Futuros

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Segunda versão: 06/04/2021

Primeira versão: 09/03/2020

1 Introdução

Neste documento são tratados os apreçamentos e algumas características dos contratos futuros.

2 Futuros

Um contrato futuro representa uma **obrigação** entre o vendedor e o comprador do contrato. Em geral, o vendedor entregará em uma data futura (**data de exercício**, **vencimento**, ou *maturity*), pré-estabelecida, o ativo-objeto (mercadoria, se preferir) do contrato. O contrato estipula o preço (**preço de exercício**, ou *strike*) ao qual o ativo-objeto será comprado nessa data futura, pelo comprador. É um contrato de bolsa, padronizado em lote e vencimento, e não se tem conhecimento sobre quem é a contraparte, já que a bolsa intermedia a transação.

O risco de contraparte é da bolsa. Para lidar com isso sistemicamente, a posição de cada contraparte é ajustada diariamente, através de uma conta de **margem**. No primeiro dia, o de **negociação** (*trade date*), o ajuste é feito pelo preço de fechamento oficial (há regras para determiná-lo, que dizem respeito à média de negociações nos instantes finais do pregão) em comparação com o preço negociado. Ou seja, o ajuste de margem representa uma movimentação financeira no dia em que ocorre e, portanto, representa a marcação a mercado para a posição. Nos dias seguintes, a posição começa (comprada ou vendida) no preço de fechamento do dia anterior e é fechada no preço de fechamento do dia. O valor a mercado, MtM_t, é dado pelo preço F_t, na data t, e o resultado *acumulado* até t do contrato de *strike* K e prazo T, é dado por

$$P\&L_t^a = Q\left(F_t - K\right) \tag{1}$$

onde Q é a quantidade negociada no dia da operação. Para ver este resultado matematicamente, o resultado acumulado é, também, a soma dos resultados diários $P\&L_i$, desde a data de negociação, $i = 0$, até a data t de apuração, $i = t$

$$P\&L_t^a = \sum_{i=0}^{t} P\&L_i, \tag{2}$$

mas, como foi dito, devido à dinâmica de margem,

$$P\&L_0 = Q\,(F_0 - K)$$

$$P\&L_1 = Q\,(F_1 - F_0)$$

$$P\&L_2 = Q\,(F_2 - F_1)$$

$$\vdots$$

$$P\&L_t = Q\,(F_t - F_{t-1})\,. \tag{3}$$

Ao somar esta evolução de resultados diários, obtemos (1).

Operacionalmente, as duas partes mantêm um depósito numa conta de margem, o que representa um custo de oportunidade, pois a mesma não é remunerada. As partes não precisam esperar até o vencimento, podendo sair do contrato montando uma posição contrária. Há contratos físicos e de liquadação somente financeira.

2.1 Exemplo de Movimentação de Margem

Um contrato de café custa $K = \$50/saca$ (preço de exercício), em t=0. Um investidor compra $Q = 100$ contratos. A tabela abaixo, na coluna F_t, mostra a evolução dos preços de fechamento, em cada dia, até o dia $t = 3$.

t	F_t	$Ajuste$	$Saldo\,Vendedor$	$Saldo\,Comprador$
0	55	$Q\,(F_0 - K) = 100\,(55 - 50) = 500$	-500	$+500$
1	53	$Q\,(F_1 - F_0) = 100\,(53 - 55) = -200$	$-500 - (-200) = -300$	$+500 + (-200) = 300$
2	49	$Q\,(F_2 - F_1) = 100\,(49 - 53) = -400$	$-300 - (-400) = +100$	$300 + (-400) = -100$
3	48	$Q\,(F_3 - F_2) = 100\,(48 - 49) = -100$	$+100 - (-100) = 200$	$-100 + (-100) = -200$

O vendedor ganha (perde) com a queda (alta) e o comprador perde (ganha).

2.2 Formação do Preço de um Contrato Futuro

Considere a situação em que um empresário assume um compromisso de entregar uma certa quantidade de mercadoria em uma data futura de vencimento V. Podem ser canetas, sacas de grãos, etc. Assuma que a mercadoria é uma commodity, isto é, não há distinção aparente entre diferentes unidades. Qual a maneira de garantir essa entrega futura?

A primeira maneira é comprar hoje esta mercadoria, para entregar na data futura. A outra maneira é produzir a mercadoria, incorrendo em custos.

Para que essa opção seja vantajosa, a variação de preço S_T/S_0, que se obterá com a venda da mercadoria em T, mais os custos (em forma de taxa ao ano, $y(t,V)$), que podem incluir um empréstimo, devem ser, no mínimo, igual a um depósito à taxa pré $tx(t,V)$, contratada em t para o período $T = V - t$. Diante disto, o preço em t do contrato futuro de vencimento V, para não possibilitar arbitragem, deve representar S_T.

$$\frac{S_T}{S_t}\left(1 + y(t,V)\right)^T = \left(1 + tx(t,V)\right)^T \tag{4}$$

$$F(t,V) = S_t \frac{\left(1 + tx(t,V)\right)^T}{\left(1 + y(t,V)\right)^T} \tag{5}$$

2.3 Contrato futuro de moeda

Um investidor brasileiro converte $R\$1$ em dólar, pela cotação $S_t^{BRL/USD}$, que denota quantos reais preciso para comprar 1 dólar ($R\$/USD$), obtendo $1/S_t^{BRL/USD}$ dólares. Com estes dólares, o investidor faz um depósito em um banco americano, pelo prazo T, a uma taxa $tx_{USD}(t,V)$, que ele obtém em t. Para não haver arbitragem com um depósito em reais, no Brasil, o dinheiro que o investidor resgata em T, deve ser igual ao investimento de $R\$1$ à taxa pré do mesmo prazo, que começa em t, $tx_{BRL}(t,V)$, convertido para dólar na cotação vigente na data T. Como não se conhece tal valor de dólar, deve-se travar a compra da quantidade pelo preço futuro, $F_{BRL/USD}(t,V)$.

$$\left[(1R\$) \times \frac{1}{S_t^{BRL/USD}}\right] \times \left(1 + tx_{USD}(t,V)\right)^T = \frac{1}{F_{BRL/USD}(t,V)} \times \left(1 + tx_{BRL}(t,V)\right)^T. \tag{6}$$

Logo,

$$F_{BRL/USD}(t,V) = S_t^{BRL/USD} \frac{(1+tx_{BRL}(t,V))^T}{(1+tx_{USD}(t,V))^T} \tag{7}$$

No Brasil, a taxa $tx_t^{USD}(T)$ é chamada de cupom cambial. Uma outra forma de compreender (7) é dizer que a depreciação cambial embutida, $F_{BRL/USD}(t,V)/S_t^{BRL/USD}$, composta com o rendimento do cupom cambial, $(1+tx_{USD}(t,V))^T$, deve ser igual ao rendimento advindo da pré, $(1+tx_{BRL}(t,V))^T$.

Na B3, a cotação do contrato futuro é na base 1000. Ou seja, ao invés de se utilizar um formato como a cotação à vista, na base 1, e.g. 4,50, usa-se 4500, no mesmo exemplo. Como ressaltado no início da seção (2), o ajuste diário (variação diária de P&L) é feito sobre o preço de ajuste do dia anterior, temos (Q é a quantidade)

$$A_t = P\&L_t = (F_t - F_{t-1}) \times Q \times 50. \tag{8}$$

Já a liquidação final, que ocorre no primeiro dia do mês, é baseada na cotação PTAX-800 de venda do dia anterior. Como a PTAX-800 está na base 1, a equação (8) deve ter o fator 50 alterado para 50.000. Então,

$$F_{t=V} = ptax_{t-1} \times Q \times 50.000 \tag{9}$$

2.4 Contrato futuro de ação (ou índice)

Seja a cotação à vista da ação, $S_t(BRL/ação)$. Com $1BRL$, pode-se comprar a quantidade $Q = 1BRL/S_t$ de ações em t. Estas ações podem ser alugadas à taxa $y(t,T)$ por ação e, ao serem devolvidas no vencimento, serem convertidas ao preço futuro da data $F(t,V)$, resultando, em $F(t,V) \times Q \times (1+y(t,V))^T$ BRL. Para não haver arbitragem, esse resultado deve ser igual ao rendimento de um depósito de $1BRL$ à taxa $tx_{BRL}(t,V)$ no período. Matematicamente,

$$F(t,V) \times Q \times (1+y(t,V))^T = 1BRL \times (1+tx_{BRL}(t,V))^T$$

$$F(t,V) \times \frac{1BRL}{S_t} \times (1+y(t,V))^T = 1BRL \times (1+tx_{BRL}(t,V))^T \tag{10}$$

Assim, a cotação do futuro de ação deve obedecer

$$F(t,V) = S_t \times \frac{(1+tx_{BRL}(t,V))^T}{(1+y(t,V))^T} \tag{11}$$

2.5 Contrato futuro de taxa real de juros

Uma possibilidade de um contrato futuro de inflação leva em conta a relação entre a taxa de juros real $r(T)$, a nominal $tx(T)$ (taxa pré, por exemplo) e a variação de inflação $\pi(t,T)$, dada pela relação de índices no período (t,T), $I\left(T\right)/I\left(t\right)$.

$$\left(1+\pi\left(t,V\right)\right)^T\left(1+r\left(t,V\right)\right)^T = \left(1+tx(t,V)\right)^T \tag{12}$$

$$\left(1+\pi\left(t,V\right)\right)^T = \frac{I\left(V\right)}{I\left(t\right)} \tag{13}$$

$$\therefore I\left(V\right) = I\left(t\right)\frac{\left(1+tx(t,V)\right)^T}{\left(1+r\left(t,V\right)\right)^T} \tag{14}$$

Contudo, é mais comum a bolsa lançar o contrato de juros reais, de forma que ao operar comprado (paga o preço) tal contrato, juntamente com um de taxa nominal, vendido (recebe o preço), o investidor fica aplicado na taxa de inflação do período.

2.6 Exemplo

A partir dos dados de quantidade=100, prazo=1,5 anos, taxa de juros pré(aa) = 5%, taxa de custos (aa)=1%, preço à vista = 50; o preço de um contrato futuro deve ser, aproximadamente, 53, como a figura abaixo demonstra.

quantidade	100				
taxa pré (aa)	0,05	(1+taxa pré)^T	=(1+0,05)^1,5	=	1,07593
taxa de custo (aa)	0,01	(1+taxa custo)^T	=(1+0,01)^1,5	=	1,015037
Spot	50				
prazo (a)	1,5	Spot*(1+taxa pré)^T/(1+taxa custo)^T	=50*1,07592983042576/1,01503743773321	=	52,99951

Figura 1: Exemplo de cálculo do preço de um contrato futuro.

3 Alguns Contratos Futuros Listados na B3

3.1 DI1

O preço unitário(PU) do contrato DI1, numa data t de negociação, é uma projeção sobre a realização futura, no prazo (T) entre a data de negociação (t) e o prazo de vencimento (V), do acúmulo das taxas diárias (*overnight*) de CDI. Esta projeção pode não se realizar, e isso determina o resultado do contrato. Matematicamente, o contrato paga $N = R\$100.000$ no vencimento. Isso significa que seu preço unitário na data de negociação, $PU_{DI}(t,T)$, deve ser N descontado pela taxa de juros no período $(t, t+T)$, que representa a projeção do CDI diário acumulado. Esta taxa de desconto é a chamada taxa *pré* e é expressa ao ano. O prazo T é calculado como o número de dias úteis entre a data de negociação t, inclusive, e a de vencimento V, exclusive, num ano de 252 dias úteis, ou seja, $T = DU(t,V)/252$. Temos

$$PU^{DI}(t,V) = \frac{100.000}{(1+pr\acute{e}(t,V))^T} \tag{15}$$

$$(1+pr\acute{e}(t,V))^T \leftrightarrow fcdi(t,V) = \prod_{i=t}^{V} (1+CDI_i)^{1/252} \tag{16}$$

Na convenção, comprar um contrato de DI1 significa que a taxa é comprada. Quando compramos qualquer coisa, estamos apostando que seu valor subirá. Então, no jargão, comprar uma taxa significa que apostar que seu valor subirá. Isso é equivalente a tomar dinheiro no mercado, pois um investidor toma dinheiro antes que a taxa suba, para emprestá-lo (ou dar dinheiro) quando a uma taxa alta. Quem "dá" (empresta) a uma taxa espera que a mesma irá cair.

Pelo lado do preço (PU), quando compramos um PU, esperamos estar pagando um valor que vai subir, para vendermos mais caro depois. Como a relação $PU - taxa$ é inversa, esperamos, então, ao comprar o PU, que a taxa *pré* vá cair (e, consequentemente, o PU subir, para que possamos vender o contrato e realizar lucro). Então, quem compra PU está dando a *pré* , no jargão.

Quanto ao resultado ($P\&L_{DI}$) de um contrato de DI1, representado pelo ajuste (A), entre a data de aquisição (t) e o vencimento ($V = t + T$), apura-se da seguinte forma

$$P\&L_{DI}(t, t+T) \equiv A(t, t+T) = 100.000 - PU_{DI}(t, V) \times fcdi(t, V) \tag{17}$$

Já num dia intermediário $t´ \in (t, V)$, entre a aquisição e o vencimento, o ajuste é como trazer este $P\&L_{DI}$ futuro a valor presente (cuidado: $T = V - t$ e $T´ = V - t'$)

$$P\&L_{DI}(t, t´) = [100.000 - PU_{DI}(t, V) \times fcdi(t, V)] \times \frac{1}{(1 + pré(t´, V))^{T´}} \tag{18}$$

Como, em $t´$, $fcdi(t, V)$ não se realizou completamente ainda- pois conhecemos a parte da composição de (16) referente à $(t, t´)$ e falta a parte $(t´, V)$- e, portanto, há só uma projeção no trecho desconhecido, que é justamente representada pelo $PU^{DI}(t', V)$, temos

$$P\&L_{DI}(t, t´) =$$

$$\frac{100.000}{(1 + pré(t´, V))^{T´}} - PU_{DI}(t, V) \times fcdi(t, t´) \times fcdi(t´, V) \times \frac{1}{(1 + pré(t´, V))^{T´}} = \tag{19}$$

$$PU_{DI}(t´, V) - PU_{DI}(t, V) \times fcdi(t, t´). \tag{20}$$

onde o fator de cdi acumulado entre duas datas t_1 e t_2, sob uma taxa de spread (usualmente dada em formato percentual) $\alpha\%$, é dado por[1]

$$fcdi(t_1, t_2, \alpha\%) = \prod_{i=t_1}^{t_2} \left\{ \left[(1 + CDI_i)^{1/252} - 1 \right] \times \frac{\alpha\%}{100} + 1 \right\}. \tag{21}$$

[1] No caso do DI1, usa-se $t_1 = t$ e $t_2 = t'$, com $\alpha\% = 100$, para a apuração do ajuste.

3.2 Futuro de dólar

O contrato futuro padronizado com tamanho de $N = US\$50.000,00$. Um contrato tem preço unitário (PU) em reais dado por

$$PU_{FUT}(t, V) = 50 \times PA(t, V) \tag{22}$$

onde PA, o preço de ajuste em dólar, deve respeitar a relação implícita

$$PA_{FUT}(t, V) = 1000 \times S_t^{BRL/USD} \times \frac{(1 + tx_{BRL}(t, V))^T}{(1 + tx_{USD}(t, V))^T} \tag{23}$$

No dia do vencimento (V), o valor de liquidação, quando o contrato futuro tende ao preço à vista, o valor de liquidação, VL, é

$$VL_V = Ptax_{V-1} \times N \times Q \tag{24}$$

onde $Ptax_{V-1}$ é a PTAX-800 divulgada pelo BACEN (depois da última janela de coleta, 13:10h) do dia anterior ao vencimento.

A taxa suja $txSuja_t^{USD}(T)$ aparece devido à taxa PTAX-800 divulgada em $t-1$ da negociação, que ocorre em t. A taxa limpa de cupom cambial surge quando escrevemos (22) em termos do spot do dia, como em (7), ou seja, $txLimpo_t^{USD}(T) \equiv tx_t^{USD}(T)$

$$PU_{FUT}(T) = N \times S_t^{BRL/USD} \times PA_{limpo}(T) = N \times S_t^{BRL/USD} \times \frac{\left(1 + tx_t^{BRL}(T)\right)^T}{\left(1 + txLimpo_t^{USD}(T)\right)^T} \tag{25}$$

É claro que o preço unitário, em qualquer das convenções de taxa, limpa ou suja, deve ser igual. Isto permite escrever uma fórmula de conversão

$$\frac{S_t}{\left(1 + txLimpo_t^{USD}(T)\right)^T} = \frac{Ptax_{t-1}}{\left(1 + txSuja_t^{USD}(T)\right)^T} \tag{26}$$

O resultado do contrato futuro, como há o mecanismo de margem, é apurado todos os dias, conforme a seção (2).

3.3 DDI

Contrato futuro de taxa de juros de cupom cambial. Também no DDI o objeto de negociação (compra/venda) é a taxa. O contrato corresponde ao contrato de DI1 para uma taxa de dólar, ou a um swap dólar-DI, como veremos adiante; daí o nome DDI. Tem valor de face $US\$100.000,00$, e deve ser multiplicado pela PTAX-800, $Ptax_{t-1}$, do dia anterior da negociação t para que haja a liquidação. O preço unitário (PU), em t, dado em dólar, corresponde ao valor de face descontado pela taxa de juros de cupom cambial (formato linear, dias corridos) de um contrato de vencimento $V = T + t$, é dado por

$$PU_{DDI}^{sujo}(t,V) = \frac{100.000}{\left(1 + tx_{USD}^{sujo}(t,V) \times T\right)} \tag{27}$$

onde $tx_{USD}^{sujo}(t,V)$ é a taxa de juros representada pelo cupom cambial. Recebe a denominação *suja* porque a o valor de liquidação no dia t ($VL(t,V)$) é transformado em reais pela cotação de PTAX-800 de $t-1$, $Ptax_{t-1}$, divulgada pelo BACEN, da seguinte maneira

$$VL(t,V) = 0,5 \times PU_{DDI}^{sujo}(t,V) \times Ptax_{t-1} \times Q \tag{28}$$

Em termos de uma conversão pela cotação do momento da aquisição, $S_t^{BRL/USD}$, podemos falar da taxa limpa, $tx_{USD}^{sujo}(t,V)$, e do PU limpo, $PU_{DDI}^{limpo}(t,V)$

$$PU_{DDI}^{limpo}(t,V) = \frac{100.000}{\left(1 + tx_{USD}^{limpo}(t,V) \times T\right)} \tag{29}$$

$$VL(t,V) = 0,5 \times PU_{DDI}^{limpo}(t,V) \times S_t^{BRL/USD} \times Q \tag{30}$$

O PU oficial é o sujo, contudo. O PU limpo é um subterfúgio que o mercado usa para negociar o preço do contrato numa base mais intuitiva. Como a liquidação deve ser a mesma, temos, ao igualar (28) e (30)

$$\frac{S_t}{\left(1 + tx_{USD}^{limpo}(t,V) \times T\right)} = \frac{Ptax_{t-1}}{\left(1 + tx_{USD}^{sujo}(t,V) \times T\right)}. \tag{31}$$

Claramente, podemos escrever a equação (23) de um contrato futuro de dólar em termos da taxa suja (linear, dias corridos)

$$PA_{FUT}^{sujo}(t,V) = 1000 \times Ptax_{t-1} \times \frac{\left(1 + tx_{BRL}(t,V)\right)^{T}}{\left(1 + tx_{USD}^{sujo}(t,V) \times T\right)}$$

Da mesma forma que o contrato de DI1, o contrato DDI representa uma expectativa sobre o valor da taxa em dólar *overnight* (denotemos por $txSujo_{USD}^{Over}(i)$), conhecida como *linha*, entre a taxa de negociação (t) e a de vencimento (V)

$$\left(1 + tx_{USD}^{sujo}(t,V) \times T\right) \leftrightarrow fSujo_{USD}^{Over}(t,V) = \prod_{i=t+1}^{V} \left(1 + tx_{USD}^{Over}(i) \times \frac{1}{360}\right). \tag{32}$$

Em termos de taxas conhecidas, a PTAX-800 e o CDI *overnight*, temos

$$\left(1 + tx_{USD}^{Over,}(i) \times \frac{1}{360}\right) = \frac{\left(1 + CDI_i\right)^{1/252}}{\frac{Ptax_{i-1}}{Ptax_{i-2}}} \tag{33}$$

$$\left(1 + tx_{USD}^{sujo}(t,V) \times T\right) = \prod_{i=t}^{V} \left[\frac{\left(1 + CDI_i\right)^{1/252}}{\frac{Ptax_{i-1}}{Ptax_{i-2}}}\right] \tag{34}$$

Em termos de cotações de spot, teríamos a taxa limpa

$$\left(1 + txLimpo_{USD}^{Over}(i) \times \frac{1}{360}\right) = \frac{\left(1 + CDI_i\right)^{1/252}}{\frac{S_i}{S_{i-1}}} \tag{35}$$

$$\left(1 + tx_{USD}^{Limpo}(t,V) \times T\right) \leftrightarrow fLimpo_{USD}^{Over}(t,V) = \prod_{i=t+1}^{V} \left[\frac{\left(1 + CDI_i\right)^{1/252}}{\frac{S_i}{S_{i-1}}}\right] \tag{36}$$

De forma análoga ao contrato de DI1, o resultado em dólar ($P\&L_{DDI}^{USD}(t,t')$) no intervalo de datas (t,t') é dado por

$$P\&L_{DDI}^{USD}(t,t') = PU_{DDI}^{limpo}(t',V) - PU_{DDI}^{limpo}(t,V) \times fLimpo_{USD}^{Over}(t,t') \tag{37}$$

E em reais, o contrato manda que multipliquemos pelo valor-ponto ($M = 0,5$), além da cotação do dólar.

$$P\&L_{DDI}^{BRL}(t,t\acute{}) = \left[PU_{DDI}^{limpo}(t\acute{},V) \times S_{t\acute{}} - PU_{DDI}^{limpo}(t,V) \times S_{t\acute{}} \times fLimpo_{USD}^{Over}(t,t\acute{})\right] \times 0,5. \quad (38)$$

3.4 Estratégia de FRA de Cupom Cambial (Contrato FRC)

Um FRA (*forward rate agreement*) é uma estratégia de operação num setor da curva de juros. Sem perda de generalidade, escrevemos um fator de acumulação $f_i\,(t', V_i)$ referente a uma taxa tx_i de prazo (anualizado) $T_i(t', V_i) = (V_i - t')/360$ no formato exponencial. Ou seja, reduzindo a notação,

$$f_i = (1 + tx_i)^{T_i}\,. \quad (39)$$

O fator de juros FRA $f_{12}\,(T_1, T_2)$ entre dois prazos, indexados por 1 e 2, obedece à regra de composição

$$f_2 = f_{12} \times f_1 \quad (40)$$

Esquematicamente, temos a representação da figura (2). A taxa FRA tx_{12} é também chamada de taxa forward.

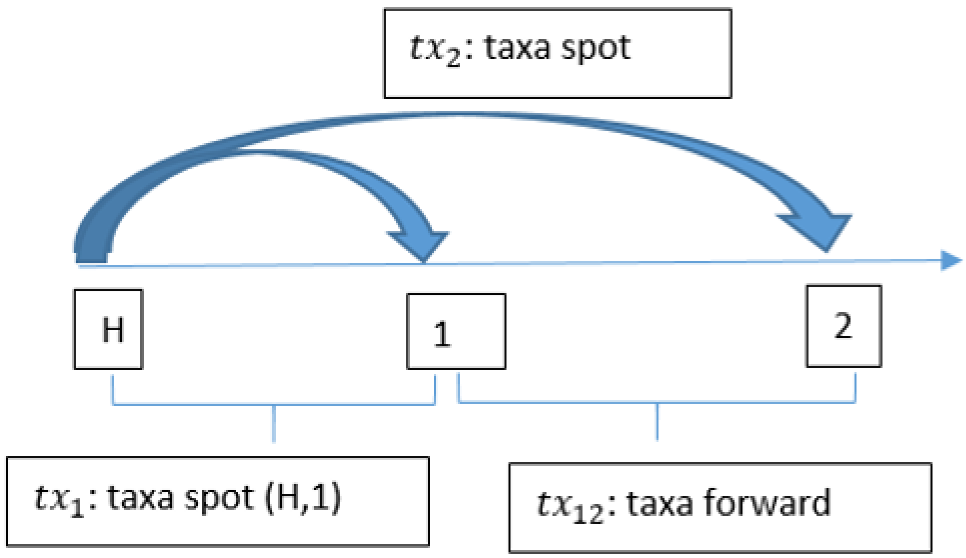

Figura 2: FRA. H representa hoje, a data de apreçamento.

No caso específico do FRA de cupom cambial, a B3 trata o instrumento como uma estratégia representada pelo contrato FRC. Este contrato representa uma estratégia porque oficialmente, para cada contrato de FRC, operado a bolsa registra dois contratos de DDI, um para o prazo do primeiro vencimento de DDI, que denotaremos DDI_1, e outro para o prazo do vencimento longo, que denotaremos de DDI_2. O código de um DDI, portanto, refere-se ao vencimento mais longo. Então, em termos de PUs, o valor financeiro de um contrato de FRC de prazo i é

$$Fin_{FRC} = Q_1 \times PU_1 \times Ptax + Q_2 \times PU_2 \times Ptax. \tag{41}$$

Pela relação (40), na convenção linear,

$$\frac{1}{(1 + tx_{12} \times T_{12})} = \frac{(1 + tx_1 \times T_1)}{(1 + tx_2 \times T_2)} = \frac{PU_2}{PU_1}. \tag{42}$$

Desta relação, temos a taxa tx_2 a partir da tx_1 e da tx_{12}

$$tx_2 = [(1 + tx_1 \times T_1) \times (1 + tx_{12} \times T_{12}) - 1] \times \frac{1}{T_2} \tag{43}$$

O financeiro do contrato de FRC é naturalmente definido por

$$Fin_{FRC} = Q_{12} \times \frac{1}{(1 + tx_{12} \times T_{12})} \times Ptax. \tag{44}$$

A B3 toma a quantidade do FRC como sendo igual à do contrato do DDI_2, o que amarra a quantidade de DDI_1, da forma mostrada a seguir, usando (41) e (44)

$$Q_{12} = Q_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 \times \frac{1}{(1 + tx_{12} \times T_{12})} \times Ptax = Q_1 \times PU_1 \times Ptax + Q_2 \times PU_2 \times Ptax$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 \times \left(\frac{PU_2}{PU_1} - PU_2 \right) \times \frac{1}{PU_1}$$

$$= Q_2 \times \left(\frac{1 - PU_1}{PU_1} \right) \times \frac{PU_2}{PU_1}. \tag{45}$$

O valor 1 nesta equação é muito menor que o PU_1, que é da ordem de 100.000. Assim, podemos ignorá-lo e obter $1 - PU_1 \approx -PU_1$, de forma que

$$Q_1 = -Q_2 \times \frac{PU_2}{PU_1} = -Q_2 \times \frac{1}{(1 + tx_{12} \times T_{12})}. \tag{46}$$

Esta é a posição que a B3 lança na ponta curta e, como já foi dito, Q_2 na ponta longa, que é tomada como a quantidade operada do contrato de FRC.

Como fica a distribuição de risco desta posição? Para responder, lembramos que o risco está relacionado com a variância dos retornos dos preços (analisaremos supondo o retorno médio em torno de zero, o que não prejudica a análise)

$$\sigma_P^2 = E\left[\left(\frac{dP}{P} \right)^2 \right], \tag{47}$$

já para o risco de taxas, temos

$$\sigma_{tx}^2 = E\left[(dtx)^2\right] \tag{48}$$

No nosso caso seria escrito como

$$\frac{dFin_{FRC}}{Fin_{FRC}} = \frac{1}{Fin_{FRC}}\left(\sum_{i=1}^{2} dFin_{DDI_i}\right). \tag{49}$$

Desenvolvendo os termos do lado direito,

$$dFin_{DDI_i} = \left(\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i}\right) dtx_i + \left(\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial Ptax} Ptax\right) \times \frac{dPtax}{Ptax}. \tag{50}$$

A equação (50) nos mostra a variação da variável Fin_{DDI_i} como uma variação de portfolio, onde os ativos (os fatores de risco) são a taxa e a ptax e os pesos são os termos em parênteses. Prosseguindo,

$$\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i} = -Q_i \times T_i \times Ptax \times \frac{1}{(1 + tx_i \times T_i)^2} = -Fin_{DDI_i} \times \frac{T_i}{(1 + tx_i \times T_i)} \tag{51}$$

$$\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial Ptax} = \frac{Fin_{DDI_i}}{Ptax}. \tag{52}$$

Logo,

$$\frac{dFin_{FRC}}{Fin_{FRC}} = \frac{1}{Fin_{FRC}} \times \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i} \times dtx_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial Ptax}\right) \times Ptax \times \frac{dPtax}{Ptax}\right]. \tag{53}$$

Usando (52),

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial Ptax} = (Fin_{DDI_1} + Fin_{DDI_2}) \times \frac{1}{Ptax} = \frac{Fin_{FRC}}{Ptax}, \tag{54}$$

assim

$$\frac{dFin_{FRC}}{Fin_{FRC}} = \frac{1}{Fin_{FRC}} \times \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i} \times dtx_i\right) + Fin_{FRC} \times \frac{dPtax}{Ptax}\right]$$

$$= \frac{1}{Fin_{FRC}} \times \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i} \times dtx_i \right) \right] + \frac{dPtax}{Ptax}. \tag{55}$$

Além disso, usando (51),

$$\frac{\partial Fin_{DDI_i}}{\partial tx_i} = -Fin_{DDI_i} \times \frac{T_i}{(1 + tx_i \times T_i)}. \tag{56}$$

Se supusermos que a variação das taxas é igual, isto é, $dtx_1 = dtx_2 \equiv dtx$, temos, para(55),

$$\frac{dFin_{FRC}}{Fin_{FRC}} = -Dur_{FRC} \times dtx + \frac{dPtax}{Ptax}. \tag{57}$$

onde Dur_{FRC} é a duration da carteira de FRC, composta pelos dois DDIs, o curto e o longo. Como veremos, a duration de Macaulay de uma carteira de n fluxos Fin_i, $i = 1, ..., n$; é (com fator de juros linear)

$$Dur_{Carteira} = \frac{1}{Fin_{Carteira}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} Fin_i \times \frac{T_i}{(1 + tx_i \times T_i)} \right). \tag{58}$$

Logo, o retorno de um FRC depende essencialmente da variação da taxa, com peso dado pela duration, e do retorno da Ptax. Na verdade, uma forma semelhante também é seguida por um DDI individualmente, onde a duration é o próprio prazo anualizado, dividido pelo fator de taxa.

3.5 DAP

Contrato de taxa real de juros refere-se ao índice de inflação IPCA, com correção de inflação do período de investimento. Portanto, também o objeto de negociação é em formato taxa e, para apurar resultado, inverte-se o sinal da posição para tratar em PU. O contrato do mês de refência (ex Jan20) vence no dia 15 do mesmo mês. Matematicamente,

$$PU_{DAP}(t, V) = \frac{100.000}{(1 + txReal\,(t, V))^T} \tag{59}$$

e o valor de ajuste para o PU_{DAP} será

$$AD_{DAP}\,(t,V) = PU_{DAP}(t,V) \times M \times PRT(Ant,t) \tag{60}$$

onde $M = 0,00025$ é o número de pontos e $PRT(Ant,t)$ é o fator pro rata tempore de inflação

$$PRT(Ant,t) = IPCA(Ant) \times f_{IPCA}(Ant,t) \tag{61}$$

$$f_{IPCA}(Ant,t) = (1 + proj_t(Ant,Prox))^{\frac{DU(Ant,t)}{DU(Ant,Prox)}} \tag{62}$$

onde $DU(Ant,Prox)$ é o número de dias úteis entre a última data oficial de troca de índice (último dia 15 ocorrido) e a próxima (próximo dia 15); $DU(Ant,t)$ é o número de dias úteis entre a data oficial de troca de índice anterior (dia 15) e a data de avaliação (t).

- Se $t \geq dia\,15$: $proj_t(Ant,Prox)$ é a taxa de inflação mensal projetada para o próximo índice a ser divulgado, divulgado no site da Anbima.
- Se $Divulgação \leq t \leq dia15$: Neste caso, o índice já é conhecido e não precisamos de projeção. Então,

$$1 + proj_t(Ant,Prox) = \frac{IPCA(Prox)}{IPCA(Ant)} \tag{63}$$

O resultado acumulado entre no intervalo $(t, t´ > t)$, $P\&L(t,t´)$ é dado por

$$P\&L(t,t´) = \left[PU_{DAP}(t´,V) - PU_{DAP}(t,V) \times fjuros^{Over}_{real}(t,t´)\right] \times M \times PRT(Ant,t´) \tag{64}$$

$$fjuros^{Over}_{real}(t,t´) \equiv \prod_{i=t}^{t} \left[\frac{(1+CDI_i)^{1/252}}{\frac{PRT(Ant,i)}{PRT(Ant,i-1)}} \right]. \tag{65}$$

3.6 Fatores de Risco e a Equivalência da Taxa Nominal com Taxa Real e Inflação no DAP

Tal como mencionamos em nosso estudo da NTN-B, é possível ver o DAP em termos do risco de inflação futura e pré (selic), ao invés da taxa de juros real (cupom de inflação). Em detalhe, escrevemos, para simplificar, uma versão da equação (60) sem o fator M

$$AD'_{DAP}(t,V) = \frac{AD_{DAP}(t,V)}{M}$$

$$= \frac{100.000}{(1 + txReal\,(t,V))^{T}} \times PRT(Ant,t) \tag{66}$$

E agora renotamos que o temo de inflação pro rata tempore, $PRT(t)$, representa uma inflação reconhecida para o apreçamento, em outras palavras, passada. Se utilizarmos a relação

$$(1 + selic)^{T(t,V)} = PRT(t,V) \times (1 + txReal\,(t,V))^{T(t,V)}, \tag{67}$$

obtemos

$$AD'_{DAP}(t,V) = \frac{100.000}{(1 + selic\,(t,V))^{T(t,V)}} \times PRT(Ant,t) \times PRT(t,V) \tag{68}$$

Aqui o termo $PRT(t,V)$ representa uma inflação futura e, portanto, trata-se de um fator de risco. Além disso, há a taxa pré-fixada selic. Então, o fator de risco pré-fixado em taxa real é equivalente à taxa pré-fixada selic e variação até o vencimento do contrato.

4 Exemplos

4.1 DI1

Um investidor comprou 100 contrato de DI1Z20 (vencimento em 01/12/2020) em 02/01/2020, a uma taxa de 4,5%. Na data de hoje, 28/02/2020, a taxa referente ao preço de ajuste da B3 [Ajustes B3] é 4,0780%. Calcule o ajuste (resultado) da posição neste período.

Solução. Por convenção, "comprar" um contrato significa comprar taxa. Quando compramos algo, esperamos que o valor do mesmo subirá. Assim, ao comprarmos taxa, achamos que seu valor subirá. Isto significa que o PU cairá. Então, comprar taxa, implica vender PU. Como a apuração de resultado é uma comparação de PUs, invertemos o sinal perante a quantidade.

Em segundo lugar, calculamos o PU na data de negociação, $PU(t,V)$. Há 229 dias úteis entre 02/01/2020 e 01/12/2020, usando o calendário Anbima (igual ao do Banco Central)

$$PU(t,V) = \frac{100.000}{(1+4,5\%)^{\frac{229}{252}}} = 96.078,99$$

Entre 01/02/2020 (inclusive) e 28/02/2020 (exclusive), o fator de CDIs diários acumulados é $fcdi(t,t') = 1,0065522600000$ (calculado conforme [CDI-Acum.]). Em 28/02/2020, a quantidade de dias úteis até o vencimento é 190. O preço de ajuste do contrato em 28/02/2020, a partir da taxa de 4,0780%, é

$$PU(t',V) = \frac{100.000}{(1+4,0780\%)^{\frac{190}{252}}} = 97.031,31$$

$$P\&L_{DI}(t,t\,') = -Q \times [PU(t',V) - PU(t,V) \times fcdi(t,t')]$$

$$= -100 \times (97.031,31 - 96.078,99 \times 1,0065522600000)$$

$$= -32.278,45.$$

4.2 DDI

Em 02/01/2020, um investidor comprou $Q = 100$ contratos de DDI vencimento 04/01/2021 (DDIF21) a uma taxa (linear, aa, suja) de 2,50%. Em 28/02/2020, a taxa de ajuste é 1,3600%. A Ptax de 30/12/2019 é 4,0307 e a de 27/02/2020 é 4,4764. Calcule o resultado em reais (ajuste) neste período.

Solução. Novamente, como a convenção de negociação é sobre a taxa, uma posição comprada em taxa é vendida em PU, o que nos faz inverter o sinal para o tratamento. Em segundo lugar, o cdi acumulado no período entre a operação (inclusive) e a data de avaliação (exclusive) foi de $fcdi(t,t') = 1,0065522600000$ (calculado conforme [CDI-Acum.]). Então, a variação de cupom sujo em (t,t') foi de

$$fsujo(t,t') = \prod_{i=t}^{t'} \left[\frac{(1+CDI_i)^{1/252}}{\frac{Ptax_{i-1}}{Ptax_{i-2}}} \right] = \frac{\prod_{i=t}^{t'} (1+CDI_i)^{1/252}}{\frac{Ptax_{t'-1}}{Ptax_{t-2}}}$$

$$= 1,0065522600000 \times \frac{1}{4,4764/4,0307} = 0,906333257613711000$$

Os dias corridos na data de negociação e na data de apreçamento, respectivamente, são $dc(t,V) = 368$ e $dc(t',V) = 311$. Os PUs sujos $PU_{DDI}^{sujo}(t,V)$ e o $PU_{DDI}^{sujo}(t',V)$ são

$$PU_{DDI}^{sujo}(t,V) = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{2,50}{100} \times \frac{368}{360}\right)} = 97.508,13$$

$$PU_{DDI}^{sujo}(t',V) = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{1,36}{100} \times \frac{311}{360}\right)} = 98.838,75$$

Então

$$P\&L_{DDI}(t,t') = -Q \times \left[PU_{DDI}^{sujo}(t',V) - PU_{DDI}^{sujo}(t,V) \times fsujo(t,t') \right] \times Ptax_{t'-1} \times M$$

$$= -100 \times [98.838,75 - 97.508,13 \times 0,906333257613711000] \times 4,4764 \times 0,5$$

$$= -2.342.029,49.$$

4.3 DAP

Um investidor compra (taxa) 100 contratos de DAPF21 em $t = 02/01/2020$ a uma taxa de $0,50\%$. Em $t' = 28/02/2020$, a taxa referente ao preço de ajuste é $1,1994\%$. Qual o ajuste acumulado?

Solução. O contrato DAPF21 vence em $V = 15/01/2021$. Seguem alguns dados sobre a operação:

- O índice de dez/2019 foi $I_{dez19} = 5320,25$ e passou a valer em $t_2 = 15/01/2020$. O índice de nov/2019 foi $I_{nov19} = 5259,76$ e passou a valer em $t_1 = 16/12/2019$. O número de dias úteis, usando o calendário Anbima, com os feriados BACEN, entre as duas datas é $du(t_1, t_2) = 20$. A quantidade de dias úteis entrea data da divulgação t_1 e a data da operação t é $du(t_1, t) = 11$. Assim, o índice pro rata tempore referente à data da operação é

$$PRT(t) = 5259,76 \times \left(\frac{5320,25}{5259,76}\right)^{\frac{11}{20}} = 5.292,94$$

- Com relação à data de apuração do resultado, o índice de jan/2020 foi $I_{jan20} = 5331,42$ e passou a valer em $t_3 = 17/02/2020$. O índice de fev/2020 ainda não é conhecido em t'. Mas há a projeção da taxa de inflação para o mês de fevereiro, dada pela Anbima [Proj. Anbima] $\pi_{fev20} = 0,15\%$ vale para $t_4 = 16/03/2020$. O número de dias úteis, usando o calendário Anbima, com os feriados BACEN, entre as duas datas é $du(t_3, t_4) = 18$. A quantidade de dias úteis entre a última data de divulgação t_3 a data da apuração parcial de resultado t' é $du(t_3, t') = 7$. Assim, o índice pro rata tempore referente à data de apuração é

$$PRT(t') = 5331,42 \times (1 + 0,15\%)^{\frac{7}{18}} = 5.334,52$$

- O cupom de inflação acumulado entre as datas de operação (inclusive) e a de apuração (exclusive) é

$$fIPCA(t,t') = \prod_{i=t}^{t'} \left[\frac{(1 + CDI_i)^{1/252}}{\frac{PRT(i)}{PRT(i-1)}}\right] = \frac{\prod_{i=t}^{t'} (1 + CDI_i)^{1/252}}{\frac{PRT(t')}{PRT(t)}}$$

$$= \frac{1,0065522600000}{1,00785574746738} = 0,998706672586176000$$

- O número de dias úteis entre a data da operação t e o vencimento V é $du(t,V) = 260$ e o número de dias úteis entre a data de apreçamento e o vencimento é $du(t',V) = 221$. Os Preços Unitários referentes às datas de operação e apreçamento, respectivamente, são

$$PU_{DAP}(t,V) = \frac{100.000}{(1+0,50\%)^{\frac{260}{252}}} = 99.640,19$$

$$PU_{DAP}(t',V) = \frac{100.000}{(1+1,1994\%)^{\frac{221}{252}}} = 99.269,09$$

- O resultado acumulado entre a data de compra, t, e a data de apreçamento, t', é

$$P\&L_{DAP}(t,t') = -Q \times [PU_{DAP}(t',V) - PU_{DAP}(t,V) \times fIPCA(t,t')] \times PRT(Ant,t') \times M$$

$$= -100 \times [99.269,09 - 99.640,19 \times 0,998706672586176000] \times 5.334,52 \times 0,00025$$

$$= 32.304,70$$

5 Discussão final

5.1 Riscos

Via (5), vemos que um contrato futuro tem como fatores de risco a taxa pré, a taxa de custo e o ativo-base. No caso do contrato DI1 a taxa pré é o fator de risco. No contrato de DDI, temos o dólar à vista e o cupom cambial limpo; ou a PTAX e o cupom sujo. Já no caso do DAP, como vimos em detalhe na seção (3.6), podemos expressar o risco em termos de taxa real de juros (cupom de inflação) ou taxa pré + inflação futura.

Referências

[CDI-Acum.] Planilha de acumulação de CDI: CDIAcumulaçãoSimples.xls.

[CDI-Hist] Série histórica CDI CETIP: http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-de-segmentos-e-setoriais/serie-historica-do-di.htm.

[Ajustes B3] Ajustes do pregão B3: http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/derivativos/ajustes-do-pregao/ ou http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/derivativos/resumo-estatistico/sistema-pregao/.

[PTAX800-Histórico] Histórico de cotação Ptax-800: https://www4.bcb.gov.br/pec/taxas/port/ptaxnpesq.asp?frame=1

[IPCA-Histórico Sidra] IPCA - Série histórica. https://sidra.ibge.gov.br/tabela/1737 ou http://www.idealsoftwares.com.br/indices/ipca_ibge.html

[Proj. Anbima] Projeção de IPCA pela Anbima. https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/estatisticas/precos-e-indices/projecao-de-inflacao-gp-m.htm

[IPCA-Histórico] Índices IPCA - IBGE. https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=downloads