Mapeamento

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão 2: 12/04/2020

Primeira versão: 26/03/2017

1 Introdução

O preço de um ativo financeiro pode depender dovalor (preço, taxa) de outros componentes mais básicos, como juros, spot, volatilidade etc. Estes componentes em geral têm séries de retorno guardadas em um banco de dados e, portanto, é mais fácil para a instituição computar o VaR de um instrumento mais genérico em termos das séries dos ativos mais básicos que são componentes do preço do referido instrumento. Além disso, é costume das instituições gerir o risco em termos das exposições que as carteiras apresentam em componentes básicos. Estes componentes básicos são os fatores de risco. Por exemplo, o preço de um futuro de dólar que vence em T é dado pelo spot S da data de apreçamento e os preços para o prazo T do cupom cambial, $P_{cupom}(T)$ e da pré $P_{pre}(T)$:

$$F(T) = S\frac{P_{cupom}(T)}{P_{pre}(T)}$$

Neste caso, os fatores de risco são o spot, o cupom e a pré.

A seguir mostraremos como mapear genericamente o risco (variância) de um instrumento nas variâncias de seus fatores de risco. Mostraremos, como aplicação, como um fluxo de caixa de um título é mapeado em vértices de uma curva. Também mostraremos que a regra de mapeamento de fluxos depende da convenção de interpolação da curva.

Começamos com uma seção sobre como calculamos retornos e variância.

2 Cálculo de Retornos e Variância

Partindo de uma série de preços de um ativo, o retorno entre um ponto i e $i+1$ é dado por:

$$r_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i} \tag{1}$$

Se o retorno for pequeno, podemos aproximar por diferenciais:

$$r_i = \frac{dP_i}{P_i} \tag{2}$$

O que equivale, de acordo com o cálculo, à

$$r_i = dlnP_i \tag{3}$$

Ou, ainda,

$$r_i = lnP_{i+1} - lnP_i = ln\frac{P_{i+1}}{P_i} \tag{4}$$

que é a forma conhecida de calcular retornos em finanças. Então, vimos que usar (2) está de acordo com (4). A média de retornos da série é dada por:

$$\mu = E\left[\frac{dP}{P}\right] \tag{5}$$

A variância por

$$\sigma^2 = E\left[\left(\frac{dP}{P}\right)^2\right] - \mu^2 \tag{6}$$

Uma carteira formada por dois ativos A e B, com pesos w_A e w_B tem retorno

$$r = w_A r_A + w_B r_B \tag{7}$$

E variância ($\sigma_{A,B}$ é a covariância entre os retornos de A e B)

$$\sigma^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{A,B} \tag{8}$$

$$\sigma_{AB} = E\left[r_A r_B\right] - E\left[r_A\right] E\left[r_B\right]$$

Em matriz,

$$\sigma^2 = w^{'} \Sigma w \tag{9}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{A,B} \\ \sigma_{A,B} & \sigma_B^2 \end{bmatrix}$$

Assim, se tiver à mão retornos de fatores de risco (neste exemplo, A e B), podemos tratá-los como ativos e calcular a variância de um instrumento, se soubermos expressar seu retorno como o de uma carteira formada por retornos de fatores de risco.

3 Mapeamento de um Instrumento: Fórmula Genérica

Considere o preço P de um ativo financeiro em função dos fatores de risco A e B, cujos retornos, volatilidades e covariâncias entre si sabemos calcular.

$$P = P(A, B) \tag{10}$$

A variação do preço P, em primeira ordem, em função dos valores (preços) de A e B é dada por[1]

$$dP = \frac{\partial P}{\partial A} dA + \frac{\partial P}{\partial B} dB \tag{11}$$

[1] Aqui distorcemos a notação e chamamos os preços de A e B por estes rótulos, ao invés de chamar P_A e P_B.

Ainda podemos reescrever:

$$\frac{dP}{P} = \left(\frac{\partial P}{\partial A}\frac{A}{P}\right)\frac{dA}{A} + \left(\frac{\partial P}{\partial B}\frac{B}{P}\right)\frac{dB}{B} \tag{12}$$

Então, se soubermos calcular estas derivadas, mesmo que numericamente, o que é feito na prática nas instituições financeiras, para não ter que implementar as derivadas analíticas caso a caso, podemos expressar o retorno do ativo de preço P em termos dos retornos dos preços de A e B. De fato, pelo que foi descrito na seção anterior, tomando a média em ambos os lados de (12),

$$r_P = \left(\frac{\partial P}{\partial A}\frac{A}{P}\right) r_A + \left(\frac{\partial P}{\partial B}\frac{B}{P}\right) r_B \tag{13}$$

Assim, o instrumento é expresso como uma carteira com pesos $\left(\frac{\partial P}{\partial A}\frac{A}{P}\right)$ e $\left(\frac{\partial P}{\partial B}\frac{B}{P}\right)$. Seu VaR pode ser calculado seguindo, por exemplo, (9), quando não desejarmos ainda calcular por Monte-Carlo ou Simulação Histórica.

4 Mapeamento do Fluxo de Caixa de Um Título de Renda Fixa

Considere o preço P_F de fluxo F, com vencimento T, descontado por uma taxa tx, cujo fator de desconto (preço) é P_T:

$$P_F = \frac{F}{(1+tx)^T} = F \cdot P_T \tag{14}$$

Aplicando (13), o retorno do preço do fluxo é dado por (só há um fator, a taxa tx):

$$r_F \equiv \left(\frac{\partial P_F}{\partial P_T}\frac{P_T}{P_F}\right) r_T \tag{15}$$

$$r_F = F\frac{P_T}{P_F} r_T = \frac{P_F}{P_F} r_T = r_T \tag{16}$$

Ou seja, o retorno percentual de P_F é o retorno percentual do fator de desconto, P_T , relativo à taxa. Em geral, não temos uma série disponível para o prazo T da taxa tx do fluxo do título. Mas temos em banco de dados as séries para os prazos T_1 e T_2 tal que $T_1 < T < T_2$. Então, estamos diante do caso em que P_T, por sua vez é expressa em termos de outros fatores de risco, P_1e P_2. Vimos quando estudamos interpolação exponencial (aqui particularizamos para um tipo específico de interpolação!!!) que o fator de composição f_T de um prazo T é obtido dos fatores de composição dos prazos vizinhos f_1 e f_2:

$$f_T = f_1 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)} \tag{17}$$

Como o preço, ou fator de desconto, de uma taxa é o inverso do fator de composição, isto é, $P_* = 1/f_*$,

$$P_T = P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)} \tag{18}$$

Definimos

$$\alpha = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \tag{19}$$

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}$$

Logo, em (18),

$$P_T = P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\alpha} = P_2^{\alpha} P_1^{1-\alpha} \tag{20}$$

Então, por (16) e agora expandindo r_T por (13):

$$r_F = r_T = \frac{dP_T}{P_T} = \left(\frac{\partial P_T}{\partial P_1}\frac{P_1}{P_T}\right)\frac{dP_1}{P_1} + \left(\frac{\partial P_T}{\partial P_2}\frac{P_2}{P_T}\right)\frac{dP_2}{P_2}$$

Assim, calculando as derivadas, simplificando e substituindo $dP_*/P_* = r_*$:

$$r_F = r_T = \frac{dP_T}{P_T} = \left((1-\alpha)\frac{P_T}{P_1}\frac{P_1}{P_T}\right) r_1 + \left(\alpha\frac{P_T}{P_2}\frac{P_2}{P_T}\right) r_2$$

$$r_F = (1-\alpha)\, r_1 + \alpha r_2 \tag{21}$$

Então, numa **curva de interpolação exponencial**, os fatores de mapeamento são a razão de distância do prazo aos vértices:

$$r_F = \left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right) r_1 + \left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right) r_2 \tag{22}$$

As notas de aula [Catalão] apresentam os mapeamentos para outros tipos de interpolação.

5 Exemplo

Na tabela da figura (5) são dadas as taxas $\{tx_i\}$ ao longo de $n = 10$ dias $(i = 1, ..., 10)$ de dois vértices T_j $(j = 1, 2)$, onde $T_1 = 1$ e $T_2 = 3$ anos. Os PUs são calculados como

$$PU_i(T_j) = \frac{1}{(1 + tx_i)^{T_j}} \tag{23}$$

$j = 1, 2$ e $i = 1, ..., 10$.

O retorno de um dia i $(i = 2, ..., n)$ do vértice j é dado por

$$r_{ij} = ln\left(\frac{PU_i(T_j)}{PU_{i-1}(T_j)}\right) \tag{24}$$

Para o cálculo de VaR usamos as relações estatísticas (n é o número de preços e $n-1$ retornos)

$$\mu_j = E[r_j] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} r_{ij} \tag{25}$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n} (r_{ij} - \mu_j)^2 \tag{26}$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n} (r_{i1} - \mu_1)(r_{i2} - \mu_2) \tag{27}$$

Considere um fluxo originário de um notional $N = 100$ e cupom (aa) de 6%, com frequência de pagamento semestral e vencimento de $T^{'} = 1,75$ anos, intermediário entre os vértices $T_1 = 1$ e $T_2 = 3$ anos . Fazemos a interpolação exponencial $tx_i(T')$ ao longo dos dias entre os vértices 1 e 2, calculando $PU_i(T')$ na data $i = 1, ..., n$ e retornos $i = 2, ..., n$. Os resultados estão na tabela da figura (5).

$$PU_i(T') = \frac{100 \times 6\% \times 0,5}{(1 + tx_i(T'))^{T'}} \tag{28}$$

$$r'_i = ln\left(\frac{PU_i(T')}{PU_{i-1}(T')}\right) \tag{29}$$

A tabela da figura (5) mostra que a matriz de variância-covariância a partir dos vértices, com pesos dados pelo mapeamento de duration

$$w_1 = \frac{T_2 - T'}{T_2 - T_1} = \frac{3 - 1,75}{3 - 1} = 0,625 \tag{30}$$

$$w_2 = \frac{T' - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{1,75 - 1}{3 - 1} = 0,375, \tag{31}$$

reproduz o VaR obtido pela série de retornos do ativo calculados com (25) e (26) na versão para o ativo.

	vértice 1 (ano)	vértice 2 (ano)	vértice 1 (ano)	vértice 2 (ano)		vértice 1 (ano)	vértice 2 (ano)	
	1	3	1	3		1	3	
dia	taxa		pu			retorno		aux p/ covariância
1	10,00%	12,30%	0,909090909	0,70609109				
2	11,00%	11,80%	0,900900901	0,715607015		-0,009049836	0,013386903	-7,46532E-05
3	15,00%	16,40%	0,869565217	0,634075626		-0,035401927	-0,120962924	0,002961363
4	13,00%	14,90%	0,884955752	0,65923448		0,01754431	0,038911051	0,001375657
5	12,57%	14,70%	0,888336146	0,662688976		0,003812568	0,005226482	0,00024244
6	12,50%	15,60%	0,888888889	0,647331138		0,000622029	-0,023447796	-4,03306E-05
7	13,50%	14,90%	0,881057269	0,65923448		-0,008849615	0,018221314	-7,89489E-05
8	16,00%	18,70%	0,862068966	0,597926557		-0,021787354	-0,09761135	0,001205247
9	16,40%	18,00%	0,859106529	0,608630873		-0,003442344	0,017744031	0,000114901
10	16,80%	18,50%	0,856164384	0,600959146		-0,003430535	-0,012685008	1,69085E-05
					volatilidade	0,015144202	0,055170514	
					média	-0,006664745	-0,017913033	
					covar	0,000715323		
					covar (excel)	0,000715323		

Figura 1: Dados de vértices de prazos 1 e 3 anos.

Fluxo:					
Notional	100				
cupom (aa)	6%	dia	taxa desconto interpolada	PU	retorno
freq	0,5	1	0,114731024	2,48069631	
vencimento (ano)	1,75	2	0,11513626	2,479118944	-0,00064
		3	0,158980542	2,317330628	-0,06749
		4	0,142177888	2,377317544	0,025557
peso inf	0,625	5	0,139346983	2,387664175	0,004343
peso sup	0,375	6	0,144831713	2,367681958	-0,0084
		7	0,143980286	2,370766648	0,001302
		8	0,177285749	2,254643868	-0,05022
Preço do fluxo	6,747728	9	0,174260623	2,264818395	0,004503
		10	0,178900353	2,249242774	-0,0069
				volatilidade	0,029205

Figura 2: Dados de fluxo de $T' = 1,75$ anos.

VaR via distribuição em Vértices			**VaR pela série do ativo**	
peso	0,625	0,375		
matriz covar	0,000229347	0,000715		
	0,000715323	0,003044		
variância da carteira	0,000852929		variância do fluxo	0,00085293
vol da carteira	0,029204942		vol do fluxo	0,02920494
alfa	0,9		alfa	0,9
VaR (ano)	2,815507695		VaR (ano)	2,815507695

Figura 3: Resultado: mapeamento reproduz VaR da posição individual.

Referências

[Catalão] Catalão, “Interpolação e Mapeamento de Vértices”. Notas de Aula.