

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

2. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Klúka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2024/2025

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 2. prednášky

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

 Boolovské spojky

 Implikácia

 Ekvivalencia

 Správnosť a vernosť formalizácie

 Syntax výrokovologických formúl

 Sémantika výrokovologických formúl

 Teórie a ich modely

 Výrokovologické ohodnotenia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
 - modely stavu sveta,
 - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
 - konštanty označujú objekty,
 - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení **výrokovologickými spojkami**.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy **boolovská funkcia**, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí **iba** od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* **nie je** výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* **nie je** výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby šiel na prechádzku s ich psom. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá sa zo školy vráti až o 19:30.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna.

Nezávisí iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu **príčina-následok** medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je **funkciou** na pravdivostných hodnotách.



Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Boolovské spojky

Negácia

Negácia \neg je **unárna** spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že ...*“, predpone *ne-*.

Ľubovoľne vnáratelná.

Formula vytvorená negáciou sa **nezátvorkuje**.

Okolo argumentu negácie **nepridávame** zátvorky,
ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2

$\neg \text{doma}(\text{Karol})$	Karol nie je doma.
$\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$	Jarka nie je Karol.
$\neg \neg \neg \text{poslúcha}(\text{Cilka})$	Nie je pravda, že nie je pravda, že Cilka neposlúcha .
$(\neg \text{doma}(\text{Karol}))$	nesprávna
$\neg(\text{doma}(\text{Karol}))$	syntax

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

✓ $\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$ — Jarka **nie** je Karol.

✗ $\neg (\text{Jarka} \doteq \text{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie

„*«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol*“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu.
Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách.
Konštanty označujú objekty domény.
Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3

Formulu $\neg \tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\equiv \sigma$.

Konjunkcia

Konjunkcia \wedge je **binárna** spojka.

Zodpovedá spojкам *a, aj, i, tiež, ale, avšak, no, hoci, ani, ba (aj/ani), ...*

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma **aj** Karol je doma.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je v škole, **no** Karol je doma.
 $(\text{v_škole}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol}))$
- **Ani** Jarka nie je doma, **ani** Karol tam nie je.
 $(\neg \text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \neg \text{doma}(\text{Karol}))$
- **Nielen** Jarka je chorý, **ale aj** Karol je chorý.
 $(\text{chorý}(\text{Jarka}) \wedge \text{chorý}(\text{Karol}))$

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- Jarka aj Karol sú doma.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol}))$
- Karol sa potkol a spadol.
 $(\text{potkol_sa}(\text{Karol}) \wedge \text{spadol}(\text{Karol}))$
- Jarka dostala Bobbyho od mamy a otca.
 $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{mama}) \wedge \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{otec}))$

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je ruský špión.
 $(\text{Rus}(\text{Eismann}) \wedge \text{špión}(\text{Eismann}))$
- Bobby je malý čierny psík.
 $((\text{malý}(\text{Boby}) \wedge \text{čierny}(\text{Boby})) \wedge \text{pes}(\text{Boby}))$

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť,
ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu **stráca**:

- Jarka a Karol sa stretli **a** išli do kina.
$$(\text{stretli_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}) \wedge \\ (\text{do_kina}(\text{Jarka}) \wedge \text{do_kina}(\text{Karol})))$$
- Jarka a Karol išli do kina **a** stretli sa.
$$((\text{do_kina}(\text{Jarka}) \wedge \text{do_kina}(\text{Karol})) \wedge \\ \text{stretli_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}))$$

Disjunkcia

Disjunkcia \vee je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojкам *alebo*, či v **inkluzívnom** význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež „*alebo aj/i*“ a častice *respektíve*, *eventuálne*, *poprípade*, *prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma **alebo** Karol je doma.
(doma(Jarka) \vee doma(Karol))
- Bobyho kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol.
(kúpe(Jarka, Boby) \vee kúpe(Karol, Boby))

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{v_škole}(\text{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy alebo otca.
 $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{mama}) \vee \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Boby}, \text{otec}))$
- Boby je čierny či tmavohnedý psík.
 $((\text{čierny}(\text{Boby}) \vee \text{tmavohnedý}(\text{Boby})) \wedge \text{pes}(\text{Boby}))$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*bud'...*, *alebo ...*“, „*bud'...*, *bud'...*“, „*alebo ...*, *alebo ...*“

spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú **exkluzívnu** disjunkciu.

- Bud' je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*bud'...*, *alebo ...*“, „*bud'...*, *bud'...*“, „*alebo ...*, *alebo ...*“

spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú **exkluzívnu** disjunkciu.

- Bud' je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$((\text{vybitá}(\text{batéria}) \vee \text{svieti}(\text{kontrolka})) \wedge \\ \neg(\text{vybitá}(\text{batéria}) \wedge \text{svieti}(\text{kontrolka}))).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti,

o ktorých vieme, že sú vzájomne výlučné

(na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole.
(Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Vid' *Znalosti na pozadí* ďalej.

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované.

Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Boby šťastný.

❓ $((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Boby}))$

❓ $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Boby})))$

- Karol je doma alebo Jarka je doma a Boby je šťastný.

❓ $((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Boby}))$

❓ $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Boby})))$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*):
 - Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Boby šťastný.
 $((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Boby}))$
 - Doma je Karol alebo Jarka a Boby je šťastný.
Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Boby je šťastný.
 $((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Boby}))$
- Kombinácie spojok *bud'...*, *alebo ...*; *alebo ...*, *alebo ...*; *aj ...*, *aj ...*; *ani ...*, *ani ...*; a pod.
 - Karol je doma a *bud'* je doma Jarka, *alebo* je Boby šťastný, *alebo* jedno aj druhé.
 $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Boby})))$
 - *Alebo* je doma Karol, *alebo* je doma Jarka a Boby je šťastný, *alebo* aj aj.
 $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Boby})))$

Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Boby šťastný.

Aj Karol je doma, aj Jarka je doma, alebo je Boby šťastný.

- Má čiarka vplyv na význam tvrdenia?
- Chybovosť pri čiarkach je vysoká, pravidlá nie sú jednoznačné a v čase sa menia.
- Pri formalizácii pomáhajú dodatočné znalosti (napr. o spoločnom fungovaní Karola, Jarky, Bobyho).

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na **najkratšiu nasledujúcu formulu** — **oblasť platnosti** tohto výskytu.

- $((\neg \text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Boby}))$
- $(\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))) \vee \text{šťastný}(\text{Boby})$

Argument negácie je **uzátvorkovaný práve vtedy**, keď je **priamo** vytvorený binárnou spojkou:

- ✓ $\neg \neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))$
- ✗ $\neg (\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})))$

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \text{doma}(\text{Jarka}) \vee \neg \text{doma}(\text{Karol}))$

B. $\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \text{doma}(\text{Jarka}) \vee \neg \text{doma}(\text{Karol}))$

B. $\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$

Zvyčajné chápanie v slovenčine je A.

Formalizácii B zodpovedá

„Nie je pravda, že je doma Jarka alebo Karol.“

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Implikácia

Implikácia

Implikácia \rightarrow je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podradovaciemu súvetiu *ak ..., tak ...*

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A **antecedent** a podformule B **konzekvent**.

Formula vytvorená implikáciou je **nepravdivá** v **jedinom** prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.



Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak ..., tak ...*:

Napr. veta „*Ak by Sarah prišla, Jim by prišiel tiež*“ je nepravdivá, keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady, keď *ak ..., tak ...* vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

Keď ..., potom ... má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia tiež nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, **ak** príde Kim.

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú **podmienkami** hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi **podstatný rozdiel**:

Jim príde, **ak** príde Kim.

postačujúca
podmienka

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

nutná
podmienka

Postačujúca podmienka

Jim príde, **ak** príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, **stačí**, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim **ne**príde.
- Zodpovedá teda $(\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (B \rightarrow A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, **pokiaľ** príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, **je nevyhnutné**, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim **ne**príde.
- Zodpovedá teda $(\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ iba ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (A \rightarrow B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, **iba pokiaľ** príde Kim.
- Jim príde **iba** spolu s Kim.
- Jim **ne**príde **bez** Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

*Z logiky prejdete, **ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Stačilo by prísť na obe časti skúšky a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

*Z logiky prejdete, **iba ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Prísť na obe časti skúšky **je nutné**, ale na prejdenie to *nestačí*.

$(A \rightarrow B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A , tak B .
- Ak A , tak aj B .
- Ak A , B .
- Pokiaľ A , [tak (aj)] B .
- A , iba/len/jedine ak/pokiaľ(/ked') B .
- A nastane iba spolu s B .
- A nenastane bez B .
- B , ak/pokiaľ(/ked') A .

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Ekvivalencia

Ekvivalencia \leftrightarrow vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak; vtedy a len vtedy, keď; práve vtedy, keď; rovnaký ... ako ...; taký ... ako*

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim.
($\text{príde}(\text{Jim}) \leftrightarrow \text{príde}(\text{Kim})$)
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne.
($\text{párne}(n) \leftrightarrow \text{párne}(n^2)$)
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus.
($\text{Nemec}(\text{Müller}) \leftrightarrow \text{Rus}(\text{Stirlitz})$)

Ekvivalencia ($A \leftrightarrow B$) zodpovedá tvrdeniu,
že A je nutnou aj postačujúcou podmienkou B .

Budeme ju preto považovať za skratku za formulu

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole,
inak má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je s ním Boby.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenia a považovať ich za skratky, podobne ako ekvivalenciu.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Správnosť a vernosť formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula,
ktorá je pravdivá **za tých istých okolností** ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto **za tých istých okolností** znamená **v tých istých štruktúrach**.

Vernosť formalizácie

Výrok „Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma“

sa dá **správne** formalizovať ako

$$\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol})),$$

ale rovnako **správna** je aj formalizácia

$$(\neg \text{doma}(\text{Jarka}) \vee \neg \text{doma}(\text{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň **uprednostňujeme** formalizácie, ktoré **vernejšie** zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu,
a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so **znalosťami na pozadí** (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie **samostatnými formulami**.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatury

Niektoré tvrdenia **vyznievajú** silnejšie, ako naozaj sú:

- „Prílohou sú zemiaky alebo šalát“
môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- „Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %“
znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočnú časť významu tvrdenia
nemôžeme poprieť v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu „Karol a Jarka sú doma“
dodáme „Ale Karol nie je doma,“ dostaneme sa do sporu.
Takže „Karol je doma“
je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatury

Časť významu tvrdenia, ktorú **môžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva **konverzačná implikatura** (H. P. Grice).

Nie je skutočnou časťou významu pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát.

Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.

Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.

Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatura.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.

Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.

Dodatok popiera implikáciu „Prejdete, iba ak všetky úlohy vyriešite na 100 %,“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením.

Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatura.

Formalizácia je ťažká

- Jedna formula môže byť rozdelená do viac viet.
Nech x je kladné reálne. Potom $x^2 > 0$.
- Niektoré tvrdenia sú vnútorne veľmi zložité.
Postupnosť prvočísel usporiadaných podľa veľkosti je rastúca.
- Existujú jazyky, kde pre niektoré logické spojky neexistuje slovo, využívajú sa iné prvky gramatiky.
- Logickú spojku občas treba hádať z kontextu.
It's raining. The game is cancelled.
It's raining *and therefore* the game is cancelled.
- Aj intonácia môže ovplyvniť formalizáciu.
I said I *might* go.
I did not say I am surely going, I only suggested the possibility.

- Mnohé tvrdenia z praxe majú veľmi ďaleko od ideálnych jazykových schém (či už z hľadiska aplikácie gramatických pravidiel alebo formalizácie do presného jazyka).
„Na druhej strane si myslím, že Slovensko, niekedy žiaľbohu a niekedy je to aj chvalabohu, že žiaľbohu, na Slovensku predsa len tá pracovná sila je ešte stále lacnejšia a teraz, chvalabohu, že je lacnejšia.“
- Jednotlivci majú svoje vnímanie jazykových konštruktov založené na ich osobnej histórii a niekedy sa nezhodnú. Trénovacie množiny pre AI modely tak sú nekoherentné a výsledok tréningu nemôže byť dokonalý.

Formalizácia je ťažká

Aj najlepšie súčasné AI systémy potrebujú s formalizáciou ľudskú pomoc. Z článku o AlphaGeometry (2025, parafrázované):

A major weakness is the need to manually transform input problems from natural language into a domain-specific language. Automating this process is an active area of research. It is significantly more complicated than translation between human languages.

*Formalization frequently requires re-formulating the original problem into an alternative **equivalent** form, and disambiguating the nuances in the original problem statement. **Automated formalization thus demands significant background knowledge and problem-solving skills** on its own. Using Gemini prompts containing examples obtained manually, we are able to formalize 30 out of 39 formalizable IMO geometry problems.*

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme **zadefinovať** — presne a záväzne — ich **syntax** (skladbu) a **sémantiku** (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.4

Symbolmi jazyka \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *individuové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* \doteq ;

pomocné symboly $(,)$ a $,$ (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\text{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a c_1, \dots, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene **atómami**) jazyka \mathcal{L} súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka \mathcal{L} .

Množinu všetkých atómov jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\text{príde}(\text{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg \text{príde}(\text{Sarah})$.
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $(\neg(\text{príde}(\text{Kim}) \wedge \text{príde}(\text{Sarah})) \rightarrow (\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Sarah})))$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly,
ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
 - ▶ Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
 - ▶ Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Definícia 2.6

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka \mathcal{L} je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju **negácia** formuly A .
- 2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne **konjunkcia**, **disjunkcia** a **implikácia** formúl A a B .

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame **formulou** jazyka \mathcal{L} .

Dohoda 2.7

Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ skratka za formulu $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je funkcia na formulách definovaná ako $(A \leftrightarrow B) = ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ pre každé dve formuly A a B .

Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah})))$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli **vytvoriť**?

Definícia 2.10

Vytvárajúcou postupnosťou nad jazykom \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť A_0, \dots, A_n postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X .

Veta 2.11 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P ,
- 2.1. ak formula A má vlastnosť P , tak aj $\neg A$ má vlastnosť P ,
- 2.2. ak formuly A a B majú vlastnosť P , tak aj každá z formúl $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ má vlastnosť P ,

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12

Postupnosť symbolov A je výrokovologickou formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A .

Osnova dôkazu.

(\Rightarrow) **Indukciou na konštrukciu formuly**

(\Leftarrow) **Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti**



vtt skrakuje „vtedy a len vtedy, keď“.

Výrokovologické formuly by sa dali alternatívne zadať ako postupnosti symbolov jazyka \mathcal{L} , pre ktoré existuje vytvárajúca postupnosť nad \mathcal{L} .

Výhoda: Dĺžka vytvárajúcej postupnosti je číslo, tvrdenia o všetkých formulách sa potom dajú dokazovať matematickou alebo úplnou indukciou.

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“



Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl“ jazyka \mathcal{L} je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \wedge B$, $A \vee B$ a $A \rightarrow B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou“ jazyka \mathcal{L} .

Čo znamená „formula“

$(\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))?$

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku \mathcal{L} platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.
- Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.
- Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna binárna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ také, že $X = (A \ b \ B)$.

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

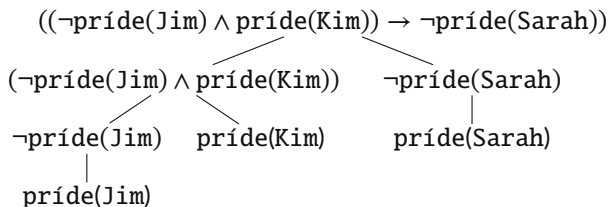
$\text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Sarah}), \neg\text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Kim}),$
 $\neg\text{príde}(\text{Sarah}), (\neg\text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})),$
 $((\neg\text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$

ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné, ktoré z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zdefinujeme?

Podobne ako sa definuje napr. binárny vyhľadávací strom.

Definícia 2.14

Vytvárajúci strom T pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X ,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A ,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \ b \ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B ,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Uvažujme formulu:

$$((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$$

Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), (\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})), \dots$$

Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne/priamo* vznikla?

$$(\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \quad \text{a} \quad \neg \text{príde}(\text{Sarah})$$

Ako tieto pojmy presne zdefinujeme?

Definícia 2.15 (Priama podformula)

Pre všetky formuly A a B :

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A .
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly A (ľavá priama podformula) a B (pravá priama podformula).

Definícia 2.16 (Podformula)

Vzťah **byť podformulou** je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X , Y a Z :

- X je podformulou X .
- Ak X je priamou podformulou Y , tak X je podformulou Y .
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z , tak X je podformulou Z .

Formula X je **vlastnou podformulou** formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
 - Počíta aj pomocné symboly.
 - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
 - pridanie negácie,
 - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17

Aký je stupeň formuly $((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \wedge \neg(\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})))$?

Ako stupeň zdefinujeme?

Podobne ako sme zdefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)

Pre všetky formuly A a B a všetky $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n , tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2 , tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)

Stupeň $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly A , $B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \wedge B)) = \deg((A \vee B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

- 1. báza indukcie: každá formula stupňa 0 má vlastnosť P ,*
- 2. indukčný krok: pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť P , vyplýva, že aj X má vlastnosť P ,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Sémantika výrokovologických formúl

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou **štruktúr**.

Definícia štruktúry sa takmer nemení:

Definícia 2.20

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Štruktúrou pre jazyk \mathcal{L} nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná **doména** štruktúry \mathcal{M} ; i je zobrazenie, nazývané **interpretačná funkcia** štruktúry \mathcal{M} , ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka \mathcal{L} priraduje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka \mathcal{L} s aritou n priraduje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia 2.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu **formula A je pravdivá v štruktúre \mathcal{M}** ($\mathcal{M} \models A$) definujeme **induktívne** pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty c_1, c_2, \dots, c_n , a všetky formuly A, B jazyka \mathcal{L} nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

kde $\mathcal{M} \not\models A$ skrakuje A nie je pravdivá v \mathcal{M} .

Príklad 2.22

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde
 $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\text{Kim}) = 1$,
 $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$,
 $i(p) = \{1, 3\}$.

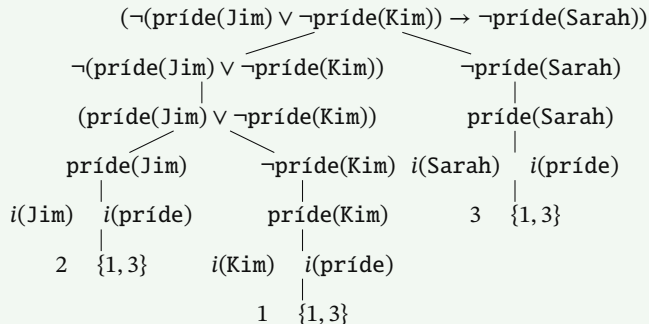
Zistime, či $\mathcal{M} \models$
 $(\neg(p(\text{Jim}) \vee \neg p(\text{Kim})) \rightarrow$
 $\neg p(\text{Sarah})).$

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$,
 $i(\text{Kim}) = 1$, $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$, $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor
(od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$,
 $i(\text{Kim}) = 1$, $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$, $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor
(od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M} \not\models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})) & & & & \\ \swarrow & & \searrow & & \\ \mathcal{M} \models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) & & \mathcal{M} \not\models \neg \text{príde}(\text{Sarah}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{M} \not\models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) & & \mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Sarah}) & & \\ \swarrow & & \searrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Jim}) & & \mathcal{M} \not\models \neg \text{príde}(\text{Kim}) & & i(\text{Sarah}) \in i(\text{príde}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i(\text{Jim}) \notin i(\text{príde}) & & \mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Kim}) & & 3 \in \{1, 3\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 \notin \{1, 3\} & & i(\text{Kim}) \in i(\text{príde}) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 1 \in \{1, 3\} & & \end{array}$$

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$,
 $i(\text{Kim}) = 1$, $i(\text{Jim}) = 2$, $i(\text{Sarah}) = 3$, $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	$p(J)$	$p(K)$	$\neg p(K)$	$(p(J) \vee \neg p(K))$	$\neg(p(J) \vee \neg p(K))$...
\mathcal{M}	$\not\models$	\models	$\not\models$	$\not\models$	\models	

	$p(S)$	$\neg p(S)$	$(\neg(p(J) \vee \neg p(K)) \rightarrow \neg p(S))$
...			
\mathcal{M}	\models	$\not\models$	$\not\models$

kde $p = \text{príde}$, $K = \text{Kim}$, $J = \text{Jim}$ a $S = \text{Sarah}$.

Všimnite si, že v záhlaví tabuľky
je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$$

vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$$

vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo

$$\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$$

vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$$

vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo

$$\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$$

vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$

vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo

$\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Kim})$ alebo

$\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$

vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo

$\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Kim})$ alebo

$\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $i(\text{Jim}) \in i(\text{príde})$ alebo $i(\text{Kim}) \notin i(\text{príde})$ alebo

$i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Teórie a ich modely

Teórie v neformálnej logike

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je **teória** súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 2.25

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.

Organizujeme párty a **P0**: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich.

Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.

Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

Definícia 2.26

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Každú množinu formúl jazyka \mathcal{L} budeme nazývať *teóriou* v jazyku \mathcal{L} .

Príklad 2.27

$$T_{\text{party}} = \{((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})), \\ (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim}))\}$$

Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta, v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavu sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 2.28 (Model teórie o party)

$$\mathcal{M} = (\{k, j, s, e, h\}, i),$$

$$i(\text{Kim}) = k, \quad i(\text{Jim}) = j, \quad i(\text{Sarah}) = s,$$

$$i(\text{príde}) = \{k, j, e\};$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} \models ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \end{array} \right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Definícia 2.29 (Model)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku \mathcal{L} a \mathcal{M} je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} .

Teória T je **pravdivá** v \mathcal{M} , skrátené $\mathcal{M} \models T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá v \mathcal{M} (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že \mathcal{M} je **modelom** T .

Teória T je **nepravdivá** v \mathcal{M} , skrátené $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v \mathcal{M} .

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

$$\begin{aligned}T_{\text{party}} = \{ & ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})), \\ & (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})), \\ & (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})), \\ & (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \}\end{aligned}$$

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model,
má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s\}, i_1) & \mathcal{M}'_1 = (\{k, j, s, 0, 1\}, i'_1) & \mathcal{M}''_1 = (\{2, 4, 6\}, i''_1) \quad \dots \\ i_1(\text{Kim}) = k & i'_1(\text{Kim}) = k & i''_1(\text{Kim}) = 2 \\ i_1(\text{Jim}) = j & i'_1(\text{Jim}) = j & i''_1(\text{Jim}) = 4 \\ i_1(\text{Sarah}) = s & i'_1(\text{Sarah}) = s & i''_1(\text{Sarah}) = 6 \\ i_1(\text{príde}) = \{k, j\} & i'_1(\text{príde}) = \{k, j, 1\} & i''_1(\text{príde}) = \{2, 4\}\end{array}$$

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1) \quad \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) \quad \mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k \quad i_2(\text{Kim}) = 1 \quad i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j \quad i_2(\text{Jim}) = 2 \quad i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s \quad i_2(\text{Sarah}) = 3 \quad i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\} \quad i_2(\text{príde}) = \{1, 2\} \quad i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\text{Kim} \doteq \text{Jim}$.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1) \quad \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) \quad \mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k \quad i_2(\text{Kim}) = 1 \quad i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j \quad i_2(\text{Jim}) = 2 \quad i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s \quad i_2(\text{Sarah}) = 3 \quad i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\} \quad i_2(\text{príde}) = \{1, 2\} \quad i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\text{Kim} \doteq \text{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti **všetkých predikátových** atómov $\text{príde}(\text{Kim})$, $\text{príde}(\text{Jim})$, $\text{príde}(\text{Sarah})$.



V T_{party} **na ničom inom nezáleží**.

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1) \quad \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) \quad \mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k \quad i_2(\text{Kim}) = 1 \quad i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j \quad i_2(\text{Jim}) = 2 \quad i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s \quad i_2(\text{Sarah}) = 3 \quad i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\} \quad i_2(\text{príde}) = \{1, 2\} \quad i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

môžeme skonštruovať to isté **ohodnotenie predikátových atómov**:

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \text{príde}(\text{Kim}),$$

$$v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \text{príde}(\text{Jim}),$$

$$v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \text{príde}(\text{Sarah}).$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Definícia 2.30

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka \mathcal{L} nazveme všetky formuly jazyka \mathcal{L} , ktoré **neobsahujú symbol rovnosti**. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 2.31

Nech (f, t) je usporiadaná dvojica **pravdivostných hodnôt**, $f \neq t$, kde f predstavuje **nepravdu** a t predstavuje **pravdu**.

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre \mathcal{L} , skrátene **ohodnotením**, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 2.32

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} . Reláciu **výrokovologická formula A je pravdivá v ohodnotení v** ($v \models_p A$) definujeme **induktívne** pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka \mathcal{L} nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \wedge B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \vee B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \rightarrow B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde **vtt** skrakuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_p A$ skrakuje *A nie je pravdivá vo v* .

Príklad 2.33

Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \text{príde}(\text{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\text{príde}(\text{Kim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Jim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	p(Kim)	p(Jim)	p(Sarah)	$\neg p(\text{Kim})$	$(p(\text{Jim}) \vee \neg p(\text{Kim}))$	X
v	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$

príde sme skrátili na p.

Definícia 2.34

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} , nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra \mathcal{M} sú navzájom **zhodné na S** vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra \mathcal{M} sú navzájom **zhodné** vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konstrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 2.35

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s \mathcal{M} .

Dôkaz.

Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:

(\Leftarrow) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.

(\Rightarrow) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. □

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.36 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} , kde

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre \mathcal{L} zhodnú s v .

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.36 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} , kde

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre \mathcal{L} zhodnú s v .

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky,
je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\text{Kim}) = \text{Kim} \quad i(\text{Jim}) = \text{Jim} \quad i(\text{Sarah}) = \text{Sarah}$$

predikát príde ako množinu tých c , pre ktoré $v(\text{príde}(c)) = t$:

$$i(\text{príde}) = \{\text{Kim}, \text{Jim}\}$$

Konstrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Ako zostrojíme štruktúru zhodnú s ohodnotením pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 2.37

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty
a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} .

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre \mathcal{L} s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky
konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$

$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom \mathcal{M} je zhodná s v .

Štruktúram zo syntaktického materiálu sa hovorí **herbrandovské**.

Zhoda na **všetkých** výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.38

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} . Potom **pre každú výrokovologickú formulu** $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Zhoda na **všetkých** výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.38

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} . Potom **pre každú výrokovologickú formulu** $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Dôkaz (indukciou na konštrukciu formuly).

1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.

1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_p X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$ podľa def. zhodnosti v a \mathcal{M} .

2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X .

Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti \doteq , potom $v \models_p \neg X$ vtt (podľa def. \models_p) $v \not\models_p X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt (podľa def. \models) $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje \doteq , $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.

2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y . Ak X alebo Y obsahuje \doteq , tvrdenie platí pre $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické. Nech teda X ani Y neobsahuje \doteq . Potom platí $v \models_p (X \rightarrow Y)$ vtt $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \rightarrow Y)$. Podobne pre ďalšie spojky. □