صورت سوال: معادله زیر را برای یک میله از یک طرف نا متناهی با شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{۲} u(x,t)}{\partial x^{۲}}, \quad ۰ < x < \infty, t > ۰$$
$$u(۰,t) = ۱$$
$$u(\infty,t) = ۰$$
$$u(x,۰) = ۰, \quad ۰ < x < \infty$$

یکی از روش های متداول برای حل معادلات مشتقات جزئی به کمک کامپیوتر استفاده از روش المان محدود می باشد. فرض کنید می خواهیم معادله دما را به کمک روش المان محدود حل کنیم.

در این روش ابتدا طول محدودی که در زمان محدود تحت تغییرات دما قرار می گیرد محاسبه می کنیم به این منظور ابتدا از حل تحلیلی معادله به کمک تبدیل لاپلاس تابع $u(x,t)$ را بدست می آوریم در مرحله بعد طول محدودی که پس از آن تغییرات دما نا محسوس است را بدست می آوریم برای این کار باید:

u(x,t)= 1/exp(x)

abs(u(x,t=T)-u(x-ax,t=T))<0.0000000001

باشد تا طول محدود **L** حساب شود.

سپس مشتقات جزئی را با روابط زیر تقریب می زنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - ۲u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^{۲}}$$

آنگاه معادله مشتقات جزیی به معادلات زیر تبدیل می شود:

$$u(x,t+\Delta t) \approx u(x,t) + \frac{\Delta t}{\Delta x^{۲}}\left(u(x+\Delta x,t) - ۲u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right) \quad (۱)$$
$$u(۰,t) = ۱ \quad (۲)$$
$$u(L,t)=1/\exp(L) \quad (۳)$$
$$u(x,0)= 0 \qquad ۰ < x < L \quad (۴)$$

حال به کمک این معادلات تقریبی می توان $u(x,t)$ را بدست آورد. فرض کنید:

$$u_k^{(i)} = u(k\Delta x, i\Delta t), \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \quad 0<=i<=M$$

ابتدا در نظر میگیریم Δx =0.1 و Δt =0.00001

و M=T/ Δt

و $N = L/\Delta x$ آنگاه طبق شرایط اولیه و مرزی داریم:

$$\begin{aligned} u_k^{(0)} &= 0 \qquad 1 < k < L\,\Delta x \\ u_0^{(i)} &= 1, \quad i \geqslant 0 \\ u_N^{(i)} &= 1/\exp(L) \qquad 0<=i<=M \end{aligned}$$

پس تابع برای $i = 0$ کاملا مشخص است.

$$u_0^{(0)} = 1, u_k^{(0)} = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant N$$

حال به کمک رابطه (1) می توانیم $u_k^{(1)}$ را بدست آوریم.

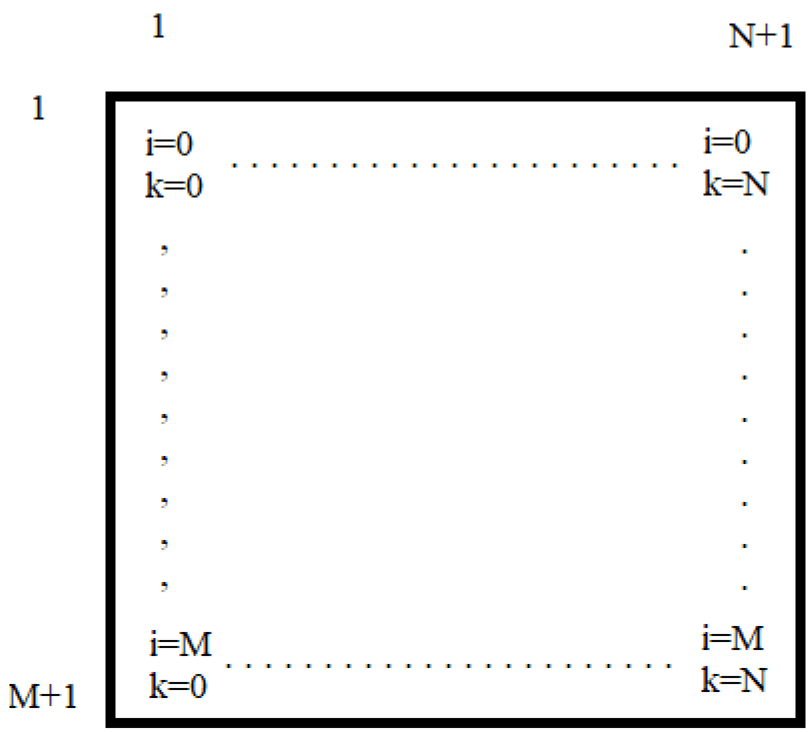
$$\begin{aligned} u_0^{(1)} &= 1 \\ u_1^{(1)} &= u_1^{(0)} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_2^{(0)} - 2u_1^{(0)} + u_0^{(0)}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ u_2^{(1)} &= u_2^{(0)} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_3^{(0)} - 2u_2^{(0)} + u_1^{(0)}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0 \\ &\vdots \\ u_{N-1}^{(1)} &= u_{N-1}^{(0)} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_N^{(0)} - 2u_{N-1}^{(0)} + u_{N-2}^{(0)}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0 \\ u_N^{(1)} &= 1/\exp(L) \end{aligned}$$

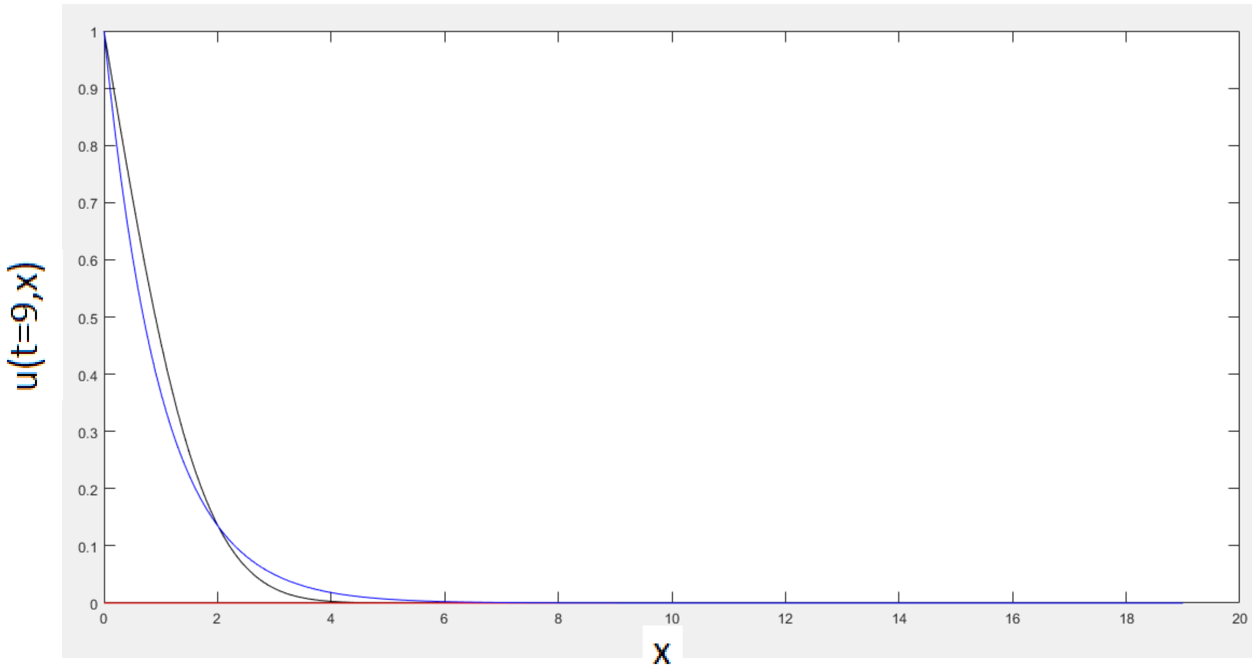
و به همین ترتیب به طور کلی داریم:

$$\begin{aligned} u_0^{(i+1)} &= 1 \\ u_k^{(i+1)} &= u_k^{(i)} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{k+1}^{(i)} - 2u_k^{(i)} + u_{k-1}^{(i)}\right) \quad , 1 \leqslant k \leqslant N-1 \\ u_N^{(i+1)} &= 1/\exp(L) \end{aligned}$$

در واقع ما یک ماتریس M * N داریم که مقدار عددی هر درایه با توجه به فرمول شماره (1) بدست می آید. هر سطر زمان ثابتی است و هر ستون مکانی بر محور افقی در طول میله است.

t=i*at x=k*ax u(x,t)=u(k*ax , i*at)





$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{۲} u(x,t)}{\partial x^{۲}}$$

$u(\circ, t) = ۱$

u(L,t)=1/exp(L)

u(x,0)= 0 $\circ < x <$ L

حل تحلیلی:

u(x,t)= 1/exp(x)

خط آبی نمودار حل تحلیلی وخط مشکی حل عددی در

t=9

L=0<x<18

را نشان می دهد

حال فرض می کنیم:

u(0,t)=sin(t)

u(∞,t)=0

u(x,0)=0

داریم:

u(x,t)=sin(t)/exp(x)

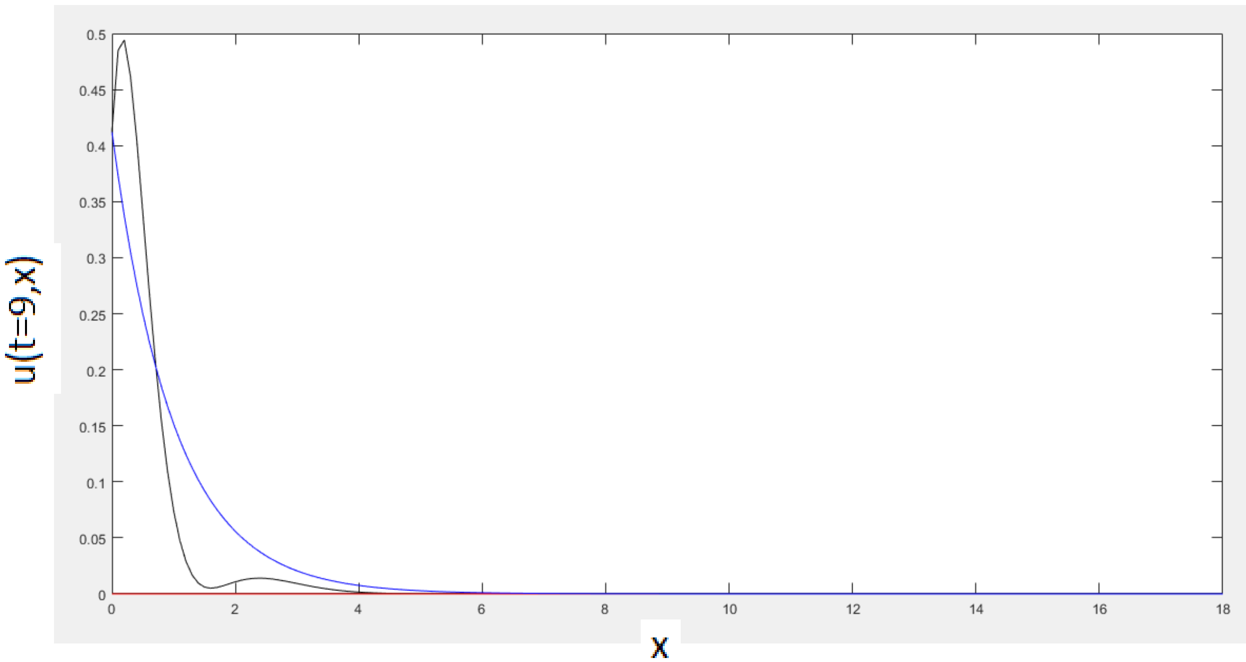
به روش مشابه روش قبل ابتدا طول محدود را محاسبه می کنیم سپس مراحل را یکی پس از دیگری سپری میکنیم با این تفاوت که:

u(0,t)=sin(t)

u(L,t)=sin(t)/exp(L)

u(x,0)=0   0<x<L

$$
\begin{aligned}
u_0^{(i+1)} &= \text{sin(t)} \\
u_k^{(i+1)} &= u_k^{(i)} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{k+1}^{(i)} - 2u_k^{(i)} + u_{k-1}^{(i)}\right) \quad , 1 \leqslant k \leqslant N-1 \\
u_N^{(i+1)} &= \text{sin(t)/exp(L)}
\end{aligned}
$$



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

u(0,t)=sin(t)

u(L,t)=sin(t)/exp(L)

u(x,0)=0   0<x<L

خط آبی نمودار حل تحلیلی وخط مشکی حل عددی در

t=9

L=0<x<19

را نشان می دهد.