Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška, Iveta Bečková,
Ján Pastorek

Letný semester 2024/2025

Posledná aktualizácia: 13. mája 2025

Obsah

1 Atomické formuly **4**

1.1 Sémantika atomických formúl 4

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl 8

2 Výrokovologické spojky **17**

2.1 Syntax výrokovologických formúl 17

2.2 Sémantika výrokovologických formúl 23

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl 30

2.4 Ohodnotenia 37

3 Výrokovologické vyplývanie, vlastnosti a vzťahy formúl **40**

3.1 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť 40

3.2 Vlastnosti výrokovologických formúl 47

3.3 Ekvivalentnosť formúl 50

3.4 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď. 54

4 Dôkazy a výrokovologické tablá **62**

4.1 Vyplývanie v tablách 62

4.2 Tautológie v tablách 70

4.3 Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nesplniteľnosť v tablách 74

4.4 Korektné pravidlá 88

4.5 Meta tvrdenia o tablách 91

5 Kvantifikátory **95**

5.1 Syntax a jednoduchá formalizácia 95

5.2 Sémantika 96

5.3 Formalizácia s viacerými kvantifikátormi 103

5.4 Tablá pre kvantifikátory 110

6 Logika prvého rádu **119**

6.1 Funkčné symboly — formalizácia a sémantika 119

6.2 Substitúcie, voľné a viazané premenné 122

6.3 Vzťah kvantifikátorov a funkčných symbolov 123
6.4 Rovnosť 125
6.5 Definície pojmov a dôkazy s nimi 129
6.6 Alternatívne definície logiky prvého rádu 145

7 Rezolvencia **146**
7.1 Unifikácia a základy rezolvencie 146
7.2 Prvorádová CNF a skolemizácia 148
7.3 Dôkazy rezolvenciou 152

8 Časté chyby na skúške **159**

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

$\natural$

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu indivíduových konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Keďže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. $\natural$

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\ i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\ i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\ i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\ i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}. \end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models$ dievča(mama), pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože i(oco) $\in i$(chlapec).

(B_3) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože (i(mama), i(Boris), i(Anna)) $\in i$(uprednostňuje).

(B_4) $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože (i(oco), i(Boris), i(Anna)) $\notin i$(uprednostňuje). ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 5 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\
i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\
i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$.

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.

Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky indivíduové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$žena^1, rodič^2, dieťa^3, starší$^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(A_4) žena(Dana)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(B_3) Cyril $\doteq$ oco

(B_4) žena(Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{gathered}
D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\\
i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4,\\
i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3,\\
i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\},\\
i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\},\\
i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},
\end{gathered}$$

$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,7),(3,4),(7,3),(8,7)\}.$$

Všimnite si, že hoci každá indivíduová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero indivíduových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, …, A_7, ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor.

(A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.

(A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.

(A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.

(A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.

(A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.

(A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej posluchárni P42.

(A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.

(A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu indivíduovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor^1. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala indivíduová konštanta profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef $\doteq$ profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú indivíduovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor^1. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega^2. V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje^1:

($A_{2.1}$) profesor(o_1)

($A_{2.2}$) kolega(Jozef, o_1)

($A_{2.3}$) obeduje(Jozef)

($A_{2.4}$) obeduje(o_1)

Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^1, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^1. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1. Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega^2 a nebudeme vytvárať symbol kolegyňa^2.

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové indivíduové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3.1}$) je(Jozef, p_1)

($A_{3.2}$) je(o_1, p_2)

($A_{3.3}$) žemľovka(p_1)

($A_{3.4}$) rezeň(p_2)

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2, hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom $\mathsf{obeduje}^1$.

Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *v inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie je(Jozef, žemľovka) (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie je(Jozef, žemľovka) a žemľovka(žemľovka) zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a indivíduových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom $\mathsf{chutí}^2$. Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení využije rovnosť:

($A_{4.1}$) chutí(Mária, p_2)

($A_{4.2}$) Mária $\doteq$ o_1

Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch indivíduových konštánt o_1, Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1, stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa[2] a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka[1] je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme indivíduovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5.1}$) chutí(Jozef, p_1)

($A_{5.2}$) má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6.1}$) upratovačka(o_2)

($A_{6.2}$) kolega(Jozef, o_2)

($A_{6.3}$) kolega(Mária, o_2)

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka[1]. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7.1}$) má_väčší_plat_ako(Mária, o_2)

($A_{7.2}$) má_väčší_plat_ako(o_2, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako[2], ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako[2]. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o_2), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o_2, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že $\mathsf{učí}^3$ bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových indivíduových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny" patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$(A_{8.1})$ učí(Jozef, DAR, P42)

$(A_{8.2})$ predmet(DAR)

$(A_{8.3})$ poslucháreň(P42)

$(A_{8.4})$ veľký(P42)

Keďže *byť veľký* a *byť poslucháreň* sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly $\mathsf{veľký}^1$ a $\mathsf{poslucháreň}^1$.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2, DAR)

Použitie indivíduovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny indivíduových konštánt a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}} &= \{\mathsf{DAR}, \mathsf{Jozef}, \mathsf{Mária}, \mathsf{o}_1, \mathsf{o}_2, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{P42}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} &= \{\mathsf{chutí}^2, \mathsf{je}^2, \mathsf{kolega}^2, \mathsf{má\_rád\_žemľovku}^1, \mathsf{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \mathsf{navštevuje}^2, \mathsf{obeduje}^1,\\ &\qquad \mathsf{poslucháreň}^1, \mathsf{predmet}^1, \mathsf{profesor}^1, \mathsf{rezeň}^1, \mathsf{učí}^3, \mathsf{upratovačka}^1, \mathsf{veľký}^3, \mathsf{žemľovka}^1\}.\end{aligned}$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet *Dejiny antického Ríma*
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	poslucháreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštevuje(x, y)	osoba x navštevuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predmet (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle *rozmerné*)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{10}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{11}) Eugen sa má rád.

(A_{12}) Je Učiteľom roka 2020.

(A_{13}) Matematika je povinný predmet.

(A_{14}) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

(A_{15}) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

(A_{16}) Peter má rád Matematiku.

(A_{17}) Lucia má rada Petra.

(A_{18}) Telocvik je voliteľný predmet.

> ⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.
>
> Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

(A_1) Janko je chlapec.

(A_2) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

(A_3) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

(A_4) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

(A_5) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

(A_6) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli v $\mathcal{M}$ pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B, v $\mathcal{M}$ nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

   Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B, všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) (futbalista(Adam))

b) (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))

c) $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam))

d) (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora))

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky $\land$.

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)) je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$ľúbi, šťastný$\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Adam, Barbora$\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie $\neg$, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A = \neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)), opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B =$ (ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)). Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C =$ ľúbi(Barbora, Adam) a $D =$ šťastný(Adam) a binárna spojka b zodpovedá implikácii $\to$.

d) Postupnosť symbolov (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora)) nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\ b\ B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg$Barbora nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. ♮

2.1.2 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \land \text{muž}(\text{Alex}))$

b) $\neg(\text{má\_rád}(\text{Alex}, \text{Alex}))$

c) $\big(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \to (\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}))\big)$

d) $(\text{Alex} \lor \neg\text{oco})$

e) $\big(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \land \text{žena}(\text{Alex})) \to (\neg\text{muž}(\text{Alex}) \lor \neg\text{žena}(\text{Alex}))\big)$

f) $\big(\neg\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg\land \text{muž}(\text{Edo}))\big)$

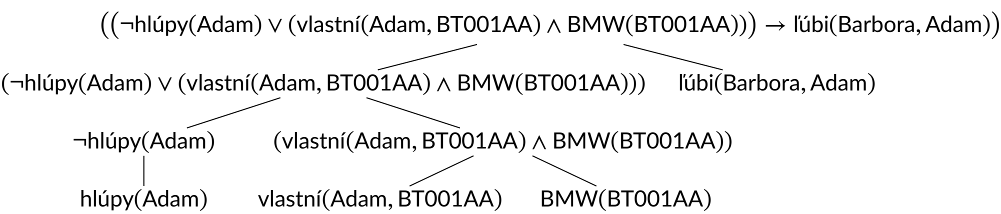
2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\big((\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))\\ \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big)$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

$$\begin{aligned}
&\text{BMW}(\text{BT001AA}),\\
&\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}),\\
&(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})),\\
&\text{hlúpy}(\text{Adam}),\\
&\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}),\\
&(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))),\\
&\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}),\\
&\big((\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))\\
&\qquad \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big).
\end{aligned}$$

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.



Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{deg}\Big(\big((\neg\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\qquad\qquad \to \mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam})\big)\Big)\\
&\quad = \mathrm{deg}\big((\neg\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\big)\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam}))\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\neg\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}))\\
&\qquad + \mathrm{deg}((\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\qquad + 1\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam})) + 1\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA})) + \mathrm{deg}(\mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})) + 1\\
&\qquad + 1 + 1\\
&\quad = 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}
$$

♮

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$
\begin{aligned}
&\big((\mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Hugo}) \land \mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Tereza})) \to\\
&\quad \big((\neg\mathrm{žena}(\mathrm{Hugo}) \land \mathrm{muž}(\mathrm{Hugo})) \to \mathrm{brat}(\mathrm{Hugo}, \mathrm{Tereza})\big)\big)
\end{aligned}
$$

2.1.5 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte nasledujúce funkcie nad jeho formulami:

a) $\mathrm{atoms}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$
atoms(A) je množina všetkých atómov vyskytujúcich sa vo formule A;

b) $\mathrm{acnt}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acnt(A) je počet výskytov atómov vo formule A;

c) $\mathrm{acount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acount(A, a) je počet výskytov atómu a vo formule A;

d) $\mathrm{subfs}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$
subfs(A) je množina všetkých podformúl formuly A;

e) $\mathrm{pcount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
pcount(A) je počet výskytov zátvoriek vo formule A;

f) $\mathrm{cons}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\{\neg, \wedge, \vee, \to\})$
 $\mathrm{cons}(A)$ je množina všetkých logických spojok vyskytujúcich sa vo formule A;

g) $\mathrm{ccount}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
 $\mathrm{ccount}(A)$ je počet výskytov logických spojok vo formule A;

h) $\mathrm{bccount}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \{\wedge, \vee, \to\} \to \mathbb{N}$
 $\mathrm{bccount}(A, b)$ je počet výskytov binárnej spojky b vo formule A.

Riešenie. f)

Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každý atóm $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ a pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cons}(a) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A \wedge B)) &= \{\wedge\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \vee B)) &= \{\vee\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \to B)) &= \{\to\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}
$$

Pretože prípady pre rôzne binárne výrokové spojky sú si navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky atómy $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\wedge, \vee, \to\}$ definujeme:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cons}(a) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A\ b\ B)) &= \{b\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}
$$

♮

2.1.6 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Príklad. [Tvrdenie 2.12] Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupnosť symbolov A je formulou jazyka $\mathcal{L}$ vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$.

b) Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)\,.$$

c) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{acnt}(A) \leq \deg(A) + 1\,.$$

d) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{pcount}(A) \leq 4\deg(A) + 2\,.$$

Riešenie príkladu a). Tvrdenie a) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupne dokážeme obe implikácie vhodnou indukciou.

($\Leftarrow$) Predpokladáme, že A je formulou v jazyku $\mathcal{L}$. Existenciu vytvárajúcej postupnosti pre A dokážeme štrukturálnou indukciou na A:

1. Báza indukcie: Ak A je atóm (či už predikátový alebo rovnostný), jednoprvková postupnosť (A) je vytvárajúcou postupnosťou pre A.
2. Indukčný krok:
    1. Indukčný predpoklad: Nech A je formula a nech pre A existuje vytvárajúca postupnosť.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $\neg A$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_m$ taká, že $A_m = A$. Zostrojme postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{m+1})$. Nech A_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

       Ak $i = m+1$, tak $A_{m+1} = \neg A = \neg A_m$ a $m < m+1$, takže A_{m+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

       Ak $1 \leq i \leq m$, tak A_i tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

       Preto $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $\neg A$, je to aj vytvárajúca postupnosť pre $\neg A$.
    2. IP: Nech A a B sú formuly a nech existuje vytvárajúca postupnosť pre A a existuje vytvárajúca postupnosť pre B.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $(A\ b\ B)$ pre ľubovoľnú binárnu spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ taká, že $A_m = A$, a vytvárajúca postupnosť $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ taká, že $B_n = B$. Zostrojme postupnosť

       $$(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1}) = (A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n, (A\ b\ B))$$

Nech C_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+n+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m+n+1$, tak $C_{m+n+1} = (A\ b\ B) = (A_m\ b\ B_n) = (C_m\ b\ C_{m+n})$, pričom zrejme $m < m+n+1$ a $m+n < m+n+1$, takže C_{m+n+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak $C_i = A_i$ spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_1, A_2, \dots, C_m) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

Ak $m+1 \leq i \leq m+n$, tak prvok $C_i = B_{i-m}$ tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_{m+n}) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $(A\ b\ B)$, je to vytvárajúca postupnosť pre $(A\ b\ B)$.

($\Rightarrow$) Implikácia *Ak existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$, tak A je formulou jazyka $\mathcal{L}$*, vyplýva z tvrdenia: *Pre každé kladné prirodzené číslo n, ak $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_n je formula.* Toto tvrdenie dokážeme úplnou indukciou na n.

Nech n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Indukčný predpoklad: Nech pre každé kladné prirodzené číslo $m < n$ je pravda, že ak $(A_1, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_m je formula.

Dokážme tvrdenie pre n. Predpokladajme, že $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Potom pre jej posledný prvok, postupnosť symbolov A_n v jazyku $\mathcal{L}$ môže nastať niektorá z týchto možností:

- A_n je atóm. Potom A_n je samozrejme formula.
- $A_n = \neg A_i$ pre nejaké $i < n$. Ľahko sa presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$, je podľa indukčného predpokladu postupnosť symbolov A_i formula. Potom ale aj $A_n = \neg A_i$ je formula.
- $A_n = (A_i\ b\ A_j)$ pre nejakú binárnu spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ a pre nejaké $i < n$ a $j < n$. Opäť sa ľahko presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ aj $(A_1, \dots, A_j)$ sú vytvárajúce postupnosti v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$ aj $j < n$, sú podľa indukčného predpokladu postupnosti symbolov A_i aj A_j formuly. Potom ale aj $A_n = (A_i\ b\ A_j)$ je formula. ♮

Riešenie príkladu b).

Pripomeňme, že funkciu $\mathrm{atoms} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ sme zadefinovali na prednáške (Def. 3.17). Predpokladáme, že funkciu $\mathrm{subfs} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ ste zadefinovali pri riešení predchádzajúceho cvičenia 2.1.5.

Tvrdenie b) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly A.

1. Báza indukcie: Nech A je atóm. Potom $\mathrm{atoms}(A) = \{A\}$. Taktiež $\mathrm{subfs}(A) = \{A\}$, a teda platí $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$.

2. Indukčné kroky:

2.1. Indukčný predpoklad: Nech A je ľubovoľná formula a nech pre ňu tvrdenie platí, teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$. Dokážme tvrdenie aj pre $\neg A$:

Z definície funkcie atoms vieme, že $\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A)$. Súčasne podľa definície funkcie subfs máme $\mathrm{subfs}(\neg A) = \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\}$. Keďže podľa indukčného predpokladu $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$, dostávame

$$\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\} = \mathrm{subfs}(\neg A),$$

teda $\mathrm{atoms}(\neg A) \subseteq \mathrm{subfs}(\neg A)$.

2.2. IP: Nech A a B sú ľubovoľné formuly a nech tvrdenie pre ne platí (teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$ a $\mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(B)$). Dokážme ho aj pre $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$:

Podľa definícií funkcií atoms a subfs vieme, že pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} &\mathrm{atoms}((A\,b\,B)) = \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ \text{a} \quad &\mathrm{subfs}((A\,b\,B)) = \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\,b\,B)\}. \end{aligned}$$

Vďaka IP platí $\mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\,b\,B)\}$, a teda $\mathrm{atoms}((A\,b\,B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\,b\,B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$.

Túto úvahu môžeme stručnejšie a azda aj prehľadnejšie zapísať takto:

Podľa IP a definícií funkcií atoms a subfs pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{atoms}((A\,b\,B)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ &\overset{\text{IP}}{\subseteq} \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \\ &\subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\,b\,B)\} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{subfs}((A\,b\,B)), \end{aligned}$$

teda $\mathrm{atoms}((A\,b\,B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\,b\,B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$. ♮

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologických formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{profesor}^1, \mathsf{hlúpy}^1, \mathsf{sčítaný}^1\}$. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{\mathsf{barča}, \mathsf{janči}, \mathsf{karči}\} \\ i(\mathsf{Karol}) &= \mathsf{karči} \\ i(\mathsf{profesor}) &= \{\mathsf{karči}, \mathsf{janči}\} \end{aligned}$$

$$i(\text{hlúpy}) = \{\text{janči}\}$$
$$i(\text{sčítaný}) = \{\text{barča}, \text{karči}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zdola nahor* a postupom *zhora nadol*.

$$\big(\text{profesor(Karol)} \rightarrow (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})\big)$$

Riešenie. 1. spôsob — zdola nahor: Pravdivosť danej formuly určíme podľa definície 2.21 postupným vyhodnotením všetkých prvkov jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\text{profesor(Karol)}, \quad \text{sčítaný(Karol)}, \quad \text{hlúpy(Karol)}, \quad \neg\text{hlúpy(Karol)},$$
$$(\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)}), \quad \big(\text{profesor(Karol)} \rightarrow (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})\big)$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor(Karol)}$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný(Karol)}$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy(Karol)}$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy(Karol)}$, teda $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy(Karol)}$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy(Karol)}$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný(Karol)}$,
   tak $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})$,
   tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor(Karol)} \rightarrow (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)}))$

Vyhodnotenie spôsobom *zdola nahor* môžeme prehľadnejšie zapísať do tabuľky, v ktorej h = hlúpy, p = profesor, s = sčítaný a K = Karol:

	$p(K)$	$s(K)$	$h(K)$	$\neg h(K)$	$(\neg h(K) \land s(K))$	$(p(K) \rightarrow (\neg h(K) \land s(K)))$
$\mathcal{M}$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$

alebo (trocha menej prehľadne):

(	profesor(Karol)	$\rightarrow$	(	$\neg$	hlúpy(Karol)	$\land$	sčítaný(Karol)	))
$\mathcal{M}$	$\models$	$\models$		$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	

Nesmieme pritom zabúdať, že odvodenie je založené na definícii 2.21 pravdivosti formuly v štruktúre.

Aby prvá tabuľka nebola príliš široká, celkom prirodzene sme si konkrétne symboly jazyka $\mathcal{L}$ označili meta premennými p, s, h a K. Tieto premenné nie sú súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, slúžia nám, aby sme mohli stručne písať o jeho symboloch (predložka *o* sa po grécky povie *meta*) . Konkrétne symboly (napr. Karol) si môžeme predstaviť ako konkrétne reťazce (`'Karol'`) napríklad v jazyku Python. Meta premenné (napr. K) ako pythonovské *premenné*, do ktorých reťazce priraďujeme. Skrátený zápis $\neg h(K)$ formuly ¬hlúpy(Karol) zodpovedá (oveľa menej prehľadnému) pythonovskému výrazu `'¬'` $+\, h +$ `'('` $+\, K +$ `')'`.

2\. spôsob — zhora nadol: Podľa definície 2.21 vzťahu pravdivosti ($\models$) a podľa definície danej štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))} \\
\multicolumn{3}{c}{\text{vtt}} \\
\mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Karol}) & \text{alebo} & \mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})) \\
\text{vtt} & & \text{vtt} \\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor}) & & \mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \text{ a } \mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})) \\
\text{nepravda} & & \begin{array}{cc} \text{vtt} & \text{vtt} \\ \mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol}) & i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný}) \\ \text{vtt} & \text{pravda} \\ i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy}) & \\ \text{pravda} & \end{array}
\end{array}
$$

Pretože pri vyhodnocovaní implikácie sme zistili, že jej antecedent profesor(Karol) nie je nepravdivý v $\mathcal{M}$, museli sme vyhodnotiť aj konzekvent (¬hlúpy(Karol) ∧ sčítaný(Karol)). Ten je konjunkciou dvoch formúl, o ktorých sme zistili, že sú pravdivé v $\mathcal{M}$. Preto je v $\mathcal{M}$ pravdivý aj konzekvent, a teda celá implikácia.

Istou výhodou vyhodnocovania pravdivosti zhora nadol je, že ho niekedy môžeme ukončiť skôr. Keby sme napríklad zistili, že antecedent implikácie je nepravdivý, mohli by sme hneď skonštatovať, že implikácia je pravdivá a konzekventom sa nezaoberať. $\natural$

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\
i(\text{má\_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\},
\end{aligned}
$$

$$i(\text{brat}) = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,6)\},$$
$$i(\text{rodič}) = \{(1,1),(2,5),(2,6),(1,5),(3,4),(4,2),(1,6),(5,6),(6,5)\},$$
$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(5,6),(6,5)\},$$

zistite postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé. Tipnite si, či je formula formula A_3 pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$ a overte svoje tip postupom *zhora nadol* pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry (🎮) v prieskumníku štruktúr.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) → ¬starší(Alex, Bruno))

(A_2) (¬má_rád(Alex, Bruno) ↔ ¬má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) ((rodič(Bruno, Hugo) ∧ rodič(Bruno, Tereza)) →
((¬žena(Hugo) ∧ muž(Hugo)) → brat(Hugo, Tereza)))

2.2.3 Príklad. Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) ∧ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) ↔ učiteľ(Karol))

(A_3) (¬profesor(Karol) → (¬pozná(Karol, Alena) ∨ ¬vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol ≄ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_4$.

💡 Hľadanie štruktúry je najlepšie začať tak, že sa snažíme splniť tzv. fakty — atomické formuly a ich negácie.

Pri zložitejších formulách nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy majú byť v hľadanej štruktúre pravdivé. Napr. pre najkomplikovanejšiu formulu A_3 tak zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Interpretáciu predikátu vychádza[2] ľahko zvolíme tak, aby $(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{vychádza})$, môže byť napríklad prázdna. Samozrejme, často takúto slobodu nemáme a musíme hľadať iné možnosti, ako zabezpečiť pravdivosť zložitých formúl.

Nech

$$D = \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}$$
$$i(\text{Alena}) = \text{učiteľka218}$$

$$
\begin{aligned}
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}\\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}
$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.2.1. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) kniha(k325)

(A_3) má_autora(Sofiina_voľba, Styron)

(A_4) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ má_autora(Kto_chytá_v_žite, Salinger))

(A_5) (¬(číta(Adam, k325) ∧ obdivuje(Dana, Adam)) →
¬(má_titul(k325, Sofiina_voľba) ∨ má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_6) (má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬má_titul(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 (Na motívy Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1]) Uvažujme jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{triangle}^1, \text{square}^1, \text{circle}^1, \text{red}^1, \text{green}^1, \text{blue}^1, \text{larger}^2, \text{same\_color}^2\}$ pre doménu rovinných geometrických útvarov so zamýšľaným významom predikátových symbolov:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
red(x)	x je červený
green(x)	x je zelený
blue(x)	x je modrý
larger(x, y)	x je väčší než y
same_color(x, y)	x je rovnakej farby ako y

a formuly v tomto jazyku:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \neg(\mathsf{red}(\mathsf{B}) \to (\mathsf{square}(\mathsf{B}) \to \mathsf{triangle}(\mathsf{C})))\\
A_2 &= \neg((\mathsf{blue}(\mathsf{C}) \land \neg\mathsf{triangle}(\mathsf{C})) \leftrightarrow \mathsf{larger}(\mathsf{D}, \mathsf{C}))\\
A_3 &= ((\mathsf{circle}(\mathsf{C}) \lor \mathsf{circle}(\mathsf{B})) \to (\mathsf{larger}(\mathsf{B}, \mathsf{C}) \land \neg\mathsf{green}(\mathsf{D})))\\
A_4 &= ((\mathsf{red}(\mathsf{B}) \land \mathsf{square}(\mathsf{B})) \to (\mathsf{blue}(\mathsf{A}) \leftrightarrow \mathsf{blue}(\mathsf{C})))\\
A_5 &= (\mathsf{green}(\mathsf{C}) \to \neg\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_6 &= (\neg\mathsf{red}(\mathsf{C}) \lor \mathsf{green}(\mathsf{C}))\\
A_7 &= (\neg\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{D}) \leftrightarrow \mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_8 &= (\neg(\mathsf{triangle}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{triangle}(\mathsf{C})) \to \mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{B}))\\
A_9 &= \neg(\mathsf{blue}(\mathsf{C}) \land \mathsf{square}(\mathsf{C}))\\
A_{10} &= (\neg\mathsf{triangle}(\mathsf{A}) \to (\mathsf{triangle}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{triangle}(\mathsf{C})))\\
A_{11} &= (\mathsf{larger}(\mathsf{A}, \mathsf{C}) \to (\mathsf{square}(\mathsf{D}) \land \neg\mathsf{red}(\mathsf{D})))
\end{aligned}$$

Zostrojte model $\mathcal{M} = (D, i)$ teórie $\{A_1, \dots, A_{11}\}$, v ktorom interpretácie predikátov zároveň spĺňajú nasledujúce podmienky vyplývajúce z ich zamýšľaného významu:

12. Každý útvar má práve jednu farbu, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{red}, \mathsf{green}, \mathsf{blue}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{red})$, $i(\mathsf{green})$, $i(\mathsf{blue})$ sú navzájom disjunktné.

13. Každý útvar má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{triangle}, \mathsf{square}, \mathsf{circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{triangle})$, $i(\mathsf{square})$, $i(\mathsf{circle})$ sú navzájom disjunktné.

14. Relácia $i(\mathsf{larger})$ je *ostrým čiastočným usporiadaním* na D, teda je ireflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

15. Relácia $i(\text{same\_color})$ je *reláciou ekvivalencie* na D (teda je reflexívna, symetrická a tranzitívna), v ktorej sú si vzájomne ekvivalentné všetky útvary rovnakej farby (čiže pre všetky x, y, $z \in D$ súčasne platí $(x, y) \in i(\text{same\_color})$ vtt $x, y \in i(\text{red})$ alebo $x, y \in i(\text{green})$ alebo $x, y \in i(\text{blue})$).

Pre každú štvorprvkovú doménu a každú interpretáciu konštánt v nej existuje *práve jedna* interpretácia predikátov spĺňajúca všetky podmienky.

Pomôcka. Preložte si všetky formuly do prirodzeného jazyka a snažte sa pochopiť ich význam. Pokúste sa medzi nimi nájsť také, z ktorých priamo vyplývajú konkrétne fakty o (ne)pravdivosti atómov (nie iba alternatívy). Následne hľadajte formuly, ktoré vám z týchto faktov umožnia odvodiť ďalšie. Alternatívy zvažujte, iba keď je to naozaj nevyhnutné.

2.2.6 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu:

a) s binárnymi spojkami $\rightarrow$ (implikácia) a $\nrightarrow$ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je „A a nie je pravda, že B“.

b) s binárnymi spojkami $\rightarrow$ (implikácia) a $\veebar$ (exkluzívne alebo, XOR), pričom neformálny význam $(A \veebar B)$ je: buď je pravdivé A, alebo je pravdivé B, ale nie obe súčasne.

Formuly podľa vašich definícií nebudú obsahovať iné spojky okrem vyššie uvedených.

Zadefinujte štandardné spojky $(\wedge, \vee, \neg)$ ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zadefinovali $\leftrightarrow$ v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ = {Dominika, Fernando, Elena, Fero, Gabika, Spain, Slovakia, Databases, Programming, Logics, Informatics, Combinatorics, Slovak_l, Czech_l, 1} a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ = {student^1, professor^1, works^1, has_classmate^2, comes_from^2, supervises^2, passed^2, grad_exam^3}, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
student(x)	x je študent*ka
works(x)	x pracuje
professor(x)	x je profesor*ka
has_classmate(x, y)	x má spolužiaka*čku y
comes_from(x, y)	x pochádza z y
supervises(x, y)	x je školiteľom y
passed(x, y)	x absolvoval y
grad_exam(x, y, z)	x dostal na maturite z y hodnotenie z

(A_1) Študentka Dominika má spolužiaka Fernanda, ktorý je zo Španielska.

(A_2) Fernando je, samozrejme, tiež študent, napriek tomu, že popri štúdiu aj pracuje.

(A_3) Elena je profesorka a školí Dominiku alebo Fernanda.

(A_4) Fernanda tiež volajú Fero.

(A_5) Ak Dominika absolvovala aj databázy alebo programovanie, aj logiku, tak je Elena jej školiteľkou.

(A_6) Pretože "byť spolužiakom*čkou" je symetrický vzťah, je Gabika Fernandovou spolužiačkou rovnako, ako je on jej spolužiakom.

(A_7) Fero absolvoval programovanie iba za predpokladu, že nedostal na maturite z informatiky jednotku.

(A_8) Ak ju nedostal, potom musel absolvovať aj kombinatoriku.

(A_9) Dominika určite neabsolvovala ani kurz slovenčiny, ani češtiny, pokiaľ nie je zo zahraničia.

(A_{10}) Buď Dominika alebo Gabika je zo Slovenska (no nie obe).

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.

(A_3) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.

(A_4) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_5) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_6) Lucia sa preto hrá buď so svojím obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.

(A_7) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_8) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.

(A_9) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.

(A_{10}) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.

(A_{11}) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

(A_{12}) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.

(A_{13}) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).

(A_{14}) Luciino autíčko je ale modré.

(A_{15}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{16}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{17}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{18}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.

2.3.4 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, čašník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)

(A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.

(A_2) Gigi je žena.

(A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.

(A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.

(A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.

(A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.

(A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.

(A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.

(A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.

(A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.

(A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.

(A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým nekamaráti.

(A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.

(A_{14}) Bonus: Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.

(A_{15}) Bonus: Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne** a **osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.

2.3.5

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

(A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.

(A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.

(A_9) Ak by to, že Marienka *je Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku $\mathcal{L}$ ďalej sformalizujte formulami B_1, B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T.

c) Pre každú z formúl B_1, B_2, B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T.

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.

2.3.6 Sformalizujte nasledujúce skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený indivíduovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínsach.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:

a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry $\mathcal{M}_1$ takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.

b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

2.3.7 (Podľa Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1])

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{triangle}^1, \mathsf{square}^1, \mathsf{circle}^1, \mathsf{small}^1, \mathsf{medium}^1, \mathsf{large}^1, \mathsf{same\_size}^2, \mathsf{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\mathsf{triangle}(x)$	x je trojuholník
$\mathsf{square}(x)$	x je štvorec
$\mathsf{circle}(x)$	x je kruh
$\mathsf{small}(x)$	x je malý
$\mathsf{medium}(x)$	x je stredne veľký
$\mathsf{large}(x)$	x je veľký
$\mathsf{same\_size}(x, y)$	x a y majú rovnakú veľkosť
$\mathsf{larger}(x, y)$	x je väčší než y

(A_1) Ak A je trojuholník, tak B je tiež trojuholník.

(A_2) C je trojuholník, ak je ním B.

(A_3) A a C sú oba trojuholníky, iba ak aspoň jeden z nich je veľký.

(A_4) A je trojuholník, no C nie je veľký.

(A_5) Ak C je malý a D je kruh, tak D nie je ani veľký, ani malý.

(A_6) C je stredne veľký iba ak žiadny z D, E, F nie je štvorec.

(A_7) D je malý kruh, jedine že by A bol malý.

(A_8) E je veľký práve vtedy, keď je pravda, že D je veľký, ak a iba ak je taký F.

(A_9) D a E sú rovnakej veľkosti.

(A_{10}) D a E majú rovnaký tvar.

(A_{11}) F je buď štvorec alebo kruh, ak je veľký.

(A_{12}) C je väčší než E, iba ak B je väčší ako C.

Pomôcka. Môže sa vám zdať, že na vyjadrenie niektorých vzťahov v jazyku chýbajú predikáty. Vyjadrite ich zložitejšími formulami použitím existujúcich predikátov.

b) Zistite, aké tvary a veľkosti musia mať útvary A, …, F, aby boli pravdivé výroky A_1–A_{12}. Predpokladajte pritom, že každý z útvarov má práve jeden z uvedených tvarov a práve jednu z uvedených veľkostí.

c) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T, kde útvary A, …, F majú tvar a veľkosť, ktoré ste určili v predchádzajúcom bode.

Interpretácie predikátov v $\mathcal{M}$ musia pritom mať zamýšľaný význam, teda mať nasledujúce dodatočné vlastnosti:

- každý geometrický má práve jednu veľkosť, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{small}, \text{medium}, \text{large}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{small})$, $i(\text{medium})$, $i(\text{large})$ sú disjunktné;
- každý geometrický má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{triangle}, \text{square}, \text{circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{triangle})$, $i(\text{square})$, $i(\text{circle})$ sú disjunktné;
- interpretácia predikátu same_size je relácia ekvivalencie na D taká, že pre všetky $x, y \in D$:

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in i(\text{same\_size}) \text{ vtt} \\
&\quad x, y \in i(\text{small}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{medium}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{large});
\end{aligned}
$$

- interpretácia predikátu larger je ostré čiastočné usporiadanie na D, pričom pre každé $x, y \in D$:

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in i(\text{larger}) \text{ vtt } & x \in i(\text{large}) \text{ a } y \in i(\text{medium}) \cup i(\text{small}), \\
& \text{alebo } x \in i(\text{medium}) \text{ a } x \in i(\text{small}).
\end{aligned}
$$

2.3.8 (Na motívy Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1]) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{E}, \text{F}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{triangle}^1, \text{square}^1, \text{circle}^1, \text{small}^1, \text{medium}^1, \text{large}^1, \text{same\_size}^2, \text{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
small(x)	x je malý
medium(x)	x je stredne veľký
large(x)	x je veľký
same_size(x, y)	x je rovnako veľký ako y
larger(x, y)	x je väčší než y

(A_1) D je malý, ak je taký aj C.

(A_2) C je trojuholník, hoci nie je veľký.

(A_3) Ak A je kruh, tak aj B je kruh.

(A_4) A je malý a B je veľký, iba ak aspoň jeden z nich je kruh.

(A_5) D je kruh, iba ak žiadny z A, B, C nie je kruh.

(A_6) Ak E je malý štvorec, tak F nie je kruh ani trojuholník.

(A_7) E je veľký, pokiaľ A nie je stredne veľký trojuholník.

(A_8) A a B sú rovnakej veľkosti.

(A_9) B a C majú rovnaký tvar.

(A_{10}) C je veľký, ak a iba ak je pravda, že D je malý práve vtedy, keď je taký E.

(A_{11}) C je buď veľký alebo malý, ak je to kruh.

(A_{12}) A je väčší než D, iba ak je D väčší než E.

Pomôcka. Môže sa vám zdať, že na vyjadrenie niektorých vzťahov v jazyku chýbajú predikáty. Vyjadrite ich zložitejšími formulami použitím existujúcich predikátov.

2.4 Ohodnotenia

2.4.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ}, \text{pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}\\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}\\
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}
$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s $\mathcal{M}$, musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka $\mathcal{L}$, t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v $\mathcal{M}$ pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t, v opačnom prípade hodnotu f.

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PA}_{\mathcal{L}} = \{&\text{učiteľ(Alena)}, \text{učiteľ(Karol)},\\
&\text{pozná(Alena, Alena)}, \text{pozná(Karol, Karol)}, \text{pozná(Alena, Karol)}, \text{pozná(Karol, Alena)}\}
\end{aligned}
$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{aligned}
i(\text{Alena}) &\in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ(Alena)} & v = \{&\text{učiteľ(Alena)} \mapsto t,\\
i(\text{Karol}) &\notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ(Karol)} & &\text{učiteľ(Karol)} \mapsto f,\\
(i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) &\notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Alena, Alena)} & &\text{pozná(Alena, Alena)} \mapsto f,\\
(i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) &\notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Karol, Karol)} & &\text{pozná(Karol, Karol)} \mapsto f,\\
(i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) &\in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Alena, Karol)} & &\text{pozná(Alena, Karol)} \mapsto t,\\
(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) &\in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Karol, Alena)} & &\text{pozná(Karol, Alena)} \mapsto t\} \quad \natural
\end{aligned}$$

2.4.2 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{študent}^1, \text{profesor}^1, \text{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned}
v = \{&\text{študent(Adam)} \mapsto t, & &\text{študent(Karol)} \mapsto f,\\
&\text{profesor(Adam)} \mapsto f, & &\text{profesor(Karol)} \mapsto t,\\
&\text{učí(Adam, Karol)} \mapsto f, & &\text{učí(Karol, Adam)} \mapsto f\}
\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v, teda na definičnom obore ohodnotenia v, potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v $\mathcal{M}$, teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$\begin{aligned}
&v(\text{študent(Adam)}) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \text{študent(Adam)}, && \text{teda } i(\text{Adam}) \in i(\text{študent});\\
&v(\text{študent(Karol)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{študent(Karol)}, && \text{teda } i(\text{Karol}) \notin i(\text{študent});\\
&v(\text{profesor(Adam)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{profesor(Adam)}, && \text{teda } i(\text{Adam}) \notin i(\text{profesor});\\
&v(\text{profesor(Karol)}) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \text{profesor(Karol)}, && \text{teda } i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor});\\
&v(\text{učí(Adam, Karol)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Adam, Karol)}, && \text{teda } (i(\text{Adam}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{učí});\\
&v(\text{učí(Karol, Adam)}) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Karol, Adam)}, && \text{teda } (i(\text{Karol}), i(\text{Adam})) \notin i(\text{učí}).
\end{aligned}$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraďuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v $\mathcal{M}$. Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned}
D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\},\\
i(\text{Adam}) &= s667,\\
i(\text{Karol}) &= p830.
\end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n-tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned} i(\text{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\ i(\text{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\ i(\text{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}. \end{aligned} \qquad \natural$$

2.4.3

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné so štruktúrou $\mathcal{M}$.

b) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá\_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\text{hračka(Woody)} \mapsto t, & &\text{hračka(Andy)} \mapsto f, \\ &\text{chlapec(Andy)} \mapsto t, & &\text{chlapec(Woody)} \mapsto f, \\ &\text{hrá\_sa(Andy, Woody)} \mapsto t, & &\text{hrá\_sa(Woody, Andy)} \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

3 Výrokovologické vyplývanie, vlastnosti a vzťahy formúl

3.1 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť

3.1.1 Majme výrokovologickú teóriu T:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1\colon \big(\text{tancuje\_s(A, B)} \to (\text{frajer(A)} \lor \text{spieva(A)})\big), \\ A_2\colon (\neg\text{tancuje\_s(A, B)} \lor \neg\text{spieva(A)}), \\ A_3\colon (\neg\text{spieva(A)} \to \text{frajer(A)}) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl X_1–X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T, b) je nezávislá od T, alebo c) ani z T nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

(X_1) (tancuje_s(A, B) → frajer(A)),

(X_2) ¬spieva(A),

(X_3) (¬spieva(A) ∧ ¬frajer(A)).

> Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

3.1.2 Príklad. (Variácia na Smullyana [6]) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrewsa a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie.

Riešenie sme rozdelili na kroky, ktoré by ste mali aplikovať pri každej neformálne zadanej úlohe.

i. Formalizácia. Zistenia A_1–A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{vinný}^1\}$ (kde vinný(x) znamená, že x je vinný).

Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto s kým pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebujeme reprezentovať indivíduovými konštantami alebo predikátovými symbolmi, pretože hovoria iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom vinný^1.

Teória T je nasledovná:

$$T = \begin{Bmatrix} A_1\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \to \mathsf{vinný}(\mathsf{B})), \\ A_2\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \lor \mathsf{vinný}(\mathsf{B})) \end{Bmatrix}.$$

ii. Určenie formálnych problémov. Aby sme odpovedali na otázky o vine, nevine a nemožnosti o nich rozhodnúť, musíme vyriešiť tieto formálne logické problémy:

- Overiť výrokovologickú *splniteľnosť teórie* T.

  Ak je T nesplniteľná, zistené skutočnosti si protirečia, neopisujú žiaden stav sveta, preto sa na ich základe nedá rozhodnúť o (ne)vine podozrivých.

- Pre obe indivíduové konštanty $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ zistiť, či *formula* vinný(c) *výrokovologicky vyplýva z teórie* T (potom c je určite vinný), *formula* ¬vinný(c) *vyplýva z* T (c je určite *ne*vinný), a či *je formula* vinný(c) *nezávislá od* T (o vine c nemožno rozhodnúť).

  Pre každého podozrivého teda riešime 3 formálne problémy. Pochopiteľne, ak zistíme, že je T nesplniteľná, tieto problémy už riešiť netreba.

iii. Riešenie formálneho problému. Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Zostrojíme všetky výrokové ohodnotenia tých atomických formúl, ktoré sa vyskytujú v T, a zistíme, či je aspoň v jednom pravdivá. Keď nájdeme prvý model, musíme nájsť všetky, aby sme následne mohli vyhodnotiť vyplývanie zaujímavých formúl z T, resp. ich nezávislosť od T:

	v_i		T			
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	(vinný(A) → vinný(B))	(vinný(A) ∨ vinný(B))
v_1	f	f	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_2	t	f	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

iv. Výsledky riešenia formálneho problému. Zistili sme, že T je *splniteľná* (viď def. 3.5), keďže napr. $v_3 \models_p T$. Teória má dva modely, v_3 a v_4. Pomocou nich určíme, aké vzťahy s teóriou T majú formuly zaujímavé pre odpoveď na neformálnu otázku z úlohy:

- Formula vinný(A) *nevyplýva z* T ($T \not\models_p$ vinný(A)), pretože existuje model T, a to v_3, v ktorom vinný(A) nie je pravdivá (def. 3.7). Zároveň však $v_4 \models_p$ vinný(A), takže vinný(A) *je od* T *nezávislá* (def. 3.10). A $T \not\models_p$ ¬vinný(A), lebo $v_4 \not\models_p$ ¬vinný(A).
- Formula vinný(B) *vyplýva z* T *(*$T \models_p$ vinný(B)*)*, pretože je pravdivá vo všetkých (oboch) modeloch T (stručnejšie: $v_i \models_p$ vinný(B) pre $i \in \{3, 4\}$) . Od T *nie je nezávislá*, lebo neexistuje model T, v ktorom by bola nepravdivá. Formula ¬vinný(B) *nevyplýva z* T, lebo napr. $v_3 \not\models_p$ ¬vinný(B).

v. Interpretácia (vyvodenie neformálnych záverov z formálnych). Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých:

- Brown je určite vinný, pretože $T \models_p$ vinný(B).
- Nikto z podozrivých nie je istotne nevinný, keďže pre žiadne $c \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$ neplatí $T \models_p$ ¬vinný(c).
- O Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť, lebo formula vinný(A) je nezávislá od T.

Uvedomme si ešte raz, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \models_p$ vinný(B) urobiť len vďaka tomu, že sme predtým **overili splniteľnosť** T. Ak by bola teória T nesplniteľná, vyplývala by z nej každá formula, teda vinný(B) aj ¬vinný(B). Na základe takejto teórie by sme nemohli vyvodiť žiadne zmysluplné závery. ♮

3.1.3 (Variácia na Smullyana [6]) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z lúpeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Parkera. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Miles nikdy nepracuje sám, teda lúpil, iba ak sa na lúpeži podieľal aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_2) Davies vždy pracuje s Parkerom.

(A_3) Parker sa s Milesom neznáša, preto určite nelúpili spolu.

(A_4) Z lúpeže môžu byť vinní len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

a) Využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite, koho z podozrivých môže inšpektor s istotou obviniť, koho môže bez obáv prepustiť, lebo sa krádeže určite nezúčastnil, a koho musí prepustiť pre nedostatok dôkazov.

b) Aké by boli vaše závery, keby inšpektor zistil aj nasledujúcu skutočnosť?

(A_5) Milesa videli dvaja spoľahliví svedkovia utekať s lupom z obchodného domu, takže je určite vinný.

Pomôcka. Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

3.1.4 (Variácia na Smullyana [6]) Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.

(A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.

(A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.

(A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

3.1.5 Jožko ide ráno na prechádzku, pričom o aktuálnom počasí má tieto informácie:

1. Ak neprší, tak svieti slnko.
2. Ak prší, tak dúhu vidno, iba ak aj svieti slnko.
3. Vonku vidno dúhu a prší, hoci nesvieti slnko. Alebo neprší.

Na základe týchto informácií usúdil, že na prechádzke:

x) *určite* potrebuje *slnečné* okuliare;

y) bez dáždnika *určite zmokne*;

z) *nedá sa rozhodnúť*, či na prechádzke *uvidí* alebo *neuvidí dúhu*.

Zistite o každom Jožkovom závere, či je správny.

Vašou úlohou je:

i. Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.

ii. Určiť, aké logické problémy zodpovedajú záverom x)–z) (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).

iii. Určiť, akou metódou budete riešiť logické problémy, ktoré ste určili, a vyriešiť ich.

iv. Sformulovať formálne výsledky.

v. Rozhodnúť o správnosti záverov x)–z) na základe výsledkov riešenia logických problémov (teda interpretovať ich).

Pomôcka. Na formalizáciu a sformulovanie logických problémov vám postačia 3 predikátové atómy.

⚠ Závery sú 3 a každému zodpovedá jeden logický problém. **Navyše** všetky závery ovplyvňuje **ďalší** dôležitý logický problém, ktorý musíme vyriešiť ako prvý.

3.1.6 (Ghidini a Serafini [2]) Prechádzate labyrintom a ocitnete sa na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Dá sa na základe uvedených informácií rozhodovať o tom, ktoré cesty vedú a ktoré nevedú do stredu labyrintu?

ii. O ktorých cestách môžete s istotou povedať, že vedú do stredu labyrintu?

iii. Ktoré z ciest určite nevedú do stredu labyrintu?

iv. O ktorých cestách sa nedá rozhodnúť, že do stredu labyrintu vedú alebo nevedú?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.

b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam i–iv (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).

c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili.

d) Zodpovedať otázky i–iv na základe riešení logických problémov.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 3 predikátové atómy.

Vyriešenie samotnej hádanky je len malá časť tejto úlohy. Dôsledne vyriešte všetky podúlohy.

3.1.7 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Ak Minister nie je schopný, Premiér ho odvolá. Alebo je Premiérov kamarát.

(A_2) Minister je Premiérov kamarát, ak ho Premiér neodvolal.

(A_3) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémii, je schopný.

(A_4) Premiér Ministra neodvolal, napriek tomu, že Minister proti pandémii účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov A_1–A_4:

(C_1) je Minister schopný,

(C_2) Premiér Ministra odvolá,

(C_3) Minister je Premiérov kamarát.

Pomôcka. V tomto zadaní chápeme Ministra a Premiéra ako konkrétne osoby, nie ako roly nejakých nepomenovaných osôb.

3.1.8 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Keď Rusko zaútočilo na Ukrajinu, tak porušilo Budapeštianske memorandum alebo Putin klame.

(A_2) Rusko je agresor, ak porušilo Budapeštianske memorandum a na Ukrajinu zaútočilo.

(A_3) Rusko neporušilo Budapeštianske memorandum, len ak Putin neklame.

(A_4) Ak to, že Rusko zaútočilo na Ukrajinu, znamená, že porušilo Budapeštianske memorandum, tak Putin klame.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti zistite, ktoré z nasledujúcich výrokov (C_1)–(C_3) sú na základe výrokov (A_1)–(A_4) určite pravdivé, určite nepravdivé, a o ktorých to nemožno rozhodnúť:

(C_1) Putin klame,

(C_2) Rusko Budapeštianske memorandum neporušilo,

(C_3) Rusko je agresor, iba ak zaútočilo na Ukrajinu.

3.1.9 Inšpektor NAKA Činčila vyšetruje úplatkársku kauzu, v ktorej figurujú štyria podozriví z poskytnutia alebo prijatia úplatku: JH, MK, TG a DT. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Ak podlácali JH aj MK, tak podplatili TG.

(A_2) Podplácal aj MK alebo úplatok prijal TG, ak podplácal JH.

(A_3) TG berie úplatok, iba ak ani DT neobíde nasucho.

(A_4) Ak nepodplácal JH, tak bol určite podplatený DT.

Kto je v tejto kauze z podplácania alebo brania úplatku podľa indícií určite vinný, kto určite nevinný a o koho vine nemožno rozhodnúť?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlite.

b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam o vine zo zadania (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).

c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili. Zdôvodnite ich, teda napr. vysvetlite, prečo vaša pravdivostná tabuľka ukazuje, že formula/teória je splniteľná.

d) Zodpovedať otázky zo zadania na základe riešení logických problémov.

3.2 Vlastnosti výrokovologických formúl

3.2.1 Príklad. Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pekné}, \text{rýchle}, \text{ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{moje\_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné}(\text{moje\_auto})$, $R = \text{rýchle}(\text{moje\_auto})$ a $E = \text{ekologické}(\text{moje\_auto})$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$

b) $((P \lor \neg P) \land \neg(E \lor \neg E))$

c) $(P \to (P \to (P \to P)))$

d) $(P \land (E \lor \neg(P \to R)))$

e) $(((P \to P) \to P) \to \neg P)$

f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$

g) $((P \land \neg P) \lor (P \lor \neg P))$

h) $(P \land \neg P)$

i) $(((P \to R) \to P) \to P)$

j) $\neg\neg\neg(P \lor P)$

k) $((P \land E) \to (\neg P \land E))$

l) $\neg((P \lor R) \lor (\neg P \lor E))$

m) $\big(((E \lor \neg R) \land (P \to \neg R)) \to (\neg R \to (\neg P \land E))\big)$

n) $\big((P \to (\neg R \to E)) \land ((\neg P \lor \neg E) \land \neg(P \to R))\big)$

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$, podľa tvrdení 3.19 a 4.3 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A:

Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i							
	P	E	$\neg P$	$\neg E$	$(P \wedge E)$	$\neg(P \wedge E)$	$(\neg P \wedge \neg E)$	$(\neg(P \wedge E) \to (\neg P \wedge \neg E))$
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *nie je pravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models_p A$, teda A *je pravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *je nepravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models_p A$, teda *nie je pravda*, že A je *nepravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* nesplniteľná. ♮

3.2.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{ľúbi}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{P}, \text{L}\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \to \neg\text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})) \wedge (\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \vee \text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})))$

(X_2) $(\neg(\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \wedge \text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})) \leftrightarrow (\neg\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \vee \neg\text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})))$

(X_3) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \to \text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})) \wedge \neg(\text{ľúbi}(\text{P}, \text{L}) \vee \text{ľúbi}(\text{L}, \text{P})))$

3.2.3 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$.

O každej z nasledujúcich formúl v jazyku $\mathcal{L}$ rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) $\neg(\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

(X_2) $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$

(X_3) $\neg((\neg A \rightarrow B) \wedge \neg(A \vee B))$

(X_4) $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$

Riešenie pre X_1.

⚠ Pretože formuly A a B nemusia byť atomické, **nemôžeme** vymenovať ich ohodnotenia tak ako v riešení úlohy 3.2.1. $v(A)$ nie je definované, ak A nie je predikátový atóm. Nevieme ani to, aké atómy formuly A a B obsahujú (a možno sú ich tisíce), takže nemôžeme vymenovať ani všetky ohodnotenia týchto atómov. Navyše na rozdiel od atómov môžu byť formuly A a B tautológiami či nesplniteľnými (nezávisle od seba) a v tom prípade neexistujú ohodnotenia, v ktorých by boli nepravdivé resp. pravdivé.

Môžeme však zobrať ľubovoľné ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ a skúmať rôzne prípady pravdivosti ($\models_p$) formúl A a B v tomto ohodnotení. Kvôli prehľadnosti zapíšeme možné prípady do tabuľky. **Všimnite si** však, ako sa táto tabuľka **líši** od tabuľky z riešenia úlohy 3.2.1.

Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistime, v ktorých prípadoch je vo v pravdivá formula X_1:

	A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(Y \leftrightarrow Z)$	$\neg(Y \leftrightarrow Z)$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$

Označili sme $Y := \neg(A \wedge B)$ a $Z := (\neg A \vee \neg B)$, teda $X_1 = \neg(Y \leftrightarrow Z)$.

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. Ako vidíme, v každom prípade je formula X_1 nepravdivá.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: X_1 je nepravdivá v každom ohodnotení v pre jazyk $\mathcal{L}$.

Z definícií vlastností formúl teda vyplýva, že formula X_1:

i. nie je tautológia,

ii. nie je splniteľná,

iii. je falzifikovateľná,

iv. je nesplniteľná. ♮

Riešenie pre X_2. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Preskúmajme, ako pravdivosť a nepravdivosť formúl A a B vo v ovplyvňuje pravdivosť formuly X_2:

	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \to \neg B)$	$(A \lor B)$	$((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. V prípade, že $v \models_p A$, je formula X_2 vo v pravdivá, kým v opačnom prípade je nepravdivá.

Tento výsledok sa **nedá** jednoducho zovšeobecniť. Bez ďalších informácií o formulách A a B nemôžeme rozhodnúť **o žiadnej** z požadovaných vlastností formuly X_2.

⚠ Tento záver môže na prvý pohľad vyzerať prehnane pesimisticky. Z tabuľky sa predsa **zdá**, že by X_2 mala byť splniteľná aj falzifikovateľná a nemala by byť tautológia ani nesplniteľná. **Ale nie je to tak**, pretože A a B nemusia byť atomické formuly, a preto pre ne niektoré z prípadov rozoberaných v tabuľke **nemusia nastať**:

Keď zvolíme formulu A tak, že je nesplniteľná (napr., $(a \land \neg a)$ pre nejaký predikátový atóm a jazyka $\mathcal{L}$), nebudú existovať žiadne ohodnotenia, kde by A bola pravdivá. Potom môžu nastať iba prípady z prvých dvoch riadkov našej tabuľky, teda v *každom ohodnotení* bude formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá, a teda bude nesplniteľná a zároveň falzifikovateľná (a nebude taulógia ani splniteľná).

Ak ale napríklad vyberieme za A tautológiu a za B nesplniteľnú formulu, v *každom ohodnotení* nastane iba 3. prípad, preto $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ bude tautológia (a teda splniteľná atď.).

Ako posledný príklad uvažujme, že A bude nejaký predikátový atóm a z jazyka $\mathcal{L}$ a $B = \neg a$. Potom v ohodnotení v_1, kde $v_1(a) = f$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá (2. prípad). Naopak v ohodnotení v_2, kde $v_2(a) = t$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ pravdivá (3. prípad). Pri tejto voľbe formúl A a B bude teda formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ splniteľná aj falzifikovateľná. ♮

3.3 Ekvivalentnosť formúl

3.3.1 Príklad. Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{f}^1, \mathrm{h}^1, \mathrm{b}^1, \mathrm{NHL}^1, \mathrm{i}^1, \mathrm{r}^1, \mathrm{m}^1\}$, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL, i značí inteligentná, r značí rozumná, a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{M}, \mathrm{E}\}$, kde M značí Miro, E značí Eva, sú (sémanticky) ekvivalentné

a) de Morganove pravidlá:
$\neg(\mathrm{f(M)} \land \mathrm{h(M)})$ a $(\neg\mathrm{f(M)} \lor \neg\mathrm{h(M)})$,

$\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$;

b) $(\mathsf{h}(\mathsf{M}) \to (\mathsf{b}(\mathsf{M}) \to \mathsf{NHL}(\mathsf{M}))$ a $((\mathsf{h}(\mathsf{M}) \land \mathsf{b}(\mathsf{M})) \to \mathsf{NHL}(\mathsf{M})))$;

c) $\neg(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \land (\mathsf{r}(\mathsf{E}) \lor \mathsf{b}(\mathsf{E})))$ a $(\neg\mathsf{i}(\mathsf{E}) \lor \neg\mathsf{r}(\mathsf{E})) \land (\neg\mathsf{i}(\mathsf{E}) \lor \neg\mathsf{b}(\mathsf{E})))$.

d) $\neg\big(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{E}) \land \mathsf{b}(\mathsf{E}))\big)$ a $\big(\neg(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \to \mathsf{r}(\mathsf{E})) \lor (\mathsf{i}(\mathsf{E}) \land \neg\mathsf{b}(\mathsf{E}))\big)$

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme pravdivosť formúl $\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých predikátových atómov, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i						
	f(M)	h(M)	¬f(M)	¬h(M)	(f(M) ∧ h(M))	¬(f(M) ∧ h(M))	(¬f(M) ∨ ¬h(M))
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \models_p \neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ vtt $v_i \models_p (\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$. Z toho, z tvrdenia 3.19 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.9 vyplýva, že formuly $\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$ sú ekvivalentné.

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

♮

3.3.2 Príklad. Nasledujúce dvojice formúl sú výrokovologicky ekvivalentné pre všetky formuly A, B, C v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Dokážte to rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom výrokovologickom ohodnotení podobne ako v príklade 3.2.3.

a) *Nahradenie implikácie a ekvivalencie*

Implikácia je ekvivalentná disjunkcii negovaného antecedentu (ľavej strany) s konzekventom (pravou stranou).

i. $(A \to B) \Leftrightarrow_p (\neg A \lor B)$

Ekvivalenciu $(A \leftrightarrow B)$ sme zadefinovali ako skratku za $((A \to B) \land (B \to A))$. Alternatívne by sme ju mohli zadefinovať aj podľa nasledujúcej ekvivalencie:

ii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_p ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))$

Kedy je táto ekvivalencia výhodná pri úpravách formúl do CNF? Kedy je naopak výhodná naša definícia $\leftrightarrow$ konjunkciou dvoch implikácií?

b) *Asociatívnosť*

Binárne spojky $\land$, $\lor$ a skratka $\leftrightarrow$ sú asociatívne:

i. $((A \land B) \land C) \Leftrightarrow_{\text{p}} (A \land (B \land C))$

ii. $((A \lor B) \lor C) \Leftrightarrow_{\text{p}} (A \lor (B \lor C))$

iii. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \Leftrightarrow_{\text{p}} (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

Implikácia $\rightarrow$ samozrejme **nie je** asociatívna.

c) *Komutatívnosť a obmena implikácie*

Binárne spojky $\land$, $\lor$ a skratka $\leftrightarrow$ sú komutatívne:

i. $(A \land B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (B \land A)$

ii. $(A \lor B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (B \lor A)$

iii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (B \leftrightarrow A)$

Implikácia $\rightarrow$ samozrejme **nie je** komutatívna, ale je ekvivalentná so svojou *obmenou*:

iv. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (\neg B \rightarrow \neg A)$

d) *Zákon dvojitej negácie a De Morganove zákony*

Tieto zákony pravdepodobne poznáte:

i. $\neg\neg A \Leftrightarrow_{\text{p}} A$

ii. $\neg(A \land B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (\neg A \lor \neg B)$

iii. $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (\neg A \land \neg B)$

Pomocou nahradení z časti a) sa z nich dajú ľahko odvodiť analogické zákony pre implikáciu a ekvivalenciu:

iv. $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (A \land \neg B)$

v. $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_{\text{p}} (A \leftrightarrow \neg B)$

e) *Distributívnosť*

Konjunkciu môžeme distribuovať do disjunkcie ($\Rightarrow$) a aj ju z nej vyňať ($\Leftarrow$). Rovnako disjunkciu môžeme distribuovať do/vyňať z konjunkcie:

i. $(A \land (B \lor C)) \Leftrightarrow_{\text{p}} ((A \land B) \lor (A \land C))$

ii. $(A \lor (B \land C)) \Leftrightarrow_{\text{p}} ((A \lor B) \land (A \lor C))$

Implikácia je pozoruhodná tým, že ju môžeme distribuuovať do konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ba aj ekvivalencie v jej konzekvente (t.j., na jej pravej strane), a tiež môžeme vyňať spoločný antecedent (pravú stranu implikácie).

iii. $(A \rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
iv. $(A \rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$
v. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
vi. $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C))$

f) *Identita, idempotencia a absorpcia*

Pripojením ľubovoľnej tautológie $\top$ (napr. $(B \vee \neg B)$) k akejkoľvek formule konjunkciou sa nezmení jej význam. Tautológie sa teda voči konjunkcii správajú podobne ako jednotka voči násobeniu. Analogický vzťah je medzi nesplniteľnými formulami $\bot$ (napr. $(B \wedge \neg B)$) a disjunkciou. Týmto dvom faktom sa hovorí aj *zákony identity*.

i. $(A \wedge \top) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$
ii. $(A \vee \bot) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Naopak nesplniteľné formuly voči konjunkcii a tautológie voči disjunkcii sa správajú ako nula voči násobeniu:

iii. $(A \wedge \bot) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} \bot$
iv. $(A \vee \top) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} \top$

Spojky $\wedge$ a $\vee$ sú *idempotentné*, teda ich aplikácia na tú istú formulu nemení jej význam.

v. $(A \wedge A) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$
vi. $(A \vee A) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Zákony *absorpcie*: Keď formulu A disjunkciou pripojíme ku konjunkcii A s ľubovoľnou formulou B, nepridali sme žiadnu novú informáciu (pridaná konjunkcia sa „absorbuje“ do A). To isté platí o pripojení A konjunkciou k $(A \vee B)$.

vii. $(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$
viii. $(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A$

Pri úprave formuly do CNF nám tieto ekvivalencie umožňujú zbaviť sa zdvojených podformúl, zrejmých tautológií alebo nesplniteľných podformúl a absorbovateľných podformúl, ktoré môžu vzniknúť napríklad aplikáciou distributívnych zákonov.

> ⚠ Platia rovnaké varovania ako v príklade 3.2.3. Postupujeme rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom ohodnotení.

Riešenie pre d) iv. pravidlo negácie disjunkcie. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné výrokovologické ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistime, v ktorých prípadoch $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$:

	A	B	$(A \to B)$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$(A \land \neg B)$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. Obe sú pravdivé, keď $v \models_p A$ a $v \not\models_p B$, inak sú obe nepravdivé. Teda v každom prípade $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: $v \models_p \neg(A \to B)$ vtt $v \models_p (A \land \neg B)$ pre každé ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$. Podľa definície ekvivalentnosti formúl 4.9 teda $\neg(A \to B) \Leftrightarrow_p (A \land \neg B)$. ♮

3.4 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

3.4.1 Príklad. Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom $\mathrm{z} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$ taká, že

a) A je výrokovologicky splniteľná *vtt* B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$).

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk podľa predpokladov. Jazyk $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{ P\_c_1\_\dots\_c_n{}^1 \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1},\ \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_1}(P) = n,\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \}.$$

Každý predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}_2$ je teda unárny a vznikne spojením (pomocou podčiarnikov) niektorého pôvodného predikátového symbolu P a toľkých pôvodných indivíduových konštánt, aká je arita predikátu P. Jazyk $\mathcal{L}_2$ obsahuje všetky možné také kombinácie.

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}_1$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $P(c_1, \dots, c_n)$ nahradíme atómom $P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$, pre všetky $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, kde n je arita predikátového symbolu P. (Teda napr. ak A = (ľúbi(Peter, Lucia) $\to$ naliala(Lucia, Peter, Pivo)), tak B = (ľúbi_Peter_Lucia(z) $\to$ naliala_Lucia_Peter_Pivo(z)).)

Dokážme najprv časť a), $\Rightarrow$: Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})) = v_1(P(c_1, \dots, c_n)), \qquad \text{pre každý } P\_c_1\_ \dots \_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}.$$

Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A:

- Nech A je atomická formula. Ak A je predikátový atóm, má tvar $A = P(c_1, \dots, c_n)$, pre nejaký n-árny predikátový symbol $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a nejaké indivíduové konštanty $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$.

  Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako (t.j. $v_1(A) = v_2(B)$), vidíme, že platí $v_1 \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B$.

  Ak A je rovnostný atóm, tvrdenie preň triviálne platí. 💡 Tvrdenie máme dokázať iba pre výrokovologické formuly, teda také, v ktorých sa rovnosť nevyskytuje.

- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1. Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_1$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre $\neg$ potom platí aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v_1 \not\models_{\mathrm{p}} A_1$ vtt $v_2 \not\models_{\mathrm{p}} B_1$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B$.

- Nech A je v tvare $(A_1 \land A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \land B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_1$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_1$ ako aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_2$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\land$) potom platí aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_1$ a $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_2$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_1$ a $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_2$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B$.

- Nech A je v tvare $(A_1 \lor A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \lor B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_1$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_1$ ako aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_2$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\lor$) potom platí aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

- Nech A je v tvare $(A_1 \to A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \to B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_1$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_1$ ako aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A_2$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\to$) potom platí aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v_2 \models_{\mathrm{p}} B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), $\Leftarrow$ je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(P(c_1, \dots, c_n)) = v_2(P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})),$$

pre všetky $P^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva, že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) výrokovologické formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
D_2 &= \{7\},\\
i_2(\mathrm{z}) &= 7,\\
i_2(P_c_1_\dots_c_n) &= \begin{cases} \{7\}, & \text{ak } (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P),\\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases}
\end{aligned}$$

pre každý $P\_c_1\_\dots\_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$.

Ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula (a teda $B = P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) = 7 \in i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.

Dokážme teraz časť b), $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{\, \heartsuit_c \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \,\},\\
i_1(c) &= \heartsuit_c && \text{pre každú } c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1},\\
i_1(P) &= \{\, (\heartsuit_{c_1}, \dots, \heartsuit_{c_n}) \mid i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P_c_1_\dots_c_n),\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \,\}\\
& && \text{pre každý } P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \text{ kde } n \text{ je arita } P.
\end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade $\Leftarrow$. Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula, a teda $B = P\_c_1\_\dots\_c_n(\mathrm{z})$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P\_c_1\_\dots\_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly.

V dôkaze časti b) v smere $\Leftarrow$ samozrejme nezáleží na konkrétnom objekte, ktorý použijeme v doméne D_2.

Podobne ani v smere $\Rightarrow$ nie sú podstatné konkrétne objekty v doméne D_1, pokiaľ zabezpečíme, že každej indivíduovej konštante sa dá priradiť unikátny prvok domény, teda že interpretácia konštánt bude injektívna funkcia (prečo?). My sme si zvolili doménu pozostávajúcu zo symbolov $\heartsuit_c$ pre každú konštantu c. Rovnako dobre by sme mohli konštanty zoradiť do postupnosti a i-tu konštantu interpretovať jej poradovým číslom i. Dokonca by ako D_1 poslúžila priamo množina všetkých konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ — takej štruktúre sa hovorí *herbrandovská interpretácia*. ♮

3.4.2 Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ = {prof_Mráček, doc_Uhladená, Kiki, Veve, študent$_1$, …, študent$_7$, Mat_1, …, Mat_4, Prog_1, Prog_2, null, A, B, …, FX, riadny, 1.opravný, 2.opravný} a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ = {milý^1, prísny^1, študent^1, učiteľ^1, usilovný^1, školiteľ^2, učiteľ_predmetu^2, hodnotenie^5}.

Dokážte, že existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenou množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ = {platí^2} taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje výrokovologická formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

3.4.3 Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštantánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Pomôcka. Riešenie cvičenia 3.4.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 3.4.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk $\mathcal{L}_1$ preložiť do jazyka $\mathcal{L}_2$ tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte", iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny indivíduových konštánt.

3.4.4 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho indivíduová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých indivíduových konštánt konštantou a.

Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.

b) Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

3.4.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$, nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v $\mathcal{L}$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.

b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

d) Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.

e) $T \models_p (X \rightarrow Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models_p Y$.

f) Ak $T \models_p (X \vee Y)$, tak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$.

g) Ak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \vee Y)$.

h) Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$.

i) Ak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$.

j) Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$.

k) Ak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$.

l) $T \models_p X$ a $T \models_p Y$ vtt $T \models_p (X \wedge Y)$.

m) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nesplniteľná vtt X je tautológia a Y je nesplniteľná.

n) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.

o) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T, tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X.

p) Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \cup \{\neg Y\} \models_p \neg X$.

q) Ak $T \not\models_p (X \wedge Y)$, tak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p \neg Y$.

r) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} (X \wedge Y)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \not\models_{\mathrm{p}} Y$.

s) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} (X \vee Y)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ a $T \not\models_{\mathrm{p}} Y$.

t) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} (X \vee Y)$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$ a $T \models_{\mathrm{p}} \neg Y$.

u) Ak $T \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} (X \wedge \neg Y)$.

v) Ak T je nesplniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \not\models_{\mathrm{p}} X$.

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$ vtt X je tautológia.

Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.13c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$ je postačujúcou (⇒) aj nutnou (⇐) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

(⇒) ak $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$, tak X je tautológia; (⇐) ak X je tautológia, $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$.

(⇒) a (⇐) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie $\to$). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

(⇒) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá teória $\{\}$, je pravdivá aj formula X. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v.

Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly z $\{\}$ sú pravidvé vo v, a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_{\mathrm{p}} \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X, potom máme, že $v \models_{\mathrm{p}} X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v, teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

Keď máme dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

(⇐) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Predpokladajme, že $v \models_p \{\}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X, teda z $\{\}$ vyplýva X, čo bolo treba dokázať.

Jasnejšia formulácia tvrdenia „*Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá* $\{\}$, *je pravdivá aj* X," je „*Pre všetky ohodnotenia* v, *ak* $v \models_p \{\}$, *tak* $v \models_p X$". Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Dokázaním tvrdení (⇒) a (⇐) sme dokázali tvrdenie a).

Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku *rozboru prípadov*, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.10 a tvrdenia 4.13c)(⇐).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj X. To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.

Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje v, v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
- Ak neexistuje v, v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť.**

  Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v, v ktorom je T pravdivá" nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením ***konkrétnej*** teórie T a formuly X, pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{a}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{(\mathrm{p}(\mathrm{a}) \land \neg\mathrm{p}(\mathrm{a}))\}$ a formulu $X = \mathrm{p}(\mathrm{a})$. T je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v je implikácia „ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$" pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho ***kontrapríkladov***.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Predpokladajme, že $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, a zistime, či $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v, pre ktoré platí $v \models_{\mathrm{p}} T$, ale $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_{\mathrm{p}} T$, tak $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_{\mathrm{p}} T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_{\mathrm{p}} X$, a teda $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T, X a ohodnotenie v, pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením ***konkrétneho*** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{\mathrm{p}(\mathrm{a})\}$ a formulu $X = \mathrm{p}(\mathrm{b})$. Potom $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{\mathrm{p}(\mathrm{a}) \mapsto t, \mathrm{p}(\mathrm{b}) \mapsto f\}$ máme $v \models_{\mathrm{p}} T$ a $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{\mathrm{p}(\mathrm{a}) \mapsto t, \mathrm{p}(\mathrm{b}) \mapsto t\}$ máme $w \models_{\mathrm{p}} T$ a $w \models_{\mathrm{p}} X$, teda $w \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Preto $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. $\natural$

4 Dôkazy a výrokovologické tablá

4.1 Vyplývanie v tablách

4.1.1 Príklad. (Smullyan [6]) Na políciu predviedli troch podozrivých Bakerovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

1. Doyle je vinný, ak je Bakerová vinná a Mills nevinný.
2. Doyle nikdy nepracuje sám.
3. Bakerová nikdy nepracuje s Doyleom.
4. Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Bakerovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Je na základe týchto zistení:

x) Mills určite vinný?

y) Doyle určite nevinný?

Úlohu riešte pomocou tablového kalkulu. Dôkaz vyplývania formuly preložte do slovenčiny.

> Pri riešení tejto *neformálne* zadanej úlohy postupujeme podobne ako v príklade 3.1.2. Rozdiel je len v tom, akými prostriedkami vyriešime formálne problémy.

Riešenie. i. Formalizácia. Na formalizáciu poznatkov z vyšetrovania a otázky nám postačia atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Bakerová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Bakerová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si atomické formuly označíme nasledovne: M = vinný(Mills), D = vinný(Doyle) a B = vinný(Bakerová).

Zistenia 1–4 sformalizujeme teóriou $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

$$A_1 = ((B \land \neg M) \to D)),$$
$$A_2 = (D \to (B \lor M)),$$
$$A_3 = (B \to \neg D),$$
$$A_4 = (B \lor (M \lor D)).$$

Otázky sa týkajú formúl: x) M a y) $\neg D$. To, že sa otázka týka atomickej formuly alebo jej negácie, samozrejme, nie je pravidlo.

ii. Určenie formálnych problémov. Na zodpovedanie otázok musíme vyriešiť **tri** formálne logické problémy:

w) Je teória T výrokovologicky splniteľná?

> Tento problém musíme riešiť, pretože nemôžeme niekoho obviniť na základe vzájomne si odporujúcich zistení. Podobne je to v akejkoľvek neformálnej úlohe.

x) Vyplýva formula M z teórie T?

y) Vyplýva formula $\neg D$ z teórie T?

> Otázky sú priamo zamerané na Millsovu vinu a Doyleovu nevinu, preto nám na jej zodpovedanie stačí vyriešiť tieto dva formálne problémy. V príklade 3.1.2 bola otázka komplikovanejšia a viedla k 6 formálnym problémom.

iii. Riešenie formálnych problémov. w) Na overenie splniteľnosti teórie T stačí nájsť jej ľubovoľný model, teda také ohodnotenie v, že $v \models_p T$. Ľahko si overíme, že takýmto modelom je napríklad

$$v_0 = \{M \mapsto t, D \mapsto f, B \mapsto f\}.$$

> Model sme našli krátkou úvahou: Povedzme, že je atóm M pravdivý. Potom je pravdivá prvá (nepravdivý antecedent implikácie), druhá (pravdivý konzekvent) aj štvrtá formula (pravdivý jeden disjunkt). Na splnenie tretej formuly stačí nepravdivosť D alebo nepravdivosť B.
>
> Ak model neviete nájsť podobne, nateraz vám neostáva iné, ako skúšať možné ohodnotenia jedno po druhom a zastaviť sa na prvom, ktoré bude modelom. Neskôr uvidíme, že na overenie splniteľnosti sa dá využiť aj tablo formalizujúce našu úvahu.

x)

> Pred formálnym riešením problému vyplývania sa nad ním oplatí zamyslieť neformálne:
>
> Vyplýva M z T? Predpokladajme sporom, že to tak nie je. Potom v nejakom ohodnotení v je T pravdivá a M nepravdivá. Pretože A_4 je pravdivá (je súčasťou pravdivej teórie), musí byť pravdivá formula B alebo D. Lenže ak je pravdivá B, z pravdivosti A_1 a nepravdivosti M vyplýva, že je pravdivá D. To je v spore s pravdivosťou A_3. Ak je pravdivá D, z pravdivosti A_2 a nepravdivosti M dostávame, že je pravdivá B. To je opäť v spore s pravdivosťou A_3. Keďže sme vo všetkých možných prípadoch dospeli k sporu, úvodný predpoklad je nepravdivý, a teda M naozaj vyplýva z T. Táto úvaha nám pomôže zostrojiť tablový dôkaz formuly M z teórie T.

To, že formula M = vinný(Mills), vyplýva z teórie T (teda $T \models_p M$, resp. $T \models_p$ vinný(Mills)), sa pokúsime dokázať nájdením uzavretého tabla pre množinu označených formúl $T_M^+ = \{\mathbf{T}\, A \mid A \in T\} \cup \{\mathbf{F}\, M\} = \{\mathbf{T}\, A_1, \mathbf{T}\, A_2, \mathbf{T}\, A_3, \mathbf{T}\, A_4, \mathbf{F}\, M\}$.

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T_M^+
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T_M^+
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T_M^+
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T_M^+
5. $\mathbf{F}\, M$ T_M^+

- 6. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$ — $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T} \neg D$ $\beta 3$; 9. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 10$ — $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F} \neg M$ $\beta 10$; 13. $\mathbf{T}\, M$ $\alpha 12$ — $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 1$ — $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 15$ — $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\, D$ $\beta 2$ — $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$ — $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T} \neg D$ $\beta 3$; 23. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 22$ — $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 19$ — $*$ 5, 24

y)

Zamyslime sa teraz, či z T vyplýva $\neg D$. Opäť predpokladajme sporom, že by v nejakom ohodnotení bola pravdivá T a nepravdivá $\neg D$, a teda pravdivá D. Potom sú pravdivé A_1 aj A_4. Aby bola pravdivá A_3, musí byť nepravdivá A. Aby bola pravdivá A_2, musí byť pravdivá M. Ohodnotenie, ktoré je v súlade s predpokladom teda nemôže byť celkom ľubovoľné, ale existuje a je kontrapríkladom pre vyplývanie $\neg D$ z T.

Skonštruujeme ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$, ktoré je modelom T a nie je modelom $\neg D$:

$$v_1 = \{A \mapsto f, D \mapsto t, M \mapsto t\}.$$

iv. Formálne výsledky.

w) Našli sme model T (ohodnotenie v_0), takže T je splniteľná.

x) Zostrojili sme uzavreté tablo pre množinu T_M^+, teda formula M je dokázateľná z teórie T ($T \vdash_p M$). Preto podľa dôsledku 5.18 vety o korektnosti $T \models_p$ vinný(Mills).

y) Našli sme ohodnotenie v_1, ktoré je modelom T, ale nie je modelom formuly $\neg D$. Preto podľa definície 3.7 výrokovologického vyplývania $T \not\models_p$ ¬vinný(Doyle).

v. Interpretácia. Tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zistení 1 — 4. Pretože zároveň vieme, že tieto zistenia sú splniteľné, polícia na ich základe môže usúdiť, že Mills je určite vinný.

Tvrdenie, že Doyle je nevinný zo zistení 1 — 4 nevyplýva. Polícia teda nemôže usúdiť, že Doyle je určite nevinný.

Neformálny dôkaz. Napíšme teraz s pomocou tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení 1 — 4 vyplýva, že Mills je vinný.

Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo“ (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že zistenia 1 — 4 sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa zistenia 4 je vinný aspoň jeden z trojice Bakerová, Mills, Doyle — preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

V prípade, že je vinná Bakerová (6), podľa zistenia 3 nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa zistenia 1 však potom nemôže byť pravda, že je vinná Bakerová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Bakerová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný (17). Podľa zistenia 2 je potom vinná Bakerová alebo Mills (18, 19). Vina Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Bakerovej (20) musíme na základe zistenia 3 uvažovať nevinu Doyla (21, 22), čo je tiež spor.

Preskúmali sme všetky možnosti, akými by zistenia 1–4 mohli byť pravdivé, ale Mills by bol nevinný. Žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu. Preto Mills je vinný, ak sú pravdivé zistenia 1 — 4. Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami 1 — 4. □

Použitie pravidla β na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \vee (M \vee D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak X, tak Y, a platí X, platí aj Y.“ V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách 2 a 3.

Keď sa pravidlo β použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tolens: „Pretože ak X, tak Y, a neplatí Y, neplatí ani X.“ To sa hodí pre implikáciu 1.

Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo“. „Skutočné“ dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodia nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie“ čítať ako priamy dôkaz. Formulu M označenú znamienkom **F** chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom **T** stále chápeme ako *predpoklady*.

Dôkaz (priamy). Predpokladajme, že zistenia 1 — 4 sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5) . Podľa zistenia 4 je vinný niekto z podozrivých Bakerová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16) , dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Bakerová (6) . Podľa zistenia 3 teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9) . Preto podľa zistenia 1 nie je pravda, že Bakerová je vinná a Mills je nevinný (10, 14) . Teda Bakerová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12) , čiže Mills je vinný (13) .

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17) . Podľa zistenia 2 je vinná Bakerová alebo je vinný Mills (19) . Keby bola vinná Bakerová (20) , podľa zistenia 3 by bol Doyle nevinný (21, 22) , čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24) .

Z predpokladu pravdivosti zistení 1 — 4 sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla β na implikáciu $\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$ — nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak X, tak Y, a máme dokázať Y, postačí dokázať X.“

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá α s dôsledkami $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak X, tak Y. Predpokladajme teda X a dokážme Y.“

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdu využitie napríklad pri čítaní tabiel v iných úlohách. ♮

4.1.2 Dokážte, že $T \vDash_{\mathrm{p}} X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ a T je splniteľná, kde:

(A_1) $\big(\text{kino(Fero, Anka)} \lor (\text{pocuva(Fero, PinkFloyd)} \lor \text{hra(Fero, FerovaPS)})\big)$

(A_2) $(\text{kapela(PinkFloyd)} \land \text{hraciaKonzola(FerovaPS)})$

(A_3) $(\neg\text{frustrovany(Fero)} \rightarrow \text{kino(Fero, Anka)})$

(A_4) $\big(\text{frustrovany(Fero)} \rightarrow (\text{pocuva(Fero, PinkFloyd)} \lor \text{hra(Fero, FerovaPS)})\big)$

(A_5) $\neg\big(\text{kino(Fero, Anka)} \land (\text{pocuva(Fero, PinkFloyd)} \land \text{hra(Fero, FerovaPS)})\big)$

(A_6) $(\text{hra(Fero, FerovaPS)} \rightarrow \text{pocuva(Fero, PinkFloyd)})$

(A_7) $(\text{pocuva(Fero, PinkFloyd)} \rightarrow \neg\text{frustrovany(Fero)})$

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) $(\neg\text{hra(Fero, FerovaPS)} \rightarrow \text{kino(Fero, Anka)})$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

4.1.3 Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) $(\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \to \neg\mathsf{prsi}(\mathsf{den}))$

(A_2) $(\mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den}) \to (\mathsf{prsi}(\mathsf{den}) \lor \mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den})))$

(A_3) $(\mathsf{vikend}(\mathsf{den}) \to \neg\mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den}))$

(A_4) $\big((\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \to \mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}))$
$\land ((\neg\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \land \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den})) \to \neg\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}))\big)$

(A_5) $(\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}) \to \neg\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}))$

výrokovologicky vyplýva

(X) $((\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \land \mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den})) \to \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den}))$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

4.1.4 Dokážte, že z tvrdení:

(A_1) Vianočný darček kúpil otec alebo ho kúpila mama.

(A_2) Darček kúpil otec a Ondrej je šťastný, len ak to bude spoločný darček s Hankou a aj ona je šťastná.

(A_3) Určite sa nestane, aby ani Ondrej ani Hanka neboli šťastní.

(A_4) Otec neznáša nakupovanie, takže sa z toho vždy vyvlečie.

vyplýva tvrdenie:

(X) Ak by bol Ondrej šťastný, iba ak by darček kúpil otec, tak nakupovala mama a Hanka je šťastná.

Tvrdenia sformalizujte v jazyku s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{kúpil}^2, \mathsf{šťastný}^1\}$, dokážte vyplývanie tablom a dôkaz prepíšte do čo najprirodzenejšej slovenskej formy.

4.1.5 O trojici detí sme sa dozvedeli tieto informácie:

1. Janko sa hrá s autíčkom alebo s bábikou.
2. Ak by to, že sa nehrá s autíčkom znamenalo, že sa hrá s bábikou, tak sa určite nehrá s vláčikom.
3. Miško, ak sa hrá s autíčkom alebo s vláčikom, je šťastný.
4. Hanka je šťastná, ak je aspoň jeden z chlapcov šťastný.

Je na základe týchto informácií isté, že *ak sa Janko nehrá s vláčikom, len ak sa s ním hrá Miško, tak sú Miško aj Hanka šťastní*?

Na zodpovedanie otázky tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablo.

⚠ Podobne ako v príklade 4.1.1 (a na rozdiel od úloh 4.1.2 a 4.1.3), v tejto odpovedáte na neformálnu otázku. Preto potrebujete overiť splniteľnosť sformalizovanej teórie.

⚠ Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

💡 Vaše tablo by malo mať **najviac 28 uzlov**.

4.1.6 Petra rada pletie. Nedávno dostala novú priadzu a chystá sa z nej niečo upliesť. O priadzi a pletení všeobecne máme tieto informácie:

1. Petra si upletie sveter, čiapku, ponožky alebo šál.
2. Priadza je buď hrubá alebo tenká.
3. Priadza je bavlnená, vlnená alebo akrylová, pričom prípustné sú aj zmesi týchto materiálov.
4. Na sveter je potrebná hrubá priadza bez obsahu bavlny (inak by nebol dosť teplý).
5. Vlna „hryzie“. Takže ak priadza obsahuje vlnu, nehodí sa na šál ani ponožky.
6. Ponožky sa dajú upliesť iba z tenkej priadze.
7. Petra sa oblieka štýlovo a chce, aby jej kúsky navzájom ladili. Preto čiapku si upletie jedine, ak si k nej upletie aj šál. Rovnako šál by si neuplietla bez čiapky.

Zistite, či na základe uvedených skutočností môžeme s istotou tvrdiť, že:

a) Ak je priadza tenká, tak nie je vlnená.

b) Ak si Petra upletie sveter, nemôže si už upliesť čiapku.

Aké tri formálne logické problémy musíme vyriešiť, aby sme zodpovedali neformálne otázky zo zadania? Vyriešte príslušné formálne problémy, sformulujte a zdôvodnite výsledky a intepretujte ich, aby ste odpovedali na neformálne otázky.

4.1.7 Predmet môže študent úspešne absolvovať iba vtedy, keď odovzdá domáce úlohy a úspešne absolvuje (spraví) riadny alebo náhradný test. Náhradný test môžu písať iba tí, čo boli chorí, ale keďže býva ľahký, tak ho aj hneď spravia (teda iba chorí mohli spraviť náhradný test). Riadny test spravia iba tí, ktorí sa učili alebo aspoň riešili domáce úlohy. Študenti, ktorí odovzdali domáce úlohy, ich buď riešili alebo odpísali. Odpisujú ich ale iba flákači, čo sa neučia.

Dokážte v tablovom kalkule, že ak som predmet úspešne absolvoval a nebol som pri tom chorý, musel som riešiť domáce úlohy.

4.1.8 Pomocou tablového kalkulu vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Keď Katka nakreslí obrázok, je na ňom buď mačka alebo pes. Obrázok mačky Katkin pes vždy hneď roztrhá. Ak jej pes roztrhá obrázok, Katka je smutná.

   Dokážte, že ak Katka nakreslila obrázok a je šťastná (nie je smutná), tak na jej obrázku je pes.

b) Bez práce nie sú koláče. Ak niekto nemá ani koláče, ani chleba, tak bude hladný. Na chlieb treba múku.

   Dokážte, že ak niekto nemá múku a je najedený (nie je hladný), tak pracoval.

c) Bez oblakov niet dažďa (ak nie sú oblaky, nemôže pršať). Ak je cesta mokrá, tak prší alebo práve prešlo umývacie auto. Umývacie autá nechodia v sobotu (ak je sobota, tak umývacie autá nechodia).

   Dokážte, že ak je sobota a je mokrá cesta, tak je oblačno.

4.1.9 (Smullyan [6]) Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia (X) a (Y).

(X) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

(Y) McDonnald je vinný.

4.2 Tautológie v tablách

4.2.1 Príklad. Dokážte v tablovom kalkule, že pre ľubovoľné formuly A, B v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú nasledujúce formuly tautológiami:

$X_1 = (A \to A)$

$X_2 = ((A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$

$X_3 = ((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$

Riešenie pre X_3.

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že tablo pre množinu označených formúl môžeme konštruovať aj bez toho, aby sme poznali všetky ich detaily, teda v našom prípade podformuly A a B.

Zoberme ľubovoľné formuly A a B. Aby sme dokázali, že formula $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia, stačí podľa dôsledku 5.19 nájsť uzavreté tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$.

Pre formuly $(X \leftrightarrow Y)$ nemáme ani nepotrebujeme špeciálne tablové pravidlá, pretože sme $\leftrightarrow$ zadefinovali ako skratku. S formulou $(X \leftrightarrow Y)$ pracujeme rovnako ako s konjunkciou $((X \to Y) \wedge (Y \to X))$.

1.	$\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$	S^+

Ľavá vetva:

2.	$\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$	$\beta 1$
3.	$\mathbf{T}(\neg A \to \neg B)$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}(B \to A)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}B$	$\alpha 4$
6.	$\mathbf{F}A$	$\alpha 4$

7.	$\mathbf{F}\neg A$	$\beta 3$
8.	$\mathbf{T}A$	$\alpha 7$
	$*$	6, 8

9.	$\mathbf{T}\neg B$	$\beta 3$
10.	$\mathbf{F}B$	$\beta 9$
	$*$	6, 10

Pravá vetva:

11.	$\mathbf{F}((B \to A) \to (\neg A \to \neg B))$	$\beta 1$
12.	$\mathbf{T}(B \to A)$	$\alpha 11$
13.	$\mathbf{F}(\neg A \to \neg B)$	$\alpha 11$
14.	$\mathbf{T}\neg A$	$\alpha 13$
15.	$\mathbf{F}\neg B$	$\alpha 13$
16.	$\mathbf{F}A$	$\alpha 14$
17.	$\mathbf{T}B$	$\alpha 15$

18.	$\mathbf{F}B$	$\beta 12$
	$*$	17, 18

19.	$\mathbf{T}A$	$\beta 12$
	$*$	19, 16

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}X_3\}$, teda formula X_3 je dokázateľná ($\vdash_p X_3$). Preto podľa dôsledku 5.19 je X_3 tautológia. $\natural$

4.2.2 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) *Základné tautológie*

Medzi základné zákony výrokovej aj prvorádovej logiky patria *princíp vylúčenie tretieho* (formula je pravdivá alebo nepravdivá, tretia možnosť nie je) a *princíp bezospornosti* (A a $\neg A$ nemôžu byť súčasne pravdivé). Vyjadrujú ich prvé dve z nasledujúcich tautológií. Zvyšné dve sú jednoduché fakty o implikácii a ekvivalencii.

i. $(A \lor \neg A)$

ii. $\neg(A \land \neg A)$

iii. $(A \to A)$

iv. $(A \leftrightarrow A)$

b) *Vlastnosti implikácie*

V niektorých formálnych dokazovacích systémoch sa ako jedna zo základných vlastností používa prvá tautológia z nasledujúcej skupiny, ktorá hovorí, že ak A implikuje aj $(B \to C)$ aj B, tak implikuje aj C. Slabšou formou tejto vlastnosti druhá tautológia – *tranzitivita implikácie* (alebo tiež zákon hypotetického sylogizmu).

i. $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$

ii. $\big(((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C))\big)$

Nie celkom zrejmá tautológia iii. sa nazýva *Peircov zákon*. V niektorých formálnych systémoch môže slúžiť ako náhrada zákona vylúčenia tretieho. Tautológia iv. je komplikovanejšou verziou tohto zákona.

iii. $\big((((A \to B) \to A) \to A)\big)$

iv. $\big((C \to A) \to \big(((A \to B) \to C) \to A\big)\big)$

c) *Princíp dôkazu sporom a zákon Dunsa Scota*

Prvá z nasledujúcich tautológií je základom princípu dôkazu sporom (ak $\neg A$ implikuje $\neg B$, tak ak je pravdivé B, musí byť pravdivé A). Druhá je jej slabšou variáciou.

i. $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$

ii. $\big(((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A)\big)$

Tretej tautológii sa hovorí *zákon Dunsa Scota* a dá sa chápať ako „z nemožného vyplýva čokoľvek“ – za predpokladu $\neg A$ je implikácia s antecedentom A (ktorý nemôže byť pravdivý) pravdivá bez ohľadu na to, aký je konzekvent B.

iii. $(\neg A \to (A \to B))$

d) *Modus ponens, modus tolens a eliminácia ekvivalencie*

Tieto tautológie vyjadrujú známe pravidlá *modus ponens* a *modus tolens* na odvodzovanie dôsledkov implikácie.

i. $\big(((A \to B) \land A) \to B\big)$

ii. $\big(((A \to B) \land \neg B) \to \neg A\big)$

Analogickým pravidlám pre ekvivalenciu sa hovorí *eliminácia ekvivalencie*.

i. $\big(((A \leftrightarrow B) \land A) \to B\big)$

ii. $\big(((A \leftrightarrow B) \land B) \to A\big)$

iii. $\big(((A \leftrightarrow B) \land \neg A) \to \neg B\big)$

iv. $\big(((A \leftrightarrow B) \land \neg B) \to \neg A\big)$

e) *Introdukcie*

Nasledujúce tautológie vyjadrujú postačujúce podmienky pre pravdivosť formúl s jednotlivými binárnymi spojkami.

i. $\big(A \to (B \to (A \land B))\big)$

ii. $(A \to (A \lor B))$

iii. $(A \to (B \to A))$

f) *Eliminácie*

Na nasledujúce tautológie sa dá pozerať ako na nutné a postačujúce podmienky toho, že C je logickým dôsledkom formuly tvorenej binárnou spojkou. Napríklad prostredná tautológia vyjadruje, že C je dôsledkom disjunkcie vtt, keď je dôsledkom každého s disjunktov. Hovorí sa im aj *eliminácie* (na pravej strane sa už binárna spojka z antecedentu nevyskytuje).

i. $\big(((A \land B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))\big)$

ii. $\big(((A \lor B) \to C)) \leftrightarrow ((A \to C) \land (B \to C))\big)$

iii. $\big(((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((\neg A \to C) \land (B \to C))\big)$

g) *Vlastnosti ekvivalencie*

Ekvivalencia je tranzitívna, podobne ako implikácia.

i. $\big(((A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)\big)$

Disjunkciu aj implikáciu je možné distribuovať do (a vyňať z) ekvivalencie. Čo je prekvapivejšie, implikácia sa do vnútra ekvivalencie dá distribuovať ako konjunkcia.

ii. $\big((A \lor (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \leftrightarrow (A \lor C))\big)$

iii. $\big((A \to (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \to B) \leftrightarrow (A \to C))\big)$

iv. $\big((A \to (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow (A \land C))\big)$

Exkluzívna disjunkcia (XOR) je ekvivalentná s negáciou ekvivalencie, o čom nás presviedčajú nasledujúce tautológie.

v. $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \lor B) \land \neg(A \land B))\big)$

vi. $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \land \neg B) \lor (\neg A \land B))\big)$

4.2.3 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Dokážte ekvivalentnosť dvojíc formúl z príkladu 3.3.2 v tablovom kalkule. Teda pre každú dvojicu $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$ z príkladu 3.3.2 dokážte tablom, že $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

4.3 Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nesplniteľnosť v tablách

4.3.1 O nasledujúcich formulách v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{p}^1, \mathsf{q}^1, \mathsf{r}^1, \mathsf{s}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{c}\}$ rozhodnite pomocou tablového kalkulu, či sú splniteľné, nesplniteľné, tautológie, alebo falzifikovateľné. Pri každej formule sa vyjadrite ku všetkým 4 vlastnostiam.

(X_1) $((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\neg\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$

(X_2) $(((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{c}))$

(X_3) $\big((\mathsf{s}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to (\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land (\neg\mathsf{s}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c}))\big)$

(X_4) $\big((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \neg(\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \neg\mathsf{p}(\mathsf{c}))\big)$

(X_5) $\big((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))) \to \neg(\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})))\big)$

(X_6) $\big(\neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \leftrightarrow ((\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \neg\mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \mathsf{s}(\mathsf{c}))\big)$

(X_7) $\big(\neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \leftrightarrow ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \neg\mathsf{s}(\mathsf{c}))\big)$

(X_8) $\big(((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \land (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c}))) \land \neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c}))\big)$,

(X_9) $\big(\big((\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{q}(\mathsf{c}))) \lor ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{q}(\mathsf{c})) \land \neg\mathsf{q}(\mathsf{c}))\big) \lor ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \lor \neg\mathsf{p}(\mathsf{c}))\big)$

Riešenie. (X_1) Preverovanie vlastností formuly $X_1 = ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$ začneme tým, že sa pokúsime dokázať, že je tautológia, podobne ako v úlohe 4.2.2. Pokúsime sa teda uzavrieť tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F}((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))\}$. Ak tablo uzavrieme v každej vetve, formula je tautológia. Naopak, ak nájdeme aspoň jednu úplnú a otvorenú vetvu, vieme z nej vyčítať ohodnotenie, v ktorom formula nie je pravdivá:

1.	$\mathbf{F}\,((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$	S^+
2.	$\mathbf{F}\,(\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c}))$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,(\neg\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c}))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,\mathsf{p}(\mathsf{c})$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{F}\,\mathsf{q}(\mathsf{c})$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\,\neg\mathsf{q}(\mathsf{c})$	$\alpha 3$
7.	$\mathbf{F}\,\mathsf{r}(\mathsf{c})$	$\alpha 3$

Toto tablo má síce iba jednu vetvu, ale tá je úplná (viď definícia 5.24 z prednášky), ale nie je uzavretá (teda je otvorená). Formula X_1 teda *nie je tautológia*, lebo z úplnej a otvorenej vetvy končiacej v liste 7 môžeme skonštruovať ohodnotenia $v_1 = \{\mathsf{p}(\mathsf{c}) \mapsto t, \mathsf{q}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{r}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{s}(\mathsf{c}) \mapsto f\}$ a $v_2 = \{\mathsf{p}(\mathsf{c}) \mapsto t, \mathsf{q}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{r}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{s}(\mathsf{c}) \mapsto t\}$, v ktorých je naša formula nepravdivá. Formula X_1 teda *je falzifikovateľná*.

Ďalej potrebujeme ešte preveriť, či existuje aj nejaké ohodnotenie, v ktorom je formula pravdivá, (teda či je splniteľná) alebo také ohodnotenie neexistuje (a teda formula je nesplniteľná). Aby sme to zistili, pokúsime sa v table pre množinu $S^+ = \{\mathbf{T}((\mathrm{p(c)} \to \mathrm{q(c)}) \lor (\mathrm{q(c)} \to \mathrm{r(c)}))\}$, nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, alebo naopak toto tablo uzavrieť:

<table>
<tr><td colspan="3">1. $\mathbf{T}((\mathrm{p(c)} \to \mathrm{q(c)}) \lor (\mathrm{q(c)} \to \mathrm{r(c)}))$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $\mathbf{T}(\mathrm{p(c)} \to \mathrm{q(c)})$ $\beta 1$</td><td>5. $\mathbf{T}(\neg \mathrm{q(c)} \to \mathrm{r(c)})$ $\beta 1$</td></tr>
<tr><td>3. $\mathbf{F}\,\mathrm{p(c)}$ $\beta 2$</td><td>4. $\mathbf{T}\,\mathrm{q(c)}$ $\beta 2$</td><td></td></tr>
</table>

Tablo sme ani nemuseli dokončiť, pretože po aplikovaní dvoch β-pravidiel (najprv pre disjunkciu, a potom pre implikáciu na ľavej strane) sme našli hneď dve otvorené a úplné vetvy (s listami 3 a 4). Z nich vieme vyčítať, že vo všetkých ohodnoteniach v, pre ktoré $v(\mathrm{p(c)}) = f$ alebo $v(\mathrm{q(c)}) = t$, je formula X_1 pravdivá. Konkrétne je napríklad podľa vetvy s listom 3 pravdivá v ohodnotení $v_2 = \{\mathrm{p(c)} \mapsto f, \mathrm{q(c)} \mapsto f, \mathrm{r(c)} \mapsto f, \mathrm{s(c)} \mapsto f\}$. Formula X_1 teda *je splniteľná* a *nie je nesplniteľná*. Tým sme zodpovedali všetky otázky zo zadania. ♮

Pokiaľ sa nám podarí správne uhádnuť, že je formula X tautológia, postačí, ak urobíme tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ a všetky vetvy sa nám podarí uzavrieť. Keďže tým dokážeme, že formula je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach, nie je už potrebné hľadať nejaké konkrétne — formula je splniteľná (je pravdivá napríklad v ohodnotení, kde sú všetky atómy nepravdivé), nie je falzifikovateľná ani nesplniteľná.

Podobne, ak sa nám zdá, že je formula nesplniteľná, môžeme začať tablom pre $\{\mathbf{T}\,X\}$. Ak sa nám ho podarí uzavrieť, nemusíme už robiť tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$. Vieme, že X je nepravdivá vo všetkých ohodnoteniach, teda je falzifikovateľná, nie je splniteľná ani tautológia.

Študenti sa občas pokúšajú vyjadrovať k vlastnostiam formuly na základe *uzavretých* vetiev v úplných, ale *otvorených tablách*. Samotná uzavretá vetva nám však neposkytuje *žiadne informácie*, lebo nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

Závery teda môžeme vyvodzovať iba z dvoch stavov tabla:

- Tablo je uzavreté, t.j. *všetky* vetvy sú uzavreté. Potom je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, nesplniteľná.
- Tablo obsahuje *otvorenú a úplnú* vetvu. Potom je množina, pre ktorú sme tablo vytvorili, splniteľná. Z vetvy môžeme určiť aspoň jedno ohodnotenie, v ktorom je pravdivá.

  Špeciálny prípad tejto možnosti je, že je otvorené a úplné celé tablo (všetky vetvy sú úplné alebo uzavreté, niektorá je otvorená). Vtedy môžeme z vetiev určiť postupne *všetky* ohodnotenia, v ktorých je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, pravdivá.

4.3.2 Pomocou tablového kalkulu nájdite aspoň dve ohodnotenia predikátových atómov, v ktorých sú pravdivé nasledujúce teórie v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{p}, \mathsf{r}, \mathsf{s}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}$. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$T_1 = \{(\mathsf{p}(\mathsf{a}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{s}(\mathsf{c}))), (\mathsf{p}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))\}$,

$T_2 = \{((\mathsf{r}(\mathsf{c}) \land \mathsf{s}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{a})), (\mathsf{p}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))\}$,

$T_3 = \{(\mathsf{p}(\mathsf{a}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{s}(\mathsf{c}))), (\neg\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \neg\mathsf{s}(\mathsf{c}))\}$.

4.3.3 Príklad. (Smullyan [6]) Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 4.1.1: Na políciu predviedli troch podozrivých Bakerovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Bakerová vinná a Mills nevinný.
b) Doyle nikdy nepracuje sám.
c) Bakerová nikdy nepracuje s Doyleom.
d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Bakerovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Pomocou tablového kalkulu rozhodnite, kto z podozrivých je vinný, kto nevinný, a o koho vine alebo nevine nemožno rozhodnúť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

Riešenie. Naším cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno s istotou obviniť, ktorý je určite nevinný, a vinu ktorého nemôžeme s istotou ani potvrdiť ani vyvrátiť.

Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Bakerová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Bakerová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly označíme nasledovne: M = vinný(Mills), D = vinný(Doyle) a B = vinný(Bakerová). Zistenia a)–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \begin{Bmatrix} ((B \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (B \lor M)), \\ (B \to \neg D), \\ (B \lor (M \lor D)) \end{Bmatrix}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom.

Aby sme mohli naše logické závery interpretovať vo svete slovnej úlohy (teda odvodzovať praktické dôsledky), musíme najprv preveriť, či je T splniteľná. Na to sa v table pre $T^+ = \{\mathbf{T}((B \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (B \lor M)), \mathbf{T}(B \to \neg D), \mathbf{T}(B \lor (M \lor D))\}$ pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathsf{T}((B \wedge \neg M) \to D) & T^+ \\
2. & \mathsf{T}(D \to (B \vee M)) & T^+ \\
3. & \mathsf{T}(B \to \neg D) & T^+ \\
4. & \mathsf{T}(B \vee (M \vee D)) & T^+
\end{array}
$$

- 5. $\mathsf{F}(B \wedge \neg M)$ $\beta 1$
- 6. $\mathsf{T}D$ $\beta 1$
  - 7. $\mathsf{F}D$ $\beta 2$
    $*$ 6, 7
  - 8. $\mathsf{T}(B \vee M)$ $\beta 2$
    - 9. $\mathsf{T}B$ $\beta 8$
    - 10. $\mathsf{T}M$ $\beta 8$
      - 11. $\mathsf{F}B$ $\beta 3$
        - 12. $\mathsf{T}B$ $\beta 4$
          $*$ 11, 12
        - 13. $\mathsf{T}(M \vee D)$ $\beta 4$
          - 14. $\mathsf{T}M$ $\beta 13$
          - 15. $\mathsf{T}D$ $\beta 13$
      - 16. $\mathsf{T}\neg D$ $\beta 3$
        17. $\mathsf{F}D$ $\alpha 16$
        $*$ 6, 17

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe otvorené a úplné. Teda T je splniteľná. Na otázku, ktorý z obvinených je určite vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

V riešení úlohy 4.1.1 sme už dokázali, že $T \models M$. Presnejšie, podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu $T^+_M = \{\mathsf{T}((B \wedge \neg M) \to D)), \mathsf{T}(D \to (B \vee M)), \mathsf{T}(B \to \neg D), \mathsf{T}(B \vee (M \vee D)), \mathsf{F}\,M\}$. Keďže T je splniteľná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný.

O vine, či nevine Bakerovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom. Pre dôkaz viny Bakerovej, teda vyplývania $T \models B$, by sme potrebovali nájsť uzavreté tablo pre množinu $T^+_A = \{\mathsf{T}((B \wedge \neg M) \to D)), \mathsf{T}(D \to (B \vee M)), \mathsf{T}(B \to \neg D), \mathsf{T}(B \vee (M \vee D)), \mathsf{F}\,B\}$, podobne ako pre dôkaz viny Millsa. Ak sa nám tablo nepodarí uzavrieť, teda aspoň jedna vetva tabla bude úplná otvorená, Bakerovú obviniť nemôžeme.

To však ešte nestačí na rozhodnutie o tom, či je Bakerová *určite* nevinná. Na to potrebujeme dokázať, že tvrdenie „Bakerová je nevinná“ vyplýva z T, čiže $T \models \neg B$. Dosiahneme to nájdením uzavretého tabla pre množinu $T^+_{\neg B} = \{\mathsf{T}((B \wedge \neg M) \to D)), \mathsf{T}(D \to (B \vee M)), \mathsf{T}(B \to \neg D), \mathsf{T}(B \vee (M \vee D)), \mathsf{F}\,\neg B\}$.

Ak aj teraz dospejeme k tablu s aspoň jednou úplnou otvorenou vetvou, nemôžeme o Bakerovej na základe našej konzistentnej teórie T rozhodnúť ani to, že je nevinná. Formula B je potom nezávislá od teórie T: Z úplnej otvorenej vetvy prvého tabla skonštruujeme ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T, ale B je nepravdivá. Z úplnej otvorenej vetvy druhého tabla skonštruujeme iné ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T, ale $\neg B$ je nepravdivá, teda B je pravdivá. Bakerovú vtedy nemôžeme s istotou obviniť, ani si nemôžeme byť istí jej nevinou. Polícia v takých prípadoch podozdivých prepúšťa pre nedostatok dôkazov. ♮

4.3.4 (Smullyan [6]) Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 4.1.9: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonnald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkulom. Podobne dokážte, že Browna nemožno obviniť, ani jeho vinu vyvrátiť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

4.3.5 Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež v Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviniť? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

4.3.6 (Smullyan [6]) Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých X, Y, Z a zistili nasledujúce fakty:

(A_1) Každý z podozrivých X, Y, Z bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.

(A_2) X vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.

(A_3) Z nie je vinný alebo je vinný Y.

(A_4) Ak sú vinní práve dvaja, tak X je jedným z nich.

(A_5) Y je vinný, iba ak je vinný aj Z.

Koho má inšpektorka Fishcousová obviniť?

4.3.7 (Smullyan [6]) Inšpektor Herring so Scotland Yardu predviedol na výsluch troch podozrivých z prepadnutia taxíka: Parkera, Robertsa a Smitha. Na výsluchu boli zistené nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Taxík bol prepadnutý potom, ako bol privolaný do hostinca, v ktorom v tom čase popíjali Parker a Roberts. V hostinci bol s nimi už len hostinský Smith.

(A_2) Parker je známy lupič, vie sa však o ňom, že má vždy komplica.

(A_3) Roberts bol v čase incidentu natoľko podgurážený, že nebol pri zmysloch, a nemohol sa teda na lúpeži podieľať.

Pomocou tablového kalkulu zistite o každom z podozrivých, či je ho možné obviniť, či je naopak nevinný, alebo či ho bude musieť inšpektor Herring so škrípajúcimi zubami prepustiť pre nedostatok dôkazov.

4.3.8 (Smullyan [6]) Z lúpeže v Miláne polícia podozrieva tri známe kriminálničky: Aidu P., Biancu D. a Chiaru P. Aida a Chiara sú identické dvojičky a málokto ich dokáže rozoznať. Všetky podozrivé majú bohaté trestné spisy a policajti dobre poznajú ich povahy a zvyky. Konkrétne, dvojičky sú dosť nesmelé a žiadna by sa neodvážila na záťah bez spolupáchateľa. Bianca D. je naopak veľmi odvážna a neznáša spoliehať sa na komplicov. Niekoľko svedkov tiež uviedlo, že v čase lúpeže videli jednu z dvojičiek v bare v Janove, ale nevie sa, o ktorú z nich išlo.

Za predpokladu, že nikto okrem podozrivých sa lúpeže nezúčastnil, ktoré z nich sú vinné a ktoré nevinné?

4.3.9 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu vyriešte nasledujúce problémy nájdením dôkazu alebo kontrapríkladu.

a) Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.

   Je pravda, že na párty pôjde Kim a nepôjde Sára?

b) Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.

   Je pravda, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu?

c) Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.

   Je pravda, že metalová kapela mohla hrať?

4.3.10 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu overte správnosť úsudkov a ich zdôvodnení, pričom:

- ak je úsudok chybný, nájdite kontrapríklad;
- ak je chybné zdôvodnenie, vysvetlite, kde a aké sú v ňom chyby;
- ak je úsudok správny, ale zdôvodnenie chybné, napíšte podľa tablového dôkazu správne slovné zdôvodnenie.

Pracujte s nasledujúcimi úsudkami a zdôvodneniami. V prvom prípade sme premisy a záver úsudku a jeho zdôvodnenie vyznačili. V druhom prípade sami rozpoznajte tieto časti.

a) *Premisy:* Do laboratória sa dostanem, ak si nezabudnem čipovú kartu.
   Vždy, keď si zabudnem čipovú kartu, nemám ani peňaženku.

Záver: Takže ak nemám peňaženku, nedostanem sa do laboratória.

Zdôvodnenie: Je to tak preto, že keď nemám peňaženku, zabudol som si čipovú kartu, a teda sa nemám ako dostať do laboratória.

b) Ak by na protest neprišli desaťtisíce občanov alebo by boli jeho účastníci agresívni, protest by nebol úspešný a predseda vlády by neodstúpil. Ak by boli účastníci protestu agresívni, zasiahla by polícia. Polícia nezasiahla. Preto ak predseda vlády odstúpil, na protest prišli desaťtisíce občanov.

Pretože polícia nezasiahla, účastníci protestu neboli agresívni. Predpokladajme, že predseda vlády odstúpil. Protest bol teda úspešný, a preto naň prišli desaťtisíce občanov alebo jeho účastníci boli agresívni. Už sme však zistili, že druhá možnosť nenastala. Preto musí platiť prvá, teda na protest prišli desaťtisíce občanov, čo sme chceli dokázať.

4.3.11 Príklad. Alica a Bonifác si plánujú spoločný valentínsky večer. Rozhodujú sa, či pôjdu na večeru, do kina, do divadla, do wellnessu, alebo do baru. Majú však nasledujúce podmienky:

1. Alica usúdila, že ak by šli na večeru a tiež do divadla, wellness by už určite nestihli.
2. Bonifác zhodnotil, že potom ale určite musia ísť do wellnessu, ak nepôjdu na večeru ani do divadla.
3. Alici sa zdá divadlo nezlúčiteľné s wellnessom.
4. Bonifác trvá na tom, že aspoň nejaké kultúrne podujatie absolvovať musia (a teda trvá na divadle alebo kine).
5. Alica uznala argument o kultúre, ale nechce ísť do divadla, keďže by si nestihla kúpiť vhodné šaty.

Podarí sa Alici a Bonifácovi vybrať nejaký program? Aké majú možnosti?

Na otázky odpovedajte pomocou tablového kalkulu. Jasne vyjadrite:

- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie slovnej úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- akému riešeniu slovnej úlohy zodpovedá nájdené riešenie logického problému.

Riešenie.

Na riešenie tejto slovnej úlohy použijeme zvyčajný postup:

i. Sformalizujeme tvrdenia zodpovedajúcimi formulami vo vhodnom jazyku.

ii. Určíme logické problémy, ktoré musíme vyriešiť na zodpovedanie otázok z úlohy.

iii. Vyriešime tieto problémy vhodnými prostriedkami (v tomto prípade máme použiť tablá) a sformulujeme príslušné logické závery.

iv. Zinterpretujeme logické závery ako odpovede na otázky zo slovnej úlohy.

Aby bolo jasnejšie, v ktorej fáze sa nachádzame, tieto kroky v riešení vyznačíme.

i. Cieľom úlohy je zistiť, či a ako môžu Alica s Bonifácom stráviť valentínske rande. Zvolíme si prvorádový jazyk $\mathcal{L}$, ktorý mám umožní sformalizovať ich podmienky bez nepodstatných detailov. Postačia nám na to mimologické symboly $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{v\_kine}^1, \mathsf{v\_divadle}^1, \mathsf{na\_večeri}^1, \mathsf{vo\_wellness}^1, \mathsf{v\_bare}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{r}\}$, pričom konštanta r označuje Alicino a Bonifácovo rande a zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
v_divadle(x)	rande x sa odohrá v divadle
v_kine(x)	rande x sa odohrá v kine
na_večeri(x)	rande x sa odohrá na večeri
vo_wellness(x)	rande x sa odohrá vo wellness
v_bare(x)	rande x sa odohrá v bare

Alicine a Bonifácove podmienky potom sformalizujeme ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_5\}$ s nasledujúcimi formulami:

(A_1) ((na_večeri(r) ∧ v_divadle(r)) → ¬vo_wellness(r))

(A_2) (¬(na_večeri(r) ∨ v_divadle(r)) → vo_wellness(r))

(A_3) (v_divadle(r) → ¬vo_wellness(r))

(A_4) (v_divadle(r) ∨ v_kine(r))

(A_5) ¬v_divadle(r)

Otázky v tejto úlohe nesmerujú k zisteniu, aký program *musia* Alica a Bonifác *nutne* mať, aby splnili svoje podmienky. Z logického hľadiska sa teda **nepýtame na vyplývanie**.

Pýtame sa na to, aké majú (všetky) *možnosti* stráviť rande tak, aby boli podmienky splnené. Rôzne možnosti splnenia podmienok v logike predstavujú rôzne *modely* teórie T, ktorá tieto podmienky formalizuje. Ak by napríklad v nejakom modeli T boli pravdivé atómy v_divadle(r), vo_wellness(r) a nepravdivé atómy v_kine(r), na_večeri(r), v_bare(r), znamenalo by to, že podmienky 1–5 by boli splnené, keby Alica a Bonifác išli na rande (zrejme v nejakom poradí) do divadla a do wellness, ale zároveň nie do kina, ani na večeru, ani do baru.

Úloham tohto typu sa hovorí *konfiguračné*.

ii. Otázku, či sa Alici a Bonifácovi podarí vybrať nejaký program, zodpovieme na základe vyriešenia logického problému, či je teória T splniteľná. V prípade, že by teória bola nesplniteľná, teda nemala by žiadne modely, neexistuje možnosť, ako vyhovieť súčasne všetkým Bonifácovým a Aliciným požiadavkám, program sa im teda vybrať nepodarí. Rovnako by sme interpretovali stav, kedy by teória mala len jeden model a v ňom by jednotlivým predikátovým atómom predstavujúcim formu rande bola priradená pravdivostná hodnota f.

Interpretácia modelu, v ktorom sú všetky atómy nepravdivé, závisí od úlohy. Napríklad pri konfigurácii doplnkovej výbavy auta môže takýto model zodpovedať základnej výbave.

Otázku, aké možnosti majú Alica a Bonifác na svojom rande, zodpovieme nájdením *všetkých modelov* teórie T.

iii. Modely teórie nájdeme skonštruovaním tabla pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\, A_1, \dots, \mathbf{T}\, A_5\}$. Týmto tablom vieme overiť splniteľnosť, podobne ako v úlohe 4.3.1, nájdením aspoň jednej otvorenej a úplnej vetvy. Ako už vieme zo spomínanej úlohy, tejto vetve zodpovedá jedno či viac ohodnotení, v ktorých je S^+ (a teda aj T) pravdivá.

Keď sa predikátový atóm $P(c)$ z jazyka $\mathcal{L}$ skúmanej teórie *nenachádza* v otvorenej a úplnej vetve ani so znamienkom **T**, ani so znamienkom **F**, znamená to, že tejto vetve zodpovedá viac modelov, v ktorých môže tento atóm mať ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu.

Z vetvy teda vyčítame jednak modely v_i, v ktorých $P(c) \mapsto t$, ale tiež modely v_j, v ktorých $P(c) \mapsto f$. Počet modelov, ktoré z otvorenej a úplnej vetvy vyčítame, teda závisí od počtu predikátových atómov, ktoré nevystupujú v tejto vetve so žiadnym znamienkom. Ako?

V našej úlohe hľadáme *všetky* modely. Neuspokojíme sa preto s nájdením jednej otvorenej a úplnej vetvy, ale tablo pre S^+ spravíme úplné — *všetky* vetvy budú úplné alebo uzavreté. Všetky ohodnotenia, v ktorých je S^+ pravdivá, potom vyčítame z tých vetiev, ktoré sú otvorené a úplné.

Uzavretá vetva nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

Pre prehľadnosť riešení v zbierke takéto tablo neuvádzame. Vypracujte ho samostatne.

Z jeho úplných a otvorených vetiev by ste mali potom určiť nasledujúce modely:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \ \text{vo\_wellness(r)} \mapsto f, \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}\\
v_2 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto f, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \ \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}\\
v_3 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \ \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \ \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}\\
v_4 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \ \text{vo\_wellness(r)} \mapsto f, \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}\\
v_5 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto f, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \ \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}\\
v_6 &= \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \ \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \ \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}.
\end{aligned}
$$

Nájdením úplných otvorených vetiev v table a k nim prislúchajúcich modelov sme súčasne overili splniteľnosť teórie.

> Všimnite si, že modely v_i a v_{i+3} pre $i = 1, \dots, 3$ sa líšia iba pravdivostnou hodnotou atómu v_bare(r), ktorý je súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, ale nevyskytuje sa v teórii, a teda ani v žiadnej otvorenej a úplnej vetve tabla.

iv. Vďaka menovaným modelom teórie T vieme odpovedať na otázky zo zadania: Alici a Bonifácovi sa podarí vybrať program na valentínsky večer (pretože teória T je splniteľná). Majú pritom šesť možností, ako ho stráviť (i-ta možnosť zodpovedá modelu v_i):

1. Pôjdu do kina a na večeru, pričom nepôjdu do divadla, ani do wellness, ani do baru.
2. Pôjdu do kina a do wellness, no nepôjdu na večeru, ani do divadla, ani do baru.
3. Pôjdu aj do kina, aj na večeru, aj do wellness, no nepôjdu do divadla, ani do baru.
4. Pôjdu do kina, na večeru a do baru, pričom nepôjdu do divadla a do wellness.
5. Pôjdu do kina, do wellness a do baru, no nepôjdu na večeru a do divadla.
6. Pôjdu aj do kina, aj na večeru, aj do wellness, aj do baru, no nepôjdu do divadla. ♮

4.3.12 Pani Betka si chce kúpiť auto. Zohľadnením Betkiných preferencií ako aj možností dodávateľa zistite, aké typy karosérie (sedan, kombi, …) a v akých farbách pripadajú do úvahy:

1. Betka si kúpi auto. Určite však nie čierne.
2. Každé auto (u predajcu, ktorého si vybrala) je buď sedan, kombi, alebo kabriolet.
3. Kabriolety majú len červené.
4. Sedany a kombi mali zasa len biele alebo čierne.
5. Ak kúpi biele auto, určite to nebude sedan.
6. Kabriolety nie sú kombi; kabriolety tiež nie sú sedany; ani sedany nie sú kombi. (Čiže typy karosérie sú navzájom disjunktné.)
7. Červené veci nie sú čierne; červené veci nie sú ani biele; ani čierne veci nie sú biele. (Opäť ide o vzájomnú disjunktnosť.)

Na otázku odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia vhodne špecializujte. Číslovanie tvrdení je iba orientačné. Tvrdenia, ktoré majú povahu konjunkcie viacerých častí, je výhodnejšie sformalizovať viacerými formulami.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- čo je riešením logického problému,
- aká je odpoveď na položenú otázku.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 60 uzlami.

4.3.13 Anna sa rozhoduje, čo si oblečie na sestrinu svadbu.

1. Mohla by si totiž dať šaty, sukňu s blúzkou, alebo nohavicový kostým.
2. Pochopiteľne, ak si oblečie jednu z týchto možností, neoblečie si inú.
3. Kostým má len modrý.
4. Šaty, prípadne sukňu s blúzkou, by si na svadbu určite nedala v bielej farbe (vraj sa to nehodí).
5. V Anninom šatníku sa však okrem bielych a modrých vecí nachádzajú už len červené.
6. Vždy sa oblieka jednofarebne, ani sukňu s blúzkou by si nedala v rôznych farbách.
7. Určite nechce sestre pokaziť náladu tým, že by si obliekla niečo modré, lebo modrú jej sestra naozaj nemá rada.

Čo a v akých farbách si Anna môže za týchto podmienok obliecť? Nájdite všetky prípustné kombinácie, aby si z nich mohla ľahko vybrať.

Na otázku odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie úlohy,

- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- čo je riešením logického problému,
- aká je odpoveď na položenú otázku.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 40 uzlami.

4.3.14 Tri kamarátky sa zídu v kaviarni, ktorá ponúka kávu, čokoládu, prosecco a nič iné.

1. Vieme, že Frederika si dá prosecco alebo čokoládu.
2. Ak by to, že si nedá čokoládu, znamenalo, že si dá prosecco, tak si určite nedá kávu.
3. Hana je spokojná, ak si dá čokoládu alebo kávu.
4. Ak je aspoň jedna z jej kamošiek spokojná, potom aj Gerta je spokojná.

Na základe uvedených informácií odpovedzte na otázky:

a) Je isté, že *ak si Frederika nedá kávu, len ak si ju dá Hana, tak sú Hana aj Gerta spokojné*?

b) Predpokladajme, že Gerta spokojná nie je. Aké nápoje z ponuky kaviarne si Frederika a Hana mohli objednať?

Na zodpovedanie otázok tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablá.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- aké logické problémy treba vyriešiť, aby ste zodpovedali otázky a) a b),
- ako vaše tablo alebo tablá tieto logické problémy riešia,
- aké sú riešenia logických problémov,
- aké sú neformálne odpovede na neformálne otázky a) a b).

Na rozdiel od úloh 4.1.2 a 4.1.3, v tejto odpovedáte na neformálne otázky. Preto potrebujete **overiť splniteľnosť** (nie nutne tablom).

Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

Na vyriešenie úlohy nie sú potrebné tablá s viac ako **28 uzlami**.

4.3.15 Monika a Michal budú mať cez víkend návštevu, prídu k nim Michalovi rodičia. Potrebujú sa teda rozhodnúť, aké pohostenie pre nich pripravia. Môžu nachystať oriešky, sendviče, koláč, ovocnú misu, syrový tanier alebo šunkový tanier. Majú takéto obmedzenia:

1. Ak by chystali sendviče alebo koláč, tak určite nestihnú pripraviť aj ovocnú misu.
2. Michalova mama je vegetariánka, takže určite nachystajú oriešky, syrový tanier, koláč alebo ovocnú misu (inak by mama nemala čo jesť).
3. Rodičia prídu na návštevu hladní, takže ak Michal s Monikou nenachystajú sendviče, určite musia aspoň upiecť koláč.
4. Mladý pár má novú rúru, ale ešte ju nestihli vyskúšať, takže si netrúfnu hneď na prvý pokus piecť koláč pre návštevu.

Zistite:

i. Môžu Monika a Michal pripraviť pohostenie vyhovujúce všetkým obmedzeniam?

ii. Aké sú ich možnosti?

Na otázky odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 20 uzlami.

Ak má vaše tablo *viac ako 30 uzlov*, všimnite si, ktoré kroky sa opakujú, a tablo upravte, aby ste sa opakovaniu podľa možnosti vyhli.

Dajte si záležať na tom, aby ste *presne a jasne* vyjadrili prípustné možnosti kombinácií jednotlivých druhov pohostenia. Nezabudnite ani na tie, ktoré *môžu ale nemusia* byť súčasťou niektorých (alebo aj všetkých) kombinácií.

4.3.16 Preskúmajte pomocou otvorených a úplných tabiel nasledujúce príklady záverov, ktoré *nevyplývajú* z uvedených teórií, a ekvivalencií, ktoré *nie sú* tautológiami pre ľubovoľné formuly A, B, C.

a) *Chybné úsudky.* Nasledujúce nevyplývania predstavujú schémy rôznych *chybných úsudkov*:

i. $\{(A \to B), B\} \not\models_p A$ (Potvrdenie antecedentu.)

ii. $\{(A \to B), \neg A\} \not\models_p \neg B$ (Popretie konzekventu.)

iii. $\{(A \to C)\} \not\models_p ((A \lor B) \to C)$ (Zoslabenie antecedentu.)

iv. $\{(A \to B)\} \not\models_{\mathrm{p}} (A \to (B \wedge C))$ (Zosilnenie konzekventu.)

Pre každú vyššie uvedenú dvojicu $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ dokážte, že z teórie T *vo všeobecnosti nevyplýva* formula X.

Na to je potrebné zostrojiť *kontrapríklad vyplývania*:

- formuly A, B, C vo vhodnom jazyku,
- aspoň jedno ohodnotenie v pre tento jazyk, ktoré je modelom teórie T ($v \models_{\mathrm{p}} T$), ale nie je modelom formuly X ($v \not\models_{\mathrm{p}} X$).

b) *Chybné ekvivalentné úpravy.* Nasledujúce formuly predstavujú schémy rôznych chybných ekvivalentných úprav:

v. $((A \to B) \to C) \not\Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (A \to (B \to C))$ (Implikácia nie je asociatívna.)

vi. $(A \to B) \not\Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \to A)$ (Implikácia nie je komutatívna.)

vii. $(A \wedge (B \to C)) \not\Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \wedge B) \to (A \wedge C))$ (Konjunkcia nie je distributívna vzhľadom na implikáciu.)

viii. $(A \wedge (B \leftrightarrow C)) \not\Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C))$ (Konjunkcia nie je distributívna vzhľadom na ekvivalenciu.)

Pre každú vyššie uvedenú dvojicu $X \not\Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$ dokážte, že formuly X a Y *nie sú vo všeobecnosti ekvivalentné*.

Na to je potrebné zostrojiť *kontrapríklad ekvivalencie*:

- formuly A, B, C vo vhodnom jazyku,
- aspoň jedno ohodnotenie v pre tento jazyk, ktoré je modelom jednej z formúl X, Y, ale nie je modelom druhej.

Pre *niektoré* dvojice je implikácia *v jednom smere* (teda $(X \to Y)$ alebo $(Y \to X)$) *tautológiou*. Ktorá?

Ak vám nie je jasné na prvý pohľad prečo záver nevyplýva z predpokladov alebo prečo formuly nie sú ekvivalentné, môže vám pomôcť predstaviť si *konkrétny príklad* významu formúl A, B, C, povedzme: A – je slnečno, B – idem na výlet, C – dám si zmrzlinu.

V niektorých prípadoch však problém ozrejmí iba systematická úvaha o význame spojok vo formulách, s čím vám práve pomôžu tablové pravidlá.

4.3.17 Steve si chce objednať pizzu, pričom si na ňu môže dať olivy, šampiňóny, šunku alebo artičoky (iné suroviny nie sú k dispozícii). Pomôžte mu vybrať, ak má takéto podmienky:

1. Chce pizzu s olivami alebo bez šampiňónov.
2. Ak si dá na pizzu olivy, tak si tam dá aj šunku.

3. Nie je pravda, že ak by si artičoky dal len s olivami, tak si dá na pizzu aj šampiňóny a šunku.

Zistite:

i. Môže si za takýchto podmienok Steve objednať nejakú (nie suchú) pizzu?

ii. Aké sú jeho možnosti?

Na otázky odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 25 uzlami.

4.4 Korektné pravidlá

4.4.1 Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \;(\mathrm{MP}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \;(\mathrm{MT})$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \;(\mathrm{DS}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{T}\,X} \;(\mathrm{DS})$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{F}\,Y} \;(\mathrm{NCS}) \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \;(\mathrm{NCS})$$

$$\frac{}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{F}\,X} \;(\mathrm{cut}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}(Y \to Z)}{\mathbf{T}(X \to Z)} \;(\mathrm{HS})$$

$$\frac{\mathbf{T}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathbf{T}\,X_i}{\mathbf{T}\,X_{3-i}} \;(\mathrm{ESTT}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathbf{F}\,X_i}{\mathbf{F}\,X_{3-i}} \;(\mathrm{ESTF})$$

$$\frac{\mathbf{F}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathbf{T}\,X_i}{\mathbf{F}\,X_{3-i}} \;(\mathrm{ESFT}) \qquad \frac{\mathbf{F}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathbf{F}\,X_i}{\mathbf{T}\,X_{3-i}} \;(\mathrm{ESFF})$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \leftrightarrow Y)}{\mathbf{T}(X \land Y) \mid \mathbf{F}(X \lor Y)} \;(\mathrm{ECDT}) \qquad \frac{\mathbf{F}(X \leftrightarrow Y)}{\mathbf{T}(X \land \neg Y) \mid \mathbf{F}(X \lor \neg Y)} \;(\mathrm{ECDF})$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, (DS) disjunktívny sylogizmus, (HS) hypotetický sylogizmus, (cut) rez. Pravidlo (NCS) je variácia (DS) pre nesplnenú konjunkciu. Pravidlá (ES..) sú verziami (MP) a (MT) pre ekvivalenciu. V nich $i \in \{1, 2\}$ a všimnite si, že $3 - 1 = 2$ a $3 - 2 = 1$. Pravidlo

(ECDT) redukuje pravdivú ekvivalenciu na prípady, že sú jej „priame“ podformuly obe pravdivé alebo obe nepravdivé. Pravidlo (ECDF) je analogické.

Pomôcka. Definíciu korektnosti pravidla a príklady jej dôkazov nájdete v poznámkach z prednášok.

V nasledujúcich úlohách môžete použiť tablový kalkul rozšírený o vyššie uvedené pravidlá. Vzniknú tak pravdepodobne prehľadnejšie a menšie tablá, ktoré sa ľahšie interpretujú ako dôkaz v prirodzenom jazyku.

4.4.2 Malá firma vyrába prístrojové skrinky z viacerých materiálov, s rôznymi povrchovými úpravami a v niekoľkých farbách. Aj keď je zdanlivo možných viac ako tisíc kombinácií, nie všetky sa dajú vyrobiť. Vybavenie firmy, vlastnosti materiálov a výrobné postupy kladú nasledujúce obmedzenia:

(X_1) Skrinky sa vyrábajú materiálov: hliník, oceľ, plast.

(X_2) Hliník a oceľ sú kovy.

(X_3) Iba oceľ sa dá lakovať.

(X_4) Brúsenú povrchovú úpravu môžu mať iba nelakované kovové skrinky.

(X_5) Lakované skrinky aj plastové skrinky sú čierne, biele, alebo zelené.

(X_6) Nelakované oceľové skrinky korodujú.

(X_7) Koróziu spôsobí aj kombinácia dvoch rôznych kovov.

(X_8) Eloxovať sa dajú iba hliníkové skrinky a po tejto úprave sú buď sivé alebo čierne.

(X_9) Korózia je neprípustná.

Zákazník požaduje eloxovanú čierno-bielu skrinku. Môže mu firma vyhovieť? Ak áno, z ktorých materiálov a z ktorých ich kombinácií môže byť taká skrinka vyhotovená?

Obchodný zástupca si chce ujasniť možné kombinácie. Domnieva sa, že skrinka s brúsenou povrchovou úpravou je sivá alebo čierna. Usúdil správne?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku a stručne popísať význam jeho symbolov.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.

c) Zodpovedať otázky a odpovede dokázať *pomocou tablového kalkulu*.

4.4.3 Detektívi Miller a Skillová riešia prípad bankovej lúpeže. Partia lupičov v sejfe vylomila aj bezpečnostné schránky a nie je úplne jasné, čo z nich ukradli, pretože klienti si nespomínajú alebo nechcú spomenúť, čo v nich mali. Detektívom sa však podarilo zúžiť okruh podozrivých a získať tieto indície:

1. Bloom sa dá nahovoriť iba na takú prácu, pri ktorej ide o drahokamy, a vždy spolupracuje s Yarrom alebo Malloyom.
2. Malloy sa špecializuje výhradne na cenné papiere.
3. Podľa dôveryhodného informátora sa drahokamy nekradnú, ak je v partii Pakľúč a nie Ocean.
4. Ak bol medzi lupičmi Yarr, tak v partii nebol Ryan, s ktorým sa Yarr len ťažko znesie, alebo išlo o zlato, kvôli ktorému je Yarr ochotný spolupracovať skoro s hocikým.
5. Ocean zásadne nekradne zlato.
6. Pod prezývkou Pakľúč je známy Ryan.
7. Bloomovu tvár zaznamenala bezpečnostná kamera v okolí banky, pri vystupovaní z auta tesne pred lúpežou, a všetci klienti banky potvrdili, že im neukradli cenné papiere.

Pomôžte Skillovej a Millerovi na základe týchto indícií rozhodnúť, či lúpil alebo nelúpil Ryan, a o tom, či lupiči ukradli zlato.

Pri riešení tejto úlohy:

i. Určte **aké logické problémy** je potrebné vyriešiť, aby ste mohli urobiť požadované rozhodnutie.

ii. Vyriešte **všetky** logické problémy použitím **tablového** kalkulu rozšíreného o korektné pravidlá z úlohy 4.4.1 v zbierke. Tieto pravidlá použite **všade**, kde je to možné a užitočné z hľadiska veľkosti tabla.

iii. Zdôvodnite, **ako a prečo** použité tablo či tablá riešia určené logické problémy.

iv. Vyjadrite **riešenia určených logických problémov**.

v. Vyvoďte **požadované rozhodnutie**.

Pomôcka. Indície sformalizujeme v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúpil}^1, \text{cp}^1, \text{drahokamy}^1, \text{zlato}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lup}, \text{Bloom}, \text{Malloy}, \text{Ocean}, \text{Pakľúč}, \text{Ryan}, \text{Yarr}\}$. Konštanta lup označuje množinu ulúpených cenností, ostatné konštanty označujú jednotlivých podozrivých. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
lúpil(x)	x sa zúčastnil predmetnej lúpeže
cp(x)	x obsahuje cenné papiere
drahokamy(x)	x obsahuje drahokamy
zlato(x)	x obsahuje zlato

Formalizácia indícií je potom nasledovná:

(A_1) $\big(\text{lúpil(Bloom)} \to \big(\text{drahokamy(lup)} \land (\text{lúpil(Yarr)} \lor \text{lúpil(Malloy)})\big)\big)$

(A_2) $(\text{lúpil(Malloy)} \to \text{cp(lup)})$

(A_3) $\big((\text{lúpil(Pakľúč)} \land \neg\text{lúpil(Ocean)}) \to \neg\text{drahokamy(lup)}\big)$

(A_4) $\big(\text{lúpil(Yarr)} \to (\neg\text{lúpil(Ryan)} \lor \text{zlato(lup)})\big)$

(A_5) $(\text{lúpil(Ocean)} \to \neg\text{zlato(lup)})$

(A_6) $(\text{lúpil(Pakľúč)} \leftrightarrow \text{lúpil(Ryan)})$

(A_7) $(\text{lúpil(Bloom)} \land \neg\text{cp(lup)})$

Odporúčame vám označiť atomické formuly vhodnými meta premennými, napr. B = lúpil(Bloom), ktoré potom použijete v tablách.

Svoje tablá si môžete skontrolovať pomocou editora tabiel. V menu pod tlačidlom *Basic propositional* ▾ vyberte sadu pravidiel *Propositional*, ktorá obsahuje základné pravidlá α, β a všetky pravidlá z úlohy 4.4.1.

Tento editor tabiel nevie overiť, či je vetva otvorená a úplná. Skontrolovať to musíte sami.

4.5 Meta tvrdenia o tablách

4.5.1 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π, potom aj α_1 a α_2 sa nachádzajú na π.

b) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α_1 a α_2 nachádzajú na π, tak sa aj α nachádza na π.

c) Existujú označené formuly A^+ typu α a B^+ typu β také, že α_2 pre A^+ je rovnaká ako β_1 pre B^+.

d) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β nachádza na π, tak aj β_1 a β_2 sa nachádzajú na π.

e) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β_1 alebo β_2 nachádza na π, tak sa aj β nachádza na π.

f) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π, tak aspoň jedna z α_1, α_2 sa nachádza na π.

g) Nech π je *úplná a uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa α a β nachádzajú na π, tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež na π.

Riešenie. Vyriešime časti a) a b) ako vzor. Ostatné časti vyriešte samostatne.

Tvrdenie a) platí.

Dôkaz. Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo a nech π je ľubovoľná úplná vetva v $\mathcal{T}$. Nech α je ľubovoľná označená formula typu α, ktorá sa nachádza na π. Nech α_1 a α_2 sú dôsledky oboch pravidiel pre formulu α:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}.$$

Keďže π je úplná vetva $\mathcal{T}$, tak podľa definície 5.24 úplnosti vetvy musí platiť, že aj α_1 a rovnako aj α_2 sa nachádzajú na π.

Tvrdenie b) neplatí.

Kontrapríklad. Nájdeme konkrétnu formulu typu α a konkrétne tablo s úplnou vetvou π, na ktorej sa budú nachádzať α_1 aj α_2 pre formulu α, ale samotná α sa na vetve π nachádzať nebude.

Nech $S^+ = \{\mathbf{F}(\neg \mathrm{p}(\mathrm{c}) \to \mathrm{r}(\mathrm{c}))\}$. Tablo pre S^+ vyzerá nasledovne:

1.	$\mathbf{F}(\mathrm{r}(\mathrm{c}) \to \neg \mathrm{p}(\mathrm{c}))$	S^+
2.	$\mathbf{T}\,\mathrm{r}(\mathrm{c})$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,\neg \mathrm{p}(\mathrm{c})$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{c})$	$\alpha 3$

Toto tablo má jedinú vetvu, ktorá je úplná. Označme ju π. Zoberme si teraz nasledovný pár inštancií pravidiel α pre konjunkciu:

$$\frac{\mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})}{\mathbf{T}\,\mathsf{p(c)}} \qquad \frac{\mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})}{\mathbf{T}\,\mathsf{r(c)}}$$

Teda $\alpha = \mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})$, $\alpha_1 = \mathbf{T}\,\mathsf{p(c)}$ a $\alpha_2 = \mathbf{T}\,\mathsf{r(c)}$. Vidíme, že formuly α_1 a α_2 sa na vetve π nachádzajú (konkrétne v uzloch 4 a 2). Formula α sa ale na π nenachádza.

Našli sme teda kontrapríklad k tvrdeniu b), a tvrdenie b) tým pádom neplatí. ♮

4.5.2 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva uzavretá, tak X je splniteľná.

b) Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva uzavretá, tak X je falzifikovateľná.

c) Nech S je množina formúl a X je formula. Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\,\mathbf{T}\,A \mid A \in S\,\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva otvorená a úplná a iná vetva uzavretá, tak X je nezávislá od S.

Riešenie. a)

Nakoľko je tvrdenie a) všeobecné (hovorí, že čosi platí pre všetky formuly X a všetky tablá s nejakými vlastnosťami), je dobré začať o jeho pravdivosti rozmýšľať, akoby sme ho chceli dokazovať sporom, teda pokúsiť sa jeho pravdivosť spochybniť: Kedy by mohlo a) byť nepravdivé? Keby sa našla aspoň jedna formula X a aspoň jedno tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$, ktoré má uzavretú vetvu, ale pritom by X bola nesplniteľná. Pretože X má byť nesplniteľná, tablo zrejme bude mať aj nejaké otvorené vetvy.

Veľmi jednoduchá nesplniteľná formula je napríklad $Z = (\mathsf{p(c)} \land \neg\mathsf{p(c)})$, ale úplné tablo pre ňu má dve otvorené vetvy.

Na druhej strane, keď chceme formulu Y, aby tablo pre $\{\mathbf{F}\,Y\}$ malo uzavretú vetvu, môžeme za Y zvoliť tautológiu, napríklad $(\mathsf{p(c)} \lor \neg\mathsf{p(c)})$.

Vieme tieto dve formuly spojiť tak, aby sme dostali aj nesplniteľnú formulu aj úplnú vetvu? Áno. Stačí si uvedomiť, že konjunkcia nesplniteľnej formuly s hocijakou je stále nesplniteľná. Keď na $\mathbf{F}(Y \land Z)$ použijeme pravidlo β, dostaneme dve vetvy. V ľavej bude $\mathbf{F}\,Y$, a teda ju vieme uzavrieť. Tým sme v podstate prišli na kontrapríklad a ostáva nám iba poctivo ho zapísať a zdôvodniť.

Iný spôsob ako nájsť kontrapríklad je uvedomiť si, že $(A \land \neg A)$ je nesplniteľná pre hocijakú formulu A. Ľavá vetva v table pre $\{\mathbf{F}(A \land \neg A)\}$ začína označenou formulou $\mathbf{F}\,A$, a keď A je tautológia, táto vetva sa dá uzavrieť.

Tvrdenie a) je nepravdivé. Pretože ide o všeobecné tvrdenie, vyvrátime ho nájdením kontrapríkladu.

Kontrapríklad. Potrebujeme nájsť formulu X a tablo $\mathcal{T}$ pre $\{\mathbf{F}\, X\}$, pre ktoré bude platiť: tablo $\mathcal{T}$ má aspoň jednu uzavretú vetvu a súčasne X je nesplniteľná.

Zoberme si teda napríklad formulu $X = \big((\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)}) \land (\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})\big)$ v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{c}\}$. Jej nesplniteľnosť si vieme overiť rýchlou analýzou ohodnotení:

	v_i				
	p(c)	$\neg$p(c)	(p(c) $\lor$ $\neg$p(c))	(p(c) $\land$ $\neg$p(c))	$\big($(p(c) $\lor$ $\neg$p(c)) $\land$ (p(c) $\land$ $\neg$p(c))$\big)$
v_1	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_2	t	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$

Keďže pre obe ohodnotenia v_1 a v_2 pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že X v nich nie je pravdivá, X je nesplniteľná.

Skonštruujme teraz tablo $\mathcal{T}$ pre $\{\mathbf{F}\, X\}$, v ktorom nájdeme aspoň jednu uzavretú vetvu:

1. $\mathbf{F}\,\big((\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)}) \land (\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})\big)$ $\{\mathbf{F}\, X\}$

2.	$\mathbf{F}\,(\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)})$	$\beta1$	6.	$\mathbf{F}\,(\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})$	$\beta1$
3.	$\mathbf{F}\,\mathrm{p(c)}$	$\alpha2$			
4.	$\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p(c)}$	$\alpha2$			
5.	$\mathbf{T}\,\mathrm{p(c)}$	$\alpha4$			
	$*$	$3, 5$			

💡 Tvrdenie a) je príkladom chybných úsudkov, ktoré občas študenti robia, keď majú pomocou tabiel rozhodnúť, či je formula tautológia, splniteľná, falzifikovateľná, alebo nesplniteľná.

Pravdepodobne je to spôsobené falošnou analógiou medzi ohodnoteniami a vetvami tabla. Je pravda, že formula X je tautológiou vtt je X pravdivá vo *všetkých* ohodnoteniach. Tiež je pravda, že formula X je tautológiou vtt *všetky* vetvy v table pre $\{\mathbf{F}\, X\}$ sú uzavreté. Falošná analógia spočíva v tom, že na základe predchádzajúcich faktov a toho, že formula X je splniteľná vtt je X pravdivá v *aspoň jednom* ohodnotení, študent usúdi, že to nastáva vtt *aspoň jedna* vetva v table pre $\{\mathbf{F}\, X\}$ je uzavretá, ako keby uzavretá vetva zodpovedala ohodnoteniu, v ktorom je $\mathbf{F}\, X$ nepravdivá a X pravdivá.

Uzavretá vetva však nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu (ako sme poznamenali pri viacerých predchádzajúcich príkladoch). ♮

5 Kvantifikátory

5.1 Syntax a jednoduchá formalizácia

5.1.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu vo vhodnom jazyku v logiky prvého rádu:

1. Evka je doktorandka a má školiteľa.
2. Všetko sú ľudia.
3. Všetci doktorandi sú študenti.
4. Niektorí doktorandi sú aj učiteľmi.
5. Nikto neučí sám seba.
6. Žiaden profesor nie je doktorand.
7. Niektorí študenti samozrejme nie sú doktorandi.
8. Doktorandi profesora Nového sú cvičiaci na Teórii všetkého alebo Úvode do abstrakcie.
9. Učitelia okrem asistentov sú profesori a docenti.
10. Adamov školiteľ musí byť docent alebo profesor v prípade, že je Adam doktorand.
11. Docentka Mladá školí iba takých študentov, ktorí absolvovali s vyznamenaním Históriu vesmíru, ale nie sú doktorandi.
12. Teóriu všetkého si nemôžu zapísať tí, čo neabsolvovali ani Históriu vesmíru, ani Úvod do abstrakcie.
13. Ak nejaký kurz učí Nový, tak ide o neobľúbený kurz.
14. Doktorandi Nového cvičiaci Teóriu všetkého sú externisti.
15. Ak má Mladá nejakého doktoranda, ktorý nie je externý, tak je šťastná.
16. Nový je šťastný, iba ak aspoň jeden študent má rád Teóriu všetkého.

5.2 Sémantika

5.2.1 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Bob}, \text{Eva}, \text{Karen}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{student}^1, \text{teacher}^1, \text{knows}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3\} \\
i(\text{Eva}) &= 1 & i(\text{student}) &= \{2\} \\
i(\text{Karen}) &= 1 & i(\text{teacher}) &= \{1\} \\
i(\text{Bob}) &= 3 & i(\text{knows}) &= \{(1,1), (1,2), (2,1)\}
\end{aligned}
$$

Zistite, či sú nasledujúce formuly pravdivé alebo nepravdivé v štruktúre $\mathcal{M}$. Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $(\exists x\, \text{teacher}(x) \land \exists y\, \text{student}(y))$

(A_2) $(\forall x\, \text{student}(x) \lor \exists y\, \text{student}(y))$

(A_3) $\forall x(\text{teacher}(x) \to \neg\text{student}(x))$

(A_4) $\exists x(\text{teacher}(x) \land \text{student}(x))$

(A_5) $\forall x(\text{teacher}(x) \to \text{student}(x))$

(A_6) $\exists x(\text{teacher}(x) \to \text{student}(x))$

(A_7) $\exists x(\text{knows}(x, \text{Karen}) \land (\text{student}(x) \lor \text{teacher}(x)))$

(A_8) $\forall x(\text{knows}(x, \text{Eva}) \to \text{teacher}(x))$

(A_9) $\forall x((\text{teacher}(x) \land \neg\text{knows}(x, \text{Karen})) \to \text{knows}(x, \text{Bob}))$

(A_{10}) $\neg \forall x((\text{student}(x) \land \neg\text{knows}(x, \text{Karen})) \to \text{knows}(x, \text{Eva}))$

(A_{11}) $\exists x((\text{teacher}(x) \land \text{knows}(x, \text{Karen})) \to \text{knows}(x, \text{Eva}))$

(A_{12}) $\neg \forall x(\text{student}(x) \lor \text{teacher}(x))$

(A_{13}) $\neg \exists y\, \text{knows}(\text{Bob}, y)$

(A_{14}) $\forall x\, \forall y(\text{knows}(x, y) \to \text{knows}(y, x))$

(A_{15}) $\exists x(\text{teacher}(x) \to (\text{teacher}(x) \land \text{student}(x)))$

(A_{16}) $\forall x(\text{knows}(x, \text{Bob}) \to (\text{teacher}(x) \land \text{student}(x)))$

5.2.2 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{ACME}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{article}^1, \text{branded}^1, \text{cheap}^1, \text{expensive}^1, \text{faulty}^1, \text{made\_by}^2\}$.

Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby bola modelom teórie tvorenej všetkými nasledujúcimi formulami.

Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $\forall x(\mathrm{article}(x) \to (\mathrm{branded}(x) \lor \mathrm{cheap}(x)))$

(A_2) $\forall x(\mathrm{branded}(x) \to \neg\mathrm{cheap}(x))$

(A_3) $(\exists x(\mathrm{article}(x) \land \mathrm{cheap}(x)) \land \exists x(\mathrm{article}(x) \land \neg\mathrm{cheap}(x)))$

(A_4) $\forall x(\mathrm{article}(x) \to (\mathrm{branded}(x) \to \mathrm{made\_by}(x, \mathrm{ACME})))$

(A_5) $\forall x(\mathrm{made\_by}(x, \mathrm{ACME}) \to \mathrm{faulty}(x))$

(A_6) $(\neg\forall x\,\neg\mathrm{branded}(x) \to \neg\exists x(\neg\mathrm{expensive}(x) \land \mathrm{faulty}(x)))$

(A_7) $\neg\forall x(\neg\mathrm{faulty}(x) \to \neg\mathrm{expensive}(x))$

5.2.3 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Poznáme červené ovocie.
2. Jablko je ovocie.
3. Jablká sú červené, zelené, ale aj žlté.
4. Darinka je mandarínka.
5. Mandarínky a pomaranče sú oranžové ovocie.
6. Nič oranžové nie je červené.
7. Žiadne ovocie nie je nezdravé, ibaže by bolo hnilé či plesnivé.
8. Afrika je kontinent a ovocie, ktoré z nej pochádza, považujeme za exotické.
9. Čo nie je americké, to nie je z Kalifornie.
10. Aj Darinka musí odniekiaľ pochádzať.
11. Janko má rád africké ovocie, ak je zelené, a americké, iba ak je červené.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, že Janko má rád Darinku, keď Darinka pochádza z Kalifornie? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

5.2.4 Príklad. (Falošní priatelia I) O každej z nasledujúcich dvojíc formúl dokážte, že A_i a B_i **nie sú** ekvivalentné (skrátene $A_i \not\Leftrightarrow B_i$), tak, že zostrojíte

- štruktúru, v ktorej bude A_i pravdivá a B_i nepravdivá, a tiež,
- ak je to možné, štruktúru, v ktorej naopak bude A_i nepravdivá a B_i pravdivá; takáto štruktúra nemusí existovať pre každú dvojicu formúl.

Ak to formuly umožňujú, vytvorte *netriviálnu* štruktúru s aspoň 3-prvkovou doménou a neprázdnymi interpretáciami predikátov.

a) $A_1 = \forall x(\mathsf{doktorand}(x) \to \mathsf{\check{s}tudent}(x))$
$B_1 = \forall x(\mathsf{doktorand}(x) \land \mathsf{\check{s}tudent}(x))$,

b) $A_2 = \exists x(\mathsf{pes}(x) \to \mathsf{zly}(x))$
$B_2 = \exists x(\mathsf{pes}(x) \land \mathsf{zly}(x))$,

c) $A_3 = \neg\exists x(\mathsf{software}(x) \to \neg\mathsf{bugFree}(x))$
$B_3 = \neg\exists x(\mathsf{software}(x) \to \mathsf{bugFree}(x))$,

d) $A_4 = \exists x\big((\mathsf{has}(\mathsf{Zita}, x) \land \mathsf{mobile}(x)) \to \mathsf{uses}(\mathsf{Zita}, x)\big)$
$B_4 = \forall x\big((\mathsf{has}(\mathsf{Zita}, x) \land \mathsf{mobile}(x)) \to \mathsf{uses}(\mathsf{Zita}, x)\big)$,

e) $A_5 = (\forall x\, \mathsf{works}(x) \to \mathsf{green}(\mathsf{statusLight}))$
$B_5 = \forall x(\mathsf{works}(x) \to \mathsf{green}(\mathsf{statusLight}))$,

f) $A_6 = (\exists x\, \mathsf{yellow}(x) \land \exists x\, \mathsf{blue}(x))$
$B_6 = \exists x(\mathsf{yellow}(x) \land \mathsf{blue}(x))$,

g) $A_7 = \forall x(\mathsf{fork}(x) \lor \mathsf{spoon}(x))$
$B_7 = (\forall x\, \mathsf{fork}(x) \lor \forall x\, \mathsf{spoon}(x))$,

h) $A_8 = (\mathsf{rains}(\mathsf{outside}) \to \neg\exists x\, \mathsf{walks}(x, \mathsf{outside}))$
$B_8 = \neg\exists x(\mathsf{rains}(\mathsf{outside}) \to \mathsf{walks}(x, \mathsf{outside}))$.

Všímajte si **rozdiely vo význame** formúl A_i a B_i. Tieto formuly poukazujú na **časté chyby pri formalizácii**. Študenti*ky často zamieňajú A_i a B_i v domnení, že sú ekvivalentné. V tomto cvičení sa môžete presvedčiť, že nie sú, a vyjasniť si, v čom je medzi nimi rozdiel.

Riešenie. a) V štruktúre $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$, kde:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\mathsf{Janka}, \mathsf{Mi\check{s}o}, \mathsf{\check{S}tevo}, \mathsf{Zuzka}\} \\ i_1(\mathsf{doktorand}) &= \{\mathsf{Mi\check{s}o}\} \\ i_1(\mathsf{\check{s}tudent}) &= \{\mathsf{Janka}, \mathsf{Mi\check{s}o}\} \end{aligned}$$

je pravdivá A_1, ale nie je pravdivá B_1. Preto A_1 a B_1 nie sú ekvivalentné.

Štruktúra $\mathcal{M}$, kde by B_1 bola pravdivá ale A_1 nepravdivá, neexistuje. Ak je v ľubovoľnej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pravdivá B_1, tak všetky prvky z domény D musia byť prvkami interpretácií predikátov doktorand aj študent (t.j., $i(\text{doktorand}) = i(\text{študent}) = D$; neformálne, všetky objekty sú súčasne doktorandmi aj študentmi), aby boli oba konjunkty v B_1 skutočne splnené pri ohodnotení $e(x/d)$ pre *každé* $d \in D$. Lenže potom je pri každom takomto ohodnotení splnený konzekvent v A_i, teda v takejto štruktúre je formula A_1 pravdivá (neformálne, každý doktorand je študent, lebo všetci sú jedno aj druhé). Tak je to napríklad v štruktúre $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$, kde:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\} \\ i_2(\text{doktorand}) &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\} \\ i_2(\text{študent}) &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\}. \end{aligned}$$

⚠ Táto štruktúra samozrejme *iba ilustráciou*, ale **nie dôkazom** neexistencie $\mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} \models B_1$ a $\mathcal{M} \not\models A_1$. ♮

5.2.5 Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

a) $\neg\forall x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$,

b) $\exists x\, \neg P(x) \to \neg\exists x\, P(x)$,

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$,

d) $(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$,

e) $(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

f) $(\neg\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

g) $\neg\forall x\, P(x) \land \neg\forall x\, Q(x) \to \neg\forall x(P(x) \lor Q(x))$,

h) $\neg\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, Q(x)$.

Tieto formuly ukazujú prípady, v ktorých **nie je** možné distribuovať („presúvať“) kvantifikátory cez logické spojky tak, aby táto úprava bola ekvivalentná.

Dodržte odporúčania k predchádzajúcej úlohe.

Riešenie pre c). $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$

Napríklad štruktúra $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$, pričom:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ i_1(P) &= \emptyset \end{aligned}$$

$$i_1(Q) = \{1, 2, 3, 4\}$$

spĺňa formulu c), ale štruktúra $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$, kde:

$$D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$i_2(P) = \{2, 4\}$$
$$i_2(Q) = \{1, 3\}$$

ju nespĺňa. Formula c) teda nie je ani platná, ani nesplniteľná. ♮

5.2.6 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu.

1. V bare U Zubatej určite pracuje barman.
2. Okrem barmanov tam pracujú už len čašníci, vyhadzovači a upratovačky.
3. Bar má vyhadzovača, ak má upratovačku.
4. Fero sa kamaráti iba s takými barmanmi, ktorí sú aj čašníkmi.
5. Vyhadzovačka Gigi sa nekamaráti s nikým, kto nie je tiež vyhadzovač.
6. Kto sa kamaráti s ňou, ten U Zubatej nepracuje.
7. Bar má ženskú vyhadzovačku, len ak sú aj všetci ostatní vyhadzovači, ktorí tam pracujú, ženy.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je zadaných okolností možné, že Gigi sa kamaráti s Ferom? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Pomôcka. Ako obvykle, zanedbajte rôzne slová pre profesie v mužskom a ženskom rode. Konštanty použite len na formalizáciu objektov, ktoré majú vlastné mená.

5.2.7 Sformalizujte čo najvernejšie nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Vegán konzumuje iba rastlinné produkty.
2. Kto jazdí na starom bicykli, je hipster.

3. Kto nosí bradu a falošné okuliare, je hipster.
4. Každý vegán má aspoň jedného kamaráta, ktorý konzumuje mäso.
5. Žiadne mäso nie je rastlinný produkt.
6. Každý hipster má za kamarátov len hipsterských vegánov.
7. Každý hipster, ktorý má záhradu, v nej chová kozu.
8. Je taká koza, ktorá má za kamarátov všetkých hipsterov.
9. Žiadny vegán nikde nechová žiadnu kozu, ktorá konzumuje mäso.
10. Kamarátstvo nie je vždy vzájomné.
11. Niekto jazdí na aspoň dvoch bicykloch, z ktorých práve jeden je starý.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, aby vôbec hipster mal kamaráta? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Pomôcka. V jazyku $\mathcal{L}$ nepotrebujete konštanty, lebo vo výrokoch sa nevyskytujú vlastné mená.

5.2.8 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{P}^1, \mathsf{Q}^1, \mathsf{R}^2\}$ a $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Nech $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} i(\mathsf{P}) &= \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N} \,\}, \\ i(\mathsf{Q}) &= \{\, 3n + 4 \mid n \in \mathbb{N} \,\}, \\ i(\mathsf{R}) &= \{\, (k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid k \text{ delí } n \,\}. \end{aligned}$$

Nech e je ľubovoľné ohodnotenie indivíduových premenných jazyka $\mathcal{L}$.

Ktoré z nasledujúcich možností sú pravdivé a ktoré nepravdivé?

a) $\mathcal{M} \models (\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x))\,[e(x/10)(y/9)]$

b) $\mathcal{M} \models \big(\mathsf{P}(x) \to (\mathsf{Q}(y) \land \mathsf{R}(x, y))\big)\,[e(x/5)(y/13)]$

c) $\mathcal{M} \models \forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}(x, y))\,[e(x/4)(y/16)]$

d) $\mathcal{M} \models \big(\mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \exists \mathsf{y}(\mathsf{Q}(\mathsf{y}) \land \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}))\big)\, [e(\mathsf{x}/2)(\mathsf{y}/23)]$

Interpretácie predikátov sme zadefinovali pomocou štandardných aritmetických operácií na prirodzených číslach $\mathbb{N}$ (vrátane 0). Pre $k, n \in \mathbb{N}$ je vzťah k *delí* n tiež definovaný štandardne: existuje $q \in \mathbb{N}$ také, že $k \cdot q = n$.

Uvedomte si, že:

- k delí 0 pre každé $k \in \mathbb{N}$ (lebo $k \cdot 0 = 0$),
- 0 delí n iba pre $n = 0$ (lebo $0 \cdot q = 0$),
- k delí 1 iba pre $k = 1$ (lebo $k \cdot q = 1$ iba pre $k = q = 1$),
- 1 delí n pre každé $n \in \mathbb{N}$ (lebo $1 \cdot n = n$).

5.2.9 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{one}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{P}^1, \mathsf{Q}^1, \mathsf{R}^2\}$ a $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \dots\}$.

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < 24 \,\}, \\ i(\mathsf{one}) &= 1, \\ i(\mathsf{P}) &= \{\, 2n \in D \mid n \in D \,\}, \\ i(\mathsf{Q}) &= \{\, 3n + 4 \in D \mid n \in D \,\}, \\ i(\mathsf{R}) &= \{\, (k, n) \in D^2 \mid k \text{ delí } n \,\}. \end{aligned}$$

Nech e je ľubovoľné ohodnotenie indivíduových premenných jazyka $\mathcal{L}$.

a) Vymenujte všetky prvky množiny $X_1 = \{\, n \in D \mid \mathcal{M} \models A_1[e(\mathsf{x}/n)] \,\}$, kde $A_1 = \big(\mathsf{Q}(\mathsf{x}) \land \forall \mathsf{y}\big(\mathsf{R}(\mathsf{y}, \mathsf{x}) \to (\mathsf{y} \doteq \mathsf{one} \lor \mathsf{P}(\mathsf{y}))\big)\big)$.

b) Zapíšte pomocou splnenia vhodnej formuly pri ohodnotení množinu $X_2 = \{4, 10, 16, 22\}$.

c) Vymenujte všetky prvky množiny $X_3 = \{\, (m, n) \in D^2 \mid \mathcal{M} \models A_3[e(\mathsf{x}/m)(\mathsf{y}/n)] \,\}$, kde $A_3 = \big(\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \land \mathsf{Q}(\mathsf{y}) \land \neg \mathsf{P}(\mathsf{y})\big)$.

d) Zapíšte pomocou splnenia vhodnej formuly pri ohodnotení množinu $X_4 = \{(4, 0), (4, 8), (4, 12), (4, 20), (10, 0), (10, 20), (16, 0), (22, 0)\}$.

Pomôcka. Vymenujte si prvky $i(\mathsf{Q})$.

Prvky domény ani aritmetické operácie *nie sú súčasťou jazyka*, preto nemôžu byť priamo súčasťou formúl. Jazyk nerozširujte.

⚠ *Nepoužite* iné premenné ako x, y, z.

5.3 Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

5.3.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.
2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
3. Vzťah „byť spolužiakom" je symetrický a tranzitívny.
4. Študenti a školitelia sú disjunktní.
5. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.
6. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
7. Každý študent má najviac jedného školiteľa.
8. Každý doktorand má práve jedného školiteľa.
9. Nikto si nezapisuje výberové predmety.
10. Každý študent má medzi študentmi aspoň dvoch kamarátov.
11. Najviac dvaja učitelia, ktorí nie sú profesori, sú spokojní.
12. Nejaký profesor školí práve dvoch študentov, pričom práve jeden z nich je doktorand.

5.3.2 Uvažujme vetu: „Každé zvieratko niekto kŕmi." Ktorá z nasledovných formúl zodpovedá tejto vete? Akým vetám zodpovedajú zvyšné formuly?

(A_1) $\forall x\big(\text{človek}(x) \to \exists y(\text{zvieratko}(y) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_2) $\forall y\big(\text{zvieratko}(y) \to \exists x(\text{človek}(x) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_3) $\exists x\big(\text{človek}(x) \land \forall y(\text{zvieratko}(y) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_4) $\exists y\big(\text{zvieratko}(y) \land \forall x(\text{človek}(x) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

Formuly A_1–A_4 možno vyabstrahovať do nasledovných štyroch všeobecných schém, kde P, Q a R označujú *formuly* s voľnými premennými x a y (teda nie nutne iba jednoduché predikáty):

(B_1) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x, y))\big)$

(B_2) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(y,x))\big)$

(B_3) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x,y))\big)$

(B_4) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(y,x))\big)$

Určte, ktorej schéme zodpovedá každé z nasledujúcich tvrdení (v zátvorkách je odporúčaná formula R):

1. V ZOO je zvieratko, ktoré chodia kŕmiť všetky deti.
   ($\text{kŕmi}(x,y)$ — x chodí kŕmiť y)
2. Každý týždeň na Obchodnej zbijú cudzinca.
   ($\text{zbijú}(x,t)$ — na Obchodnej zbijú x v období t)
3. Každú hodinu mi vyvoláva nejaký otravný predajca.
   ($\text{volá}(x,\text{ja},t)$ — telefonicky ma otravuje x v čase t)
4. Každý študent má kamaráta, ktorý je tiež študent.
   ($\text{kamarát}(x,y)$ — x a y sú kamaráti)
5. Jeden študent sa kamaráti so všetkými študentami.

5.3.3 Uvažujme znova jazyk $\mathcal{L}$ a teóriu T z úlohy 5.3.1. Rozšírte teóriu T o formalizáciu nasledujúcich tvrdení na teóriu T' vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$:

1. Každý študent študuje nejaký študijný program.
2. Garantom študijného programu je *iba* profesor.
3. Študent, ktorý absolvoval *všetky* predmety nejakého študijného programu, absolvoval tento program.
4. Vzťah „byť školiteľom“ je ireflexívny a asymetrický.
5. *Nie* každý študent má školiteľa, ktorý je profesor.
6. Každý profesor má *práve* dvoch podriadených docentov.
7. *Nikto ne*učí ani si *ne*zapíše *ne*aktívny predmet.
8. Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ *najviac* na dvoch predmetoch.
9. Pokiaľ má nejaký študent *samé* A-čka, učitelia sú spokojní.
10. Peter má dve také spolužiačky, ktoré sú *obe súčasne* jeho *naj*lepšie kamarátky.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte celý použitý jazyk $\mathcal{L}'$ a vysvetlite význam symbolov, ktoré ste použili na formalizáciu nových tvrdení. Z teórie T' uveďte iba nové formuly (teda $T' \setminus T$).

5.3.4 Sformalizujte nasledujúce znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania ako teóriu v logike prvého rádu:

a) Každý študent študuje nejaký študijný program.

b) Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.

c) Evka a Ferko sú študenti. Evka je dievča.

d) Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.

e) Každý študent má školiteľa.

f) Garantom študijného programu je iba profesor.

g) Každý predmet sa vyučuje v práve jednom semestri.

h) Evkina školiteľka je učiteľka, ale nie je profesorka.

i) Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča.

j) Nikto neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.

k) Sú práve dva rôzne semestre – letný a zimný.

l) Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ najviac na dvoch predmetoch v tom istom semestri.

m) Pokiaľ má nejaký študent samé A-čka, učitelia sú spokojní.

5.3.5 Zadefinujte nasledujúcej pojmy v logike prvého rádu

a) Hovoríme, že učiteľ učí študenta vtedy a len vtedy, keď učí predmet, ktorý má študent zapísaný, alebo je študentovým školiteľom.

b) Povinný predmet v danom študijnom programe je práve taký predmet, ktorý absolvuje každý študent tohto študijného programu.

Pomocou zadefinovaných pojmov formalizujte nasledujúce tvrdenie:

- Nikto si nezapisuje ťažké predmety, ak nie sú povinné v ich študijnom programe.

5.3.6 Pojmami prvorádovej logiky vyjadrite nasledujúce otázky. Otázky zodpovedzte a odpovede dokážte.

a) Môže byť profesorom niekto, kto nie je školiteľom žiadneho študenta?

b) Bude predmet Základy základov aktívny, ak sa naň zapíše Evka?

c) Sú všetci školitelia profesormi?

d) Profesor Šašo tvrdí, že jeho predmet sa vyučuje aj v letnom, aj v zimnom semestri. Môžeme mu veriť?

e) Je pravda, že nikto neabsolvuje neaktívny predmet?

5.3.7 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako teóriu v relačnej logike prvého rádu. Vhodne zvoľte spoločný jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

a) Vzťah súrodenec je symetrický a všetci súrodenci sa majú radi.

b) Nikto nemá rád nikoho, kto sa posmieva jeho súrodencovi.

c) Ak jedného súrodenca uprednostní niektorý z rodičov pred druhým súrodencom, je z toho ten druhý prirodzene smutný.

d) Každý sa nahnevá, keď mu súrodenec zoberie hračku, alebo mu na oplátku tiež nejakú zoberie.

e) Ak nejakí súrodenci dostanú hračky rôznej značky, zaručene si budú navzájom závidieť.

5.3.8 Sformalizujte čo najvernejšie nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Peťo má cestný bicykel, Marlon trojkolku.
2. Bicykel má 2 kolesá, kým trojkolka má 3.
3. Cestný bicykel má úzke kolesá a pevnú vidlicu.
4. Cestný bicykel s rovnými riadidlami sa nazýva fitness bicykel.
5. Žiadne fitness trojkolky nie sú. Sú ale trojkolky so širokými kolesami.
6. Takýmto trojkolkám hovoríme terénne.
7. Čo je úzke, nie je široké.
8. Marlonovi sa páčia bicykle, ak majú úzke kolesá, a trojkolky, len ak sú terénne.
9. Majiteľ bicykla alebo trojkolky na nich aj jazdí.
10. Žiadny majiteľ bicykla nejazdí na žiadnej trojkolke.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, aby Marlon nejazdil na žiadnej trojkolke? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

5.3.9 Sformalizujte v naznačenom alebo vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. (má($kto, čo$), práca(x), koláč(x)).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Tí, čo iným jamy nekopú, nie sú intrigáni.

e) Aký otec, taký syn. (má_vlastnosť($kto, vlastnosť$), je_syn($kto, koho$)).

f) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. (priateľ($kto, koho$))

5.3.10 (Lenhart K. Schubert prostredníctvom Pelletiera [4]) Zvoľte vhodný jazyk logiky prvého rádu a sformalizujte v ňom nasledujúci detektívny príbeh:

> Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there. A killer always hates, and is no richer than his victim. Charles hates no one whom Agatha hates. Agatha hates everybody except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone whom Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler. Who killed Agatha?
>
> Niekto v Dreadsburskom kaštieli zabil tetu Agátu. V Dreadsburskom kaštieli bývajú Agáta, komorník a Karol a nikto iný okrem nich tam nebýva. Vrah vždy nenávidí svoju obeť a nie je od nej bohatší. Karol neprechováva nenávisť k nikomu, koho nenávidí Agáta. Agáta nenávidí každého okrem komorníka. Komorník nenávidí každého, kto nie je bohatší ako Agáta. Komorník nenávidí každého, koho nenávidí Agáta. Niet toho, kto by nenávidel všetkých. Agáta nie je komorník. Kto zabil Agátu?

5.3.11 (Novak [3]) Sformalizujte v jazyku logiky prvého rádu.

(A_1) Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.

(A_2) Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.

(A_3) Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.

(A_4) Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný

(X) Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

5.3.12 V jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{G}, \mathsf{g1}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{set}^1, \mathsf{graph}^1, \mathsf{at\_least}^2, \mathsf{at\_most}^2, \mathsf{oriented}^1, \mathsf{in}^2, \mathsf{ind\_subg}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je nasledovný:

Predikát	Význam
set(x)	x je množina
graph(x)	x je graf
oriented(x)	x je orientovaný/-á/-é
at_least(x, y)	x má aspoň toľko vrcholov ako y
at_most(x, y)	x má najviac toľko vrcholov ako y
in(x, y)	x je prvkom y
ind_subg(x, y)	x je indukovaným podgrafom y

Sformalizujte nasledujúce tvrdenia o množine G a grafoch ako ucelenú teóriu T v jazyku $\mathcal{L}$:

1. G je množina a obsahuje graf g1. G nie je grafom.
2. G obsahuje iba grafy.
3. Všetky grafy v G sú orientované.
4. Existuje graf, ktorý je indukovaným podgrafom g1, a zároveň g1 je indukovaným podgrafom nejakého prvku z G.
5. G má aspoň tri prvky, ktoré sú grafmi.
6. Žiadny graf z G nemá najviac toľko vrcholov ako g1.
7. Pre každý graf v G existuje graf, ktorý má aspoň rovnako veľa vrcholov.
8. Jeden graf má najviac toľko vrcholov ako druhý vtedy a len vtedy, keď druhý graf má aspoň toľko vrcholov ako ten prvý.
9. Ak je prvý graf indukovaným podgrafom druhého grafu, a zároveň je aj ten druhý graf indukovaným podgrafom prvého grafu, tak je to ten istý graf.
10. Ak je prvý graf indukovaným podgrafom druhého grafu, a zároveň je aj druhý graf indukovaným podgrafom tretieho grafu, tak je aj prvý graf indukovaným podgrafom tretieho grafu.
11. Každý graf, ktorý má nejaký indukovaný podgraf, má aspoň toľko vrcholov ako ten podgraf.
12. Každý indukovaný podgraf je graf.

Následne zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

5.3.13 Sformalizujte nižšie uvedené výroky ako ucelenú teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{10}\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$FMFI, UK_BA, Bratislava$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$department^1, faculty^1, university^1, date^1, office^1, classroom^1, part_of^2, located_in^2, dean_of^2, employee^2, occupies^2, fun_period$^4\}$. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikátový symbol	Zamýšľaný význam
department(x)	x je katedra
faculty(x)	x je fakulta
university(x)	x je univerzita
date(x)	x je dátum
office(x)	x je kancelária
classroom(x)	x je učebňa
part_of(x,y)	x je súčasťou y
located_in(x,y)	x má sídlo/nachádza sa v (mieste) y
dean_of(x,y)	x je dekanom y
employee(x,y)	x je zamestnancom y
occupies(x,y)	x sedí v (miestnosti) y
fun_period(x,y,z,w)	x je dekanom y vo funkčnom období od z do w

1. FMFI je fakulta, ktorá je súčasťou univerzity UK_BA a sídli v Bratislave.
2. Fakulty majú svoje sídlo.
3. Každá katedra je súčasťou nejakej fakulty a každá fakulta zas nejakej univerzity.
4. Dekanom fakulty je iba ten, kto má na príslušnej fakulte funkčné obdobie s nejakým začiatočným a koncovým dátumom.
5. Žiadna fakulta nemá viac ako jedného dekana.
6. Pre nejakú univerzitu platí, že všetky učebne a kancelárie, ktoré sú jej súčasťou, sa nachádzajú v Bratislave.
7. Niektorí zamestnanci jednej fakulty sú zamestnancami aj inej.
8. Zamestnanci fakulty sú zamestnancami práve tých univerzít, ktorých súčasťou je táto fakulta.
9. UK_BA má práve dve sídla.
10. Ak niekto sedí v aspoň dvoch kanceláriách, každá z nich je súčasťou inej fakulty.

5.3.14 Vyjadrite čo najprirodzenejšími slovenskými vetami nasledujúcu formalizáciu zistení o deťoch a Vianociach v jazyku $\mathcal{L}$ s množinami symbolov $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v,$

$w, x, y, z\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Vianoce, Ježiško, Santa, Anička}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{autíčko}^1, \text{blud}^1, \text{dieťa}^1, \text{dobrý}^1, \text{dostane}^2, \text{chlapec}^1, \text{kriticky\_myslí}^1, \text{teší\_sa\_na}^2, \text{uhlie}^1, \text{verí\_v}^2\}$:

(V_1) $\forall x\big((\text{dieťa}(x) \land (\text{verí\_v}(x, \text{Ježiško}) \lor \text{verí\_v}(x, \text{Santa}))\big) \to$
$\text{teší\_sa\_na}(x, \text{Vianoce})\big),$

(V_2) $\forall x\big((\text{dieťa}(x) \land \neg\text{verí\_v}(x, \text{Santa})) \to (\text{verí\_v}(x, \text{Ježiško}) \lor \text{kriticky\_myslí}(x))\big),$

(V_3) $\forall x\big(\text{kriticky\_myslí}(x) \to \forall y(\text{blud}(y) \to \neg\text{verí\_v}(x, y))\big),$

(V_4) $\forall x\big(\neg\text{dobrý}(x) \to \big(\neg \exists y\, \text{dostane}(x, y) \lor$
$(\text{verí\_v}(x, \text{Santa}) \to \exists y(\text{dostane}(x, y) \land \text{uhlie}(y)))\big)\big),$

(V_5) $\forall x\big((\text{dobrý}(x) \land \text{chlapec}(x)) \to \exists y(\text{dostane}(x, y) \land \text{autíčko}(y))\big).$

5.4 Tablá pre kvantifikátory

5.4.1 (Vlastnosti kvantifikátorov) Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné pre všetky formuly A a B s voľnou premennou x, všetky formuly C, kde x nie je voľná, a všetky formuly R s voľnými premennými x a y.

Formuly vyjadrujú vybrané základné vlastnosti kvantifikátorov a zároveň si na nich precvičíte použitie všetkých tablových pravidiel pre kvantifikátory.

Čítajte tablo ako slovný (neformálny) dôkaz, uvedomujte si význam jednotlivých krokov. Ukáže vám to, ako správne uvažovať o kvantifikátoroch pri slovných dôkazoch.

a) *De Morganovské zákony pre kvantifikátory*

Pre negovanie kvantifikátorov platia nasledujúce pravidlá:

(i) $\big(\neg \forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)\big)$

(ii) $\big(\neg \exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)\big)$

b) *Distributívnosť kvantifikátorov cez logické spojky*

Všeobecný kvantifikátor distribuuje cez konjunkciu a existenčný kvantifikátor cez disjunkciu:

(i) $\big(\forall x(A(x) \land B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x))\big)$

(ii) $\big(\exists x(A(x) \lor B(x)) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x))\big)$

ℹ O tom, že všeobecný kvantifikátor **ne**distribuuje cez disjunkciu, teda $\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow (\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x))$ a existenčný kvantifikátor **ne**distribuuje cez konjunkciu $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow (\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$ ste sa mohli presvedčiť v cvičení 5.2.4.

V *špeciálnom prípade*, keď sa v jednom z konjunktov/disjunktov premenná viazaná kvantifikátorom *nevyskytuje voľná* (ako vo formule C), je všeobecný kvantifikátor možné distribuovať do/vyňať aj z disjunkcie a existenčný do/z konjunkcie:

(iii) $\big(\forall x(A(x) \vee C) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \vee C)\big)$

(iv) $\big(\exists x(A(x) \wedge C) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \wedge C)\big)$

(v) $\big(\forall x(A(x) \wedge C) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \wedge C)\big)$

(vi) $\big(\exists x(A(x) \vee C) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \vee C)\big)$

c) *Dôsledky pre implikáciu*

Keď si uvedomíme, že implikácia $(X \rightarrow Y)$ je ekvivalentná s disjunkciou $(\neg X \vee Y)$, o nasledujúcich pravidlách pre distribuovanie kvantifikátorov do resp. vynímanie kvantifikátorov z implikácie sa ľahko presvedčíme aj ekvivalentnými úpravami pomocou de Morganovských a distributívnych zákonov.

(i) $\big((\exists x\, A(x) \rightarrow C) \leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow C)\big)$

(ii) $\big((\forall x\, A(x) \rightarrow C) \leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow C)\big)$

(iii) $\big((C \rightarrow \forall x\, A(x)) \leftrightarrow \forall x(C \rightarrow A(x))\big)$

(iv) $\big((C \rightarrow \exists x\, A(x)) \leftrightarrow \exists x(C \rightarrow A(x))\big)$

(v) $\big(\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x))\big)$

d) *Dôsledky pre neexistenciu*

Dôsledkom de Morganovských zákonov pre kvantifikátory je aj to, že musíme byť *opatrní/-é* pri formalizácii tvrdení, kde sa vyskytuje *neexistencia* objektu vo vzťahu s inými objektmi (napr. „Žiadna lastovička nehniezdi na (žiadnom) strome“), ktorá sa v slovanských jazykoch vyjadruje *dvojitým záporom* (žiadna/-y + nehniezdi).

Nasledujúca formula ukazuje, že dve správne formalizácie takejto neexistencie, sú skutočne ekvivalentné:

(i) $\big(\neg \exists x\, \exists y\, R(x, y) \leftrightarrow \forall x\, \forall y\, \neg R(x, y)\big)$

Nasledujúca formula ukazuje, aký je skutočný význam častej nesprávnej formalizácie takéhoto výroku pomocou dvoch vnorených kombinácií negácie a existenčného kvantifikátora:

(ii) $(\neg \exists x \neg \exists y\, R(x,y) \leftrightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y))$

e) *Premenovanie viazanej premennej*

(i) $(\forall x\, A(x) \to \forall y\, A(y))$

(ii) $(\exists x\, A(x) \to \exists y\, A(y))$

f) *Zrušenie kvantifikátora*

Kvantifikátor, ktorý viaže premennú, ktorá sa vo formule *nevyskytuje voľná*, je možné zrušiť:

(i) $(\forall x\, C \leftrightarrow C)$

(ii) $(\exists x\, C \leftrightarrow C)$

g) *Neekvivalentné dôsledky kvantifikovaných formúl*

Z univerzálnej vlastnosti prvkov celej domény vyplýva, že túto vlastnosť má aspoň jeden prvok (lebo doména je neprázdna):

(i) $(\forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x))$

Aj keď univerzálny kvantifikátor nedistribuuje cez disjunkciu, a existenčný cez konjunkciu, platia tieto implikácie:

(ii) $((\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)) \to \forall x(A(x) \lor B(x)))$

(iii) $(\exists x(A(x) \land B(x)) \to (\exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)))$

h) (i) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$

(ii) $\exists y(P(y) \to \forall x\, P(x))$

(iii) $(\neg \exists y\, P(y) \to \forall y(\exists x\, P(x) \to P(y)))$

Tieto formuly ilustrujú niekoľko základných vlastností kvantifikátorov: Zoslabenie všeobecného kvantifikátora na existenčný (a, d), možnosť premenovať viazanú premennú (b, c) možnosť odvodiť ľubovoľnú inštanciu všeobecne kvantifikovanej formuly (e, základ pravidla γ), existencia kontrapríkladu (f, základ pravidla δ), dôkaz sporom z neexistencie (g).

5.4.2 (Falošní priatelia II) O každej z nasledujúcich dvojíc formúl dokážte, že A_i a B_i **nie sú** prvorádovo ekvivalentné ($A_i \not\Leftrightarrow B_i$), teda že z A_i nevyplýva B_i alebo naopak:

i. Dokážte, že z A_i nevyplýva B_i ($\{A_i\} \not\models B_i$) zostrojením štruktúry, v ktorej bude pravdivá A_i a nepravdivá B_i.

ii. Premyslite si, či $\{B_i\} \models A_i$, a buď to dokážte tablom alebo vyvráťte štruktúrou.

Ak to formuly umožňujú, na dôkaz nevyplývania použite *netriviálnu* štruktúru s aspoň 3-prvkovou doménou a neprázdnymi interpretáciami predikátov.

a) $A_1 = \neg\exists x \neg\exists y(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{supervisor}(x, y))$
$B_1 = \neg\exists x\, \exists y(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{supervisor}(x, y))$
$\dots_1$ formalizuje: „Žiadny/-a študent/-ka nie je nikoho školiteľom/-kou.“

b) $A_2 = \forall x\, \exists y(\mathsf{loves}(x, y) \to \mathsf{in\_love}(x))$
$B_2 = \forall x(\exists y\, \mathsf{loves}(x, y) \to \mathsf{in\_love}(x))$
$\dots_2$ formalizuje: „Každý/-á, kto niekoho ľúbi, je zaľúbený/-á.“

c) $A_3 = \forall x\, \exists y(\mathsf{supervisor}(x, y) \to \mathsf{collaborates}(x, y))$
$B_3 = \forall x\, \forall y(\mathsf{supervisor}(x, y) \to \mathsf{collaborates}(x, y))$
$\dots_3$ formalizuje: „Kto má nejakú/-ého školiteľku/-a, ten s ňou/ním spolupracuje.“

d) $A_4 = \forall x(\forall y\, \mathsf{likes}(x, y) \to \mathsf{filantrop}(x))$
$B_4 = \forall x\, \forall y(\mathsf{likes}(x, y) \to \mathsf{filantrop}(x))$
$\dots_4$ formalizuje: „Každý/-á, kto má rád všetkých, je filantrop/-ka.“

e) $A_5 = \forall x\, \exists y\, \mathsf{likes}(x, y)$
$B_5 = \exists x\, \forall y\, \mathsf{likes}(x, y)$
$\dots_5$ formalizuje: „Každý/-á má niekoho rád/rada.“
$\dots_5$ formalizuje: „Niekto má rád/-a všetkých.“

f) $A_6 = \neg\exists x\, \exists y(\mathsf{student}(x) \land \neg\mathsf{supervisor}(x, y))$
$B_6 = \neg\exists x\, \exists y(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{supervisor}(x, y))$
$\dots_6$ formalizuje: „Nikto, kto je študentom/-kou, nie je niekoho školiteľom/-kou.“

g) $A_7 = \neg\exists x \neg\exists y(\mathsf{student}(x) \land \neg\mathsf{supervisor}(x, y))$
$B_7 = \neg\exists x\, \exists y(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{supervisor}(x, y))$
$\dots_7$ formalizuje: „Žiadny/-a študent/-ka nie je nikoho školiteľom/-kou.“

Uvedomte si **rozdiely vo význame** formúl A_i a B_i. Tieto dvojice zachytávajú **časté chyby pri formalizácii** s viacerými kvantifikátormi (možno aj vašu alebo vaše). Študenti/-ky často zamieňajú A_i a B_i v domnení, že sú ekvivalentné. V tomto cvičení sa môžete presvedčiť, že nie sú (podobne ako v cvičení 5.2.4).

Niektoré z týchto chýb vznikajú z neodôvodnenej snahy umiestniť **všetky kvantifikátory na začiatok formuly**.

Ako **dôkaz nevyplývania** akceptujeme **iba štruktúru**. Pre prvorádové tablá sme zatiaľ nezadefinovali pojem úplnej vetvy. Nie je taký jednoduchý, ako sa vám môže zdať — úplná vetva môže byť nekonečná. Tablo vám však môže pomôcť zistiť, čo musí byť pravdivé alebo nepravdivé v hľadanej štruktúre.

5.4.3 Príklad. Dokážte v tablovom kalkule:

$$\models ((\exists x\,\text{muž}(x) \land \exists x\,\text{žena}(x)) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)))$$

Riešenie. Máme dokázať, že formula zo zadania je platná. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}((\exists x\,\text{muž}(x) \land \exists x\,\text{žena}(x)) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)))\}$.

Predtým ako začneme budovať tablo je dobré uvedomiť si štruktúru formuly: Naša formula je implikáciou, ktorej antecedent je konjunkcia dvoch existenčne kvantifikovaných formúl a konzekvent je existenčná kvantifikácia disjunkcie. Tablové pravidlá musíme aplikovať **v súlade** s touto štruktúrou.

1.	$\mathbf{F}\,((\exists x\,\text{muž}(x) \land \exists x\,\text{žena}(x)) \to \exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)))$	S^+
2.	$\mathbf{T}\,(\exists x\,\text{muž}(x) \land \exists x\,\text{žena}(x))$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,\exists x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,\exists x\,\text{muž}(x)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\,\exists x\,\text{žena}(x)$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\,\text{muž}(y)$	$\delta 4\{x \mapsto y\}$
7.	$\mathbf{T}\,\text{žena}(z)$	$\delta 5\{x \mapsto z\}$
8.	$\mathbf{F}\,(\text{muž}(z) \lor \text{žena}(z))$	$\gamma 3\{x \mapsto z\}$
9.	$\mathbf{F}\,\text{muž}(z)$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F}\,\text{žena}(z)$	$\alpha 8$
	$*$	$7, 10$

Pravidlo δ sme v table použili dvakrát (uzly 6 a 7, aj keď 6 sme vlastne nepotrebovali). **Vždy** sme za pôvodne viazanú premennú x substituovali **novú** voľnú premennú (v 6 to bola y, potom v 7 to bola z, lebo v tej chvíli sa už y vo vetve vyskytovala voľná). Bolo by **chybou** použiť premennú, ktorá **sa už predtým** vo vetve tabla **vyskytla voľná**. Dôvod je nasledovný:

O objekte, ktorý existuje podľa formuly 4, je známe **iba** to, že má vlastnosť muž. Podobne o objekte, ktorý existuje podľa formuly 5, je známe **iba** to, že má vlastnosť žena. Tento objekt pravdepodobne **nebude rovnaký** ako objekt, ktorý má vlastnosť muž. **Nesmieme** ich preto označiť rovnakou premennou. Nemohli by sme použiť ani inú premennú, ktorá by sa už v table predtým vyskytla voľná, lebo aj o ňou označenom objekte by už boli známe nejaké ďalšie skutočnosti. Tento princíp platí pri všetkých formulách typu δ.

Formuly typu γ hovoria, že nimi opísanú vlastnosť (pozitívnu či negatívnu) majú **všetky** objekty. Preto:

- Pri ich použití (8) môžeme za pôvodne viazanú premennú substituovať **ľubovoľný term** (premennú, konštantu, aplikáciu funkčného symbolu na ľubovoľné argumenty) — samozrejme, táto substitúcia musí byť **aplikovateľná**.
- Tú istú formulu typu γ môžeme použiť **viackrát**, pričom substitujeme rôzne termy. V tomto table stačilo jedno použitie.

Opakovane môžeme použiť formulu každého typu, ale iba pri type γ dostaneme skutočne rôzne výsledky. Pri opakovanom použití formuly typu δ nás pravidlo donúti zaviesť novú premennú, ale získame rovnakú informáciu ako pri prvom použití (rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt).

Tablo je uzavreté, takže množina S^+ je nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by formula $((\exists x\, \mathsf{muž}(x) \land \exists x\, \mathsf{žena}(x)) \to \exists x(\mathsf{muž}(x) \lor \mathsf{žena}(x)))$ pri nejakom ohodnotení bola nesplnená, a preto je táto formula platná. ♮

5.4.4 (Novak [3]) Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{John}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{pes}^1, \mathsf{macka}^1, \mathsf{mys}^1, \mathsf{LS}^1, \mathsf{steka}^1, \mathsf{ma}^2\}$, pričom význam $\mathsf{LS}(x)$ je *x má ľahký spánok*. Rozhodnite, či z teórie T, kde

(A_1) $\forall x(\mathsf{pes}(x) \to \mathsf{steka}(x))$

(A_2) $\forall x\, \forall y((\mathsf{ma}(x, y) \land \mathsf{macka}(y)) \to \neg \exists z(\mathsf{ma}(x, z) \land \mathsf{mys}(z)))$

(A_3) $\forall x(\mathsf{LS}(x) \to \neg \exists y(\mathsf{ma}(x, y) \land \mathsf{steka}(y)))$

(A_4) $\exists x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \land (\mathsf{macka}(x) \lor \mathsf{pes}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\exists x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \land \neg\mathsf{steka}(x)) \to \mathsf{LS}(\mathsf{John}))$

(X_2) $(\mathsf{LS}(\mathsf{John}) \to \forall x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \to \neg\mathsf{mys}(x)))$

Teóriu aj formuly X_1 a X_2 si najprv pozorne prečítajte, pochopte ich význam a intuitívne si premyslite, **prečo** X_1 resp. X_2 vyplýva alebo nevyplýva z teórie. Intuícia vás potom dovedie ku konštrukcii správneho tabla alebo štruktúry.

V logike prvého rádu vo všeobecnosti **nemôžeme použiť tablá na hľadanie spĺňajúcich štruktúr**, pretože úplné tablo môže byť nekonečné.

5.4.5 (Novak [3]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) $\forall x(\mathsf{kojot}(x) \to \exists y(\mathsf{roadrunner}(y) \land \mathsf{nahana}(x, y)))$

(A_2) $\forall x((\mathsf{roadrunner}(x) \land \mathsf{trubi}(x)) \to \mathsf{mudry}(x))$

(A_3) $\forall x\,\forall y((\mathrm{kojot}(x) \land (\mathrm{roadrunner}(y) \land \mathrm{mudry}(y))) \to \neg\mathrm{chyti}(x,y))$

(A_4) $\forall x(\mathrm{kojot}(x) \to$
$(\exists y(\mathrm{roadrunner}(y) \land (\mathrm{nahana}(x,y) \land \neg\mathrm{chyti}(x,y))) \to \mathrm{frustrovany}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\forall x(\mathrm{roadrunner}(x) \to \mathrm{trubi}(x)) \to \forall x(\mathrm{kojot}(x) \to \mathrm{frustrovany}(x)))$

(X_2) $(\exists x(\mathrm{kojot}(x) \land \neg\mathrm{frustrovany}(x)) \to \neg\,\exists x(\mathrm{roadrunner}(x) \land \mathrm{trubi}(x)))$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

5.4.6 Rozhodnite, či formula vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

a) $\{\exists x\,\neg\text{myš}(x) \lor \forall x\,\mathrm{hlodavec}(x)\} \vDash \forall x(\text{myš}(x) \to \mathrm{hlodavec}(x))$

b) $\{\forall x(\text{myš}(x) \to \mathrm{hlodavec}(x))\} \vDash \exists x\,\neg\text{myš}(x) \lor \forall x\,\mathrm{hlodavec}(x)$

c) $\{\forall x\,\exists y(\text{hladný}(x) \land \mathrm{zje}(x,y) \to \text{bude\_sýty}(x))\}$
$\vDash \forall x(\text{hladný}(x) \land \exists y\,\mathrm{zje}(x,y) \to \text{bude\_sýty}(x))$

d) $\{\forall x(\text{hladný}(x) \land \exists y\,\mathrm{zje}(x,y) \to \text{sýty}(x))\}$
$\vDash \forall x\,\exists y(\text{hladný}(x) \land \mathrm{zje}(x,y) \to \text{sýty}(x))$

⚠ Na rozdiel od výrokovej logiky, v logike prvého rádu sme nedefinovali, kedy je vetva tabla *úplná*. Keby sme tak urobili, úplná vetva by musela obsahovať použitia každej formuly typu γ so **všetkými** možnými substitúciami. Tých je vo všeobecnosti nekonečne veľa.

Tablo, ktoré sa nám napriek správnemu používaniu pravidiel, trpezlivosti a skúšaniu rôznych prístupov **nedarí uzavrieť**, preto iba **naznačuje, ale nedokazuje**, že formula z teórie nevyplýva (resp. že začiatočná množina označených formúl je splniteľná). Na to, aby sme tento fakt naozaj **dokázali**, musíme skonštruovať vhodnú štruktúru. Otvorené vetvy v table nám v tom môžu pomôcť, pretože naznačujú, ktoré podformuly (možno atomické) má štruktúra spĺňať a ktoré nie.

5.4.7 (Novak [3]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde

(A_1) $\forall x(\mathrm{dieta}(x) \to \exists y(\mathrm{carodejnica}(y) \land \mathrm{vidi}(x,y)))$

(A_2) $\neg\,\exists x(\mathrm{carodejnica}(x) \land (\exists y(\mathrm{ma}(x,y) \land \mathrm{klobuk}(y)) \land \exists y(\mathrm{ma}(x,y) \land \mathrm{macka}(y))))$

(A_3) $\forall x(\mathrm{carodejnica}(x) \to (\mathrm{dobra}(x) \lor \mathrm{zla}(x)))$

(A_4) $\forall x((\mathrm{dieta}(x) \land \exists y(\mathrm{carodejnica}(y) \land (\mathrm{dobra}(y) \land \mathrm{vidi}(x,y)))) \to \exists y(\mathrm{dostane}(x,y) \land \mathrm{sladkost}(y)))$

(A_5) $\forall x((\mathsf{carodejnica}(x) \land \mathsf{zla}(x)) \to \exists y(\mathsf{ma}(x, y) \land \mathsf{macka}(y)))$

vyplýva formula:

(X) $(\forall x((\mathsf{carodejnica}(x) \land \exists y(\mathsf{dieta}(y) \land \mathsf{vidi}(y, x))) \to \exists y(\mathsf{ma}(x, y) \land \mathsf{klobuk}(y))) \to$
$\forall x(\mathsf{dieta}(x) \to \exists y(\mathsf{dostane}(x, y) \land \mathsf{sladkost}(y))))$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

5.4.8 (Novak [3]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) $\forall x(\, \exists y\, \mathsf{vynika}(x, y) \to ((\mathsf{vela\_studuje}(x) \lor \mathsf{sikovny}(x)) \lor \mathsf{stastlivec}(x))\,)$

(A_2) $\forall x\, \exists y(\mathsf{ziska\_znamku}(x, \mathsf{A}) \to \mathsf{vynika}(x, y))$

(A_3) $\forall x(\mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \to \neg\mathsf{stastlivec}(x))$

(A_4) $\forall x(\mathsf{pije\_pivo}(x) \to \neg\mathsf{vela\_studuje}(x))$

vyplýva formula:

(X) $(\, \forall x(\, \mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \to \mathsf{ziska\_znamku}(x, \mathsf{A})\,) \to$
$\forall x(\, (\mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \land \mathsf{pije\_pivo}(x)) \to \mathsf{sikovny}(x)\,)\,)$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

Pomôcka. V prípade dokazovania vyplývania si najprv premyslite, prečo formula vyplýva, a následne tablom sledujte svoju úvahu. Pravidlá pre kvantifikátory používajte, iba keď sú naozaj potrebné. Čo najviac využite už známe výrokovologické korektné pravidlá (MP, MT, DS, NCS).

V editore tabiel vyberte sadu pravidiel *Basic FOL*.

Tablo by nemalo mať viac ako 35 uzlov.

5.4.9 (Novak [3]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

(V_1) Každý vták spí na nejakom strome.

(V_2) Potáplice sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

(V_3) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

(V_4) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \dots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Sformalizujte a zodpovedzte pomocou tabla pre logiku prvého rádu nasledujúcu otázku:

Je pravda, že každá potáplica sa živí rybami?

5.4.10 (Quine [5]) Dokážte, že z faktov:

(A_1) Ak všetci uchádzači, ktorí dostali pozvánku na pohovor, sú z ročníka 2016, tak niektorí uchádzači pozvánku na pohovor nedostali.

(A_2) Všetci uchádzači dostali pozvánku na pohovor, alebo sú všetci uchádzači z ročníka 2016.

vyplýva záver

(X) Ak všetci uchádzači z ročníka 2016 dostali pozvánku na pohovor, tak aj niektorí uchádzači, ktorí nie sú z ročníka 2016, dostali pozvánku na pohovor.

5.4.11 Majme nasledujúce tvrdenia o ponožkách:

1. Ak je ponožka obnosená, tak má dieru.
2. Žiadna neobnosená ponožka nie je stará.
3. Veci sú nové práve vtedy, keď nie sú staré.

Zistite, či z uvedených výrokov logicky vyplýva výrok:

Ak nie je pravda, že všetky ponožky sú nové, tak existuje nejaká diera.

V prípade dokazovania vyplývania si najprv premyslite, prečo formula vyplýva, a následne tablom sledujte svoju úvahu. Pravidlá pre kvantifikátory používajte, iba keď sú naozaj potrebné.

5.4.12 Ervín sa v časopise Quark dočítal, že:

1. Iba Schrödingerova mačka môže byť živá a mŕtva zároveň.
2. Každá Schrödingerova mačka je v nejakej škatuli.
3. Každá mačka pradie a nič iné nepradie.

Usúdil, že potom musí byť pravda:

x) Ak neexistuje žiadna škatuľa, tak nič Schrödingerovo nepradie.

y) Ak je nejaká mačka živá a nejaká mŕtva, tak niečo Schrödingerovo pradie.

Sú jednotlivé Ervínove závery správne?

6 Logika prvého rádu

6.1 Funkčné symboly — formalizácia a sémantika

6.1.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. Zamýšľanou doménou sú ľudia. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vzťahov so vždy existujúcich a jednoznačným predmetom.

1. Každého matka je žena a otec je muž.
2. Každý má práve dvoch rodičov, svoju matku a svojho otca.
3. Súrodenec je niekto a len niekto, s kým máte spoločného rodiča, ale nie ste to vy.
4. Každý, kto má súrodenca, má aj najvyššieho súrodenca.
5. Každý rodičovský pár má najstaršie dieťa.
6. Najstaršie dieťa rodičovského páru je staršie ako všetky ostatné deti tohto páru.
7. Kto je jedináčik, je najstarším dieťaťom svojich dvoch rodičov.

6.1.2 Nájdite model teórie tvorenej všetkými formulami, ktoré vznikli formalizáciou výrokov z cvičenia 6.1.1, a formulou

$$\exists x\, \exists y\, \text{súrodenec}(x, y) \land \exists x\, \forall y\, \neg\text{súrodenec}(x, y)$$

V riešení uveďte aj túto teóriu.

6.1.3 Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$,
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andrea}, \text{Danka}, \text{Hanka}, \text{Janka}, \text{Max}, \text{Nikita}\}$,
$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{manžel}^1, \text{manželka}^1, \text{prvorodené\_dieťa}^2\}$,
$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{Lekár}^1, \text{Manželia}^2, \text{Muž}^1, \text{Právnik}^1, \text{Žena}^1\}$.

(A_1) $\forall x\, \forall y(\mathsf{Manželia}(x, y) \to \mathsf{Manželia}(y, x))$

(A_2) $\forall x\, \forall y\big(\mathsf{Manželia}(x, y) \to$
$\quad (\mathsf{Muž}(x) \to x \doteq \mathsf{manžel}(y)) \land (\mathsf{Žena}(x) \to x \doteq \mathsf{manželka}(y))\big)$

(A_3) $\forall x\, \forall y\big(\mathsf{Manželia}(x, y) \land \mathsf{Muž}(x) \land \mathsf{Žena}(y) \to$
$\quad \mathsf{Lekár}(\mathsf{prvorodené\_dieťa}(x, y)) \lor \mathsf{Právnik}(\mathsf{prvorodené\_dieťa}(x, y))\big)$

(A_4) $\mathsf{Manželia}(\mathsf{Hanka}, \mathsf{Max}) \land \mathsf{Žena}(\mathsf{Hanka}) \land \mathsf{Muž}(\mathsf{Max})$

(A_5) $\mathsf{Manželia}(\mathsf{Danka}, \mathsf{Janka}) \land \mathsf{Žena}(\mathsf{Danka}) \land \mathsf{Žena}(\mathsf{Janka})$

(A_6) $\mathsf{Manželia}(\mathsf{Andrea}, \mathsf{Nikita}) \land \mathsf{Muž}(\mathsf{Andrea})$

6.1.4 Sformalizujte nižšie uvedené tvrdenia v jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi a s rovnosťou, kde:

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{white}, \mathsf{black}\}$
$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{check}^1, \mathsf{king}^1, \mathsf{letter}^1, \mathsf{number}^1, \mathsf{piece}^1, \mathsf{rook}^1, \mathsf{square}^1,$
$\quad \mathsf{may\_enter}^2, \mathsf{may\_take}^2, \mathsf{neighbour}^2\}$
$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{on}^1, \mathsf{row}^1, \mathsf{col}^1, \mathsf{clr}^1\}.$

Zamýšľanou doménou sú prvky šachovnice, t.j. figúrky, políčka a ich riadkové a stĺpcové indexy. Zamýšľaný význam predikátových a funkčných symbolov je:

Predikátový sym.	Zamýšľaný význam
check(x)	x je v šachu
king(x)	x je kráľ
letter(x)	x je písmeno
number(x)	x je číslo
piece(x)	x je figúrka
rook(x)	x je veža
square(x)	x je políčko
may_enter(x, y)	x sa môže posunúť na y
may_take(x, y)	(figúrka) x môže zobrať (figúrku) y
neighbour(x, y)	(objekt) x je susedom (objektu) y

Funkčný sym.	Zamýšľaný význam
on(x)	to, na čom x stojí
row(x)	riadok (políčka) x
col(x)	stĺpec (políčka) x
clr(x)	farba, ktorú má x

Indiv. konšt.	Zamýšľaný význam
black	čierna farba
white	biela farba

1. Figúrky stoja na políčkach. Králi a veže sú figúrky.
2. Riadok políčka je číslo a stĺpec políčka je písmeno.
3. Pre každú dvojicu čísla a písmena existuje políčko, ktorého riadok má toto číslo a stĺpec toto písmeno.

4. Figúrky a políčka majú bielu alebo čiernu farbu.
5. Na jednom políčku môže stáť najviac jedna figúrka.
6. Figúrka nemôže zobrať figúrku rovnakej farby.
7. Susedné políčka s rovnakým riadkom alebo stĺpcom majú rozdielnu farbu.
8. Veža sa môže posunúť iba na políčko, ktoré má rovnaký riadok alebo stĺpec ako jej políčko, no nie je to jej políčko.
9. Kráľ je v šachu, ak sa nejaká figúrka inej farby môže presunúť na jeho políčko.
10. Figúrka sa môže presunúť na políčko s inou figúrkou iba vtedy, keď ju môže zobrať.
11. Nejakom políčku stojí kráľ a na toto políčko sa môže presunúť nejaká veža. Je aj také políčko, na ktorom nestojí žiadna figúrka.
12. Figúrky a políčka sú navzájom disjunktné.

6.1.5 Sformalizujte nižšie uvedené tvrdenia v jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi a s rovnosťou, kde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathcal{L}} &= \{\mathsf{master}, \mathsf{bachelor}, \mathsf{doctoral}, \mathsf{defended}\}\\
\mathcal{P}_{\mathcal{L}} &= \{\mathsf{thesis}^1, \mathsf{person}^1, \mathsf{student}^1, \mathsf{Bc}^1, \mathsf{teacher}^1, \mathsf{study_prog}^1, \mathsf{undergraduate}^1,\\
&\quad\ \mathsf{studies}^2, \mathsf{advisor}^2\}\\
\mathcal{F}_{\mathcal{L}} &= \{\mathsf{author}^1, \mathsf{type}^1, \mathsf{title}^1, \mathsf{status}^1, \mathsf{supervisor}^2\}.
\end{aligned}$$

Zamýšľaný význam mimologických symbolov je nasledovný:

Predikátový sym.	Zamýšľaný význam
$\mathsf{thesis}(x)$	x je záverečná práca
$\mathsf{person}(x)$	x je osoba
$\mathsf{student}(x)$	x je študent/-ka
$\mathsf{Bc}(x)$	x je bakalár/-ka
$\mathsf{teacher}(x)$	x je učiteľ/-ka
$\mathsf{study\_prog}(x)$	x je študijný program
$\mathsf{undergraduate}(x)$	x je pregraduálne
$\mathsf{studies}(x, y)$	x študuje (št. prog.) y
$\mathsf{advisor}(x, y)$	x je vedúcim (práce) y

Funkčný sym.	Zamýšľaný význam
$\mathsf{author}(x)$	autor/-ka (práce) x
$\mathsf{type}(x)$	typ (práce/št. prog.) x
$\mathsf{title}(x)$	názov/titul (práce) x
$\mathsf{status}(x)$	stav (práce) x
$\mathsf{supervisor}(x,y)$	školiteľ študenta x a práce y

Indiv. konšt.	Zamýšľaný význam
bachelor	bakalársky typ
master	magisterský typ
doctoral	doktorandský typ
defended	obhájený stav

1. Študenti a učitelia sú osoby.

2. Autormi prác sú iba osoby.
3. Sú tri typy študijných programov a záverečných prác: magisterský, bakalársky alebo doktorandský.
4. Každý študent, ktorý je autorom nejakej práce, má k tejto práci priradeného učiteľa ako školiteľa tejto práce.
5. Existujú nejaké dve práce, ktoré majú rovnakého autora.
6. Ak má práca dvoch vedúcich, potom jeden z nich je školiteľom (tejto práce a jej autora) a ďalšieho vedúceho práca nemá.
7. Žiaden študent nemôže byť učiteľ, okrem študentov doktorandského programu.
8. Názvy (tituly) záverečných prác sú unikátne.
9. Bakalárske a magisterské študijné programy sú pregraduálne.
10. Osoba je bakalárom (Bc), ak jej bakalárska práca je obhájená (defended).

6.2 Substitúcie, voľné a viazané premenné

6.2.1 Uvažujme nasledujúce postupnosti symbolov:

(X_1) $\mathsf{matka}(\mathsf{matka}(x))$

(X_2) $y \doteq \mathsf{matka}(x)$

(X_3) $\forall x\, \forall y (y \doteq \mathsf{matka}(x) \to \mathsf{dieťa}(x, y))$

(X_4) $\exists x (\mathsf{ľúbi}(x, y) \lor \neg \mathsf{ľúbi}(x, y))$

(X_5) $\forall x\, P(x) \land Q(x)$

(X_6) $\exists x\, \exists y\, R(x, y) \lor \forall y\, S(x, y)$

(X_7) $\exists x \big(P(f(x)) \land \forall x\, \forall y \big(Q(x, x) \to P(g(x)) \lor R(x, y)\big)\big)$

Pre každú z nich:

a) vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov, ktoré sa v nej vyskytujú;
b) vyznačte voľné a viazané výskyty premenných x, y;
c) zistite, či je premenná y voľná;
d) určte množinu voľných premenných.

6.2.2 Zistite, či je v nasledujúcich prípadoch substitúcia aplikovateľná; ak áno, určte výsledok substitúcie:

a) $x\{x \mapsto f(y)\}$

b) $y\{x \mapsto f(y)\}$

c) $g(x, y)\{x \mapsto y\}$

d) $h(x, a, g(x, y))\{x \mapsto f(a)\}$

e) $\big(\neg P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{y \mapsto a\}$

f) $\big(\exists x\, \neg P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{y \mapsto a\}$

g) $\big(\exists x\, P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\{x \mapsto g(b, y)\}$

h) $\forall z\big(P(x, z) \land Q(x, g(y, z))\big)\{x \mapsto f(z), z \mapsto g(x, y)\}$

i) $\forall z\big(P(x, z) \land Q(x, g(y, z))\big)\{x \mapsto f(y), z \mapsto g(x, y)\}$

j) $\big(P(x) \land \exists x(Q(x) \lor R(x)) \to S(x)\big)\{x \mapsto c\}$

k) $\big(P(y) \land \exists x(Q(x, y) \lor R(x)) \to S(x)\big)\{x \mapsto c, y \mapsto f(x)\}$

l) $\forall z\big(P(x, z) \land \exists w\big(R(w) \to Q(x, g(y, z))\big) \to P(z, w)\big)$
$\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x, y), w \mapsto g(a), z \mapsto x\}$

6.3 Vzťah kvantifikátorov a funkčných symbolov

6.3.1 Nasledujúce vyplývania, nevyplývania a platné ekvivalencie ukazujú základné pozorovania o interakcii funkčných symbolov s kvantifikátormi.

a) *Vlastnosti oboru hodnôt funkcie*

Ak majú všetky objekty vlastnosť A, potom ju má aj obraz každého objektu vo funkcii f.

(i) $\forall x\, A(x) \models \forall x\, A(f(x))$

Ak f zobrazí nejaký objekt na objekt s vlastnosťou A, tak existuje objekt s touto vlastnosťou:

(i) $\exists x\, A(f(x)) \models \exists x\, A(x)$

Samozrejme, ani jedno z pozorovaní i, ii vo všeobecnosti neplatí naopak, lebo obor hodnôt funkcie môže byť vlastnou podmnožinou domény:

(ii) $\forall x\, A(f(x)) \not\models \forall x\, A(x)$

(iii) $\exists x\, A(x) \not\models \exists x\, A(f(x))$

Dokážte vyplývania i a ii pomocou tabiel a nevyplývania iii a iv nájdením príslušnej štruktúry.

b) *Dôsledky existencie a jednoznačnosti* Pretože hodnota funkcie vždy existuje a je jednoznačne určená, môžeme ju ekvivalentne použiť v ľubovoľnej formule A priamo, ale aj prostredníctvom všeobecnej aj existenčnej kvantifikácie:

(i) $\vDash \big(\forall y(f(x) \doteq y \to A(y)) \leftrightarrow A(f(x))\big)$

(ii) $\vDash \big(\exists y(f(x) \doteq y \land A(y)) \leftrightarrow A(f(x))\big)$

Teda napríklad výrok „Niekoho matka je riaditeľka“ môžeme sformalizovať ktoroukoľvek z nasledujúcich formúl:

- $\exists x\, \mathsf{director}(\mathsf{mother}(x))$
  „Niekoho matka je riaditeľka.“ (Najjednoduchšia a najvernejšia formalizácia.)
- $\exists x\, \forall y(\mathsf{mother}(x) \doteq y \to \mathsf{director}(y))$
  „Existuje niekto, koho *každá* matka je riaditeľka.“
- $\exists x\, \exists y(\mathsf{mother}(x) \doteq y \land \mathsf{director}(y))$
  „Existuje niekto, koho *niektorá* matka je riaditeľka.“

6.3.2 Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné, resp. vyplývajú z uvedenej teórie:

a) $\vDash \exists x(\mathsf{pije}(x) \to \forall y\, \mathsf{pije}(y))$,

b) $\vDash \forall x(\exists y\, \mathsf{pozna}(x, \mathsf{otec}(y)) \to \exists y\, \mathsf{pozna}(x, y))$,

c) $\{\forall x(\mathsf{socialny}(\mathsf{najKam}(x)) \to \exists y\, \mathsf{pozna}(x, \mathsf{najKam}(y)))\}$
$\vDash \exists x(\mathsf{socialny}(x) \to \forall y\, \exists z\, \mathsf{pozna}(\mathsf{matka}(y), z))$.

Dôkazy platnosti prvých dvoch formúl sú prípravou na dôkaz vyplývania v tretej časti. Odporúčame vám skontrolovať tablo pomocou editora prvorádových tabiel.

6.3.3 Rozhodnite, či je formula platná, resp. či vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

a) $\vDash \forall x\big(\forall y\, R(x, g(x, y)) \to \forall y\, R(x, y)\big)$

b) $\{\neg \exists x \neg \exists y\big(\mathsf{panovník}(x) \to \mathsf{panovník}(\mathsf{potomok}(x, y))\big)\} \vDash$
$\neg \exists x\, \exists y\big(\mathsf{panovník}(x) \land \neg\mathsf{panovník}(\mathsf{potomok}(x, y))\big)$

c) $\{\neg \exists x\, \exists y\big(\mathsf{panovník}(x) \land \neg\mathsf{panovník}(\mathsf{potomok}(x, y))\big)\} \vDash$
$\neg \exists x \neg \exists y\big(\mathsf{panovník}(x) \to \mathsf{panovník}(\mathsf{potomok}(x, y))\big)$

d) $\big\{\forall x\big(P(x) \land \exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z)\big)\big\} \vDash \exists x\big(P(g(x)) \land \forall y\, Q(x, g(y))\big)$

6.4 Rovnosť

6.4.1 Prvorádovými tablami (teda tablami s pravidlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pravidlom reflexivity a Leibnitzovým pravidlom) dokážte:

a) $\{x \doteq y\} \vDash y \doteq x$

b) $\vDash x \doteq y \land \neg\text{študent}(y) \to \neg\text{študent}(x)$

c) $\{x \doteq y, \text{rodič}(\text{matka}(v), x), \neg\text{rodič}(\text{matka}(w), y)\} \vDash w \not\doteq v$

d) $\{f(f(f(x))) \doteq x, f(f(f(x))) \doteq f(f(x))\} \vDash f(x) \doteq x$

6.4.2 (Smullyan [6]) Nasledujúca úvaha môže vyzerať prekvapujúco:

> Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{bojí\_sa}^2\}$ a dokážte, že je správna, prvorádovým tablom.

6.4.3 Aj nasledujúca úvaha môže prekvapiť:

> Drakula je nadprirodzená bytosť. Nadprirodzené bytosti sa boja iba nadprirodzených bytostí. Drakula sa však bojí tých a jedine tých, ktorí zjedli cesnak. Takže ak som zjedol cesnak, som nadprirodzená bytosť.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \emptyset$. Množinu $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ si vhodne zvoľte. Dokážte správnosť úvahy prvorádovým tablom. Snažte sa o čo najkratší dôkaz s využitím korektných pravidiel ako MP, MT, ale tiež pravidiel pre ekvivalenciu a kvantifikátory.

6.4.4 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vzťahov so vždy existujúcich a jednoznačným predmetom.

1. Alica je šachistka a šachistky najviac obdivujú iba tých najinteligentnejších.
2. Najinteligentnejším študentom všetci študenti závidia.
3. Keď je niekto inteligentnejší ako všetci ostatní, hovoríme, že je najinteligentnejší.
4. Boris neobdivuje nikoho iného okrem toho, koho obdivuje najviac.
5. Dávida najviac obdivuje Boris a Alica, ale Dávid najviac obdivuje Alicu.

Tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1.–5. vyplýva:

- Alica závidí každému, koho obdivuje Boris, ak sú všetci študenti.

6.4.5 V logike prvého rádu dokážte alebo vyvráťte:

a) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú injektívne funkcie. Potom aj ich zloženie je injektívna funkcia.

b) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie a ich zloženie $f \circ g$ je injektívna funkcia. Potom aj f je injektívna.

c) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie a ich zloženie $f \circ g$ je injektívna funkcia. Potom aj g je injektívna.

d) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú surjektívne funkcie. Potom aj ich zloženie je surjektívna funkcia.

e) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie a ich zloženie $f \circ g$ je surjektívna funkcia. Potom aj f je surjektívna.

f) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie a ich zloženie $f \circ g$ je surjektívna funkcia. Potom aj g je surjektívna.

g) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie, ich zloženie $f \circ g$ je surjektívna funkcia a g je injektívna funkcia. Potom f je injektívna.

h) Nech $f : P \to Q$ a $g : Q \to R$ sú funkcie, ich zloženie $f \circ g$ je surjektívna funkcia a g je injektívna funkcia. Potom f je surjektívna.

Formalizáciu tvrdenia dokážte tablom alebo vyvráťte nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

Množiny P, Q, R môžeme v logike prvého rádu sformalizovať unárnymi predikátmi P, Q, R. Namiesto $x \in Y$ budeme písať Y(x).

Funkcie môžeme sformalizovať funkčnými symbolmi f a g.

Pri takejto formalizácii operáciu zloženia $\circ$ v logike prvého rádu priamo sformalizovať nevieme. Vlastnosti zloženia konkrétnych funkcií však ľahko vyjadríme tak, že namiesto $(f \circ g)(x)$ v nich budeme písať g(f(x)).

Fakt, že f je funkcia z P do Q vyjadruje výrok: Každý prvok svojho definičného oboru P zobrazí funkcia f na prvok svojho oboru hodnôt Q.

Fakt, že $f : P \to Q$ je injektívna funkcia vyjadruje výrok: Ak je pre prvky definičného oboru P hodnota funkcie f rovnaká, tak ide o ten istý prvok.

Fakt, že $f : P \to Q$ je surjektívna funkcia vyjadruje výrok: Pre každý prvok oboru hodnôt Q platí, že f naň zobrazí nejaký prvok svojho definičného oboru P.

6.4.6 Majme nasledujúce tvrdenia o funkciách a reláciách:

1. f je zobrazenie do množiny P.
2. Zobrazenie f je surjektívne na P.
3. Ak sú nejaké prvky v relácii R, tak ich obrazy v f sú v relácii Q.

Zistite, či z výrokov 1–3 vyplýva:

x. Ak existuje nejaký prvok, ktorý je v relácii R s každým prvkom, tak existuje prvok z množiny P, ktorý je v relácii Q s každým prvkom z P.

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

6.4.7 Pripomeňme si formalizáciu záhady vraždy tety Agáty z Dreadbury (5.3.10):

(A_1) $\exists x(\text{vDreadbury}(x) \land \text{zabil}(x, \text{Agáta}))$

(A_2) $\forall x(\text{vDreadbury}(x) \leftrightarrow x \doteq \text{Agáta} \lor x \doteq \text{Komorník} \lor x \doteq \text{Charles})$

(A_3) $\forall x\, \forall y(\text{zabil}(x, y) \to \text{nenávidí}(x, y))$

(A_4) $\forall x\, \forall y(\text{zabil}(x, y) \to \neg\text{bohatší\_ako}(x, y))$

(A_5) $\forall x(\text{nenávidí}(\text{Agáta}, x) \to \neg\text{nenávidí}(\text{Charles}, x))$

(A_6) $\forall x(\neg x \doteq \text{Komorník} \to \text{nenávidí}(\text{Agáta}, x))$

(A_7) $\forall x(\neg\text{bohatší\_ako}(x, \text{Agáta}) \to \text{nenávidí}(\text{Komorník}, x))$

(A_8) $\forall x(\text{nenávidí}(\text{Agáta}, x) \to \text{nenávidí}(\text{Komorník}, x))$

(A_9) $\forall x\, \exists y(\text{vDreadbury}(y) \land \neg\text{nenávidí}(x, y))$

(A_{10}) $\neg\text{Agáta} \doteq \text{Komorník}$

Nech $T = \{A_1, \dots, A_{10}\}$ (pozor na zmenu vo formulách A_2, A_9 a A_{10} oproti praktickým cvičeniam). Dokážte tablovým kalkulom, kto zabil Agátu, teda dokážte že platí $T \models \text{zabil}(v, \text{Agáta})$, keď za v dosadíte správneho vraha.

Symboly predikátov a konštánt si vhodne skráťte. Použite prvorádové tablo rozšírené o pravidlá γ^* a δ^* z prednášky (tvrdenie 13.10), pravidlá z úlohy 4.4.1.

6.4.8 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Existuje formula bez rovnosti, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   i. najviac dvojprvkovú doménu;
   ii. aspoň dvojprvkovú doménu.
b) Existuje formula s rovnosťou, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   i. najviac dvojprvkovú doménu;
   ii. aspoň dvojprvkovú doménu.

6.4.9 Dokážte nasledujúce tvrdenia pomocou prvorádových tabiel s pridanými pravidlami γ^* a δ^*:

a) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{A_1, A_2, A_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva X.

(A_1) $\forall x \forall y \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(A_2) $\exists o_1 \forall x\, (o_1 + x) \doteq x$

(A_3) $\exists o_2 \forall x\, (x + o_2) \doteq x$

(X) $\exists o \forall x\big((o + x) \doteq x \wedge (x + o) \doteq x\big)$

A_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. A_2 a A_3 hovoria, že existuje „ľavá nula“ o_1 a „pravá nula“ o_2. X hovorí, že existuje nula o, ktorá je pravá aj ľavá.

Pomôcka: Odvoďte, že $o_1 \doteq o_2$.

b) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Y.

(B_1) $\forall x \forall y \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(B_2) $\forall x\, (x + 0) \doteq x$

(B_3) $\forall y \exists i_1\, (i_1 + y) \doteq 0$

(B_4) $\forall y \exists i_2\, (y + i_2) \doteq 0$

(Y) $\forall y \exists i\big((i + y) \doteq 0 \wedge (y + i) \doteq 0\big)$

B_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. B_2 hovorí, že 0 je pravá nula sčítania (nevieme, či je aj ľavou nulou). B_3 a B_4 hovoria, že ku každému číslu y existuje ľavé, resp. pravé opačné číslo (ako $-y$). Y hovorí, že ku každému číslu y existuje opačné číslo (je súčasne ľavým aj pravým opačným číslom pre y).

Pomôcka: Odvoďte najprv využitím asociativity (B_1), že pre zvolené číslo x, jeho ľavé opačné číslo u a pravé opačné číslo v platí $u \doteq (0 + v)$. Odtiaľ ľahko dostanete, že u je aj pravým opačným číslom k x.

c) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{C_1, C_2, C_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Z.

(C_1) $\forall x \forall y \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(C_2) $\forall x\, (x + 0) \doteq x$

(C_3) $\forall y \exists i((y + i) \doteq 0 \wedge (i + y) \doteq 0)$

(Z) $\forall x \forall y \forall z\big((x + z) \doteq (y + z) \rightarrow x \doteq y\big)$ (zákon pravého krátenia)

Pomôcka: Začnite tak, že odstránite kvantifikátory a zjednodušíte implikáciu v Z, reflexivitou pripočítate vhodný prvok k $(x + z)$, Leibnitzovym pravidlom nahradíte $(x + z)$ na pravej strane za $(y + z)$.

6.5 Definície pojmov a dôkazy s nimi

6.5.1 Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako žena^1, muž^1, rodič^2, súrodenec^2, manželia^2 so zamýšľaným významom:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{muž}(x)$	x je muž
$\text{rodič}(x, y)$	x je (vlastným) rodičom y
$\text{súrodenec}(x, y)$	x je (pokrvným) súrodencom y
$\text{manželia}(x, y)$	x a y sú manželmi

Sformulujte slovenské definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka) a zapíšte ich ako definície predikátov, ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

(D_1) súrodenec^2

(D_2) starý_rodič^2

(D_3) sesternica^2

(D_4) bratranec^2

(D_5) prastarý_rodič^2

(D_6) prasesternica^2 (teda sesternica „z druhého kolena“)

(D_7) $\text{nevlastný\_súrodenec}^2$

(D_8) macocha^2

(D_9) jedináčik^1

⚠ Sesternica nie je sestra.

Riešenie. Napríklad prvé dve definície môžu byť nasledovné:

(D_1) $\forall x\, \forall y (\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z, x) \land \text{rodič}(z, y))))$,

(D_2) $\forall x\, \forall y (\text{starý\_rodič}(x, y) \leftrightarrow (\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(x, z) \land \text{rodič}(z, y))))$. ♮

6.5.2 Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt Andrea, Cyril, Boris, Diana tak, aby $\mathcal{M}$ splnila všetky definície predikátov z úlohy 6.5.1 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $((\text{rodič}(\text{Andrea}, \text{Cyril}) \land \exists x\, \text{rodič}(\text{Andrea}, x)) \land \text{rodič}(\text{Boris}, \text{Diana}))$,

(A_2) $\exists x\, \exists y\, \exists z((\text{rodič}(x, \text{Andrea}) \land (\text{rodič}(x, \text{Boris}) \land \text{žena}(x))) \land (\text{rodič}(y, \text{Andrea}) \land \text{rodič}(z, \text{Andrea})))$

(A_3) $(\forall x\, \neg\text{rodič}(x, x) \land \forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \neg\text{rodič}(y, x)))$,

(A_4) $\forall x(\,(\text{žena}(x) \lor \text{muž}(x)) \land \neg(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x))\,)$,

(A_5) $\forall x\,\forall y(\text{rodič}(x,y) \to \exists z(\text{rodič}(z,y) \land (\text{muž}(x) \leftrightarrow \neg\text{muž}(z))))$

(A_6) $\forall p\,\forall r\,\forall x(\,((\text{rodič}(p,x) \land \text{rodič}(r,x)) \land (\text{žena}(p) \leftrightarrow \text{žena}(r))) \to p \doteq r\,)$,

(A_7) $\forall x\,\forall y(\,\text{súrodenec}(x,y) \leftrightarrow (\,\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z,x) \land \text{rodič}(z,y))\,)\,)$;

(B_1) $\exists x\,\exists y\,\text{prastarý\_rodič}(x,y)$,

(B_2) $\exists x(\,\text{jedináčik}(x) \land \forall y(\text{rodič}(y,x) \to \text{jedináčik}(y))\,)$,

(B_3) $\exists x\,\exists y(\text{macocha}(x,y) \land \exists z\,\text{rodič}(x,z))$.

Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynútia pridanie nových objektov do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, aby súčasne:

- všetky objekty (n-tice), ktoré patria do interpretácie predikátu, mali vlastnosti požadované definíciou;
- všetky objekty (n-tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patrili do interpretácie predikátu.

6.5.3 Dokážte, že z teórie, pozostávajúcej zo (sformalizovaných) tvrdení:

1. Definícia D_1 pojmu súrodenec z cvičenia 6.5.1.
2. Definícia D_3 pojmu sesternica z cvičenia 6.5.1.
3. Definícia D_9 pojmu jedináčik z cvičenia 6.5.1.
4. Každý rodičovský pár má svoje najobľúbenejšie dieťa, ktoré je dieťaťom tohto páru a tento pár ho preferuje pred svojimi ostatnými deťmi.

vyplýva:

a) Pre každých dvoch jedináčikov platí, že nie sú súrodenci.

b) Dieťa jedináčikov nemá žiadne sesternice.

c) Každý jedináčik je najobľúbenejším dieťaťom svojho rodičovského páru.

6.5.4 Uvažujme jazyk logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{ZZZ}, \text{DNM}\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{airport}^1$, flight^3, $\text{international\_flight}^1$, $\text{international\_airport}^1$, dir_connected^2, island^1, $\text{at}^2\}$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \{\text{state}^1$, plane_type^1, location^1, $\text{dep\_time}^1\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových a funkčných symbolov je:

Predikátový sym.	Zamýšľaný význam
airport(x)	x je letisko
flight(x,y,z)	x je let z miesta y do miesta z
international_flight(x)	x je medzinárodný let
international_airport(x)	x je medzinárodné letisko
dir_connected(x, y)	x a y sú priamo prepojené
island(x)	x je ostrov/ostrovný
at(x,y)	x sa nachádza na y

Funkčný sym.	Zamýšľaný význam
state(x)	štát/krajina, v ktorej sa x nachádza
plane_type(x)	typ lietadla, ktoré lieta letom x
location(x)	poloha x
dep_time(x)	odletový čas letu x

Sformalizujte v logike prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

1. Odletovým a príletovým miestom každého letu je letisko.
2. Medzinárodný let je práve taký, ktorého odletové a príletové miesto sa nachádza v inej krajine.
3. Medzinárodné letisko je len a len také letisko, z ktorého odlieta aspoň jeden medzinárodný let.
4. Do a z letiska Snorestone International (ZZZ) lietajú len lietadlá typu Dreamliner NapMax (DNM).
5. Časy odletov jednotlivých letov z jedného miesta sa musia líšiť.
6. Dve letiská sú priamo prepojené práve vtedy, ak medzi nimi existuje priamy let.
7. Letiská sú ostrovné práve vtedy, keď ich poloha je na ostrove.

6.5.5 Uvažujme jazyk logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ z cvičenia 6.1.4, pričom zamýšľaný význam predikátových a funkčných symbolov je:

Predikátový sym.	Zamýšľaný význam
piece(x)	x je figúrka
square(x)	x je políčko
rook(x)	x je veža
king(x)	x je kráľ
may_enter(x, y)	x sa môže posunúť na y

Funkčný sym.	Zamýšľaný význam
on(x)	to, na čom x stojí
clr(x)	farba, ktorú má x

Sformalizujte definície nasledovných odvodených pojmov a zapíšte ich ako (podmienené) definície predikátov, ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

Predikát	Význam
may_take(x, y)	(figúrka) x môže zobrať (figúrku) y
check(x)	x je v šachu
check_mate(x)	x je v mate
stale_mate(x)	x je v pate
black_square(x)	x je čierne políčko
promoted_piece(x)	x je premenená figúrka
neighbour(x, y)	x je susedom y-u
diag_neighbour(x, y)	x je diagonálnym susedom y-u
corner(x)	x je rohový

(D_1) Figúrka môže zobrať figúrku práve vtedy, keď sú rozdielnej farby a tá prvá sa môže posunúť tam, kde tá druhá stojí.

(D_2) Kráľ je v šachu, ak a iba ak ho môže nejaká figúrka zobrať.

(D_3) Kráľ je v mate vtedy a len vtedy, keď je v šachu a nemôže sa posunúť na žiadne políčko.

(D_4) Kráľ je v pate, keď nie je v šachu a zároveň sa žiadna figúrka jeho farby nemôže posunúť na žiadne políčko. Inak v pate nie je.

(D_5) Čierne políčko je práve také políčko, ktorého farba je čierna.

(D_6) Premenenou figúrkou nazývame pešiaka, ktorý sa nachádza (na políčku) v riadku 1 alebo 8. (Nič iné premenenou figúrkou nenazývame.)

(D_7) Políčka sú susedné práve vtedy, keď sú ich indexy (t.j. riadky a stĺpce) rovnaké alebo susedné.

(D_8) Políčka sú diagonálne susedné, ak a iba ak sú ich indexy susedné.

(D_9) Políčko je rohové, ak má práve jedno diagonálne susedné políčko. Inak rohové nie je.

6.5.6 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ z predošlého cvičenia a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

$A_1 = \forall x(\mathsf{piece}(x) \to \mathsf{square}(\mathsf{on}(x))) \land \forall x(\mathsf{king}(x) \lor \mathsf{rook}(x) \to \mathsf{piece}(x))$
Figúrky stoja na políčkach. Králi a veže sú figúrky.

$A_2 = \forall x(\mathsf{piece}(x) \lor \mathsf{square}(x) \to \mathsf{clr}(x) \doteq \mathsf{white} \lor \mathsf{clr}(x) \doteq \mathsf{black})$
Figúrky a políčka majú bielu alebo čiernu farbu.

$$A_3 = \forall x\, \forall y(\mathsf{square}(x) \land \mathsf{piece}(y) \land \mathsf{on}(y) \doteq x \to$$
$$\forall z(\mathsf{piece}(z) \land \mathsf{on}(z) \doteq x \to z \doteq y))$$

Na jednom políčku môže stáť najviac jedna figúrka.

$$A_4 = \forall x(\mathsf{piece}(x) \to \neg \mathsf{square}(x) \land \neg \exists y\, \mathsf{clr}(y) \doteq x)$$
$$\land \forall x(\mathsf{square}(x) \to \neg \exists y\, \mathsf{clr}(y) \doteq x)$$

Figúrky, políčka a farby sú navzájom po dvojiciach disjunktné.

a) *Definičné rozšírenie teórie*

Rozšírte model $\mathcal{M}_1$ teórie T na model teórie $T \cup \{D_1\}$ pridaním interpretácie predikátového symbolu may_take tak, aby bola pravdivá vaša formalizácia podmienenej definície vzťahu *figúrka môže zobrať inú figúrku*.

$$\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1) \qquad i_1(\mathsf{white}) = \mathrm{W} \qquad i_1(\mathsf{black}) = \mathrm{B}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{\text{♔}, \text{♚}, \text{♖}, \text{♜}, \mathrm{a1}, \mathrm{a2}, \mathrm{a3}, \mathrm{b1}, \mathrm{b2}, \mathrm{b3}, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{W}, \mathrm{B}, \mathrm{N}\}\\
i_1(\mathsf{piece}) &= \{\text{♔}, \text{♚}, \text{♖}, \text{♜}\}\\
i_1(\mathsf{square}) &= \{\mathrm{a1}, \mathrm{a2}, \mathrm{a3}, \mathrm{b1}, \mathrm{b2}, \mathrm{b3}, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}\\
i_1(\mathsf{king}) &= \{\text{♔}, \text{♚}\}\\
i_1(\mathsf{rook}) &= \{\text{♖}, \text{♜}\}\\
i_1(\mathsf{may_enter}) &= \{(\text{♔}, \mathrm{a2}), (\text{♔}, \mathrm{b1}), (\text{♔}, \mathrm{b2}),\\
&\qquad (\text{♚}, \mathrm{c2}), (\text{♚}, \mathrm{b3}), (\text{♚}, \mathrm{b2}),\\
&\qquad (\text{♖}, \mathrm{a1}), (\text{♖}, \mathrm{a2}), (\text{♖}, \mathrm{b3}), (\text{♖}, \mathrm{c3}),\\
&\qquad (\text{♜}, \mathrm{c2}), (\text{♜}, \mathrm{c3}), (\text{♜}, \mathrm{a1}), (\text{♜}, \mathrm{b1})\}\\
i_1(\mathsf{on}) &= \{(\text{♔}, \mathrm{a1}), (\text{♚}, \mathrm{c3}), (\text{♖}, \mathrm{a3}), (\text{♜}, \mathrm{c1})\}\\
&\quad \cup \{(x, \mathrm{N}) \mid x \in D_1 \setminus \{\text{♔}, \text{♚}, \text{♖}, \text{♜}\}\}\\
i_1(\mathsf{clr}) &= \{(x, \mathrm{W}) \mid x \in \{\text{♔}, \text{♖}, \mathrm{a1}, \mathrm{a3}, \mathrm{b2}, \mathrm{c1}, \mathrm{c3}, \mathrm{W}\}\}\\
&\quad \cup \{(x, \mathrm{B}) \mid x \in \{\text{♚}, \text{♜}, \mathrm{a2}, \mathrm{b1}, \mathrm{b3}, \mathrm{c2}, \mathrm{B}\}\}\\
&\quad \cup \{(\mathrm{N}, \mathrm{N})\}\\
i_1(\mathsf{may_take}) &= ?
\end{aligned}$$

Všimnite si, že po pridaní explicitnej definície je potrebné interpretovať iba definovaný predikát. Ostatné časti štruktúry sa nemenia.

Explicitne definovaný predikát je podobný dopytu (query) alebo pohľadu (view) v databázach. Každý SELECT bez agregácií sa dá preložiť na ekvivalentnú prvorádovú explicitnú definíciu.

b) *Všeobecné rozšírenie teórie*
Upravte štruktúru $\mathcal{M}_2$ tak, aby bola modelom teórie

$$T \cup \{D_1, D_2, D_3, \exists x(\mathsf{king}(x) \land \mathsf{check\_mate}(x))\},$$

kde D_1, D_2, D_3 sú vaše formalizácie podmienených definícií z predošlého cvičenia.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (D_2, i_2) \qquad i_2(\mathsf{white}) = \mathrm{W} \qquad i_2(\mathsf{black}) = \mathrm{B} \\
D_2 &= \{\ldots, \mathrm{a1}, \mathrm{a2}, \mathrm{a3}, \mathrm{b1}, \mathrm{b2}, \mathrm{b3}, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{W}, \mathrm{B}, \mathrm{N}\} \\
i_2(\mathsf{piece}) &= \{\ldots\} \\
i_2(\mathsf{square}) &= \{\mathrm{a1}, \mathrm{a2}, \mathrm{a3}, \mathrm{b1}, \mathrm{b2}, \mathrm{b3}, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\} \\
i_2(\mathsf{king}) &= \{\ldots\} \\
i_2(\mathsf{rook}) &= \{\ldots\} \\
i_2(\mathsf{may_enter}) &= \{\ldots\} \\
i_2(\mathsf{may_take}) &= \{\ldots\} \\
i_2(\mathsf{on}) &= \{\ldots\} \cup \{\, (x, \mathrm{N}) \mid x \in D_1 \setminus \{♔, ♚, ♖, ♜\}\,\} \\
i_2(\mathsf{clr}) &= \{\ldots\} \\
&\quad \cup \{\, (x, \mathrm{W}) \mid x \in \{\mathrm{a1}, \mathrm{a3}, \mathrm{b2}, \mathrm{c1}, \mathrm{c3}, \mathrm{W}\}\,\} \\
&\quad \cup \{\, (x, \mathrm{B}) \mid x \in \{\mathrm{a2}, \mathrm{b1}, \mathrm{b3}, \mathrm{c2}, \mathrm{B}\}\,\} \\
&\quad \cup \{(\mathrm{N}, \mathrm{N})\}
\end{aligned}$$

💡 Tentoraz sme teóriu *okrem* explicitných definícií rozšírili aj o ďalšiu formulu, ktorá obsahuje jeden z definovaných predikátov.

V tejto situácii je konštrukcia modelu rozšírenej teórie *komplikovanejšia*, ako keď sme v časti a) pridali iba explicitnú definíciu. Aby bola rozšírená teória pravdivá, je potrebné štruktúru upraviť tak, aby akonáhle je pre nejaký prvok pravdivá ľavá strana ekvivalencie v definícii, bola pre tento prvok pravdivá aj jej pravá strana.

⚠ Doménu štruktúry a interpretácie funkcií a predikátov meňte iba pridávaním prvkov na miestach označených „…“. V tomto prípade to na nájdenie modelu stačí. Vo všeobecnosti by to stačiť nemuselo a nový model by ani nemusel existovať.

6.5.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ z predošlého cvičenia a teóriu $T = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ tvorenú formalizáciami nasledujúcich výrokov a definícií:

(A_1) Figúrky stoja na políčkach.

(A_2) Králi sú figúrky.

(A_3) Kráľ je v šachu, ak a iba ak ho môže nejaká figúrka zobrať.

(A_4) Figúrka môže zobrať figúrku práve vtedy, keď sú rozdielnej farby a tá prvá sa môže posunúť tam, kde tá druhá stojí.

Dokážte, že z T vyplývajú formalizácie nasledujúcich výrokov:

(X_1) Ak je nejaký kráľ v šachu, tak existujú dve figúrky rozdielnej farby.

(X_2) Ak každá figúrka stojí na niečom svojej farby a nejaká figúrka môže zobrať nejakú figúrku, tak existujú dve políčka s rozdielnou farbou.

6.5.8 Uvažujme relačný prvorádový jazyk $\mathcal{L}$ pre doménu vysokoškolského štúdia, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Evka, Ferko, LPI, DDB, A, Fx$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$A-čkar^1, aktívny^1, bakalárska-práca^1, dievča^1, diplomová-práca^1, dizertačná-práca^1, doktorand^1, predmet^1, PhD-program^1, profesor^1, študent^1, štud-program^1, učiteľ^1, záverečná-práca^1, absolvuje^2, autor^2, školiteľ^2, študuje^2, učí^2, zapísaný^2, hodnotený$^3\}$.

Sformalizujte nasledujúce definície pojmov v jazyku $\mathcal{L}$:

(D_1) Učiteľ sa definuje ako ten, kto učí nejaký predmet.

(D_2) Každý, kto je študuje nejaký PhD program, je doktorandom a nikto iný doktorandom nie je.

(D_3) Študent absolvuje predmet práve vtedy, keď je z neho hodnotený známkou inou ako Fx.

(D_4) A-čkar je práve taký študent, ktorý absolvoval aspoň jeden predmet a má známku A z každého predmetu, z ktorého je hodnotený.

6.5.9

a) Sformalizujte v logike prvého rádu nasledujúce tvrdenia o knihomoľoch a knihách.

1. Knihomoľ je ten a iba ten, kto prečítal všetky svoje knihy.
2. Knihomoľ je skromný práve vtedy, keď si nekúpi v jednom obchode viac ako jednu knihu.
3. Za náročného definujeme toho knihomoľa, ktorý k spokojnosti vyžaduje, aby mal všetky knihy, ktoré chce.
4. Snobský je práve taký knihomoľ, ktorý je spokojný, iba ak si kúpi všetky knihy, ktoré chce.
5. Knihomoľ je šťastný práve vtedy, keď nepozná knihu, ktorú by nečítal.

6. Každá kniha je vydaná v práve jednom vydavateľstve.
7. Knihomoľ nechce dve knihy s rovnakým názvom.

b) Nájdite model sformalizovanej teórie, ktorým dokážete, že táto teória je splniteľná, aj to, že všetky predikáty sú súčasne splniteľné, teda ich interpretácie budú v modeli neprázdne.

Pomôcka. Výroky 2–5 definujú vlastnosti ako skromnosť a náročnosť pre knihomoľov, ale nehovoria, či a za akých podmienok majú tieto vlastnosti iné druhy objektov z domény. Ide teda o *podmiené definície*. Sformalizujte ich podľa návodu z prednášky.

6.5.10 Sformalizujte v logike prvého rádu nasledujúce tvrdenia o deťoch a hračkách.

Následne tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1–9 vyplýva každé z tvrdení 10–19.

Využite korektné pravidlá z prednášky (tvrdenie 13.10) a úlohy 4.4.1.

1. Dieťa je skromné práve vtedy, keď chce najviac jednu hračku.
2. Rozmaznané sú také deti, ktoré sú spokojné iba vtedy, keď dostali všetky hračky, ktoré chcú. Iné deti rozmaznané nie sú.
3. Za vďačné považujeme také a iba také dieťa, ktorému na spokojnosť stačí, že dostalo akúkoľvek hračku.
4. Ako náročné definujeme tie deti, ktorých spokojnosť vyžaduje, aby dostali iba také hračky, ktoré chcú.
5. Ak sa dieťa hnevá, hoci dostalo všetky hračky, ktoré chce, tak hovoríme, že zlostí. Platí to aj naopak.
6. Nikto spokojný sa nehnevá.
7. Každý má práve jednu vytúženú hračku. Túto hračku chce.
8. Každý má aj práve jednu obľúbenú hračku. Ak vôbec dostal nejakú hračku, tak aj túto.
9. Žirafa Irma je hračka.

$$\therefore$$

10. Každé spokojné rozmaznané dieťa dostalo aspoň jednu hračku.
11. Každá hračka, ktorú chce skromné dieťa, je jeho vytúžená.
12. Vďačné deti zlostia, len ak nedostali žiadnu hračku.

13. Každé skromné a rozmaznané dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju vytúženú hračku.
14. Spokojné, skromné, ale náročné dieťa dostalo nanajvýš svoju vytúženú hračku.
15. Ak skromné, ale náročné dieťa dostalo žirafu Irmu a je spokojné, tak je to jeho vytúžená hračka.
16. Ak skromné, ale náročné dieťa dostalo nejakú hračku a je spokojné, tak je to jeho obľúbená aj vytúžená hračka zároveň.
17. Rozmaznané a náročné deti sú spokojné, iba keď dostali práve tie hračky, ktoré chcú.
18. Rozmaznané, náročné a skromné dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju *obľúbenú* hračku a je to jediná hračka, ktorú dostalo.
19. Rozmaznané, náročné a skromné dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju *vytúženú* hračku a je to jediná hračka, ktorú dostalo.

Pomôcka 1. Definované vlastnosti prisudzujeme deťom, ale v definíciách to nemusíte uvádzať. Teda aj keď by si úplná formalizácia vyžadovala napr. pre definíciu skromného dieťaťa formulu v tvare: $\forall x(\text{dieta}(x) \to (\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots))$, môžete to zjednodušiť na: $\forall x(\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots)$. Zjednodušíte si tým dôkaz.

Pomôcka 2. Vzťahy s jednoznačne priradenými objektmi formalizujte funkčnými symbolmi. Tým automaticky dostanete existenciu a jednoznačnosť priradených objektov. Potom stačí sformalizovať iba ich druh a ďalšie vlastnosti. Použitie predikátov v týchto prípadoch by veľmi skomplikovalo formalizáciu a najmä dôkazy.

Napríklad, keď chceme jazyk a teóriu z cvičení 6.5.1 a 6.5.2 rozšíriť o formalizáciu tvrdenia: *Každý má práve jednu mamu, ženu, ktorá je jeho rodičom*, existenciu a jednoznačnosť mamy pre každý objekt zabezpečíme pridaním funkčného symbolu matka do jazyka. Vlastnosti a vzťahy mamy, o ktorých sa v tvrdení ďalej hovorí, potom môžeme vyjadriť použitím tohto funkčného symbolu: $\forall x(\text{žena}(\text{matka}(x)) \land \text{rodič}(\text{matka}(x), x))$.

6.5.11 Príklad. V logike prvého rádu môžeme sformalizovať (axiomatizovať) teóriu množín. Úplná formalizácia je pomerne komplikovaná. Pre naše účely postačí nasledujúci fragment T_{set} so základnými vzťahmi a operáciami v jazyku $\mathcal{L}_{\text{set}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{set}}} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{set}}} = \{\in^2, \subseteq^2\}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\text{set}}} = \{\cup^2, \cap^2, \setminus^2, \mathsf{P}^2\}$.

$$\forall x\, \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y) \tag{extenzionalita}$$

$$\forall x\, \forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y)) \tag{podmnožina}$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(z \in \mathsf{P}(x, y) \leftrightarrow (z \doteq x \lor z \doteq y)) \tag{dvojica}$$

$$\forall z \neg z \in \varnothing \tag{prázdna mn.}$$

$$\forall x \forall y \forall z(z \in (x \cap y) \leftrightarrow (z \in x \land z \in y)) \tag{prienik}$$

$$\forall x \forall y \forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y)) \tag{zjednotenie}$$

$$\forall x \forall y \forall z(z \in (x \smallsetminus y) \leftrightarrow (z \in x \land \neg z \in y)) \tag{rozdiel}$$

Prvorádovými tablami rozšírenými o pravidlá γ^* a δ^*, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 4.4.1 dokážte, že z T_{set} vyplývajú nasledujúce formuly:

(A_1) $\forall x\, x \subseteq x$

(A_2) $\forall x \forall y \forall z(x \subseteq y \land y \subseteq z \to x \subseteq z)$

(A_3) $\forall x \forall y(x \subseteq y \land y \subseteq x \to x \doteq y)$

(A_4) $\forall x \forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$

(A_5) $\forall x \forall y((x \cap y) \doteq y \to y \subseteq x)$

(A_6) $\forall x \forall y((x \smallsetminus y) \doteq \varnothing \to x \subseteq y)$

(A_7) $\forall x \forall y\, (x \cap y) \subseteq x$

(A_8) $\forall x \forall y\, x \subseteq (x \cup y)$

(A_9) $\forall x \forall y\, (x \cap y) \doteq (y \cap x)$

(A_{10}) $\forall x \forall y\, (x \cup y) \doteq (y \cup x)$

(A_{11}) $\forall x \forall y \forall z\, (x \cap (y \cup z)) \doteq ((x \cap y) \cup (x \cap z))$

(A_{12}) $\forall x \forall y \forall z\, (x \cup (y \cap z)) \doteq ((x \cup y) \cap (x \cup z))$

(A_{13}) $\forall x \forall y \forall z\, (x \cap (y \smallsetminus z)) \doteq ((x \cap y) \smallsetminus z)$

(A_{14}) $\forall u \forall x \forall y\, (u \smallsetminus (x \cap y)) \doteq ((u \smallsetminus x) \cup (u \smallsetminus y))$

(A_{15}) $\forall u \forall x \forall y\, (u \smallsetminus (x \cup y)) \doteq ((u \smallsetminus x) \cap (u \smallsetminus y))$

(A_{16}) $\forall u \forall x \forall y\, (u \smallsetminus (x \smallsetminus y)) \doteq ((u \smallsetminus x) \cup (u \cap y))$

(A_{17}) $\forall x \forall y \forall z\, (x \subseteq (y \cap z) \leftrightarrow x \subseteq y \land x \subseteq z)$

(A_{18}) $\forall x \forall y \forall z(x \subseteq y \lor x \subseteq z \to x \subseteq (y \cup z))$

(A_{19}) $\neg \forall x \forall y \forall z(x \subseteq (y \cup z) \to x \subseteq y \lor x \subseteq z)$

(A_{20}) $\neg \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$

(A_{21}) $\exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in z) \to \neg \forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \neg z \in x)$

Riešenie (A_4). Aby sme dokázali, že $T_{\text{set}} \models A_4$, vybudujeme tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\, A \mid A \in T_{\text{set}}\} \cup \{\mathbf{F}\, A_4\}$.

⚠ Je dôležité uvedomovať si, čo máme dokázať, prečo by to mala byť to pravda a budovať tablo tak, aby zodpovedalo dôkazu tvrdenia v prirodzenom jazyku. Inak sa v ňom ľahko stratíme a urobíme chybu alebo dôkaz nikam nepovedie.

Tvrdenie A_4 hovorí, že ak je zjednotenie množín x a y rovné x, musí byť y podmnožinou x. Ak totiž $x \cup y = x$, tak v y nie sú žiadne prvky, ktoré by už neboli v x, teda každý prvok z y je v x, teda y je podmnožinou x.

Rovnako ľahko to dokážeme sporom: Nech $x \cup y = x$, ale $y \nsubseteq x$. Potom je nejaký prvok p, ktorý patrí do y ($p \in y$), ale $p \notin x$. Pretože ale $p \in y$, tak $p \in (x \cup y)$. Lenže $x \cup y = x$, teda

$p \in x$, čo je spor s úvodným predpokladom.

Tento dôkaz sporom teraz podrobne a formálne zapíšeme ako tablo.

1.	$\mathbf{F}\, \forall x\, \forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$	S^+
2.	$\mathbf{F}\, (v \cup w) \doteq v \to w \subseteq v$	$\delta^* 1\{x \mapsto v, y \mapsto w\}$
3.	$\mathbf{T}\, (v \cup w) \doteq v$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}\, w \subseteq v$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\, \forall x\, \forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y))$	S^+
6.	$\mathbf{T}\, w \subseteq v \leftrightarrow \forall z(z \in w \to z \in v)$	$\gamma^* 5\{x \mapsto w, y \mapsto v\}$
7.	$\mathbf{F}\, \forall z(z \in w \to z \in v)$	ESTF6, 4
8.	$\mathbf{F}\, p \in w \to p \in v$	$\delta 7\{z \mapsto p\}$
9.	$\mathbf{T}\, p \in w$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F}\, p \in v$	$\alpha 8$
11.	$\mathbf{T}\, (v \cup w) \doteq (v \cup w)$	Refl
12.	$\mathbf{T}\, v \doteq (v \cup w)$	Leibnitz3, 11
13.	$\mathbf{F}\, p \in (v \cup w)$	Leibnitz12, 10
14.	$\mathbf{T}\, \forall x\, \forall y\, \forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y))$	S^+
15.	$\mathbf{T}\, p \in (v \cup w) \leftrightarrow (p \in v \lor p \in w)$	$\gamma^* 14\{x \mapsto v, y \mapsto w, z \mapsto p\}$
16.	$\mathbf{F}\, p \in v \lor p \in w$	ESTF15, 13
17.	$\mathbf{F}\, p \in v$	$\alpha 16$
18.	$\mathbf{F}\, p \in w$	$\alpha 16$
	$*\, 9, 18$	

Tablo začneme priamo formulou $\mathbf{F}\, A_4$, ktorej vyplývanie chceme (sporom) dokázať (1). Ostatné formuly z S^+, teda formuly z T_{set} označené **T** budeme pridávať podľa potreby, lebo ich je veľa a nie všetky využijeme.

Tvrdenie A_4 je všeobecne kvantifikovaná implikácia. Pretože predpokladáme, že nie je splnené, jeho bezkvantifikátorová podformula je nesplnená pre nejaké konkrétne, ale nie presne známe množiny v a w (2). Teda zjednotením v a w je v (3), ale pritom w nie je podmnožinou v (4).

Aby sme zistili, či sú tieto fakty sporné, potrebujeme vedieť, ako ich naša teória definuje. Väčšinou sa oplatí začať nesplneným faktom, teda faktom 4. Vyberieme si z teórie definíciu vzťahu *byť podmnožinou* (5) a aplikujeme ju na w a v (6). Musí byť nesplnené, že všetky prvky množiny w sú prvkami v (7). Teda niektoré, nie presne známe prvky w nie sú prvkami v. Označme niektorý z nich p (8). Teda p patrí do w (9), ale p nepatrí do v (10).

Pretože $(v \cup w)$ sa rovná v (3), zrejme p nepatrí ani do $(v \cup w)$. Odvodiť v table to vieme Leibnitzovým pravidlom, ktoré ale používa rovnosť iba smere zľava doprava. Odvodíme teda symetrickú rovnosť k rovnosti 3: Reflexivitou pridáme rovnosť $(v \cup w) \doteq (v \cup w)$ (11) a Leibnitzovým pravidlom podľa 3 jej ľavú stranu nahradíme v (12). Následne ďalším použitím Leibnitzovho pravidla dostaneme, že nie je splnené $p \in (v \cup w)$ (13).

Podľa definície zjednotenia z teórie (14), je p prvkom zjednotenia množín v a w práve vtedy, keď je prvkom niektorej z nich (15). V našom prípade p nie je prvkom zjednotenia, teda nie je prvkom ani jednej z týchto množín (16), teda ani w (18), čo je ale v spore s tým, že $p \in w$ (9).

Keďže tablo je uzavreté, množina S^+ je nesplniteľná, a teda z T_{set} vyplýva A_4. ♮

6.5.12 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Vierka}, \text{Jarko}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{mama}^1, \text{otec}^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{bývaV}^2, \text{spolubývajúci}^2, \text{manželia}^2, \text{bezdomovec}^1\}$ a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x\, \forall y \big(\text{spolubývajúci}(x, y) \leftrightarrow x \not\doteq y \land \exists z \big(\text{bývaV}(x, z) \land \text{bývaV}(y, z)\big)\big)$,

(A_2) $\forall x \big(\text{bezdomovec}(x) \leftrightarrow \forall z\, \neg\text{bývaV}(x, z)\big)$,

(A_3) $\forall x\, \forall y \big(\text{manželia}(x, y) \to \forall z \big(\text{bývaV}(x, z) \to \text{bývaV}(y, z)\big)\big)$,

(A_4) $\forall x\, \forall y \big(\text{manželia}(x, y) \to \text{manželia}(y, x)\big)$,

(A_5) $\forall x\, \forall y \big(\text{manželia}(x, y) \to x \not\doteq y\big)$,

(A_6) $\exists x\, \exists y\, \text{manželia}(x, y)$,

(A_7) $\text{spolubývajúci}(\text{otec}(\text{Vierka}), \text{mama}(\text{Jarko}))$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

(X_1) $\forall x\, \forall y \big(\text{manželia}(x, y) \to \text{spolubývajúci}(x, y)\big)$

(X_2) $\exists x \big(\text{manželia}(\text{mama}(x), \text{otec}(x)) \land \neg\text{spolubývajúci}(\text{mama}(x), \text{otec}(x))\big)$
$\to \exists x\, \text{bezdomovec}(x)$

6.5.13 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Edo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{amatér}^1, \text{baví}^2, \text{má}^2, \text{práca}^1, \text{rocker}^1, \text{šťastlivec}^1, \text{zamestnaný}^1\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ o pomeroch v populárnej hudbe v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x \big(\text{rocker}(x) \to \exists y (\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y))\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y \big(\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y) \to \text{baví}(y, x)\big)$,

(A_3) $\forall x \big(\exists y (\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y) \land \neg\text{práca}(y)) \to \text{amatér}(x)\big)$,

(A_4) $\forall x\big(\text{šťastlivec}(x) \leftrightarrow \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{práca}(y) \land \text{baví}(y, x))\big)$,

(A_5) $\forall x\big(\text{zamestnaný}(x) \leftrightarrow \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{práca}(y))\big)$,

(A_6) $\text{šťastlivec}(\text{Edo})$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom:

(X_1) $\forall x\big(\text{rocker}(x) \land \neg\text{amatér}(x) \to \text{šťastlivec}(x)\big)$,

(X_2) $\forall x(\text{zamestnaný}(x) \land \text{rocker}(x)) \to \forall x\, \text{šťastlivec}(x)$.

6.5.14 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{kľúč}^1, \text{odomkne}^2, \text{univerzálny}^1, \text{zámka}^1\}$, a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_3\}$ v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x\big(\text{univerzálny}(x) \leftrightarrow \forall y(\text{zámka}(y) \to \text{odomkne}(x, y))\big)$,

(A_2) $\forall x\big(\text{kľúč}(x) \to \exists y(\text{zámka}(y) \land \text{odomkne}(x, y))\big)$,

(A_3) $\forall x\big(\exists y\, \text{odomkne}(x, y) \to \text{kľúč}(x)\big)$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom:

(X_1) $\exists x\, \text{zámka}(x) \to \forall y(\text{univerzálny}(y) \to \text{kľúč}(y))$,

(X_2) $\forall x(\text{univerzálny}(x) \to \text{kľúč}(x))$,

(X_3) $\exists x\, \text{univerzálny}(x) \to \exists y\, \text{zámka}(y)$,

(X_4) $\forall x\, \text{zámka}(x) \to \forall y\big(\text{univerzálny}(y) \to \exists z(\text{odomkne}(z, z) \land \text{kľúč}(z))\big)$.

6.5.15 Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{úhlavný\_nepriateľ}^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hrdina\_pre}^2, \text{nepriateľ}^2, \text{porazí}^2, \text{superhrdina}^1\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\text{superhrdina}(x) \leftrightarrow \forall y\big(\forall z\, \text{nepriateľ}(y, z) \to \text{porazí}(x, y)\big)\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y\big(\text{hrdina\_pre}(x, y) \leftrightarrow \text{porazí}(x, \text{úhlavný\_nepriateľ}(y))\big)$,

(A_3) $\exists x\, \text{superhrdina}(x) \land \exists x\, \forall y\, \text{nepriateľ}(x, y)$,

(A_4) $\forall x\, \text{nepriateľ}(\text{úhlavný\_nepriateľ}(x), x)$.

Nech ďalej

$$X = \forall x\big(\forall y\, \text{hrdina\_pre}(x, y) \to \text{superhrdina}(x)\big).$$

Rozhodnite, či (i) z teórie T vyplýva X, a tiež rozhodnite, či (ii) X je nezávislá od T.

Rozhodnutia zdôvodnite na základe definícií vzťahov vyplývania a nezávislosti a dokážte podľa potreby *tablom* alebo *nájdením príslušných štruktúr*.

6.5.16 (Quine [5]) Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jones}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lupič}^1, \text{prehľadal}^2, \text{sprievodca}^2, \text{strážnik}^1, \text{vstúpil}^1, \text{zamestnanec}^1\}$ s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\text{strážnik}(x) \leftrightarrow$
$\quad\quad \forall y\big(\text{vstúpil}(y) \land \forall z(\text{zamestnanec}(z) \to \neg\text{sprievodca}(z, y))$
$\quad\quad\quad \to \text{prehľadal}(x, y)\big)\big),$

(A_2) strážnik(Jones),

(A_3) $\exists x\big(\text{lupič}(x) \land \text{vstúpil}(x) \land \forall y(\text{sprievodca}(y, x) \to \text{lupič}(y))\big),$

(A_4) $\forall x\big(\text{lupič}(x) \to \neg \exists y\, \text{prehľadal}(y, x)\big).$

Pomocou *tablového kalkulu* dokážte, že z teórie T vyplýva formula X (t.j. $T \vDash X$), vysvetlite vzťah tabla k vyplývaniu:

$$X = \exists x(\text{lupič}(x) \land \text{zamestnanec}(x)).$$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly predikátov nasledovne:
lupič $\rightsquigarrow$ L, prehľadal $\rightsquigarrow$ P, sprievodca $\rightsquigarrow$ Sp, strážnik $\rightsquigarrow$ St, vstúpil $\rightsquigarrow$ V, zamestnanec $\rightsquigarrow$ Z.

6.5.17 Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dobre\_sformátovaný}^1, \text{edituje}^2, \text{má\_rád\_tabulátory}^1, \text{obsahuje\_medzery}^1, \text{obsahuje\_tab}^1, \text{programátor}^1, \text{spokojný}^1, \text{zdroják}^1\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\text{zdroják}(x) \to$
$\quad\quad \big(\text{dobre\_sformátovaný}(x) \leftrightarrow \neg(\text{obsahuje\_medzery}(x) \land \text{obsahuje\_tab}(x))\big)\big)$

(A_2) $\forall x\big(\text{programátor}(x) \land \neg\text{má\_rád\_tabulátory}(x)$
$\quad\quad \land \forall y\big(\text{zdroják}(y) \land \text{edituje}(x, y) \to \neg\text{obsahuje\_tab}(y)\big)$
$\quad\quad \to \text{spokojný}(x)\big)$

(A_3) $\forall x\big(\text{zdroják}(x) \to \text{obsahuje\_medzery}(x)\big)$

(A_4) $\exists x\big(\neg\text{spokojný}(x) \land \text{programátor}(x) \land \neg\text{má\_rád\_tabulátory}(x)\big)$

Dokážte *tablom*, že nasledujúca formula X vyplýva z teórie T.

(X) $\exists x\big(\text{zdroják}(x) \land \neg\text{dobre\_sformátovaný}(x)\big)$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly nasledovne: dobre_sformátovaný $\rightsquigarrow$ D,edituje $\rightsquigarrow$ E, má_rád_tabulátory $\rightsquigarrow$ R, obsahuje_medzery $\rightsquigarrow$ M, obsahuje_tab $\rightsquigarrow$ T, programátor $\rightsquigarrow$ P, spokojný $\rightsquigarrow$ S, zdroják $\rightsquigarrow$ Z.

6.5.18 (Novak [3]) Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lotéria}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{podporovateľ}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{gambler}^1, \text{hlasuje}^1, \text{konzervatívec}^1, \text{lotéria}^1, \text{namieta}^1, \text{oddaný}^1, \text{proti}^2, \text{schváli\_sa}^1, \text{účastník}^2, \text{za}^2\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\neg\text{schváli\_sa}(x) \to \text{za}(\text{podporovateľ}(x), x) \land \text{namieta}(\text{podporovateľ}(x))\big)$

(A_2) $\forall x\, \forall y\big(\text{účastník}(x, y) \land \text{lotéria}(y) \to \text{gambler}(x)\big)$,

(A_3) $\forall x\big(\text{za}(x, \text{návrh\_lotérie}) \to \exists y\big(\text{účastník}(x, y) \land \text{lotéria}(y)\big)\big)$,

(A_4) $\forall x\big(\text{za}(x, \text{návrh\_lotérie}) \lor \text{proti}(x, \text{návrh\_lotérie})\big)$,

(A_5) $\forall x\big(\text{konzervatívec}(x) \to \text{hlasuje}(x) \land \text{proti}(x, \text{návrh\_lotérie})\big)$
$\quad\to \neg\text{schváli\_sa}(\text{návrh\_lotérie})$,

(A_6) $\neg\, \exists x\big(\text{konzervatívec}(x) \land \text{oddaný}(x) \land \text{gambler}(x)\big)$.

Dokážte *tablom*, že nasledujúca formula X vyplýva z teórie T.

(X) $\forall x\, \neg\text{namieta}(x) \land \forall x\big(\text{konzervatívec}(x) \to \text{hlasuje}(x)\big)$
$\quad\to \exists x\big(\text{konzervatívec}(x) \land \neg\text{oddaný}(x)\big)$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly predikátov nasledovne:
gambler ⇝ G, hlasuje ⇝ H, konzervatívec ⇝ K, lotéria ⇝ L, namieta ⇝ N, oddaný ⇝ O, podporovateľ ⇝ pp, proti ⇝ P, schváli_sa ⇝ S, účastník ⇝ U, za ⇝ Z, návrh_lotérie ⇝ nl.

6.5.19 (Formalizácia výrokovej logiky) V logike prvého rádu môžeme sformalizovať (axiomatizovať) aj niektoré logické pojmy a dokázať alebo vyvrátiť formalizácie tvrdení o vyplývaní a splniteľnosti, akými sme sa zaoberali v príklade 3.4.5.

V tomto cvičení si to vyskúšame na niekoľkých tvrdeniach. Použijeme mierne odlišné formalizácie, aby sme si zjednodušili tablový dôkaz resp. konštrukciu štruktúry.

Prvorádové jazyky, v ktorých sformalizujeme výrokovú logiku, budú používať nasledujúce symboly:

Predikátový symbol	Zamýšľaný význam
formula(x)	x je formula
satisfiable(x)	x je splniteľná
theory(x)	x je teória
valuation(x)	x je ohodnotenie
entails(t, x)	z (teórie) t vyplýva (formula) x
true(v, z)	v (ohodnotení) v je pravdivá z
in(x, t)	x je prvkom t

Funkčný symbol	Zamýšľaný význam
not(x)	negácia (formuly) x
impl(x, y)	implikácia s antecedentom x a konzekventom y

a) O splniteľnosti. Uvažujme najprv nasledujúcu teóriu T_1 o výrokovej logike, v ktorej sa zameriame na splniteľnosť. Sformalizovaná je v jazyku $\mathcal{L}_1$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_1} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \{\mathsf{formula}^1, \mathsf{satisfiable}^1, \mathsf{theory}^1, \mathsf{valuation}^1, \mathsf{true}^2, \mathsf{in}^2\}$.

$$
\begin{aligned}
T_1 = \{\ & \forall T\big(\mathsf{theory}(T) \to \forall A(\mathsf{in}(A,T) \to \mathsf{formula}(A))\big),\\
& \forall T\,\forall v\big((\mathsf{theory}(T) \land \mathsf{valuation}(v)) \to\\
& \qquad \big(\mathsf{true}(v,T) \leftrightarrow \forall A(\mathsf{in}(A,T) \to \mathsf{true}(v,A))\big)\big),\\
& \forall z\big(\mathsf{satisfiable}(z) \leftrightarrow \exists v(\mathsf{valuation}(v) \land \mathsf{true}(v,z))\big),\\
& \exists v\,\mathsf{valuation}(v),\\
& \forall T\big(\mathsf{theory}(T) \to (\neg\mathsf{formula}(T) \land \neg\mathsf{valuation}(T))\big),\\
& \forall X\big(\mathsf{formula}(X) \to \neg\mathsf{valuation}(X)\big)\,\}
\end{aligned}
$$

Rozhodnite, či (i) z teórie T_1 vyplýva formula X_1 resp. X_2, a tiež rozhodnite, či (ii) je formula X_1 resp. X_2 nezávislá od T_1, pričom:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \forall T\big(\big(\mathsf{theory}(T) \land \forall X(\mathsf{in}(X,T) \to \mathsf{satisfiable}(X))\big) \to \mathsf{satisfiable}(T)\big);\\
X_2 &= \forall T\big(\big(\mathsf{theory}(T) \land \mathsf{satisfiable}(T)\big) \to \forall X(\mathsf{in}(X,T) \to \mathsf{satisfiable}(X))\big).
\end{aligned}
$$

Rozhodnutia zdôvodnite na základe definícií vzťahov vyplývania a nezávislosti a dokážte podľa potreby *tablom* alebo *nájdením vhodných štruktúr*.

b) O vyplývaní. Teraz uvažujme teóriu T_2 o výrokovej logike, v ktorej sa zameriame na vyplývanie. Sformalizovaná je v jazyku $\mathcal{L}_2$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_2} =$

$\{\mathsf{not}^1, \mathsf{impl}^2\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathsf{valuation}^1, \mathsf{entails}^2, \mathsf{true}^2\}$.

$$\begin{aligned} T_2 = \{ \ & \forall T\, \forall X \big(\mathsf{entails}(T, X) \leftrightarrow \forall v ((\mathsf{valuation}(v) \land \mathsf{true}(v, T)) \to \mathsf{true}(v, X))\big), \\ & \forall v\, \forall A \big(\mathsf{true}(v, \mathsf{not}(A)) \leftrightarrow \neg \mathsf{true}(v, A)\big), \\ & \forall v\, \forall A\, \forall B \big(\mathsf{true}(v, \mathsf{impl}(A, B)) \leftrightarrow (\neg \mathsf{true}(v, A) \lor \mathsf{true}(v, B))\big) \} \end{aligned}$$

Rozhodnite, či (i) z teórie T_2 vyplýva formula $X_3, \ldots, X_6$, a tiež rozhodnite, či (ii) je formula $X_3, \ldots, X_6$ nezávislá od T_2, pričom:

$$\begin{aligned} X_3 &= \forall T\, \forall X\, \forall Y \big(\big(\mathsf{entails}(T, \mathsf{not}(X)) \lor \mathsf{entails}(T, Y)\big) \to \mathsf{entails}(T, \mathsf{impl}(X, Y))\big); \\ X_4 &= \forall T\, \forall X\, \forall Y \big(\big(\neg \mathsf{entails}(T, X) \lor \mathsf{entails}(T, Y)\big) \to \mathsf{entails}(T, \mathsf{impl}(X, Y))\big); \\ X_5 &= \forall T\, \forall X\, \forall Y \big(\mathsf{entails}(T, \mathsf{impl}(X, Y)) \to \big(\mathsf{entails}(T, \mathsf{not}(X)) \lor \mathsf{entails}(T, Y)\big)\big); \\ X_6 &= \forall T\, \forall X\, \forall Y \big(\mathsf{entails}(T, \mathsf{impl}(X, Y)) \to \big(\neg \mathsf{entails}(T, X) \lor \mathsf{entails}(T, Y)\big)\big). \end{aligned}$$

Rozhodnutia zdôvodnite na základe definícií vzťahov vyplývania a nezávislosti a dokážte podľa potreby *tablom* alebo *nájdením vhodných štruktúr*.

6.6 Alternatívne definície logiky prvého rádu

6.6.1 Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s kvantifikátorom $\leqslant$1 („pre najviac jedno“) namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*. Zadefinujte pojem *splnenia formuly v štruktúre pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.

6.6.2 Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi a s kvantifikátorom $\geqslant$2 („pre aspoň dve“) namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*.

Zadefinujte pojmy *hodnota termu v štruktúre pri ohodnotení* a *štruktúra spĺňa formulu pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.

7 Rezolvencia

7.1 Unifikácia a základy rezolvencie

7.1.1 Nech A, B, C, D sú ľubovoľné atómy. V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť naledujúcich množín klauzúl, ak je to možné. Inak nájdite Výrokovo-logické ohodnotenie, v ktorom je množina klauzúl pravdivá.

a) $T = \{(A \vee B), (\neg B \vee \neg A), (C \vee \neg D), (\neg C \vee D)\}$

b) $T = \{(A \vee B \vee C), (B \vee \neg C), (\neg A \vee \neg B)\}$

c) $T = \{(A \vee B \vee C), (B \vee \neg C), \neg A, \neg B\}$

d) $T = \{(A \vee B), (\neg A \vee C), (\neg A \vee \neg C), (A \vee \neg B)\}$

e) $T = \{A, (B \vee \neg A), (\neg A \vee \neg B \vee C), (\neg A \vee \neg C)\}$

f) $T = \{(B \vee \neg C), (A \vee \neg B), (B \vee C), (\neg B \vee \neg A)\}$

g) $T = \{(C \vee B), (\neg C \vee A), (C \vee \neg B), (\neg A \vee \neg C)\}$

h) $T = \{(\neg A \vee C), (A \vee B), (\neg A \vee \neg C), (\neg B \vee A)\}$

Riešenie. e) Pokúsime sa nájsť rezolvenčné zamietnutie množiny klauzúl T:

Pri hľadaní zamietnutia môžeme do rezolvenčného odvodenia kedykoľvek pridávať klauzuly teórie T. Ak T nie je príliš veľká, môžeme všetky jej klauzuly pridať hneď na začiatku.

1.	A	T
2.	$B \vee \neg A$	T
3.	$\neg A \vee \neg B \vee C$	T
4.	$\neg A \vee \neg C$	T

Následne aplikujeme pravidlá rezolvencie a idempotencie. Pretože cieľom je dospieť k prázdnej klauzule, preferujeme rezolvenciu, v ktorej jedna klauzula je jednotková (má iba jeden literál). Rezolventa bude vtedy skrátením druhej klauzuly o jeden literál. Teória T umožňuje takýto postup v každom kroku, ale nie je to tak pri každej teórii.

5.	B	rezolvencia 1 a 2 na A

6. $\neg A \vee C$ — rezolvencia 3 a 5 na B
7. C — rezolvencia 1 a 6 na A
8. $\neg A$ — rezolvencia 4 a 7 na C
9. $\square$ — rezolvencia 1 a 8 na A

Keďže sme pomocou rezolvencie dospeli k prázdnej klauzule, množina T je nesplniteľná.

$\natural$

7.1.2 Nech P, Q, R, S sú ľubovoľné atómy a nech

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (P \to Q), \\ ((Q \to P) \vee (S \to R)), \\ (\neg P \to (\neg R \wedge S)) \end{array} \right\}$$

Pomocou rezolvenčného kalkulu zistite, či z T vyplýva formula $((P \wedge Q) \to R)$.

7.1.3 Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

a) $\mathsf{Arabela}$ — $\mathsf{prv\acute{y}\_majite\v{l}}(x)$

b) $\mathsf{kupuj\acute{u}ci}(\mathsf{Kolobe\v{z}ka6259}, y)$ — $\mathsf{kupuj\acute{u}ci}(t, \mathsf{prv\acute{y}\_majite\v{l}}(t))$

c) $\mathsf{predaj}(x, \mathsf{prv\acute{y}\_majite\v{l}}(t), t, p)$ — $\mathsf{predaj}(x, y, \mathsf{Kolobe\v{z}ka6259}, \mathsf{35eur})$

d) $\mathsf{predaj}(u, u, w, r)$ — $\mathsf{predaj}(\mathsf{kupuj\acute{u}ci}(y, t), y, t, p)$

e) $\mathsf{predaj}(x, \mathsf{Ingrid}, t, \mathsf{cena}(t))$ — $\mathsf{predaj}(\mathsf{kupuj\acute{u}ci}(y, t), y, t, p)$

7.1.4 Sfaktorizujte klauzuly:

a) $\neg\mathsf{d\acute{a}ma}(x) \vee \mathsf{urazil}(y, x) \vee \neg\mathsf{d\acute{a}ma}(\mathsf{Milagros})$

b) $\neg\mathsf{chr\acute{a}ni}(\mathsf{osobn\acute{y}\_str\acute{a}\check{z}ca}(x), x) \vee \neg\mathsf{chr\acute{a}ni}(x, y)$

7.1.5 V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(\mathsf{\check{s}tek\acute{a}}(x) \vee \neg\mathsf{pes}(x)),\ (\neg\mathsf{pes}(x) \vee \mathsf{hryzie}(x)),$
$(\neg\mathsf{pes}(x) \vee \neg\mathsf{\check{s}tek\acute{a}}(x) \vee \neg\mathsf{hryzie}(x)),\ \mathsf{pes}(\mathsf{Dun\check{c}o})\}$

b) $T = \{(\mathsf{dom}(x) \vee \mathsf{strom}(y) \vee \mathsf{pri}(x, y)),$
$(\mathsf{strom}(y) \vee \neg\mathsf{pri}(x, y)),\ (\neg\mathsf{dom}(x) \vee \neg\mathsf{strom}(y))\}$

c) $T = \{(\mathsf{c}(x, y) \vee \mathsf{b}(x)),\ (\neg\mathsf{c}(x, \mathsf{L}) \vee \mathsf{a}(\mathsf{L})),\ (\mathsf{c}(\mathsf{P}, y) \vee \neg\mathsf{b}(\mathsf{P})),\ (\neg\mathsf{a}(y) \vee \neg\mathsf{c}(x, y))\}$

7.1.6 Zrezolvujte a prípadne aj sfaktorizujte nasledujúce množiny klauzúl v logike prvého rádu:

a) Každý cvičiaci je buď doktorand alebo asistent. Profesor Krhlička nie je ani doktorand, ani asistent, ale je cvičiaci.
$\{\neg\text{cvičiaci}(x) \lor \text{doktorand}(x) \lor \text{asistent}(x),$
$\neg\text{doktorand}(\text{Krhlička}), \quad \neg\text{asistent}(\text{Krhlička}), \quad \text{cvičiaci}(\text{Krhlička})\}$

b) Ak má Tom rád Jerryho, potom existuje mačka, ktorá neznáša Toma. Jerryho majú všetci radi.
$\{\neg\text{má\_rád}(\text{Tom}, \text{Jerry}) \lor \text{mačka}(\text{M}_1),$
$\neg\text{má\_rád}(\text{Tom}, \text{Jerry}) \lor \text{neznáša}(\text{M}_1, \text{Tom}),$
$\text{má\_rád}(x, \text{Jerry})\}$

c) Kubkovi chutia všetky čokolády. Maťkovi nechutí Milka.
$\{\neg\text{čokoláda}(x) \lor \text{chutí}(x, \text{Kubko}), \quad \neg\text{chutí}(\text{Milka}, \text{Maťko})\}$

d) Vždy, keď niekto niečo dokončí, dostane za to príslušnú odmenu. Keď Medard dokončí polievanie záhrady, nedostane nič.
$\{\neg\text{dokončí}(x, y) \lor \text{dostane}(x, \text{odmena}(x, y)),$
$\neg\text{dokončí}(\text{Medard}, \text{polievanie\_záhrady}) \lor \neg\text{dostane}(\text{Medard}, y)\}$

7.2 Prvorádová CNF a skolemizácia

7.2.1 Nájdite ekvisplniteľné množiny klauzúl k nasledujúcim formulám:

a) $\exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \to \exists x\big(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)\big)$

b) $\forall x\big(\text{zelenina}(x) \lor \text{ovocie}(x)\big) \to \forall x\, \text{zelenina}(x) \lor \forall x\, \text{ovocie}(x)$

c) $\neg \forall x\big(\exists y\, P(x, y) \land \exists y\, Q(x, y) \to \exists y\big(P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\big)$

d) $\neg \forall x\big(\exists y\big(P(x, y) \lor Q(x, y)\big) \to \exists y\, P(x, y) \land \exists y\, Q(x, y)\big)$

e) $\forall x\big(P(x) \to \exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z)\big)$

f) $\forall x\big(\exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z) \to P(x)\big)$

Riešenie. a)

1. Nahradenie implikácií:
$\neg(\exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x)) \lor \exists x\big(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)\big)$

2. NNF:
$\forall x\, \neg\text{muž}(x) \lor \forall x\, \neg\text{žena}(x) \lor \exists x\big(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)\big)$

3. Premenovanie premenných:
   $\forall x\, \neg\text{muž}(x) \lor \forall y\, \neg\text{žena}(y) \lor \exists z\big(\text{muž}(z) \lor \text{žena}(z)\big)$

   Premenné viazané rôznymi kvantifikátormi je potrebné premenovať, aby sme ich v ďalších krokoch (PNF) mohli prenexovať (vyňať pred celú klauzulu).

4. Skolemizácia:
   $\forall x\, \neg\text{muž}(x) \lor \forall y\, \neg\text{žena}(y) \lor \big(\text{muž}(c) \lor \text{žena}(c)\big)$

   $\exists z$ nebolo v oblasti platnosti žiadneho $\forall$, preto sme premennú z nahradili **novou** skolemovskou konštantou c.

5. PNF a CNF:
   $\forall x\, \forall y\big(\neg\text{muž}(x) \lor \neg\text{žena}(y) \lor \text{muž}(c) \lor \text{žena}(c)\big)$

   Všeobecné kvantifikátory sme priamočiaro prenexovali, pretože viazali rôzne premenné, aby sme dostali PNF. Formula je v CNF bez ďalších úprav.

6. Ekvisplniteľná množina klauzúl:
   $\big\{\neg\text{muž}(x) \lor \neg\text{žena}(y) \lor \text{muž}(c) \lor \text{žena}(c)\big\}$

e)

1. Nahradenie implikácií, NNF, premenovanie premenných:
   $\forall x\big(\neg P(x) \lor \exists y\, \forall z\, Q(f(x,y),z)\big)$

2. Skolemizácia:
   $\forall x\big(\neg P(x) \lor \forall z\, Q(f(x,g(x)),z)\big)$

   $\exists y$ bolo v oblasti platnosti len $\forall x$, preto sme premennú y nahradili termom $g(x)$, kde g je **nová** skolemovská funkcia.

3. PNF, CNF:
   $\forall x\, \forall z\big(\neg P(x) \lor Q(f(x,g(x)),z)\big)$

   Všeobecné kvantifikátory sme priamočiaro prenexovali, pretože viazali rôzne premenné, aby sme dostali PNF. Formula je v CNF bez ďalších úprav.

4. Ekvisplniteľná množina klauzúl:
   $\{\neg P(x) \lor Q(f(x,g(x)),z)\}$

f)

1. Nahradenie implikácií:
   $\forall x\big(\neg\, \exists y\, \forall z\, Q(f(x,y),z) \lor P(x)\big)$

2. NNF, premenovanie premenných:
   $\forall x\big(\forall y\, \exists z\, \neg Q(f(x,y),z) \lor P(x)\big)$

   Pôvodne existenčný kvantifikátor sa v NNF stal všeobecným. Vnorený všeobecný kvantifikátor sa zase stal existenčným.

3. Skolemizácia:
   $\forall x\big(\forall y\, \neg Q(f(x,y),g(x,y)) \lor P(x)\big)$

$\exists z$ bolo v oblasti platnosti oboch $\forall x, \forall y$, preto sme premennú z nahradili termom $g(x, y)$, kde g je **nová** skolemovská funkcia.

4. PNF, CNF:
   $\forall x\, \forall y\big(\neg Q(f(x, y), g(x, y)) \vee P(x)\big)$

   Všeobecné kvantifikátory sme priamočiaro prenexovali, pretože viazali rôzne premenné, aby sme dostali PNF. Formula je v CNF bez ďalších úprav.

5. Ekvisplniteľná množina klauzúl:
   $\{\neg Q(f(x, y), g(x, y)) \vee P(x)\}$ ♮

7.2.2 Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_3\}$ v jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{d}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}^2, \mathsf{B}^1, \mathsf{C}^2\}$, kde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x\big(\mathsf{B}(x) \rightarrow \big(\exists y\, \mathsf{A}(x, y) \vee \exists y\, \mathsf{C}(y, x)\big)\big), \\ A_2 &= \big(\forall x\big(\mathsf{A}(\mathsf{d}, x) \rightarrow \exists y\, \mathsf{B}(y)\big) \rightarrow \mathsf{B}(\mathsf{d})\big), \\ A_3 &= \forall x\big(\mathsf{C}(x, x) \rightarrow \forall y\big(\mathsf{A}(x, y) \rightarrow \exists z\, \mathsf{B}(z)\big)\big)\,. \end{aligned}$$

Upravte T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu $T' = \bigcup_{i=1}^{3} T'_i$ vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$ o skolemovské konštanty a funkcie.

7.2.3 Majme teóriu $T = \{A_1, A_2\}$ v jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{c}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{f}^2\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{P}^1, \mathsf{Q}^2\}$, kde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x\big(\mathsf{P}(x) \vee \exists y\, \mathsf{Q}(x, y)\big) \rightarrow \exists z\, \mathsf{Q}(z, \mathsf{c}), \\ A_2 &= \forall x\, \forall y\big(\forall z\big(\mathsf{P}(z) \rightarrow \mathsf{Q}(x, y)\big) \rightarrow \exists z\big(\mathsf{P}(z) \wedge \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, z), x)\big)\big)\,. \end{aligned}$$

Upravte T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu $T' = T'_{A_1} \cup T'_{A_2}$ vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$ o skolemovské konštanty a funkcie.

Riešenie. Úprava A_1 do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie T'_{A_1}:

1. Nahradenie implikácií:
   $\neg \forall x\big(\mathsf{P}(x) \vee \exists y\, \mathsf{Q}(x, y)\big) \vee \exists z\, \mathsf{Q}(z, \mathsf{c})$

2. NNF, premenovanie premenných:
   $\exists x\big(\neg \mathsf{P}(x) \wedge \forall y\, \neg \mathsf{Q}(x, y)\big) \vee \exists z\, \mathsf{Q}(z, \mathsf{c})$

3. Skolemizácia:
   $\big(\neg \mathsf{P}(\mathsf{a}) \wedge \forall y\, \neg \mathsf{Q}(\mathsf{a}, y)\big) \vee \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c})$

   $\exists x$ nebolo v oblasti platnosti žiadneho $\forall$, preto sme premennú x nahradili **novou** skolemovskou konštantou a.

To, že vnútri oblasti platnosti $\exists x$ sa nachádzal všeobecný kvantifikátor $\forall y$, nie je pri skolemizácii podstatné.

$\exists z$ tiež nebolo v oblasti platnosti žiadneho $\forall$, preto sme premennú z nahradili **novou** (a teda aj rôznou od a) skolemovskou konštantou b.

4. PNF:
   $\forall y\big((\neg \mathsf{P}(\mathsf{a}) \land \neg \mathsf{Q}(\mathsf{a}, y)) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c})\big)$
5. CNF:
   $\forall y\big((\neg \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c})) \land (\neg \mathsf{Q}(\mathsf{a}, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c}))\big)$

   Vonkajšiu disjunkciu sme distribuovali do vnútornej konjunkcie.
6. Ekvisplniteľná množina klauzúl:

$$\begin{aligned} T'_{A_1} = \{&\neg \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c}), \\ &\neg \mathsf{Q}(\mathsf{a}, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c})\} \end{aligned}$$

Úprava A_2 do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie T'_{A_2}:

1. Nahradenie implikácií:
   $\forall x \forall y\big(\neg \forall z(\neg \mathsf{P}(z) \lor \mathsf{Q}(x, y)) \lor \exists z(\mathsf{P}(z) \land \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, z), x))\big)$
2. NNF:
   $\forall x \forall y\big(\exists z(\mathsf{P}(z) \land \neg \mathsf{Q}(x, y)) \lor \exists z(\mathsf{P}(z) \land \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, z), x))\big)$
3. Premenovanie premenných:
   $\forall x \forall y\big(\exists z(\mathsf{P}(z) \land \neg \mathsf{Q}(x, y)) \lor \exists u(\mathsf{P}(u) \land \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, u), x))\big)$

   Úpravou do NNF vznikli dve existenčné kvantifikácie s tou istou premennou z. Opisujú však existenciu prvkov s rôznymi vlastnosťami. Aby pri skolemizácii bolo evidentné, že ide o dve rôzne existenčné kvantifikácie, a teda dve rôzne skolemizácie, premenovali sme viazanú premennú v druhej existenčnej kvantifikácii zo z na u.
4. Skolemizácia, PNF:
   $\forall x \forall y\big((\mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \land \neg \mathsf{Q}(x, y)) \lor (\mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y)) \land \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x))\big)$

   Obe $\exists z$ a $\exists u$ sa nachádzali v oblasti platnosti $\forall x \forall y$, a teda aj z, aj u je potrebné nahradiť termami nasledovne: z nahradíme $\mathsf{g}(x, y)$, u nahradíme $\mathsf{h}(x, y)$, kde g, h sú **nové** binárne skolemovské funkčné symboly (t.j., rôzne od seba navzájom a súčasne rôzne od všetkých symbolov doteraz sa vyskytujúcich v teórii, aj v upravených formulách).
5. CNF:
   $\big((\mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y))) \land$
   $(\mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x)) \land$
   $(\neg \mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y))) \land$
   $(\neg \mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x))\big)$

ⓘ Na toto „roznásobenie“ konjunkcie s disjunkciou sme v skutočnosti použili distributívnosť trikrát: $((A \land B) \lor (C \land D)) \Leftrightarrow ((A \lor (C \land D)) \land (B \lor (C \land D))) \Leftrightarrow ((A \lor C) \land (A \lor D) \land (B \lor (C \land D))) \Leftrightarrow ((A \lor C) \land (A \lor D) \land (B \lor C) \land (B \lor D))$.

6. Ekvisplniteľná množina klauzúl:

$$\begin{aligned} T'_{A_2} = \{ & \mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y)), \\ & \mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x), \\ & \neg\mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y)), \\ & \neg\mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x)\} \end{aligned}$$

Výsledná ekvisplniteľná množina klauzúl pre teóriu T:

$$\begin{aligned} T' = T'_{A_1} \cup T'_{A_2} = \{ & \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c}), \\ & \neg\mathsf{Q}(\mathsf{a}, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{b}, \mathsf{c}), \\ & \mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y)), \\ & \mathsf{P}(\mathsf{g}(x, y)) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x), \\ & \neg\mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{P}(\mathsf{h}(x, y)), \\ & \neg\mathsf{Q}(x, y) \lor \mathsf{Q}(\mathsf{f}(y, \mathsf{h}(x, y)), x)\} \end{aligned}$$

♮

7.3 Dôkazy rezolvenciou

7.3.1 Prvorádovou rezolvenciou dokážte správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) Každý je chlapec alebo dievča. Každé dievča má nejakú bábiku. Janka nie je chlapec. Potom Janka má aspoň jednu bábiku.

Teda formálne: Nech

$$T = \left\{ \begin{array}{c} \forall x(\mathsf{chlapec}(x) \lor \mathsf{dievča}(x)), \\ \forall x(\mathsf{dievča}(x) \to \exists y(\mathsf{má}(x, y) \land \mathsf{bábika}(y))), \\ \neg\mathsf{chlapec}(\mathsf{Janka}) \end{array} \right\}$$

Dokážte, že $T \vDash \exists y(\mathsf{má}(\mathsf{Janka}, y) \land \mathsf{bábika}(y))$.

b) Predpokladajme, že všetko je pes alebo mačka, a že každý pes vlastní aspoň jednu pískaciu hračku. Z toho vyplýva, že ak Dunčo nie je mačka, vlastní nejakú pískaciu hračku.

c) Tí, čo nie sú maškrtníci, sú posadnutí štíhlou líniou. Kto nikdy nezjedol nejakú čokoládu, nie je maškrtník. Preto ak Garfield nie je posadnutý štíhlou líniou, tak niekedy zjedol aspoň jednu čokoládu.

d) Každého, kto urazí dámu, potrestá nejaký gentleman. Milagros je dáma. Takže ak Doña Angélica urazí Milagros, niekto ju (Doñu Angélicu) určite potrestá.

Riešenie. d) Najprv si sformalizujeme teóriu:

$$T = \left\{ \begin{aligned} &\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big), \\ &\text{dáma}(\text{Milagros}) \end{aligned} \right\}$$

Sformalizujeme tiež tvrdenie, ktorého vyplývanie chceme dokázať:

$$X = \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}).$$

Keďže $T \vDash X$ vtt $T' = T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľné a dôkaz chceme vykonať pomocou rezolvenčného kalkulu, T' si postupne upravíme do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie. Úprava formuly $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$ je nasledujúca:

1. $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$

2. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

3. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

4. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\, \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (skolemizácia)

5. $\forall x\, \forall y\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\, \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (konverzia do PNF)

6. $\forall x\, \forall y\big(\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)\big)\land$
   $\land\, \big(\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y))\big)\big)$
   (distributívnosť)

7. $\{\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y),$
   $\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y))\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

Formula dáma(Milagros) už v CNF je. Ostalo nám teda upraviť do CNF $\neg X$: ⚠

1. $\neg(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \rightarrow \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
2. $\neg(\neg\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \lor \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (nahradenie implikácie)
3. $(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \forall x\, \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (NNF)
4. $\forall x(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (PNF)
5. $\{\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

⚠ Aby sme naozaj dostali teóriu, ktorá je ekvisplniteľná s $T \cup \{\neg X\}$, musíme upravovať $\neg X$, nie X a následne negovať jej klauzálnu formu. Je to tak preto, lebo skolemizácia nie je ekvivalentnou úpravou a splniteľnosť zachováva iba vtedy, keď sa aplikuje na formulu v NNF.

Výsledná ekvisplniteľná teória T'_c je teda nasledujúca:

$$T'_c = \left\{\begin{array}{l} \neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y), \\ \neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)), \\ \text{dáma}(\text{Milagros}), \\ \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \\ \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}) \end{array}\right\}$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť T'_c rezolvenčným kalkulom:

1.	$\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x)$ $\lor\, \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$	T'_c
2.	$\text{dáma}(\text{Milagros})$	T'_c
3.	$\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros})$	T'_c
4.	$\neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})$	T'_c
5.	$\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, x)$	rezolvencia 1 a 4$\{x \mapsto z\}$ na potrestá, $\sigma_5 = \{y \mapsto \text{Doña\_Angélica}, z \mapsto \text{pomstiteľ}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
6.	$\neg\text{dáma}(\text{Milagros})$	rezolvencia 3 a 5 na urazí, $\sigma_6 = \{x \mapsto \text{Milagros}\}$
7.	$\square$	rezolvencia 2 a 6 na dáma, $\sigma_7 = \{\}$

Celé použitie pravidla prvorádovej rezolvencie na klauzuly 1 a 4 sa dá predstaviť ako postupný proces:

$$
\begin{array}{lcl}
 & & 4.\quad \neg\mathsf{potr}(x, \mathsf{DA}) \\
 & & \qquad\quad \downarrow \{x \mapsto z\} \\
1.\quad \neg\mathsf{d}(x) \lor \neg\mathsf{u}(y, x) \lor \mathsf{potr}(\mathsf{pom}(x, y), y) & & \qquad \neg\mathsf{potr}(z, \mathsf{DA}) \\
\qquad\qquad\qquad \downarrow \sigma_5 & & \qquad\quad \downarrow \sigma_5 \\
\neg\mathsf{d}(x) \lor \neg\mathsf{u}(\mathsf{DA}, x) \lor \mathsf{potr}(\mathsf{pom}(x, \mathsf{DA}), \mathsf{DA}) & & \neg\mathsf{potr}(\mathsf{pom}(x, \mathsf{DA}), \mathsf{DA}) \\
\hline
 & \neg\mathsf{d}(x) \lor \neg\mathsf{u}(\mathsf{DA}, x) &
\end{array}
$$

V rezolvenčnom odvodení však celý tento proces tvorí **jeden krok**. Do odvodenia nepíšeme medziprodukty, iba výslednú rezolventu, klauzulu 5.

Pri rezolvovaní klauzúl 1 a 4 sme **museli premenovať** premennú x v jednej z nich na novú premennú z. Substitúciou σ_5 sme potom zunifikovali atómy potrestá(pomstiteľ$(x, y), y)$ z klauzuly 1 a potrestá($\boldsymbol{z}$, Doña_Angélica) z klauzuly 4$\{x \mapsto z\}$ (teda 4 po premenovaní).

Premenovanie premenných je štandardnou súčasťou rezolvencie, pričom ich môže premenovať viacero súčasne. Na význame klauzúl nič nemení, lebo premenné v rôznych klauzulách sú všeobecne kvantifikované nezávisle od seba a na konkrétnom mene premennej nezáleží (pokiaľ nie je rovné menu inej premennej).

Bez premenovania atómy potrestá(pomstiteľ$(x, y), y)$ a potrestá($\boldsymbol{x}$, Doña_Angélica) v klauzulách 1 a 4 **nie sú unifikovateľné**, pretože nie sú unifikovateľné prvé argumenty predikátového symbolu potrestá. Termy $\boldsymbol{x}$ a pomstiteľ($\boldsymbol{x}$, Doña_Angélica), kde je premenná x argumentom funkčného symbolu, by boli unifikovateľné, iba keby sme mali nekonečné termy.

Keďže sme pomocou rezolvencie našli zamietnutie pre T'_c, čo je ekvisplniteľná klauzálna teória pre teóriu $T \cup \{\neg X\}$, tak $T \vDash X$, čiže

$$T \vDash \mathsf{urazí}(\mathsf{Doña\_Angélica}, \mathsf{Milagros}) \to \exists x\, \mathsf{potrestá}(x, \mathsf{Doña\_Angélica}).$$

Úsudok d) je teda správny. $\natural$

7.3.2 Uvažujme nasledovné tvrdenia a ich formalizáciu v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti* $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{Hanka}\}$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{autíčko}^1, \mathsf{bábika}^1, \mathsf{červené}^1, \mathsf{dievčenské}^1, \mathsf{hračka}^1, \mathsf{hračkárstvo}^1, \mathsf{chlapčenské}^1, \mathsf{matfyzáčka}^1, \mathsf{P}^1, \mathsf{šaty}^1, \mathsf{mama}^2, \mathsf{má}^2, \mathsf{zakúpené\_v}^2, \mathsf{kúpi}^3\}$:

1. Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

$$
\begin{gathered}
\forall x(\mathsf{autíčko}(x) \to \mathsf{chlapčenské}(x) \land \mathsf{hračka}(x)) \land \\
\forall x(\mathsf{bábika}(x) \to \mathsf{dievčenské}(x) \land \mathsf{hračka}(x))
\end{gathered}
\tag{A_1}
$$

2. Hanka má dve autíčka.

$$\exists x\, \exists y(\mathsf{P}(x) \wedge \neg \mathsf{P}(y) \wedge \\ \mathsf{má}(\mathsf{Hanka}, x) \wedge \mathsf{autíčko}(x) \wedge \mathsf{má}(\mathsf{Hanka}, y) \wedge \mathsf{autíčko}(y)) \tag{A_2}$$

3. Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

$$\forall x(\mathsf{hračka}(x) \to \exists y\,(\mathsf{zakúpené\_v}(x, y) \wedge \mathsf{hračkárstvo}(y))) \tag{A_3}$$

4. Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

$$(\mathsf{dievča}(\mathsf{Hanka}) \wedge \\ \exists x(\mathsf{má}(\mathsf{Hanka}, x) \wedge \mathsf{bábika}(x) \wedge \exists y(\mathsf{má}(x, y) \wedge \mathsf{červené}(y) \wedge \mathsf{šaty}(y)))) \tag{A_4}$$

5. Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

$$\forall x\, \forall y(\mathsf{mama}(x, y) \to \exists z(\mathsf{hračka}(z) \wedge \mathsf{kúpi}(x, y, z))) \tag{A_5}$$

6. Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

$$\forall x(\mathsf{dievča}(x) \to \\ (\exists y(\mathsf{má}(x, y) \wedge \mathsf{hračka}(y) \wedge \mathsf{chlapčenské}(y)) \to \mathsf{matfyzáčka}(x))) \tag{A_6}$$

Zistite pomocou rezolvencie, či v takomto prípade platí, že *ak každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku, tak sa Hanka stane matfyzáčkou*. Teda, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ vyplýva formula:

$$\forall x\,\big(\mathsf{dievča}(x) \to \exists y(\mathsf{má}(x, y) \wedge \mathsf{dievčenské}(y) \wedge \mathsf{hračka}(y))\big) \\ \to \mathsf{matfyzáčka}(\mathsf{Hanka}) \tag{X}$$

7.3.3 Uvažujme klauzálnu teóriu v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{E7}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{spoj}^3, \mathsf{el}^2, \mathsf{bus}^2\}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{B}^2, \mathsf{prestup}^2\}$:

$$\begin{aligned} T = \big\{ &\neg\mathsf{el}(x, y) \vee \mathsf{el}(y, x), \\ &\neg\mathsf{el}(x, y) \vee \mathsf{spoj}(x, y, \mathsf{E7}), \\ &\neg\mathsf{bus}(x, y) \vee \mathsf{spoj}(x, y, \mathsf{B}(x, y)), \\ &\neg\mathsf{spoj}(x, y, s_1) \vee \neg\mathsf{spoj}(y, z, s_2) \vee \mathsf{spoj}(x, z, \mathsf{prestup}(s_1, s_2)) \big\} \end{aligned}$$

a formulu

$$X = \big(\big(\mathsf{bus}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \wedge \exists x(\mathsf{el}(\mathsf{b}, x) \wedge \mathsf{el}(\mathsf{c}, x))\big) \to \exists x\, \mathsf{spoj}(\mathsf{a}, \mathsf{c}, x)\big).$$

Dokážte pomocou rezolvencie, že $T \models X$.

7.3.4 (Novak [3]) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia a dokážte rezolvenčným kalkulom, že $\{A_1, \dots, A_4\} \vDash X$:

(A_1) Psy v noci zavýjajú.

(A_2) Kto má mačku, nemá myši.

(A_3) Tí, čo majú ľahký spánok, nemajú nič, čo v noci zavýja.

(A_4) Juro má mačku alebo psa.

(X) Ak má Juro ľahký spánok, tak nemá myši.

7.3.5 (Novak [3]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

(V_1) Každý vták spí na nejakom strome.

(V_2) Potáplice sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

(V_3) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

(V_4) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \dots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Sformalizujte a zodpovedzte pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu nasledujúcu otázku:

   Je pravda, že každá potáplica sa živí rybami?

7.3.6 (Novak [3]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

1. Každý, kto jazdí na nejakom Harleyi, je drsňák.
2. Všetci motorkári jazdia na niečom, čo je buď Harley alebo BMW.
3. Každý, kto jazdí na nejakom BMW, je karierista.
4. Každý karierista je právnik.
5. Dobré dievčatá nerandia s drsňákmi.
6. Danka je dobré dievča a Jonáš je motorkár.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{B_1, \dots, B_6\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Pre nasledujúcu otázku sformulujte príslušný logický problém a zodpovedzte problém aj otázku pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu:

   Je na základe tvrdení 1–6 pravda, že ak Jonáš nie je právnik, tak s ním Danka nerandí?

7.3.7 Použite rezolvenciu na riešenie úloh 5.4.3–5.4.10.

7.3.8 (Pre ambicióznych, „Schubertov parný valec“; Schubert [3, 4]) Uvažujme nasledujúci úsudok:

> Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them. Also there are some grains, and grains are plants. Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants. Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which in turn are much smaller than wolves. Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails. Caterpillars and snails like to eat some plants.
>
> Therefore there is an animal that likes to eat a grain-eating animal.

Dokážte (napríklad rezolvenciou), že tento úsudok je správny.

8 Časté chyby na skúške

Pripravili sme zoznam bežných chýb, ktorý pokrýva väčšinu problémov, za ktoré sa na skúške strácajú body:

Formalizácia.

a) *Z funkčného symbolu* možno zostaviť *term*, nikdy však nie atóm. *Atóm* vzniká použitím *predikátu na term*. Táto chyba sa bežne vyskytuje pri formalizácii a skolemizácii. Napr. ak P, Q sú predikáty a f je funkčný symbol, tak $P(x) \to f(x)$ *nie je* syntakticky správna formula, kým $P(x) \to Q(f(x))$ *je* syntakticky správna.

b) *Atóm nie je term*, teda ak P, Q sú predikáty, tak $P(x) \to Q(P(x))$ *nie je* syntakticky správna formula.

Ak sa vám nedarilo s formalizáciou z iných dôvodov, pozrite si aj sekciu 7.11 *Vyhýbanie sa chybám* zo 7. prednášky.

Tablá. Tablo je formalizácia dôkazu. Pointa je, že dôkaz musí byť *plne algoritmicky verifikovateľný*. Preto možno využívať *len dohodnutú sadu pravidiel*, všetko mimo nich je neprípustné.

a) Možnosť využitia základných pravidiel α, β, γ, δ priamo vyplýva zo štruktúry formuly a jej znamienka **T**/**F**: Napr. ak mám formulu **T** $\forall x(P(x) \land Q(x))$, *nemôžem* použiť pravidlo α na konjunkciu, pretože konjunkcia je „vnútri“ formuly. Najprv musí prísť použitie γ.

b) Rovnako ani odvodené korektné pravidlá (príklad 4.4.1, γ^*, δ^*) *nemožno* používať na spojky či kvantifikátory „vnútri“ formuly.

c) Špeciálne nie je dovolené len tak vymeniť formulu za ekvivalentnú (alebo pripísať do vetvy logický dôsledok, ktorý nemožno získať použitím pravidiel). Pretože to, že dve formuly sú ekvivalentné, je vo všeobecnosti ťažké posúdiť, musel by k tomu byť pribalený aj dôkaz, ktorý možno krok po kroku verifikovať. Problém ekvivalentnosti formúl prvorádovej logiky, splniteľnosti či platnosti formuly je vo všeobecnosti nerozhodnuteľný (podobne ako problém zastavenia Turingovho stroja).

d) Taktiež nie je povolené prehlásiť, že z troch formúl na vetve máme spor. Ten spor možno logicky vyplýva, ale opäť, logické vyplývanie nie je algoritmicky rozhodnuteľné vo všeobecnosti (lebo by sme museli „preveriť“ všetky štruktúry, a niektoré sú nespočítateľné nekonečné). Preto ten spor musíte rozpísať do tablových pravidiel (napr. nejaký Leibnitz pre vysporiadanie sa s rovnosťou termov) a nakoniec vetvu uzavrieť na základe výskytu *identickej* formuly s rôznymi znamienkami (jeden výskyt s **T**, druhý s **F**).

e) Nemôžete len tak zmeniť znamienko **T** na **F** či naopak a prepísať formulu, napr. zmenou kvantifikátorov na opačné atď. Také pravidlo v tablách nemáme, s výnimkou použitia α na formulu, ktorá je negáciou inej.

f) Pri použití pravidla δ treba *vždy novú premennú*, nie takú, čo sa už na tej vetve v niektorej formule nachádza ako voľná. A môže to byť *len premenná*, nie všeobecný term.

g) Pri pravidle γ môžeme dosadiť „hocičo“, lenže to „hocičo“, čo substituujeme za premennú, *musí byť term*, nemôžeme dosadiť formulu. Teda napr. ak a je konštanta, f je funkčný symbol a P je predikát s aritou jedna, substitúcie $\{x \mapsto a\}$, $\{x \mapsto f(y)\}$, alebo $\{x \mapsto g(x, f(a))\}$ sú OK, no $\{x \mapsto P(f(y))\}$ už nie. Väčšinou (ale nie je to pravidlo) je výhodné použiť práve nejaký term, ktorý sa už v nejakej formule na danej vetve vyskytuje. *Takmer nikdy* nám s dôkazom nepomôže, ak do γ dosadíme *novú* premennú.

h) Pravidlo γ môžeme použiť na tú istú formulu *ľubovoľne veľakrát* (s rôznymi substitúciami).

i) V pravidlách $\gamma, \delta, \gamma^*, \delta^*$ sa dá *substituovať iba za premenné* (ak a je konštanta, f funkčný symbol, tak substitúcie $\{a \mapsto x\}$, $\{f(x) \mapsto y\}$ a pod. *nie sú možné*.

j) Pri použití Leibnitzovho pravidla záleží na poradí referencií. Prvá musí byť *rovnosť označená* **T**. Takisto *záleži na poradí termov v tejto rovnosti*: Term naľavo je ten, ktorý nahrádzame; term napravo je ten, ktorým ho nahrádzame.

k) Každý krok musí byť zdôvodnený; ak použijete nejakú axiómu, tak napíšte napr. "reflexivita rovnosti" alebo aspoň "axióma". Ak odovzdáte čosi, čo by sa dalo uznať ako neformálny dôkaz, ale nie je to tablo, nemôžete očakávať veľa bodov.

l) V tablách s prvorádovými formulami pre úplnosť vetvy nepostačuje definícia, ktorú sme používali vo výrokovologických tablách (lebo pravidlo γ môžeme použiť na tú istú formulu ľubovoľne veľakrát s rôznymi substitúciami). Ak si myslíte, že vetva nie je uzatvoriteľná *musíte* príslušné nevyplývanie demonštrovať nájdením štruktúry, v ktorej je teória pravdivá a dokazovaná formula nie.

Rezolvencia. Rezolvencia je *alternatívny* dokazovací mechanizmus k tablám. Najprv prevedieme všetky formuly do špeciálneho tvaru (CNF, klauzuly), a potom máme dve pravidlá: faktorizácia (nezabudnite ju explicitne spomenúť, ak používate) a rezolvencia.

a) Formulu, ktorej vyplývanie dokazujete, musíte *najprv* znegovať, až potom upravovať na klauzulu/klauzuly. K úprave si pozrite odsek *Úprava do klauzálnej formy* nižšie.

b) Rezolvenčné odvodenie nemá vetvy, je to len postupnosť formúl (klauzúl).

c) Klauzula vnútri obsahuje len $\vee$, ak tam máte $\wedge$, treba to rozdeliť do viac klauzúl.

d) Formulu možno ako vstup do rezolvencie použiť *ľubovoľne veľakrát*.

e) Zapisujte aj použité substitúcie (unifikátor), nie len ktoré formuly sú vstupom do rezolvencie.

f) Výsledkom rezolvencie pre klauzuly s m a n literálmi je formula s $m + n - 2$ literálmi (napr. z $3 + 2$ má ostať $2 + 1$); kontrolujte si to buď priebežne, alebo na záver.

g) V jednej z rezolvovaných klauzúl môžete premenné pred unifikáciou *premenovať nezávisle* od druhej klauzuly. Premenúvajú sa *iba premenné na premenné*, nikdy nie na konštanty alebo komplikovanejšie termy.

h) *Substituovať sa dá iba za premenné.* Teda ani v premenovaní ani v unifikátore nie je možné substituovať *za* konštanty alebo termy s funkčnými symbolmi (ak a je konštanta, f funkčný symbol, tak substitúcie $\{a \mapsto x\}$, $\{f(x) \mapsto y\}$ a pod. *nie sú možné*).

i) Heuristiky:

   1. *Skúste sa zbaviť niektorého predikátu.* Napr. keď máme klauzuly $A(x) \vee B(y)$, $\neg A(x) \vee C(x)$, a predikát A sa už nikde inde nevyskytuje, tak jediná rezolvencia s A, ktorá sa dá spraviť, je pre tieto dve formuly. Keď ju urobíme (s najvšeobecnejším unifikátorom), dostaneme formulu, ktorá už A neobsahuje, a je dobrá šanca, že už nikdy nič s A potrebovať nebudeme. Ak by sme mali klauzuly, kde je postupne A, A, $\neg A$, $\neg A$, na zbavenie sa

A treba 4 rezolvencie (aby sme dostali všetky možné dôsledky, čo A neobsahujú). Primárne sa teda snažíme zbaviť predikátu, ktorý sa *vyskytuje najmenej*.

2. *Preferujte jednotkové klauzuly* (výsledkom rezolvencie jednotkovej a m-literálovej klauzuly je $(m-1)$-literálová klauzula). Tiež preferujte *konkrétnejšie* klauzuly, teda také, v ktorých sa vyskytuje viac konštánt – poskytujú konkrétnejšiu informáciu a pracuje sa s nimi ľahšie.

Úprava do klauzálnej formy.

a) Nezabudnite na distribúciu $\vee/\wedge$, ak tam sú nejaké zátvorky vnútri formuly. Cieľom je dostať klauzuly. Klauzuly vo výsledku stačí zapisovať bez všeobecných kvantifikátorov.

b) Zadanie bežne vyžaduje explicitne zapísať nový jazyk, čo o.i. znamená vymenovať skolemovské konštanty a funkcie.

c) Všetky skolemovské symboly (konštanty, funkcie) musia byť *nové*, rôzne od symbolov v pôvodnom jazyku aj od seba navzájom v rámci *celej* teórie aj prípadnej cieľovej formuly.

d) Keď používate skolemovskú funkciu, jej argumentom musia byť len relevantné premenné (podľa oblasti platnosti kvantifikátorov), nie všetky, čo sa nachádzajú kdesi v okolí.

e) Presúvanie kvantifikátorov dopredu (PNF) robte až na konci, najprv NNF atď. Ak máte kdesi vnútri implikáciu, musíte ju naprv prepísať a spraviť NNF, nie skúšať presúvať kvantifikátory dopredu. Pri tom prepise sa môžu zmeniť (všeob. na existenčný a pod.).

f) Úpravu do NNF, hlavne ak je negovaná zložitá (pod)formula (napr. cieľ v rezolvencii), robte po malých krokoch. Skontrolujte si radšej dvakrát, či ste neprehliadli negáciu, správne prepísali implikáciu na disjunkciu, správne použili de Morganovské zákony pre spojky aj kvantifikátory.

Na úspešné absolvovanie skúškovej písomky treba 12 z 20 bodov. Za formalizáciu možno očakávať 2–3–4 body, neveľmi však 5 (je ťažké vyhnúť sa občasným prehliadnutiam či drobným chybám). Preto zo zvyšných 3 úloh treba mať *aspoň 1 kompletnú*. Ak viete skolemizáciu, stačí pri table a rezolvencii demonštrovať, že postupujete korektne a dostanete cca 3+3 body, čo stačí (a nemusíte ani úplne uzavrieť tablo, ani dokončiť dôkaz rezolvenciou — toto sú dve veci, kde sa nedá garantovať úspech, keďže pre prvorádovu logiku nevieme uzavrieť vetvu tabla ani algoritmicky ukončiť rezolvenciu — ide o nerozhodnuteľné problémy a ich vyriešenie pre konkrétny vstup si vyžaduje dobrý nápad).

Literatúra

[1] Dave Barker-Plummer, Jon Barwise, and John Etchemendy. *Language, Proof and Logic*. CSLI Publications, second edition edition, 2011.

[2] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[3] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html.

[4] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.

[5] Willard Van Orman Quine. *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston, revised edition, 1959.

[6] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.