

Rentabilidade de Títulos

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Catalão

Objetivos

- Conceitos de rentabilidade:
 - Yield-to-Maturity (YTM);
 - Método de Newton-Raphson para determinar YTM
 - Retorno Total;
 - Retorno Corrente;
- Exemplo em planilha

Yield-to-Maturity (YTM)

- Seja um título de n fluxos F_i ($i = 1 \dots, n$), em geral pagando cupons C , a uma frequência conhecida (semestral, anual, etc.) e que tem Notional (ou Principal) N ;
- Dado seu preço P , o YTM (y) é a taxa, constante, que desconta todos os seus fluxos:

$$P = \frac{F_1}{(1+y)^{T_1}} + \dots + \frac{F_n}{(1+y)^{T_n}}$$

- O conceito pressupõe reinvestimento dos fluxos à essa taxa (YTM)

Yield-to-Maturity (YTM)

Fluxo Reinvestimento

$$F_1 \quad F_1 \times (1 + y)^{T_n - T_1}$$

$$F_2 \quad F_2 \times (1 + y)^{T_n - T_2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$F_n \quad F_n$$

$$R = \frac{F_1 \times (1 + y)^{T_n - T_1} + F_2 \times (1 + y)^{T_n - T_2} + \dots + F_n}{P} =$$

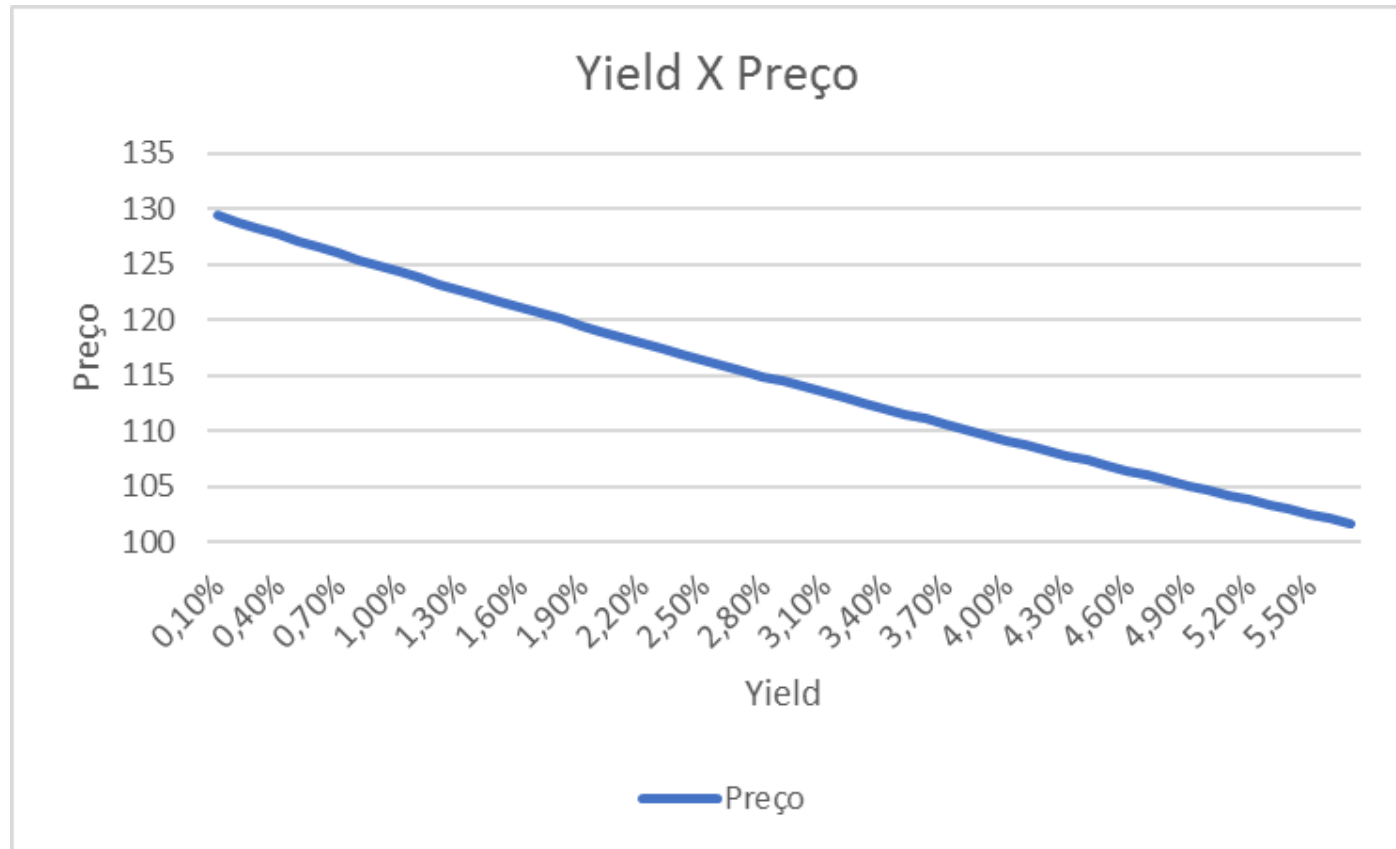
$$(1 + y)^{T_n} \frac{F_1 \times (1 + y)^{-T_1} + F_2 \times (1 + y)^{-T_2} + \dots + F_n \times (1 + y)^{-T_n}}{P} =$$

$$(1 + y)^{T_n}$$

Yield-to-Maturity (YTM)

- Ao se investir num título há os riscos de (i) variação de taxa, e o investidor ter que vender o título a um preço mais baixo que o adquirido e de (ii) reinvestimento, onde, ao receber cada fluxo, o investidor está sujeito à variabilidade de taxas;
- Logo, o conceito de YTM pode não ser realista, mas, mesmo assim, trata-se de uma taxa média;

Yield-to-Maturity (YTM): Relação com Preço do Título



Yield-to-Maturity (YTM): Método de Newton-Raphson

- Dado o preço, como achar o YTM?
- Definamos a função (P é o preço, conhecido)

$$f(y) = P - \left(\frac{F_1}{(1+y)^{T_1}} + \dots + \frac{F_n}{(1+y)^{T_n}} \right)$$

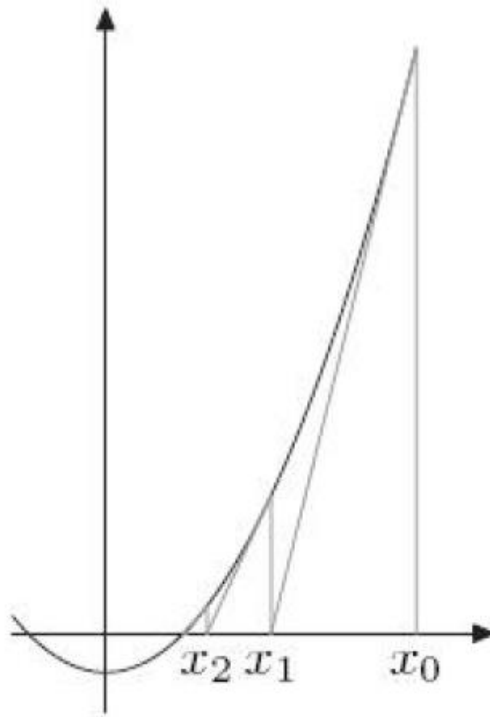
- Se acharmos sua raiz, ou seja, se encontrarmos o valor \bar{y} tal que $f(\bar{y}) = 0$:

$$f(\bar{y}) \equiv P - \left(\frac{F_1}{(1+\bar{y})^{T_1}} + \dots + \frac{F_n}{(1+\bar{y})^{T_n}} \right) = 0$$

, teremos a igualdade entre preço e soma dos fluxos descontados;

- O método de Newton-Raphson em 1 dimensão permite achar numérica e localmente a raiz de uma equação;

Newton-Raphson: ideia geométrica



Newton-Raphson

- Equação de reta tangente em um ponto x_0 da função $f(x)$:

$$y \equiv f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

- Onde a derivada em x_0 pode ser calculada numericamente:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- O ponto x_1 da reta, que cruza o eixo das abscissas, satisfaz $f(x_1) = 0$:

$$f(x_1) = 0 = f(x_0) + f'(x_0) \times (x_1 - x_0)$$

- Assim, o novo ponto é:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newton-Raphson

- Repetindo o procedimento:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Na prática, o procedimento deve ser repetido até que a diferença entre o ponto seguinte proposto e o ponto atual seja menor que um número arbitrário ε :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Yield-to-Maturity e Newton Raphson

- No cálculo do YTM, a derivada a função pode ser calculada numericamente ou analiticamente. Neste caso,

$$f'(y_0) \equiv \frac{df(y_0)}{dy} = \frac{1}{1 + y_0} \left(\frac{T_1 \cdot F_1}{(1 + y_0)^{T_1}} + \dots + \frac{T_n \cdot F_n}{(1 + y_0)^{T_n}} \right)$$

Exemplo

Um título que paga cupom a cada 6 meses vence daqui a 1 ano. Seu cupom semestral é de $C = 10\% a.a.$ e o valor de face é de $N = 100$. Calcule o YTM para um preço de mercado de $P_{alvo} = R\$103$.

- Ver a resolução em [\(2\)](#)

Exercício

- Resolva o exemplo anterior com preço 102. Usar erro de aproximação de preço $< 10^{-5}$.

Retorno Total

- Representa a taxa de retorno de fato;
- De forma simples, quando não houver a inclusão de outras premissas (imposto, taxas extras, etc), trata-se de aplicar o reinvestimento à uma curva de juros, diferentemente do conceito YTM;
- Conhecendo cada fator forward f_{ij} entre os períodos $T_i < T_j$ de pagamento do título

$$f_{ij} = f_j / f_i$$

os reinvestimentos podem ser calculados:

<i>Fluxo</i>	<i>Reinvestimento</i>
F_1	$F_1 \times f_{1n}$
F_2	$F_2 \times f_{2n}$
\vdots	\vdots
F_n	F_n

Retorno Total

- O retorno total seria dada por comparação com preço de mercado:

$$R = \frac{F_1 \times f_{1n} + F_2 \times f_{2n} + \dots + F_n}{P}$$

$$\equiv (1 + y_{TR})^{T_n}$$

- y_{TR} é um formato de taxa, para comparação com outras medidas, como o YTM, no período até o vencimento.

Retorno Corrente

- É o retorno determinado pelo fluxo intermediário, $F_{i < n}$, sobre o preço pago;
- No caso de um título que só paga cupons fixos,

$$R = \frac{F_{i < n}}{P} = \frac{C \times freq \times N}{P}$$

Referências

1. Fabozzi (Bibliografia do curso);
2. Catalão, “Rentabilidade de Títulos”. Notas de aula;
3. Wikipedia, “Método de Newton-Raphson”.