

史瓦西时空的类时测地线研究

2017 级理论物理一班 傅淳浩

1. 研究目的

广义相对论场方程的史瓦西解作为最简单、最接近牛顿引力形式的时空解，其结构的研究能展现出一些对广义相对论相比经典力学而言的显著特征，并对广义相对论下物体运动问题的研究方法给出一些启示性的途径，作为测地线研究的起点再适合不过。

2. 理论推导

在时空中有能动量张量显著贡献的仅有一个质量恒为 M 的不带电质点时，以该质点为中心采用球坐标，并取特定的时间坐标，将能得到度规不含时的球对称解，即史瓦西解 ($x^0 = ct$)

$$-ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{-\nu} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

其中 $e^{\nu} = 1 - r_s/r$ ，而 $r_s = 2GM/c^2$ ，称为史瓦西半径。可见在 $r < r_s$ 时， $g_{00} = -e^{\nu}$ 大于 0，而 $g_{11} = e^{-\nu}$ 小于 0，从而由类时运动 $ds^2 > 0$ 知此时从外进入 $r = r_s$ 范围的试探物体在 r 方向只能不断向 $r = 0$ 的时空奇点前进，若其世界线切矢保持连续则不会再返回，这就显示史瓦西时空的中心有着一个视界面为 $r = r_s$ 的黑洞。

原则上自由守恒流物体的运动方程可由拉格朗日量 $L_0 = (-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)^{1/2}$ 构成的作用量变分为 0，这里 \dot{x}^μ 为物体质点的世界线关于其某一参数 σ 的切矢。然而这一拉格朗日量含有开方，不够简便，故通常也采用拉格朗日量 $2L_1 = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ ，在参数 σ 就是线长 s ，或 $ds = 0$ 时，其亦导出同样的运动方程——测地线方程，与 L_0 等价。

现在考虑物体在史瓦西时空中的类时运动，这时拉格朗日量为

$$2L_1 = (1 - r_s/r)u_0^2 - (1 - r_s/r)^{-1}u_r^2 - r^2u_\theta^2 - r^2\sin^2\theta u_\varphi^2,$$

这里将具体坐标的切矢 $u^\mu = dx^\mu/ds$ 为简明起见写为下标。再不妨取轨道平面为 $\theta = \pi/2$ ，由拉格朗日方程就能直接得出两个守恒量：

$$E \equiv \partial L_1 / \partial u_0 = (1 - r_s/r)u_0,$$

$$L \equiv -\partial L_1 / \partial u_\varphi = r^2 u_\varphi,$$

它们分别对应史瓦西时空中的能量守恒与角动量守恒。而由 $ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 有

$2L_1 = 1$ ，从而物体运动方程的最后一个（总共只有 $n = 4$ 个独立的运动方程）可由 L_1 的形式得为

$$(dr/ds)^2 + (1 - r_s/r)(1 + L^2/r^2) = E^2,$$

这里的一阶导数平方项、能量、坐标的函数的组合让人想到经典力学中的一维势能问题 $E = T + V$ ，而在数学上确实有着类似的效果——若记有效势函数

$$V^2(r) = (1 - r_s/r)(1 + L^2/r^2),$$

则有 $(dr/ds)^2 + V^2(r) = E^2$ ，且再次对 s 求导可得

$$d^2r/ds^2 = -1/2 \cdot d(V^2)/dr,$$

从而物体只能在 $E^2 \geq V^2(r)$ 处运动，且 $V^2(r)$ 的极小与极大值点处分别对应稳定与不稳定平衡点——换句话说， r 不变的圆形轨道。

对 $d(V^2)/dr = 0$ 求解可以得到，在 $L^2 > 3r_s^2$ 时有效势具有两个极值点：

$$r_1 = \frac{L^2}{r_s} - L \sqrt{\frac{L^2}{r_s^2} - 3}, \text{ 极大值点, 靠内;}$$

$$r_2 = \frac{L^2}{r_s} + L \sqrt{\frac{L^2}{r_s^2} - 3}, \text{ 极小值点, 靠外;}$$

而在 $L^2 = 3r_s^2$ 时上面两极值点合并至 $r = 3r_s$ ，为史瓦西时空的最内稳定圆轨道。有效势形状随关于守恒量角动量 L 的变化可以软件绘制见到如右图（ L 的单位为 r_s ）。

最后值得提到的是：

（一）若取牛顿极限真空光速 $c \rightarrow \infty$ ，从而 $s = O(c)$ ，则由

$$L = O(c^{-1}), E = O(c^{-1}),$$

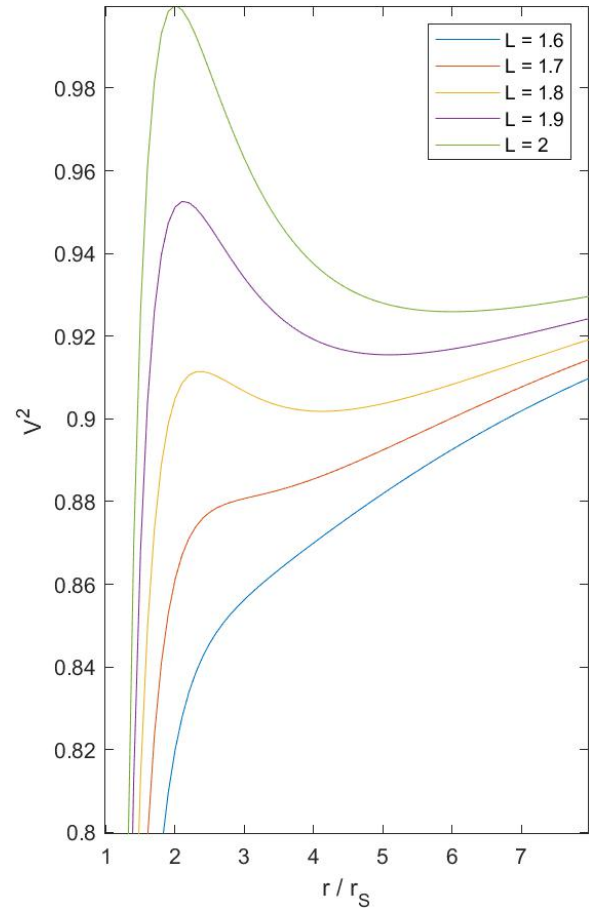
$$r_s = O(c^{-2}),$$

保留有效势函数的一级小量就有

$$V_{\text{Newton}}^2(r) = 1 - r_s/r + L^2/r^2,$$

此时 $(dr/ds)^2 + V_{\text{Newton}}^2(r) = E^2$ 经变换后即为牛顿引力理论中行星轨道的 Binet 方程，对束缚物体给出无进动的椭圆轨道。

（二）又若考虑由类时运动到类光运动的极限 $ds \rightarrow 0$ ，忽略掉有效势中非无



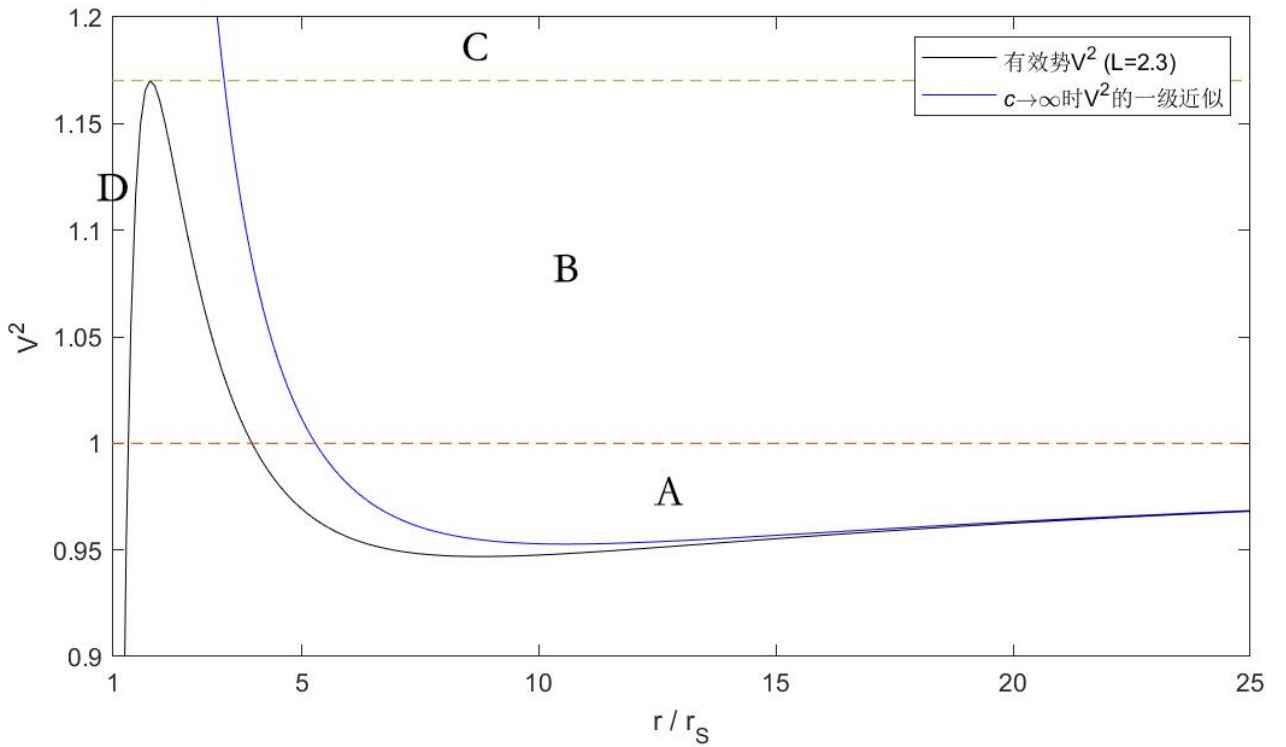
穷大的有限量即有

$$V_{\text{Light Limit}}^2(r) = (1 - r_s/r) \cdot L^2/r^2,$$

再将 $(dr/ds)^2 + V_{\text{Light Limit}}^2(r) = E^2$ 等号两端同乘以物体密度 ρ （此时趋于0且在能动量张量保持有限时 $d\lambda \equiv \rho^{1/2}ds$ 是正常的一阶全微分）以消除无穷大，则 $(dr/ds)^2$ 、 L^2 、 E^2 中的参数 s 变为参数 λ 而成为有限值，得到类光运动物体的运动方程。

3. 史瓦西时空的类时测地线模式与轨道方程

一个典型的有效势展现出史瓦西时空中取决于守恒量能量 E 的四种类时运动模式，以 $L = 2.3r_s$ 的有效势为例：（图中蓝线即为前述 V_{Newton}^2 ）



模式 A, $E^2 < 1$ 且 $r_0 > r_1$: 物体被束缚在黑洞周围，但无法靠近视界；

模式 B, $1 \leq E^2 < V_{\text{max}}^2$ 且 $r_0 > r_1$: 物体可远离黑洞至无穷远处，但无法靠近视界；

模式 C, $E^2 \geq V_{\text{max}}^2$: 物体可远离黑洞至无穷远处，也可进入视界撞上奇点；

模式 D, $E^2 < V_{\text{max}}^2$ 且 $r_0 < r_1$: 物体无法逃脱黑洞的引力，必然进入视界撞上奇点。

模式 C 与模式 D 是广义相对论的独特模式，其给出了撞上引力中心奇点的可能。本文即通过实现这四种行为模式来研究史瓦西时空类时测地线。

考虑到 $d^2r/ds^2 = -1/2 \cdot d(V^2)/dr$, $L = r^2 d\phi/ds$, 轨道方程就可写为

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 2r^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{r_s}{2L^2} r^2 + r - \frac{3}{2} r_s,$$

若做变量代换 $u = 1/r$ ，则方程能化为更简单的无一阶导项的形式而便于解析求解，但为数值求解的准确性，这里仍采用 r 变量。由 $(dr/ds)^2 + V^2(r) = E^2$ ，这一方程的初始一阶导数也可通过能量 E 与初始 r 坐标 r_0 写为

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = \pm \frac{\sqrt{E^2 - V^2(r_0)}}{L} \cdot r_0^2,$$

其中正负号的选取决定初始的运动方向，正为远离黑洞，负为靠近黑洞。

另外：若取有效势为 $V_{\text{Newton}}^2(r)$ 或忽略掉牛顿极限 $c \rightarrow \infty$ 时方程中的无穷小，

就得到牛顿引力下 Binet 方程的 r 变量形式 $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 2r^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{r_s}{2L^2} r^2 + r$ ；若考虑

类光极限 $ds \rightarrow 0$ 时 $L \rightarrow \infty$ ，忽略掉方程中的无穷小就得到类光运动物体的轨道

$$\text{方程 } \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 2r^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r - \frac{3}{2} r_s。$$

4. 史瓦西时空的类时测地线图像

对上节 $L = 2.3r_s$ 的典型有效势，其极大值点 $r_1 \approx 1.80947r_s$ ， $V_{\text{max}}^2 \approx 1.17013$ ，极小值点 $r_2 \approx 8.77053r_s$ ， $V_{\text{min}}^2 \approx 0.946911$ 。记初始 $\varphi_0 = 0$ ，通过改变能量 E 的大小与初始位置 r_0 来决定试探质点的运动，就得到不同模式的类时测地线图像：

（一）模式 A

取 $r_0 = r_2$ ， $E^2 = V_{\text{min}}^2$ ，则得到稳定的圆形轨道如图 4.1。

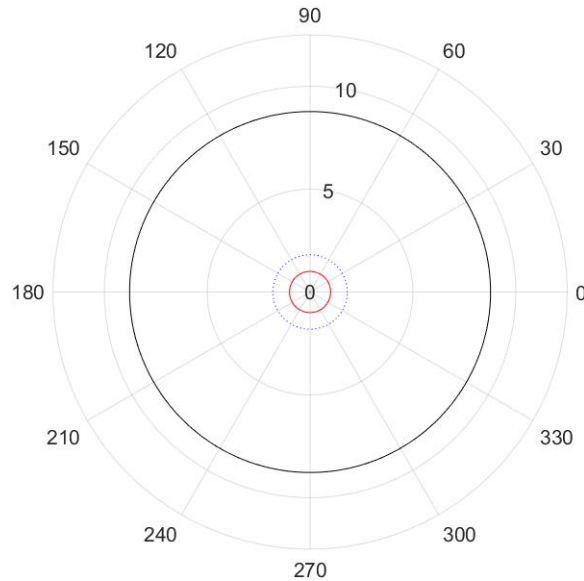


图 4.1 稳定圆形轨道上试探质点运动 50 周的轨迹

图中红色实线圈为视界在轨道面上的截线,蓝色虚线圈为有效势极大值点 r_1 ,后同不再复述。

而若改取 E^2 为稳定圆形轨道 r_2 附近的某 r_c 点处的有效势值,则轨道运行振荡在 $V^2(r_c)$ 的两个等势点间,运行将有进动,长时间内不闭合。轨道的能量越高(但仍保证模式 A 的能量条件 $E^2 < 1$),进动越明显,可达到与牛顿引力结果(即椭圆轨道)截然不同的形状。如图 4.2。

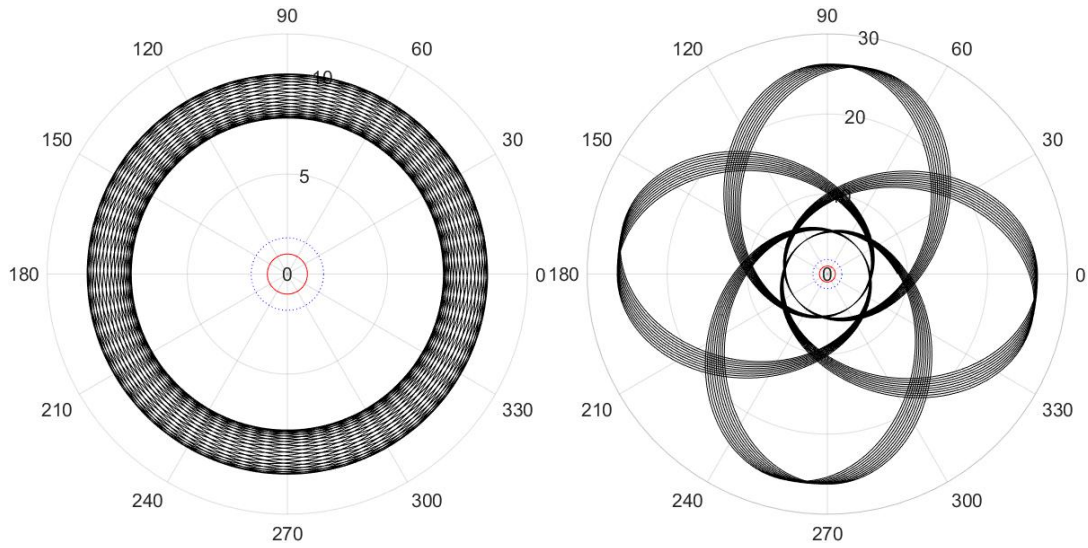


图 4.2 (左) $E^2 = V^2(10r_s)$ 试探质点运动 50 周轨迹, 被限制在两个等势点之间;

(右) $E^2 = V^2(5r_s)$ 试探质点运动 50 周轨迹, 若放大可见每条“丝带”上有 10 根线,

意味着每 5 周试探质点的轨迹就形成一次这样的形状

(二) 模式 B

取一大于 r_1 的初始位置如 $r_0 = 15r_s$, 以及一系列小于 $V_{\max}^2 \approx 1.17013$ 的能量 E^2 值, 并设初始运动偏向黑洞方向, 就得到对应模式 B 的一系列逐渐接近有效势极大值点但最终被偏折弹回至无穷远的轨道。轨道的能量越高(但仍保证模式 B 的能量条件 $E^2 < V_{\max}^2$), 则轨道距黑洞的最近点越靠内, 出射时相对于原方向的偏转亦越厉害。如图 4.3。

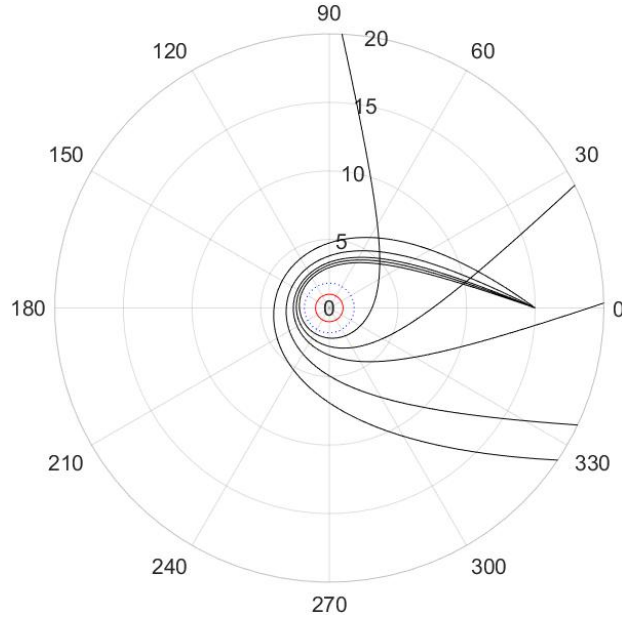


图 4.3 偏折轨道上试探质点的轨迹，从靠黑洞内到外 $E^2 = 1.15, 1.12, 1.095, 1.05, 1$

(三) 模式 C

在与（二）中相同的初始设定，即 $r_0 = 15r_s > r_1$ 且初始运动偏向黑洞方向的基础上，改取一系列大于 $V_{\max}^2 \approx 1.17013$ 的能量 E^2 值，就能得到对应向黑洞方向模式 C 的一系列越过有效势极大值点而到达视界的轨道（其后由理论推导中所述视界内 r 方向运动的不变向性，必然撞上 $r = 0$ 处的奇点）。轨道的能量越高，其就相对于原方向越少偏转地进入视界。如图 4.4。

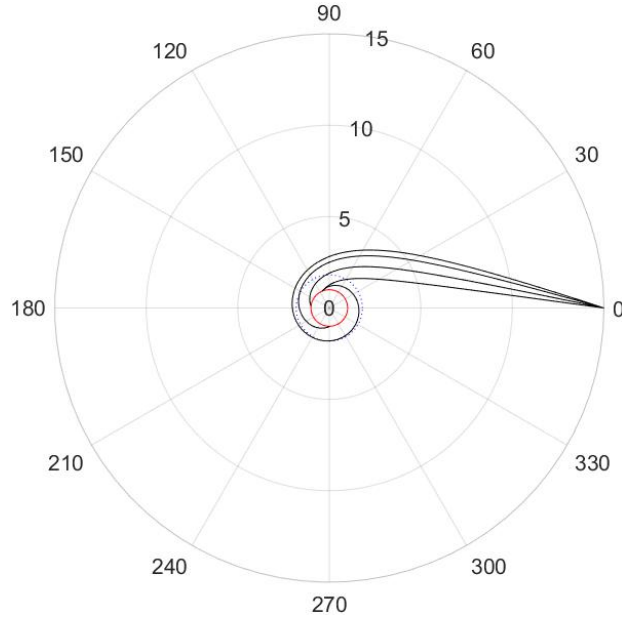


图 4.4 到达视界轨道上试探质点的轨迹，从靠黑洞内到外 $E^2 = 2.2, 1.5, 1.25, 1.175$

结合（二）中的模式 B 轨道图像可见，在 $E^2 = V_{\max}^2$ 时，试探质点在到达有

效势极大值点后应会持续运行于该点处对应的不稳定圆形轨道 $r = r_1$ 上，但由于这一不稳定圆形轨道上的试探质点受到轻微扰动即会脱离，数值求解方法本身的误差使得演算出这样的轨道是难以实现的。

模式 C 还有背黑洞方向的分支——一系列从视界附近向外出发（或先从奇点向外出发至视界，视界内 r 方向运动的不变向性不要求初始方向必须偏向奇点）越过有效势极大值点，最终逃逸至无穷远的轨道。若取 $r_0 = r_S < r_1$ ，以及一系列大于 $V_{\max}^2 \approx 1.17013$ 的能量 E^2 值，并设初始运动背离黑洞方向，就得到这样要求的轨道系列如图 4.5。轨道的能量越高，则逃逸越直接（偏折更少）。

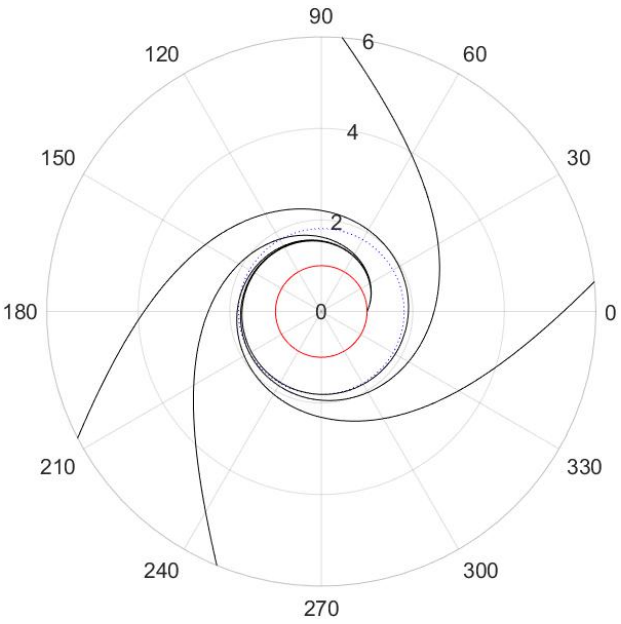


图 4.5 逃逸黑洞轨道上试探质点的轨迹，从靠黑洞内到外 $E^2 = 1.171, 1.175, 1.185, 1.25$

（四）模式 D

取一系列小于 r_1 的初始位置如 $r_0 = r_S$ ，以及一系列小于 $V_{\max}^2 \approx 1.17013$ 的能量 E^2 值，并为能够如同观赏斗兽一般观察试探质点试图逃逸黑洞，设初始运动背离黑洞方向，就得到无法越过有效势极大值点而必然落入视界面的一系列轨道。轨道的能量越高，轨道上试探质点的“挣扎”就越强烈——轨道绕视界运行更长后才进入视界。如图 4.6。

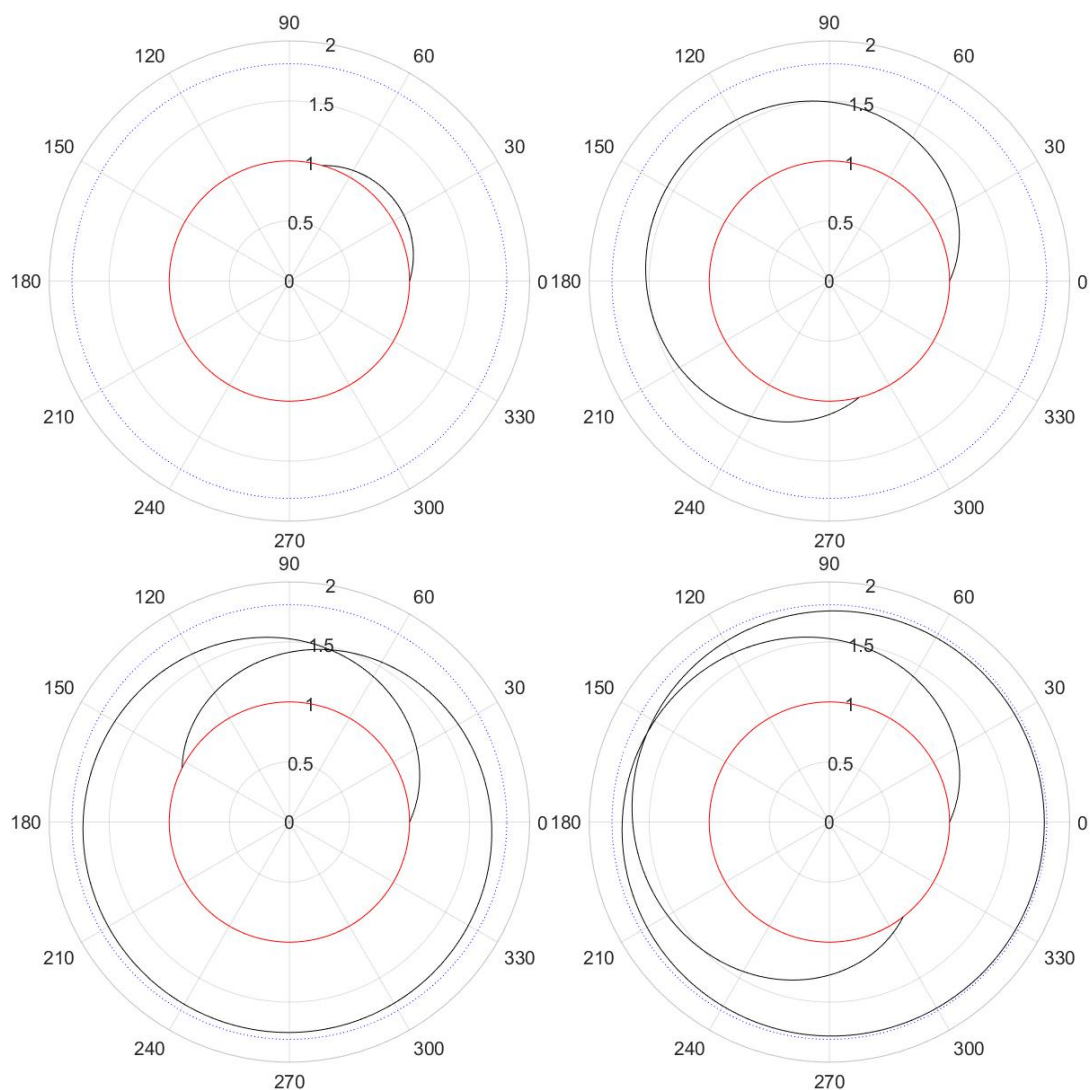


图 4.6 视界附近轨道上试探质点的轨迹，从左上到右下 $E^2 = 0.5, 1.14, 1.169, 1.17$

5. 总结

对史瓦西时空类时测地线的研究引出了有效势这一极有价值的研究方法。对 n 维时空找出 $(n - 1)$ 个守恒量即可写出剩余的一个自由坐标的有效势方程，而找出守恒量原则上总是可以做到的（如果可以，我想在之后的论文中加入阐述最近所推导的如何得到守恒量以及守恒量的形式 $f_\mu u^\mu$ 的部分），这就为时空结构的研究带来了一个一些情形下能更简单明晰的角度。

本文的计算机数值演算即绘图通过 MATLAB R2019a 软件进行，所用主要脚本可见作者的 GitHub 网站页面^[1]。

^[1] https://github.com/February-L/MATLAB-Work/blob/main/geodesic_line.m