Opções de Juros no Brasil

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão: 28/03/2020

Primeira versão: 28/03/2020

1 Introdução

Neste documeto apresentamos o apreçamento de opções de IDI e DI1. Depois apresentamos as relações de hedge de juros com o contrato de futuro DI1.

2 Processo Normal e Log-Normal de uma Variável

Uma variável Y_t segue um processo Normal $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ se sua evolução se dá pela equação diferencial estocástica

$$dY_t = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} dW_t \tag{1}$$

onde $dW_t \sim N\left(0,1\right)$ é um choque aleatório independente, de Wiener, e $dY_t = Y_t - Y_{t-1}.\mu$ é o *drift*, ou tendência do processo, correspondendo à parte determinística da evolução da variável.

Já uma variável S_t segue um processo Lognormal $LogN\left(\mu, \sigma^2\right)$ se o logaritmo natural da mesma seguir um processo normal, isto é, $Ln\left(S_t\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$d\left(lnS_t\right) = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} dW_t \tag{2}$$

Mas

$$d\left(lnS_t\right) = \frac{dS_t}{S_t}. \tag{3}$$

Então

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma \sqrt{dt} dW_t \tag{4}$$

Este é a forma usual de um processo lognormal, também chamado geométrico browniano log-normal. Note que a equação (3) é um log- retorno infenitesimal, pois

$$d\left(lnS_t\right) = lnS_t - lnS_{t-1} = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right), \tag{5}$$

o que também é constatado pelo lado direito da equação (3), que representa um retorno bruto infinitesimal. Desta forma, se uma variável **preço** segue um processo **lognormal**, como em (4), o processo de seu **log-retorno** ou **retorno bruto** (5) é **normal**.

O modelo de Black-Scholes ([Black & Scholes(1973)]) pressupõe que o processo do ativo-objeto seja log-normal.

3 Opção de IDI

O ativo-objeto deste tipo de opção é o índice IDI, calculado como a acumulação de CDI diários a partir de uma data-base, sobre o valor 100.000. Trata-se, portanto, de umaopção de índice. Atualmente, a data base está fixada em 02/01/2009, o que representa o índice IDI2009

$$IDI_t = IDI_0 \prod_{i=0}^{t} (1 + cdi_i)^{1/252} \tag{6}$$

onde IDI_0 é o índice em 02/01/2009, para o IDI2009, ou seja, 100.000. Observe que se quisermos a taxa de juros efetiva $tx_{ef}(t_1, t_2)$ entre duas datas t_1 e t_2 é só tomar a relação entre os índices IDI das mesmas

$$tx_{ef}(t_1, t_2) + 1 = \frac{IDI_{t_2}}{IDI_{t_1}} \tag{7}$$

O apreçamento da opção de índice IDI por Black-Scholes ([Black & Scholes(1973)]) pressupõe, como mencionamos, que o processo do ativo-objeto, o IDI, siga um processo lognormal

$$dI_t = I_t r dt + I_t \sigma \sqrt{dt} dW_t \tag{8}$$

onde usamos que o *drift* adequado para um apreçamento risco-neutro é a taxa de juros (contínua) r para o prazo da opção.

Assim, seja uma call $C(t_V)$ de IDI para um prazo $T = du(t, t_V)/252$ de vencimento (t_V), e uma put $P(t_V)$, ambas de strike K e europeias, com *payoffs*

$$C(t_V) = max(I_V - K, 0) \tag{9}$$

$$P\left(t_V\right) = max\left(K - I_V, 0\right) \tag{10}$$

Desta forma, as equações de preço para a call e a put na data de apreçamento t são

$$C\left(t\right) = e^{-rT}\left[F_t \cdot N\left(d_1\right) - K \cdot N\left(d_2\right)\right] \tag{11}$$

$$P\left(t\right) = e^{-rT}\left[K \cdot N\left(-d_2\right) - F_t \cdot N\left(-d_1\right)\right] \tag{12}$$

com

$$F_t = I_t \cdot e^{rT} \tag{13}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \tag{14}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{15}$$

$$N\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \tag{16}$$

A equação (13) é o *forward* do índice IDI do prazo T na data t.

Observação: A opção segue o calendário da bolsa de São Paulo, o que faz com que a variável tempo que é usada na vol siga este calendário. Já a curva de juros segue o calendário de feriados nacional, da Anbima. É conveniente usar essa distinção de calendários no apreçamento.

4 Opção de DI1

Neste caso, o ativo-objeto é um contrato de DI1 de vencimento $t´$, com prazo $\tau = du(t_V, t´)/252$, a partir do vencimento t_V da opção, de prazo $T = du(t, t_V)/252$ na data de apreçamento t. Ou seja, a opção tem como ativo subjacente um FRA de DI1, ao passo que a opção de IDI é uma opção de índice, um futuro de taxa de juros de prazo igual ao da opcionalidade. Pictoricamente, a situação é a da figura (1). Em termos de instrumentos negociados internacionalmente, a call de DI1é um caplet, e a put, um floorlet.

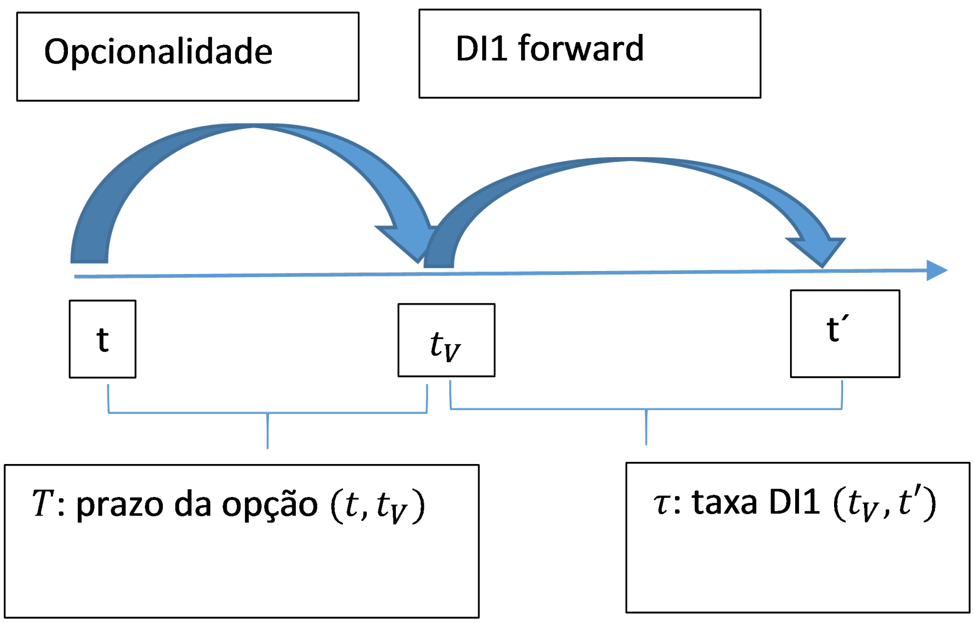

Figura 1: Opção de DI1

Para usarmos o modelo de Black-Scholes ([Black & Scholes(1973)]) supomos que o PU segue um processo log-normal. Quando apreçarmos uma opção é necessário saber se o payoff está denominado em taxa ou PU, pois uma call (put) de taxa é uma put (call) de PU. Consideremos uma call de strike K, em formato de PU, referente a um DI1, no formato de PU, de prazo τ

$$Call_{PU}(t_V) = max\left(\frac{100.000}{(1 + tx(t_V, t_V + \tau)^{\tau}} - K, 0\right) \tag{17}$$

$$= max\left(PU(t_V, t_V + \tau) - K, 0\right) \tag{18}$$

Então, na suposição do processo lognormal, em que a volatilidade é de PU (σ_{PU}),

$$dPU_t = PU_t \cdot r \cdot dt + PU_t \cdot \sigma_{PU} \cdot \sqrt{dt} \cdot dW_t \tag{19}$$

temos

$$C\left(t\right) = e^{-rT}\left[F_t \cdot N\left(d_1\right) - K \cdot N\left(d_2\right)\right] \tag{20}$$

$$P\left(t\right) = e^{-rT}\left[K \cdot N\left(-d_2\right) - F_t \cdot N\left(-d_1\right)\right] \tag{21}$$

$$F_t = PU(t_V, t_V + \tau) \tag{22}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma_{PU}^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \tag{23}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{PU} \cdot \sqrt{T}. \tag{24}$$

A B3 padroniza as séries de opções segundo os prazos de vencimento do DI1, após o vencimento da opção: Tipo1 - contrado de DI1 com vencimento 3 meses após o vencimento da opção; Tipo 2 - idem, 6 meses; Tipo 3 - idem, 12 meses. Os tipos 4 ao 9 têm como ativo-objeto o DI com vencimento especificado pela B3. Os strikes são especificados em forma de taxa. Portanto, para usar as equações (20) e (21), temos que converter para PU.

5 Conversão entre Vol PU e Vol Taxa

Algumas fontes de dados mostram a volatilidade de opções de juros como se o ativo-objeto fosse taxa. Então, convém ter a correspondência entre volatilidade de taxa e volatilidade de preço. Escrevemos a taxa em forma exponencial, como no PU de DI1

$$PU = \frac{100.000}{(1 + tx)^T} \tag{25}$$

Diferenciando ambos os lados, e dividindo por PU

$$\frac{dPU}{PU} = \frac{1}{PU} \times \frac{100.000}{(1 + tx)^T} \times \frac{-T}{(1 + tx)} \times dtx$$

$$= \frac{-T \times tx}{(1+tx)} \times \frac{dtx}{tx}. \tag{26}$$

dPU/PU é um retorno de preço e a última linha contém o retorno de taxa, dtx/tx. A forma de se computar o retorno de taxa desta forma é devido ao fato de os participantes de mercado de DI1 usarem um modelo de taxa em que a mesma segue um modelo log-normal. A rigor, o retorno de taxa deveria ser calculado por dtx, somente.

Prosseguindo, a variância da variável x é a dada por

$$\sigma^2 = E\left[x^2\right] - \left(E\left[x\right]\right)^2. \tag{27}$$

Assim,

$$\sigma_{PU}^2 = E\left[\left(\frac{dPU}{PU}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{dPU}{PU}\right]\right)^2$$

$$= \left(\frac{T \times tx}{(1+tx)}\right)^2 \left(E\left[\left(\frac{dtx}{tx}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{dtx}{tx}\right]\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{T \times tx}{(1+tx)}\right)^2 \sigma_{tx}^2. \tag{28}$$

Logo

$$\sigma_{PU} = \frac{T \times tx}{(1+tx)} \times \sigma_{tx} \tag{29}$$

6 Hedge de Juros

A ideia de hedge, ou imunização, por variação de juros, é que a variação de preço da posição a ser protegida (P), advinda da variação dos juros envolvidos em seu preço, seja compensada por uma variação oposta no preço (P_H) de um instrumento de hegde, que também depende dessa taxa de juros, produzindo uma variação nula na combinação V da posição/hedge. Matematicamente,

$$Q \times P + Q_H \times P_H = V, \tag{30}$$

com a variação no valor pela preço

$$Q \times dP + Q_H \times dP_H = dV, \tag{31}$$

onde se impõe que seja nula

$$dV \equiv 0. \tag{32}$$

Logo,

$$Q \times dP = -Q_H \times dP_H \tag{33}$$

Antes de prosseguir, a variação de primeira ordem de uma função $f(x)$ em termos da variação (infinitesimal) de sua variável independente x, que inicialmente tem o valor x_0, e move-se para x_1, é

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} dx \tag{34}$$

$$dx = x_1 - x_0 \tag{35}$$

Lembre-se que a derivada pode ser calculada numericamente por limite

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x - \triangle x)}{2 \times \triangle x}. \tag{36}$$

Em nosso caso, as variáveis de preço, P e P_H, fazem o papel de f. Os juros fazem o papel da variação de x.

$$dP = \frac{\partial P(tx_0)}{\partial tx} dtx \tag{37}$$

$$dP_H = \frac{\partial P_H(tx_{H0})}{\partial tx_H} dtx_H \tag{38}$$

Mesmo que as taxas tx e tx_H sejam diferentes, podemos supor que há um deslocamento em paralelo, de forma que

$$dtx = dtx_H \tag{39}$$

Então

$$Q_H = -Q \times \left[\frac{\frac{\partial P(tx_0)}{\partial tx}}{\frac{\partial P_H(tx_{H0})}{\partial tx_H}} \right] \tag{40}$$

7 Exemplo - IDI

Em 26/03/2020, o índice IDI à vista tem valor 282.195,87. Uma opção call de IDI de strike 304.100,00 para o vencimento 03/01/2022 tem vol de preço de 1,89837% aa. A taxa de juros (exp/252) para o prazo é 4,34% a.a. Calcule o preço desta opção.

Solução. A curva de volatilidade segue o calendário de dias de mercado da bolsa, segundo os feriados de São Paulo (na planilha de feriados, o TRD). Há 436 dias úteis ($T = 436/252 = 1,730159$). Para a contagem de dias de de juros, o calendário a ser seguido é o de feriados nacionais (na planilha, o BCB). Há 444 dias úteis ($T = 444/252 = 1,761905$).

A taxa de juros no formato contínuo é $r = ln(1 + 4,43\%) = 4,2484612$. O futuro é $F = 282.195,8 \times exp(4,2484612\% \times 1,761905) = 304.130,0039$. As demais variáveis usadas para a equação de preço são

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{304.130,0039}{304.100,00}\right) + \frac{(1,89837\%)^2 \times 1,730159}{2}}{1,89837\% \times \sqrt{1,730159}} = 0,016436217209146$$

$$d_2 = 0,016436217209146 - 1,89837\% \times \sqrt{1,730159} = (0,0085340345591753)$$

$$N(d_1) = 0,506556842$$

$$N(d_2) = 0,496595434$$

o que nos leva à

$$Call(t) = 2824,893476$$

8 Exemplo - DI1

Em 26/03/2020, a opção put (taxa) do tipo 2 (DI1 de 6 meses) com vencimento Jan/21 tem vol de 26% para o strike 4,6%. Calcule seu preço.

Solução.

- A opção put em taxa é transformada para call de PU.
- Para a contagem de dias úteis para a volatilidade, usamos o calendário de dias de negociação de São Paulo (TRD, em nossa planilha de feriados). Já para a taxa de juros usamos o calendário nacional (BCB), da Anbima.
- Para o vencimento da opção, há 193 dias úteis ($T(t_V) = 193/252 = 0,765873$)para os juros. A taxa exponencial é de $tx = 3,4\%$ a.a. (exp/252), o que resulta numa contínua $r = ln(1+tx) = 3,3435\%$. O PU deste vencimento é $PU(t_V) = 100.000/(1+3,4\%)^{0,765873} = 97.471,8281$;
- A data de vencimento do FRA de DI1 é em 6 meses após o vencimento de 04/01/2021, ou seja, em 01/07/2021. Para o cômputo de juros, há 316 dias úteis ($T(t, t_V + \tau) = 316/252 = 1,253968$) entre a data de apreçamento e a de vencimento deste DI1. A taxa de juros para este prazo é 3,79% a.a. (exp/252). O PU para o vencimento 01/07/2021 é, portanto, $PU(t_V + \tau) = 100.000/(1+3,79\%)^{1,253968} = 95.442,4328$. Logo, o FRA tem prazo de 316-193=123 dias úteis ($T = 123/252 = 0,488095$), e seu PU é $PU_{FRA}(t_V, t_V + \tau) = 100.000 \times PU(t_V + \tau)/PU(t_V) = 100.000 \times 95.442,4328/97.471,8281 = 97.917,9674$ e sua taxa é $tx_{FRA} = [100.000/PU_{FRA}(t_V, t_V + \tau)]^{(1/T(t_V, t_V+\tau))} - 1 = 4,4049\%$
- O PU relativo ao strike é $K_{PU} = 100.000/(1+4,6\%)^{0,488095} = 97.828,79$. O número de dias úteis para a volatilidade, no calendário de trade (TRD), é 189 ($T(t_V) = 189/252 = 0,75000$)
- A volatilidade PU é

$$\sigma_{PU} = \frac{0,488095 \times 4,4049\%}{1 + 4,4049\%} \times 26\% = 0,535420\%$$

- Calculando parâmetros para o cálculo do preço da opção

$$d_1 = \frac{ln(\frac{97.917,9674}{97.828,79}) + \frac{(0,535420\%)^2 \times 0,75000}{2}}{0,535420\% \times \sqrt{0,75000}} = 0,19882152$$

$$d_2 = 0,19882152 - 0,535420\% \times \sqrt{0,75000} = 0,19418464$$

$$N(d_1) = 0,578798818$$

$$N(d_2) = 0,576984346$$

- O preço da call de PU é

$$Call_{PU}(t) = e^{-3,3435\% \times 193/252} \times [97.917,9674 \times 0,578798818 - 97.828,79 \times 0,576984346]$$

$$= 223,331291$$

9 Exemplo Hedge Opção de DI1

No exemplo de opção de DI1, calcule a quantidade de DI1 de vencimento Jul21 necessário para fazer hedge de 100 contratos de opção.

Solução.

Chocamos os preços da opção e do DI1 por bumps de 0.01% e -0.01%. Depois, como teste, damos um bump de 0,1% para ver a robustez do hedge. Obtemos que uma posição vendida (em

			Price	DI1
			223,331291	95.442,4328
bump up		0,01%	221,118472	95430,90291
bump down		-0,01%	225,563836	95453,96521
teste		0,10%	202,07421	95327,24641
	dP/dtx		(22.226,82)	(115.311,48)
	Q		100	-19,27545986
teste	variação dos instrumentos		(2.125,71)	2.220,27

Figura 2: Exemplo de hedge de Opção de DI1 com futuro de DI1.

PU) de 19,2754 de DI1 Jul21 produz o hedge. Os números estão resumidos na figura (2). No teste, o choque de 0,1% produz perda de 2.125,71 na opção e ganho de 2.220,27 no DI1 Jul21. Resultados melhores seriam alcançados se o hedge fosse montado a partir do FRA de DI1 Jan21 com o DI1 Jul21.

References

[Black & Scholes(1973)] F. Black & M. Scholes (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81** (3), 637–654.

[Wilmott] Wilmott, P., (1998) “Derivatives”.