$\mathit{predikát}(\mathit{argument}_1, \mathit{argument}_2, \dots, \mathit{argument}_k),$$

alebo

$$\mathit{argument}_1 \doteq \mathit{argument}_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a $\mathit{argument}_1, \ldots, \mathit{argument}_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty. Toto ešte nie je definícia. Nájdete ju v nižšie.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

V spojení s *návrhom vlastného jazyka* (konštánt a predikátov) je typicky *iteratívna*.

- Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.
- Zanedbávame nepodstatné detaily.
- Doterajší jazyk sa snažíme využiť čo najlepšie.

Návrh jazyka popri formalizácii

Príklad 1.7. A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

⇝ ~~d(Jarka)~~ ~~dalBobyho(Jarka, Milo)~~ dal(Jarka, Milo, Boby)

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

⇝ ~~dalBobyho(Milo, Evka)~~ dal(Milo, Evka, Boby)

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

⇝ ~~dalCilku(Evka, Jarka)~~ dal(Evka, Jarka, Cilka)

A_4: Boby je pes.

⇝ pes(Boby)

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred $\mathsf{dalBobyho}^2$ a $\mathsf{dalCilku}^2$).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

1.2 Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, ...).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, ...;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.8. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).

Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ ani $\mathcal{P}_\mathcal{L}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky/Formálnych jazykoch a automatoch by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka* $\mathcal{L}$ hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka* $\mathcal{L}$ alebo len *symboly jazyka* $\mathcal{L}$.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.9. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, v ktorom

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} &= \{\mathsf{Boby}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} &= \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1. \end{aligned}$$

Príklad 1.10. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{party}}$, kde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} &= \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} &= \{\mathsf{príde}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}}(\mathsf{príde}) = 1. \end{aligned}$$

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.11. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.12. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_\mathcal{L}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na UTI/FoJa by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_\mathcal{L} = \mathcal{C}_\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_\mathcal{L} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$\begin{aligned}&\{\, c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, c_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \,\}\\ &\qquad\qquad \cup \{\, P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}, \mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \,\}.\end{aligned}$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

Príklady atómov jazyka

Príklad 1.13. V jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{Boby}, \textsf{Cilka}, \textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{dal}, \textsf{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy (všetky uvedené sú navzájom *rôzne*):

$$\begin{aligned}\textsf{Boby} &\doteq \textsf{Boby} & \textsf{Cilka} &\doteq \textsf{Boby}\\ \textsf{Evka} &\doteq \textsf{Jarka} & \textsf{Boby} &\doteq \textsf{Cilka}\end{aligned}$$

a predikátové atómy:

$$\textsf{pes}(\textsf{Cilka}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Cilka}, \textsf{Milo}, \textsf{Boby}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Jarka}, \textsf{Evka}, \textsf{Milo}).$$

1.3 Štruktúry

Pravdivosť atomickej formuly

Ako popíšeme, že v nejakej situácii je pravdivá atomická formula príde(Kim), ale príde(Jim) a príde(Sarah) sú nepravdivé?

V stredoškolskom prístupe pravdepodobne príde(Kim) = 1, príde(Jim) = 0, príde(Sarah) = 0.

Čo ak chceme popísať viac situácií s rôznou pravdivosťou atómov?

Pravdepodobne by ste spravili tabuľku, podobnú tej, ktorú sme použili na začiatku prednášky:

príde(Kim)	príde(Jim)	príde(Sarah)
1	0	0
1	1	1
	…	

Pravdivosť atomickej formuly

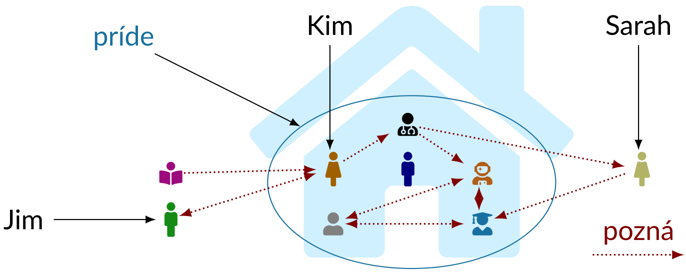
Stredoškolský prístup na niektoré účely funguje, ale:

- Nie je praktický pre veľa konštánt alebo viac-árne predikáty (predstavte si tabuľku, pre predikát pozná(x, y)).
- Nie je jasné čo za objekt je vlastne opis situácie. Riadok tabuľky? Nejaká sada rovností? Vieme nejak nazvať konkrétnu situáciu?
- Čo znamená, že niečo je pravda vo všetkých situáciách, alebo vo všetkých, ktoré majú nejakú vlastnosť?
- Ťažko by sa dal rozšíriť na formuly, ktoré budú hovoriť o tom, že niečo platí pre všetky objekty.

Tak ako sme sa dohodli, že formula je postupnosť symbolov s nejakými vlastnosťami, skúsme prísť na presnejšiu definíciu „popisu situácie“ a vyhodnocovania formúl v ňom.

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula príde(Kim) *pravdivá* v nejakej „reálnej“situácii



Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt k pomenúva konštanta Kim;
2. akú vlastnosť p označuje predikát príde;
3. či objekt k má vlastnosť p.

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať? Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré (podstatné) objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
- ▶ *interpretačná funkcia*;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý *objekt* z domény konštanta c pomenúva,

- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,

▶ tvoria *podmnožinu* domény;

- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne.

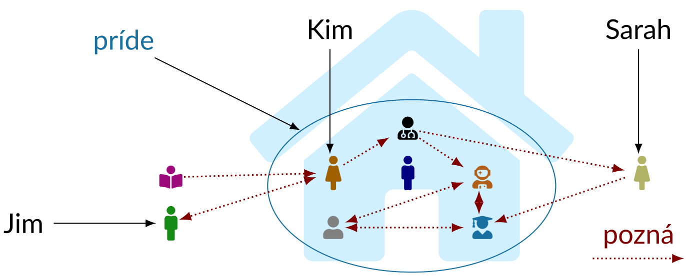
Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.14. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ (niekedy *interpretáciou* jazyka $\mathcal{L}$) nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 1.15. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ...

Príklad štruktúry



Príklad 1.16.

$$\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1), \quad D_1 = \{ \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$$i_1(\text{Kim}) = \quad i_1(\text{Jim}) = \quad i_1(\text{Sarah}) =$$

$$i_1(\text{príde}) = \{ \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$$i_1(\text{pozná}) = \{(\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), \ldots\}$$

Štruktúra ako informatický objekt

Štruktúru sme zadefinovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt sa podobá na štruktúru? *Databáza*.

Predikátové symboly jazyka ∼ zjednodušená databázová schéma (arita ∼ počet stĺpcov) Interpretácia predikátových symbolov ∼ konkrétne tabuľky s dátami (doména ∼ dátový typ) Interpretácia konštánt ∼ špeciálna tabuľka Logické formuly ∼ dopyty

$i_1(\text{príde}^1)$

1

$i_1(\text{pozná}^2)$

1	2
…	

$i(c)$

c	$i_1(c)$
Kim	
Jim	
Sarah	

ľudia, ktorí poznajú Kim:
$\{ x \mid \text{pozná}(x, \text{Kim}) \}$

ľudia, ktorých niekto pozná:
$\{ x \mid \exists y\, \text{pozná}(y, x) \}$

Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- *nesúvisí so zamýšľaným významom* interpretovaného jazyka;
- môže mať ľubovoľné prvky;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;

- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Príklad 1.17 (Štruktúra s nekonečnou doménou). $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$ $i(\mathsf{Kim}) = 0$
$i(\mathsf{Jim}) = 1$ $i(\mathsf{Sarah}) = 3$
$i(\mathsf{príde}) = \{\, 2n; n \in \mathbb{N} \,\}$ $i(\mathsf{pozná}) = \{\, (n, m); n, m \in \mathbb{N}, 2 \mid (n + m) \,\}$

1.4 Sémantika atomických formúl

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.18. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \ldots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \ldots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom* A.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že A *je nepravdivý* v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ *nie je modelom* A.

Príklad 1.19 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).

$$\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1), \quad D_1 = \{\ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$i_1(\mathsf{Kim}) =$ $i_1(\mathsf{Jim}) =$ $i_1(\mathsf{Sarah}) =$

$$i_1(\mathsf{príde}) = \{\ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$$i_1(\mathsf{pozná}) = \{(\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), (\ , \ ), \ldots\}$$

Atóm $\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$ *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$, lebo objekt $i(\mathsf{Kim}) =$ *je prvkom* množiny $i(\mathsf{príde})$.

Atóm $\mathsf{pozná}(\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim})$ *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \mathsf{pozná}(\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim})$, lebo $(i(\mathsf{Kim}), i(\mathsf{Jim})) = (\ , \ ) \in i(\mathsf{pozná})$.

Atóm $\mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Jim}$ *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models \mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Jim}$, lebo $i(\mathsf{Kim}) = \ \neq \ = i(\mathsf{Jim})$.

1.5 Zhrnutie

Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnou množinou indivíduových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$ (predikátové) a $c_1 \doteq c_2$ (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.
- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.
- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná n-tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.

2. prednáška

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
  - modely stavu sveta,
  - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
  - konštanty označujú objekty,
  - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

2 Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení *výrokovologickými spojkami*.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy *boolovská funkcia*, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad
Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz. Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby šiel na prechádzku s ich psom. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá sa zo školy vráti až o 19:30.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna. *Nezávisí* iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu *príčina-následok* medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je *funkciou* na pravdivostných hodnotách. □

2.1 Boolovské spojky

Negácia

Negácia ¬ je *unárna* spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že* … “, predpone *ne*-.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa *nezátvorkuje*.

Okolo argumentu negácie *nepridávame* zátvorky, ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2.

¬doma(Karol)	Karol *nie* je doma.
¬Jarka ≐ Karol	Jarka *nie* je Karol.
¬¬¬poslúcha(Cilka)	*Nie* je pravda, že *nie* je pravda, že Cilka *ne*poslúcha.
~~(¬doma(Karol))~~	nesprávna
~~¬(doma(Karol))~~	syntax

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

- $\neg\, \mathsf{Jarka} \doteq \mathsf{Karol}$ — Jarka *nie* je Karol.
- $\neg\, (\mathsf{Jarka} \doteq \mathsf{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie *„«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol“* je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu. Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách. Konštanty označujú objekty domény. Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3. Formulu $\neg\,\tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

Konjunkcia

Konjunkcia $\land$ je *binárna* spojka.
Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …
Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma *aj* Karol je doma.
  $(\mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Karol}))$
- Jarka je v škole, *no* Karol je doma.
  $(\mathsf{v\_škole}(\mathsf{Jarka}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Karol}))$
- *Ani* Jarka nie je doma, *ani* Karol tam nie je.
  $(\neg\mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \land \neg\mathsf{doma}(\mathsf{Karol}))$
- *Nielen* Jarka je chorá, *ale aj* Karol je chorý.
  $(\mathsf{chorý}(\mathsf{Jarka}) \land \mathsf{chorý}(\mathsf{Karol}))$

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- *Jarka aj Karol* sú doma.
  (doma(Jarka) ∧ doma(Karol))
- Karol *sa potkol a spadol*.
  (potkol_sa(Karol) ∧ spadol(Karol))
- Jarka dostala Bobyho *od mamy a otca*.
  (dostal(Jarka, Boby, mama) ∧ dostal(Jarka, Boby, otec))

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je *ruský špión*.
  (Rus(Eismann) ∧ špión(Eismann))
- Boby je *malý čierny psík*.
  ((malý(Boby) ∧ čierny(Boby)) ∧ pes(Boby))

Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť, ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu *stráca*:

- Jarka a Karol sa stretli *a* išli do kina. (stretli_sa(Jarka, Karol) ∧ (do_kina(Jarka) ∧ do_kina(Karol)))
- Jarka a Karol išli do kina *a* stretli sa. ((do_kina(Jarka)∧do_kina(Karol))∧ stretli_sa(Jarka, Karol))

Disjunkcia

Disjunkcia ∨ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či* v *inkluzívnom* význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež „*alebo aj/i*" a častice *respektíve*, *eventuálne*, *poprípade*, *prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma *alebo* Karol je doma.
  (doma(Jarka) ∨ doma(Karol))

- Bobyho kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol. $(\text{kúpe}(\text{Jarka}, \text{Boby}) \lor \text{kúpe}(\text{Karol}, \text{Boby}))$

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol. $(\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole. $(\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{v\_škole}(\text{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy alebo otca. $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{mama}) \lor \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{otec}))$
- Boby je čierny či tmavohnedý psík. $\big((\text{čierny}(\text{Boby}) \lor \text{tmavohnedý}(\text{Boby})) \land \text{pes}(\text{Boby})\big)$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*buď …, alebo …*“, „*buď …, buď …*“, „*alebo …, alebo …*“ *spravidla* (v matematike vždy) vyjadrujú *exkluzívnu* disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$\big((\text{vybitá}(\text{batéria}) \lor \text{svieti}(\text{kontrolka})) \land \\ \neg(\text{vybitá}(\text{batéria}) \land \text{svieti}(\text{kontrolka}))\big).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti, o ktorých vieme, že sú vzájomne výlučné (na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole. (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Viď *Znalosti na pozadí* ďalej.

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované. Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Boby šťastný.
  - ? $((\text{doma}(\text{Karol}) \land \text{doma}(\text{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Boby}))$
  - ? $(\text{doma}(\text{Karol}) \land (\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Boby})))$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Boby je šťastný.
  - ? $((\text{doma}(\text{Karol}) \lor \text{doma}(\text{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Boby}))$
  - ? $(\text{doma}(\text{Karol}) \lor (\text{doma}(\text{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Boby})))$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*):
  - Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Boby šťastný.
    $((\text{doma}(\text{Karol}) \land \text{doma}(\text{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Boby}))$
  - Doma je Karol alebo Jarka a Boby je šťastný.
    Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Boby je šťastný.
    $((\text{doma}(\text{Karol}) \lor \text{doma}(\text{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Boby}))$
- Kombinácie spojok *buď* …, *alebo* …; *alebo* …, *alebo* …; *aj* …, *aj* …; *ani* …, *ani* …; a pod.
  - Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Boby šťastný, alebo jedno aj druhé.
    $(\text{doma}(\text{Karol}) \land (\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Boby})))$
  - Alebo je doma Karol, alebo je doma Jarka a Boby je šťastný, alebo aj aj. $(\text{doma}(\text{Karol}) \lor (\text{doma}(\text{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Boby})))$

Jednoznačnosť rozkladu

Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Boby šťastný. Aj Karol je doma, aj Jarka je doma, alebo je Boby šťastný.

- Má čiarka vplyv na význam tvrdenia?
- Chybovosť pri čiarkach je vysoká, pravidlá nie sú jednoznačné a v čase sa menia.
- Pri formalizácii pomáhajú dodatočné znalosti (napr. o spoločnom fungovaní Karola, Jarky, Bobyho).

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na *najkratšiu nasledujúcu formulu — oblasť platnosti* tohto výskytu.

- $((\neg\, \mathsf{doma}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Jarka})) \lor \mathsf{šťastný}(\mathsf{Boby}))$
- $(\neg\, (\mathsf{doma}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Jarka})) \lor \mathsf{šťastný}(\mathsf{Boby}))$

Argument negácie je *uzátvorkovaný práve vtedy*, keď je *priamo* vytvorený binárnou spojkou:

- ✔ $\neg\neg(\mathsf{doma}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}))$
- ✘ $\neg(\neg(\mathsf{doma}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Jarka})))$

Interakcia negácie s alebo v slovenčine

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \lor \neg \mathsf{doma}(\mathsf{Karol}))$

B. $\neg(\mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \lor \mathsf{doma}(\mathsf{Karol}))$

Zvyčajné chápanie v slovenčine je A.
Formalizácii B zodpovedá „Nie je pravda, že je doma Jarka alebo Karol.“

2.2 Implikácia

Implikácia

Implikácia $\rightarrow$ je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak* …, *tak* ….

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A *antecedent* a podformule B *konzekvent*.

Formula vytvorená implikáciou je *nepravdivá* v *jedinom* prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak* …, *tak* …:

Napr. veta „*Ak* by *Sarah prišla, Jim* by *prišiel tiež*“ je nepravdivá, keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady, keď *ak* …, *tak* … vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

Keď …, *potom* … má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia tiež nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, *ak* príde Kim. Jim príde, *iba ak* príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú *podmienkami* hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi *podstatný rozdiel*:

Jim príde, <u>*ak* príde Kim.</u>
postačujúca podmienka

Jim príde, <u>*iba ak* príde Kim.</u>
nutná podmienka

Postačujúca podmienka

Jim príde, *ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *stačí*, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim *ne*príde.

- Zodpovedá teda ($\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})$).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \to A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *pokiaľ* príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, *iba ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *je nevyhnutné*, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim *ne*príde.
- Zodpovedá teda ($\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \to B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *iba pokiaľ* príde Kim.
- Jim príde *iba* spolu s Kim.
- Jim *ne*príde *bez* Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

> Z logiky prejdete, *ak* prídete na písomnú aj ústnu skúšku.

Stačilo by prísť na obe časti skúšky a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

> Z logiky prejdete, *iba ak* prídete na písomnú aj ústnu skúšku.

Prísť na obe časti skušky *je nutné*, ale na prejdenie to *nestačí*.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \to B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A, tak B.
- Ak A, tak aj B.
- Ak A, B.
- Pokiaľ A, [tak (aj)] B.
- A, iba/len/jedine ak/pokiaľ(/keď) B.
- A nastane iba spolu s B.
- A nenastane bez B.
- B, ak/pokiaľ(/keď) A.

2.3 Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim. (príde(Jim) $\leftrightarrow$ príde(Kim))
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne. (párne(n) $\leftrightarrow$ párne(n^2))
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus. (Nemec(Müller) $\leftrightarrow$ Rus(Stirlitz))

Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu, že A je nutnou *aj* postačujúcou podmienkou B.

Budeme ju preto považovať za *skratku* za formulu

$$\big((A \to B) \land (B \to A)\big).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je s ním Boby.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenia a považovať ich za skratky, podobne ako ekvivalenciu.

2.4 Správnosť a vernosť formalizácie

Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula, ktorá je pravdivá *za tých istých okolností* ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto *za tých istých okolností* znamená *v tých istých štruktúrach*.

Vernosť formalizácie

Výrok „*Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma*“ sa dá *správne* formalizovať ako

$$\neg(\mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \land \mathsf{doma}(\mathsf{Karol})),$$

ale rovnako *správna* je aj formalizácia

$$(\neg\mathsf{doma}(\mathsf{Jarka}) \lor \neg\mathsf{doma}(\mathsf{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň *uprednostňujeme* formalizácie, ktoré *vernejšie* zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu, a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so *znalosťami na pozadí* (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie *samostatnými formulami*.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia *vyznievajú* silnejšie, ako naozaj sú:

- „*Prílohou sú zemiaky* alebo *šalát*" môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- „*Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %*" znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočnú časť významu tvrdenia *nemôžeme poprieť* v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu „*Karol a Jarka sú doma*" dodáme „*Ale Karol nie je doma,*" dostaneme sa do sporu.

  Takže „*Karol je doma*" je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú *môžeme poprieť* dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva *konverzačná implikatúra* (H. P. Grice). *Nie je skutočnou časťou významu* pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát. *Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.*

  Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením. Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %. *Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.*

  Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete,* iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %,*“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením. Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.

Formalizácia je ťažká

- Jedna formula môže byť rozdelená do viac viet. Nech x je kladné reálne. Potom $x^2 > 0$.
- Niektoré tvrdenia sú vnútorne veľmi zložité. Postupnosť prvočísel usporiadaných podľa veľkosti je rastúca.
- Existujú jazyky, kde pre niektoré logické spojky neexistuje slovo, využívajú sa iné prvky gramatiky.
- Logickú spojku občas treba hádať z kontextu. It’s raining. The game is cancelled. It’s raining *and therefore* the game is cancelled.
- Aj intonácia môže ovplyvniť formalizáciu. I said I *might* go. I did not say I am surely going, I only suggested the possibility.

Formalizácia je ťažká

- Mnohé tvrdenia z praxe majú veľmi ďaleko od ideálnych jazykových schém (či už z hľadiska aplikácie gramatických pravidiel alebo formalizácie do presného jazyka).

  > „Na druhej strane si myslím, že Slovensko, niekedy žiaľbohu a niekedy je to aj chvalabohu, že žiaľbohu, na Slovensku predsa len tá pracovná sila je ešte stále lacnejšia a teraz, chvalabohu, že je lacnejšia.“

- Jednotlivci majú svojské vnímanie jazykových konštruktov založené na ich osobnej histórii a niekedy sa nezhodnú. Trénovacie množiny pre AI modely tak sú nekonzistentné a výsledok trénovania nemôže byť dokonalý.

Formalizácia je ťažká

Aj najlepšie súčasné AI systémy potrebujú s formalizáciou ľudskú pomoc. Z článku o AlphaGeometry (2025, parafrázované):

> A major weakness is the need to manually transform input problems from natural language into a domain-specific language. Automating this process is an active area of research. It is significantly more complicated than translation between human languages.
>
> Formalization frequently requires re-formulating the original problem into an alternative *equivalent* form, and disambiguating the nuances in the original problem statement. *Automated formalization thus demands significant background knowledge and problem-solving skills* on its own. Using Gemini prompts containing examples obtained manually, we are able to formalize 30 out of 39 formalizable IMO geometry problems.

2.5 Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme *zadefinovať* — presne a záväzne — ich *syntax* (skladbu) a *sémantiku* (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovej logiky

Definícia 2.4. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu* sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* $\doteq$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a c_1, …, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. príde(Sarah).
- Negácie atómov, napr. ¬príde(Sarah).

- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg$príde(Kim)$\lor$príde(Sarah)$)$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg($príde(Kim) $\land$ príde(Sarah)$) \to (\neg$príde(Kim) $\lor$ $\neg$príde(Sarah)$)\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?
Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Formuly jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. *Množina $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$* je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ je formulou z $\mathcal{E}_\mathcal{L}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ a nazývame ju *negácia* formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ nazývame *formulou* jazyka $\mathcal{L}$.

Dohoda 2.7. Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8. Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_\mathcal{L}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) \colon \mathcal{E}_\mathcal{L} \times \mathcal{E}_\mathcal{L} \to \mathcal{E}_\mathcal{L}$ je zobrazenie na formulách definované ako $(A \leftrightarrow B) = \big((A \to B) \land (B \to A)\big)$ pre každé dve formuly A a B.

Vytvárajúca postupnosť

Príklad 2.9. Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $\big(\neg\text{príde(Kim)} \to (\text{príde(Jim)} \lor \text{príde(Sarah)})\big)$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli *vytvoriť*?

Definícia 2.10. *Vytvárajúcou postupnosťou* nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovej logiky je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Indukcia (vzhľadom) na konštrukciu formuly

Veta 2.11 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)**.** *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_\mathcal{L}$). Ak platí súčasne*

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ má vlastnosť P,*

2.1. *ak formula A má vlastnosť P, tak aj $\neg A$ má vlastnosť P,*

2.2. *ak formuly A a B majú vlastnosť P, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_\mathcal{L}$).

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12. *Postupnosť symbolov A je výrokovologickou formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A.*

Osnova dôkazu. (⇒) *Indukciou na konštrukciu formuly*
(⇐) *Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti* □

vtt skracuje „*vtedy a len vtedy, keď*".

Výrokovologické formuly by sa dali alternatívne zadefinovať ako postupnosti symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktoré existuje vytvárajúca postupnosť nad $\mathcal{L}$.

Výhoda: Dĺžka vytvárajúcej postupnosti je číslo, tvrdenia o všetkých formulách sa potom dajú dokazovať matematickou alebo úplnou indukciou.

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly" takto?

Definícia „formúl" ⚠

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl" jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou" z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou" jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula" (príde(Jim) → príde(Kim) → ¬príde(Sarah))?

Formulu by sme mohli čítať ako A = (príde(Jim) → (príde(Kim) → ¬príde(Sarah))) alebo ako B = ((príde(Jim) → príde(Kim)) → ¬príde(Sarah)).

Čítanie A hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

Čítanie B hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí *v aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)**.** *Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- *X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna binárna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \to\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$$\begin{gathered}\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}),\ \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}),\ \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}),\ \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}),\\ \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}),\ (\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \wedge \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ ((\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \wedge \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\end{gathered}$$

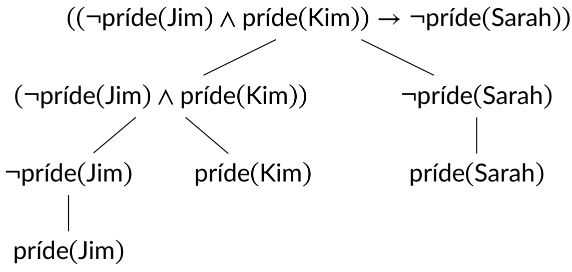
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné, *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom formuly

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Definícia 2.14. *Vytvárajúci strom* T formuly X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \; b \; B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl — Podformuly

Definícia 2.15 (Priama podformula)**.** Pre všetky formuly A a B:

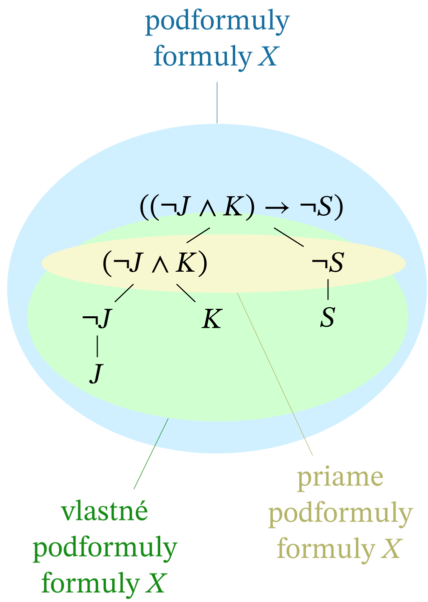
- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Definícia 2.16 (Podformula)**.** Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X, Y a Z:

- X je podformulou X.
- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Formula X je *vlastnou podformulou* formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

$X = ((\neg J \wedge K) \rightarrow \neg S)$



Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17. Aký je stupeň formuly $\big((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \wedge \neg(\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{pr}$

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme? Podobne ako formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly). Pre všetky formuly A a B a všetky n, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Každá atomická formula je stupňa 0.
- Ak formula A je stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak formula A je stupňa n_1 a formula B je stupňa n_2, tak formuly $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly (stručnejšie)). *Stupeň* $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Je táto funkcia dobre zadefinovaná? — Áno, vďaka jednoznačnosti rozkladu.

Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly). *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť P,*
2. indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

2.6 Sémantika výrokovologických formúl

Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovej logiky popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou *štruktúr*.

Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry sa takmer nemení:

Definícia 2.20. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia 2.21. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovej logiky. Reláciu *formula A je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$* ($\mathcal{M} \vDash A$) definujeme *induktívne* pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n$, a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \vDash c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \vDash P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \vDash \neg A$ vtt $\mathcal{M} \nvDash A$,
- $\mathcal{M} \vDash (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \vDash A$ a zároveň $\mathcal{M} \vDash B$,
- $\mathcal{M} \vDash (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \vDash A$ alebo $\mathcal{M} \vDash B$,
- $\mathcal{M} \vDash (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \nvDash A$ alebo $\mathcal{M} \vDash B$,

kde $\mathcal{M} \nvDash A$ skracuje A *nie je pravdivá v* $\mathcal{M}$.

Skratka *vtt* znamená „*vtedy a len vtedy, keď*“.

Informatická analógia:

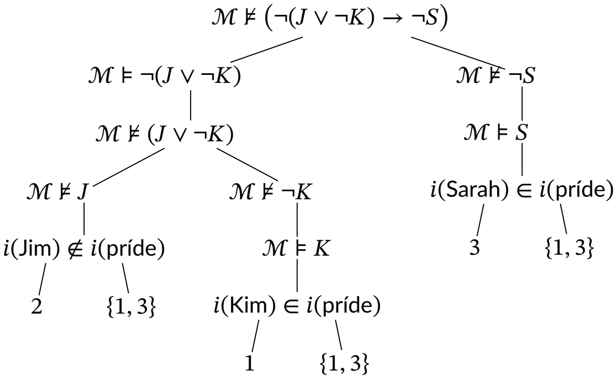
štruktúra	$\sim$	stav pamäte
formula	$\sim$	program
relácia $\models$	$\sim$	interpreter

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\text{Kim}) = 1$, $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$, $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \text{príde}(\text{Kim})$, $J = \text{príde}(\text{Jim})$ a $S = \text{príde}(\text{Sarah})$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\text{Kim}) = 1$, $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$, $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$.

Označme $K = \text{príde}(\text{Kim})$, $J = \text{príde}(\text{Jim})$ a $S = \text{príde}(\text{Sarah})$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	J	K	$\neg K$	$(J \lor \neg K)$	$\neg(J \lor \neg K)$	S	$\neg S$	$(\neg(J \lor \neg K) \to \neg S)$
$\mathcal{M}$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

V záhlaví tabuľky je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

Toto poznáte zo strednej školy, ale vieme jasnejšie pomenovať, čo sa deje.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá). *V akej štruktúre* $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula $\mathcal{M} \models \big((\text{príde}(\text{Jim}) \lor \neg\text{príde}(\text{Kim})) \to \neg\text{príde}(\text{Sarah})\big)$?

Označme $K = \text{príde}(\text{Kim})$, $J = \text{príde}(\text{Jim})$ a $S = \text{príde}(\text{Sarah})$.

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big((J \lor \neg K) \to \neg S\big)$

vtt $\mathcal{M} \not\models (J \lor \neg K)$ *alebo* $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ *a* $\mathcal{M} \not\models \neg K$, alebo $\mathcal{M} \models \neg S$

vtt $\mathcal{M} \not\models J$ *a* $\mathcal{M} \models K$, alebo $\mathcal{M} \not\models S$

vtt $i(\text{Jim}) \in i(\text{príde})$ a $i(\text{Kim}) \notin i(\text{príde})$, alebo $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

2.7 Teórie a ich modely

Teórie v neformálnej logike

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je *teória* súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 2.25. Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami. Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

Definícia 2.26. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 2.27.

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{&((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\} \end{aligned}$$

Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta, v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 2.28 (Model teórie o party).

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i),\\ &i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}, \qquad i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}, \qquad i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s},\\ &i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}; \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{M} \models ((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))\\ &\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \end{aligned}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Model teórie

Definícia 2.29 (Model)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je *pravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt *každá* formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je *modelom* T.

Teória T je *nepravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

2.8 Výrokovologické ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

$$\begin{aligned}T_{\text{party}} = \{&((\text{príde}(\text{Kim}) \lor \text{príde}(\text{Jim})) \lor \text{príde}(\text{Sarah})),\\ &(\text{príde}(\text{Kim}) \to \neg\text{príde}(\text{Sarah})),\\ &(\text{príde}(\text{Jim}) \to \text{príde}(\text{Kim})),\\ &(\text{príde}(\text{Sarah}) \to \text{príde}(\text{Jim}))\}\end{aligned}$$

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model, má aj nekonečne veľa ďalších:

$\mathcal{M}_1 = (\{\text{k}, \text{j}, \text{s}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_1' = (\{\text{k}, \text{j}, \text{s}, 0, 1\}, i_1')$	$\mathcal{M}_1'' = (\{2, 4, 6\}, i_1'')$	$\cdots$
$i_1(\text{Kim}) = \text{k}$	$i_1'(\text{Kim}) = \text{k}$	$i_1''(\text{Kim}) = 2$	
$i_1(\text{Jim}) = \text{j}$	$i_1'(\text{Jim}) = \text{j}$	$i_1''(\text{Jim}) = 4$	
$i_1(\text{Sarah}) = \text{s}$	$i_1'(\text{Sarah}) = \text{s}$	$i_1''(\text{Sarah}) = 6$	
$i_1(\text{príde}) = \{\text{k}, \text{j}\}$	$i_1'(\text{príde}) = \{\text{k}, \text{j}, 1\}$	$i_1''(\text{príde}) = \{2, 4\}$	

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\text{k}, \text{j}, \text{s}, \text{e}, \text{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\text{kj}, \text{s}\}, i_3)$
$i_1(\text{Kim}) = \text{k}$	$i_2(\text{Kim}) = 1$	$i_3(\text{Kim}) = \text{kj}$
$i_1(\text{Jim}) = \text{j}$	$i_2(\text{Jim}) = 2$	$i_3(\text{Jim}) = \text{kj}$
$i_1(\text{Sarah}) = \text{s}$	$i_2(\text{Sarah}) = 3$	$i_3(\text{Sarah}) = \text{s}$
$i_1(\text{príde}) = \{\text{k}, \text{j}, \text{e}\}$	$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\text{príde}) = \{\text{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\text{Kim} \doteq \text{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti *všetkých predikátových* atómov príde(Kim), príde(Jim), príde(Sarah).

V T_{party} *na ničom inom nezáleží.*

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathsf{kj}, \mathsf{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}$	$i_2(\mathsf{Kim}) = 1$	$i_3(\mathsf{Kim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}$	$i_2(\mathsf{Jim}) = 2$	$i_3(\mathsf{Jim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$	$i_2(\mathsf{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$
$i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}$	$i_2(\mathsf{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{kj}\}$

môžeme skonštruovať to isté *ohodnotenie predikátových atómov*:

$$\begin{aligned}
&v(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) = t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}),\\
&v(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) = t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}),\\
&v(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) = f && \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}).
\end{aligned}$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Výrokovologické formuly, teórie a ohodnotenia

Definícia 2.30. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré *neobsahujú symbol rovnosti*. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 2.31. Nech (f, t) je usporiadaná dvojica *pravdivostných hodnôt*, $f \neq t$, kde f predstavuje *nepravdu* a t predstavuje *pravdu*. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene *ohodnotením*, nazveme každé zobrazenie $v\colon \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivostné hodnoty môžu byť ľubovoľné, pokiaľ sú rôzne. Napríklad v unixovom shelli sa 0 chápe ako pravda a akákoľvek nenulové hodnoty ako nepravda. Aj v historických logických textoch 0 označovala pravdu.

Na tomto predmete sa však budeme držať súčasnej konvencie:

Dohoda 2.32. Ak neuvedieme inak, za dvojicu pravdivostných hodnôt (f, t) považujeme $(0, 1)$.

Odbočka: O rigoróznom prístupe

Snažíme sa vybudovať logiku „poriadnejšie" ako na strednej škole. Preto:

- Pravdivostnú hodnotu priraďujeme atómom pomocou ohodnotení (alebo predtým štruktúr).
  - ✗ $\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) = 1$ — Postupnosť symbolov sa nemôže rovnať číslu.
  - ✓ $v\big(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})\big) = 1$, kde v je výrokovologické ohodnotenie, ktoré súčasne priraďuje hodnoty aj všetkým ostatným atómom jazyka. Nie je problém, keď $v_1\big(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})\big) = 1$ a $v_2\big(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})\big) = 0$ pre nejaké ohodnotenie $v_2 \neq v_1$.
- Ohodnotenie v je definované *iba pre atómy*.
  - ✗ Hodnota $v\big((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \land \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\big)$ *nie je definovaná*.

Ako zistíme, či je zložená formula pravdivá pri nejakom výrokovologickom ohodnotení? Pomocou relácie $\models_p$ podobnej $\models$.

Pravdivosť formúl pri výrokovologickom ohodnotení

Definícia 2.33. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu *výrokovologická formula A je pravdivá pri ohodnotení v* ($v \models_p A$) definujeme *induktívne* pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \land B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \lor B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,

- $v \models_p (A \to B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde $v \not\models_p A$ skracuje *A nie je pravdivá vo v*.

Dolný index p v označení relácie $\models_p/\not\models_p$ označuje *propozičnú* (výrokovo-logickú) pravdivosť.

V čom je rozdiel oproti pravdivosti formuly v štruktúre ($\models$)?

- Pravdivosť predikátových atómov určuje ohodnotenie,nie štruktúra.
- Pre rovnostné atómy je $\models_p$ nedefinovaná.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 2.34. Vyhodnoťme formulu

$$X = \big((\mathsf{p}(\mathsf{Jim}) \lor \neg\mathsf{p}(\mathsf{Kim})\big) \to \mathsf{p}(\mathsf{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\mathsf{p}(\mathsf{Kim}) \mapsto t,\ \mathsf{p}(\mathsf{Jim}) \mapsto t,\ \mathsf{p}(\mathsf{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	p(Kim)	p(Jim)	p(Sarah)	¬p(Kim)	(p(Jim) ∨ ¬p(Kim))	X
v	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou

Definícia 2.35. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovo-logické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné na S* vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné* vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 2.36. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:*

$$v(A) = \begin{cases} t, & \textit{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \textit{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz. Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:

($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.

($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. □

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.37 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením). Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) = t \qquad v(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) = t \qquad v(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky, je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{Kim} \qquad i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{Jim} \qquad i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{Sarah}$$

predikát $\mathsf{príde}$ ako množinu tých c, pre ktoré $v(\mathsf{príde}(c)) = t$:

$$i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}\}$$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Ako zostrojíme štruktúru zhodnú s ohodnotením pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 2.38. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.*

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$
$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Štruktúram zo syntaktického materiálu sa hovorí *herbrandovské*.
Zhoda ohodnotenia a štruktúry je definované iba na *atómoch*.
Ako sa správajú na *zložitejších* formulách?

Zhoda na *všetkých* výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.39. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovej logiky, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.*

Dôkaz (indukciou na konštrukciu formuly). 1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.

1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_p X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$ podľa def. zhodnosti v a $\mathcal{M}$.

2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X. Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_p \neg X$ vtt (podľa def. $\models_p$) $v \not\models_p X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.

2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Dokážme ho pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické.

Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_p (X \to Y)$ vtt $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$.

Ďalej $v \vDash_{\mathrm{p}} (X \wedge Y)$ vtt $v \vDash_{\mathrm{p}} X$ a $v \vDash_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \vDash X$ a $\mathcal{M} \vDash Y$ vtt $\mathcal{M} \vDash (X \wedge Y)$.

Nakoniec $v \vDash_{\mathrm{p}} (X \vee Y)$ vtt $v \vDash_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \vDash_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \vDash X$ alebo $\mathcal{M} \vDash Y$ vtt $\mathcal{M} \vDash (X \vee Y)$. $\square$

Literatúra