

Mapeamento de Instrumentos em Fatores de Risco com Aplicação para Títulos

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Catalão

Objetivos

- Caso geral de mapeamento do risco (variância) de um instrumento qualquer em termos de fatores de risco;
- Exemplo do fluxo de caixa de um título em termos de sua taxa ou fator de desconto, como fator de risco;
- Mapeamento do fator de desconto do fluxo em termos dos fatores de desconto relativos aos vértices-padrão da curva.

Motivação: Dificuldade Prática

- Cálculo de risco (variância) de um instrumento, se não houvesse mapeamento:
 - Calcular, todos os dias, seu preço, retroagindo a várias datas passadas, mantendo o vencimento constante;
 - Pode exigir interpolar fatores de risco (taxas, por exemplo), para calcular o preço;
 - Recalcular toda a série de retornos deste ativo, todos os dias;
 - Fazer isso para cada ativo, o que aumenta a dimensionalidade. Imagine uma matriz para o VaR paramétrico...;
- Solução: mapeamento de posições, a cada dia que processar o risco da carteira, em fatores padrão de risco;

Instrumentos e seus fatores de risco

- Preço de um instrumento em função dos fatores de risco A e B :

$$P = P(A, B)$$

- Variação do preço em termos das variações dos preços dos fatores de risco:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial A} dA + \frac{\partial P}{\partial B} dB$$

- Retorno do preço do instrumento em função dos retornos dos preços dos fatores de risco:

$$\frac{dP}{P} = \left(\frac{\partial P}{\partial A} \frac{A}{P} \right) \frac{dA}{A} + \left(\frac{\partial P}{\partial B} \frac{B}{P} \right) \frac{dB}{B} \quad \longleftrightarrow \quad r_P = \left(\frac{\partial P}{\partial A} \frac{A}{P} \right) r_A + \left(\frac{\partial P}{\partial B} \frac{B}{P} \right) r_B$$

Exemplo: Fluxo de Caixa – Mapeamento em Vértices

- Fluxo de caixa F de prazo T e preço P_F , em termos de sua taxa (fator de risco), cujo preço (fator de desconto) é P_T :

$$P_F = \frac{F}{(1 + tx)^T} = F \cdot P_T$$

- Retorno do preço do fluxo em termos do retorno do fator de desconto da taxa:

$$r_F \equiv \left(\frac{\partial P_F}{\partial P_T} \frac{P_T}{P_F} \right) r_T$$

$$r_F = F \frac{P_T}{P_F} r_T = \frac{P_F}{P_F} r_T = r_T$$

Exemplo: Fluxo de Caixa – Mapeamento em Vértices

- Portanto, o retorno do preço do fluxo é igual ao retorno do fator da taxa;
- Problema: em geral não é disponível em um banco de dados a série de retornos do fator de desconto relativo à taxa de prazo T , mas sim retornos de fatores de desconto de taxas de vértices vizinhos $T_2 < T < T_1$
- Então, expressamos o fator de desconto da taxa de vencimento T em termos dos de seus vizinhos
 - Aqui temos que identificar qual o tipo de interpolação de curva usado. No caso de interpolação exponencial, vimos que:

$$P_T = P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1} \right)}$$

Exemplo: Fluxo de Caixa – Mapeamento em Vértices

- Definições:

$$\alpha = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \qquad \beta = 1 - \alpha = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}$$

- Logo,

$$P_T = P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\alpha = P_2^\alpha P_1^{1-\alpha}$$

$$r_F = r_T = \frac{dP_T}{P_T} = \left(\frac{\partial P_T}{\partial P_1} \frac{P_1}{P_T} \right) \frac{dP_1}{P_1} + \left(\frac{\partial P_T}{\partial P_2} \frac{P_2}{P_T} \right) \frac{dP_2}{P_2}$$

$$r_F = (1 - \alpha) r_1 + \alpha r_2 \quad \longrightarrow \quad r_F = \left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \right) r_1 + \left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right) r_2$$

Exemplo: Fluxo de Caixa – Outros Mapeamentos em Vértices

- Outras formas de mapear, em função do tipo de interpolação, podem ser encontradas em (1).

Exemplo 2 – Mapeamento por Duration

dia	vértice 1 (ano)		vértice 2 (ano)		vértice 1 (ano)		vértice 2 (ano)		vértice 1 (ano)		vértice 2 (ano)	
	1		3		1		3		1		3	
	taxa		pu		retorno		aux p/ covariância					
1	10,00%	12,30%	0,909090909	0,70609109								
2	11,00%	11,80%	0,900900901	0,715607015	-0,009049836	0,013386903	-7,46532E-05					
3	15,00%	16,40%	0,869565217	0,634075626	-0,035401927	-0,120962924	0,002961363					
4	13,00%	14,90%	0,884955752	0,65923448	0,01754431	0,038911051	0,001375657					
5	12,57%	14,70%	0,888336146	0,662688976	0,003812568	0,005226482	0,00024244					
6	12,50%	15,60%	0,888888889	0,647331138	0,000622029	-0,023447796	-4,03306E-05					
7	13,50%	14,90%	0,881057269	0,65923448	-0,008849615	0,018221314	-7,89489E-05					
8	16,00%	18,70%	0,862068966	0,597926557	-0,021787354	-0,09761135	0,001205247					
9	16,40%	18,00%	0,859106529	0,608630873	-0,003442344	0,017744031	0,000114901					
10	16,80%	18,50%	0,856164384	0,600959146	-0,003430535	-0,012685008	1,69085E-05					
					volatilidade	0,015144202	0,055170514					
					média	-0,006664745	-0,017913033					
					covar	0,000715323						
					covar (excel)	0,000715323						

Exemplo 2 – Mapeamento por Duration

$$\frac{\text{notional} \times c \times \text{freq.}}{(1 + t \times r)^T}$$

Fluxo:						
Notional	100					
cupom (aa)	6%	dia		taxa desconto interpolada	Fin Posição	retorno
freq	0,5	1	✓	0,114731024	2,48069631	
vencimento (ano)	1,75	2	✓	0,11513626	2,47911894	-0,000636059
		3	✓	0,158980542	2,31733063	-0,067487301
		4	✓	0,142177888	2,37731754	0,025556838
peso inf	0,625	5	✓	0,139346983	2,38766418	0,004342786
peso sup	0,375	6	✓	0,144831713	2,36768196	-0,008404156
		7	✓	0,143980286	2,37076665	0,001301983
		8	✓	0,177285749	2,25464387	-0,050221353
Preço do fluxo	2,24924	9	✓	0,174260623	2,2648184	0,004502547
		10	✓	0,178900353	2,24924277	-0,006900963
					volatilidade	0,02920494

Exemplo 2 – Mapeamento por Duration

VaR via distribuição em Vértices		VaR pela série do ativo	
peso	0,625 0,375		
matriz covar	0,000229347	0,000715	
	0,000715323	0,003044	
variância da carteira	0,000852929	variância do fluxo	0,00085293
vol da carteira	0,029204942	vol do fluxo	0,02920494
alfa	0,9	alfa	0,9
VaR (ano)	2,815507695	VaR (ano)	2,815507695

Referências

- 1-Catalão, “Interpolação e Mapeamento em Vértices”. Notas de Aula;
- 2-Catalão, “Mapeamento”. Notas de Aula.