Opções de IDI sob Processo Normal na Taxa Curta

André Borges Catalão

Versão: 26/03/2023

Primeira versão: 26/03/2023

Resumo

Neste documento apresentamos a preço de uma opção de compra de IDI quando a *short rate* executa um processo normal.

1 Introdução

O índice IDI representa a acumulação da taxa de juros CDI *overnight* desde a adata 02/01/2009 sobre o valor 100.000. Matematicamente,

$$IDI_t = IDI_0 \cdot \prod_{i=0}^{t} \left(1 + CDI_i\right)^{1/252}, \tag{1}$$

onde CDI_i é a taxa CDI negociada no dia t_i, expressa no formato exponencial, dias úteis (du) e ano de 252 dias úteis; e $IDI_0 = 100.000$.

Em termos da taxa curta (*short rate*) r em formato contínuo, podemos escrever

$$IDI_t = IDI_0 e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{2}$$

Neste documento suporemos que a *short rate* exibe um processo normal

$$dr_t = \eta dt + c dW_t, \tag{3}$$

onde $dW_t \sim N(0, dt)$.

Na próxima seção apresentaremos o modelo de apreçamento de uma opção de compra onde o ativo-objeto é o índice IDI dado por 2 e a taxa evolui segundo 3.

2 Apreçamento

Seja $P(0,T)$ o preço em $t = 0$ do título que vence em T e $P(T,T) = 1$. O preço do título, na medida risco-neutra, pode ser visto como

$$P(0,T) = E_Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} P(T,T)\right] = E_Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\right]. \tag{4}$$

Definimos a variável

$$X = \int_0^T r(s)ds. \tag{5}$$

Então

$$P(0,T) = E_Q\left[e^{-X}\right] \tag{6}$$

A variável X tem distribuição normal. Se escrevermos $X \sim N(\mu, k^2)$, então

$$P(0,T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2k^2}\right) dx = exp\left(-\mu + \frac{k^2}{2}\right). \tag{7}$$

Em [Catalão, 2023], vimos que a Equação Diferencial Linear Estocástica

$$dX_t = \left[c_1(t)X_t + c_2(t)\right] dt + \left[\sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t)\right] dW_t \tag{8}$$

tem solução

$$X_t = Y_t \left[\frac{X_0}{Y_0} + \int_0^t \left[c_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\right] Y_s^{-1} ds + \int_0^t \sigma_2(s) Y_s^{-1} dW_s\right], \tag{9}$$

onde Y_t é dado por

$$Y_t = Y_0 exp\left(\int_0^t \left[c_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right] ds + \int_0^t \sigma_1(s) dW_s\right) \tag{10}$$

com $Y_0 = 1$.

No modelo normal (3) da *short rate*

$$r_t = r_0 + \int_0^t \eta(s) ds + \int_0^t c dW_s. \tag{11}$$

temos $c_1(t) = 0$, $\sigma_1(t) = 0$, $c_2(t) = \eta(t)$, $\sigma_2(t) = c$.

A média de $r(t)$ é dada por

$$m(t) = E_Q\left[r(t)\right] = h(t), \tag{12}$$

onde

$$h(t) = r_0 + \int_0^t \eta(s) ds. \tag{13}$$

A variância de $r(t)$ é dada por

$$\nu^2(t) = E_Q\left(r^2(t)\right) - E_Q^2\left(r(t)\right). \tag{14}$$

De (12),

$$E_Q^2\left(r(t)\right) = h^2(t), \tag{15}$$

Então

$$\nu^2(t) = E_Q\left(r^2(t)\right) - h^2(t). \tag{16}$$

(11) e (13) implicam que

$$r(t) = h(t) + c \int_0^t dW_s \tag{17}$$

$$E_Q\left(r^2(t)\right) = E_Q\left[h^2(t) + 2h(t)c\int_0^t dW_s + c^2 \int_0^t \int_0^t dW_s dW_{s'}\right]. \tag{18}$$

Ao substituir (18) na equação (16), o primeiro termo do lado direito de (18) é cancelado pelo segundo termo do lado direito de (16). O segundo termo do lado direito de (18) vale zero sob o operador esperança.

A seguinte expressão é chamada de *Isometria de Itô*

$$E_Q\left[\left(\int_0^t c(s) dW_s\right)^2\right] = \int_0^t E_Q\left[c^2(s)\right] ds. \tag{19}$$

Desta forma, aplicando no último termo de (18),

$$\nu^2(t) = c^2 t. \tag{20}$$

Precisamos da média e variância de X, definido por (5), para que possamos usar em (7). Para a média de X,

$$\mu = E_Q \left[\int_0^T r(t) dt \right]$$

$$= \int_0^T E_Q [r(t)] \, dt = \int_0^T h(t) dt$$

$$= \int_0^T r_0 dt + \int_0^T \left(\int_0^t \eta(s) ds \right) dt$$

$$= r_0 T + \int_0^T \left(\int_0^t \eta(s) ds \right) dt. \tag{21}$$

Para a variância de X,

$$k^2 = E_Q \left(X^2 \right) - \left[E_Q \left(X \right) \right]^2$$

$$= E_Q \left[\left(\int_0^T r(t) dt \right)^2 \right] - \left\{ E_Q \left[\int_0^T r(t) dt \right] \right\}^2 . \tag{22}$$

Usando (17),

$$k^2 = E_Q \left\{ \int_0^T \left[\int_0^T \left(h(t) + c \int_0^t dW_s \right) dt \right] \left(h(t') + c \int_0^{t'} dW_{s'} \right) dt' \right\}$$

$$- \left\{ E_Q \left[\int_0^T \left(h(t) + c \int_0^t dW_s \right) dt \right] \right\}^2 . \tag{23}$$

Os termos h do primeiro operador esperança cancelam-se com o análogo no segundo operador esperança. No segundo operador, a atuação do mesmo sobre o termo de integral em dW_s resulta em zero. Assim,

$$k^2 = E_Q\left[\int_0^T\left(\int_0^{t'} c dW_{s'}\right)dt' \cdot \int_0^T\left(\int_0^t c dW_s\right)dt\right]. \tag{24}$$

Lembremos que dW_s significa $dW(s)$. Então, estamos lidando com os eixos s e t na integral

$$\int_0^T\left(\int_0^t c dW_s\right)dt, \tag{25}$$

e de forma análoga na integral em s' e t'. Trocaremos a ordem de integração em (24). Simbolicamente, a operação de troca está representada na Figura 1. A ordem original é t ser integrado em $[0,T]$ e s em $[0,t]$. Trocando, t passa a ser integrado em $[s,T]$ e s em $[0,T]$.

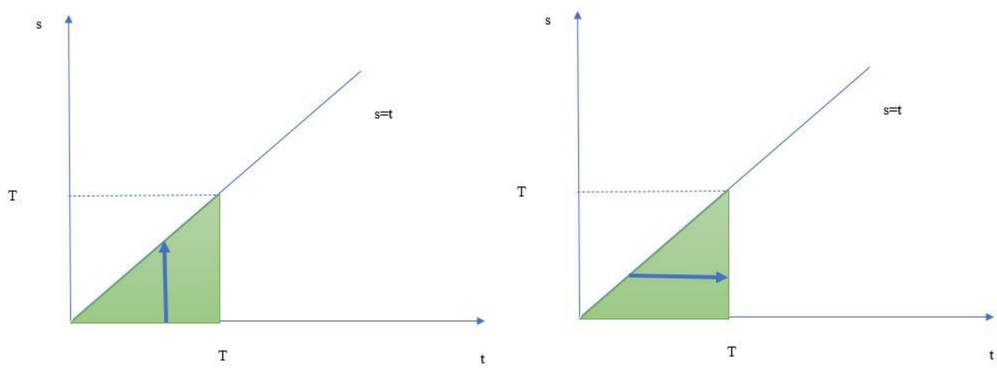

Figura 1: Troca da ordem de integração. O lado esquerdo é a ordem de integração original e o direito é a nova ordem de integração.

Temos

$$\int_0^T\left(\int_0^t c dW_s\right)dt = \int_0^T c\left(\int_s^T dt\right)dW_s. \tag{26}$$

Logo,

$$k^2 = c^2 E_Q\left[\int_0^T\left(\int_{s'}^T dt'\right)dW_{s'} \cdot \int_0^T\left(\int_s^T dt\right)dW_s\right] \tag{27}$$

A equação (27) também pode ser escrita na forma

$$k^2 = c^2 E_Q\left\{\left[\int_0^T\left(\int_s^T dt\right)dW_s\right]^2\right\}. \tag{28}$$

Pela isometria de Itô (19)

$$k^2 = c^2 \int\limits_0^T \left(\int\limits_s^T dt \right)^2 ds$$

$$= c^2 \int\limits_0^T (T-s)^2 \, ds. \tag{29}$$

Fazemos a substituição de variável

$$u = T - s \tag{30}$$

$$u_1 = T, \; u_2 = 0, \; du = -s,$$

obtendo

$$k^2 = c^2 \int\limits_0^T u^2 du$$

$$= c^2 \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^T = c^2 \frac{T^3}{3}. \tag{31}$$

Então, a variável X, definida por (5), tem distribuição $N\left(\mu, k^2\right)$, onde μ é dada por (21) e a vairância k^2 é dada por (31).

Retornemos ao apreçamento de opção de compra de *strike* K, vencimento T, onde este ativo-base é o IDI, dado por (2),

$$C_0 = E_Q \left[max \left(IDI_0 e^{\int_0^T r(t)dt} - K, 0 \right) e^{-\int_0^T r(t)dt} \right]$$

$$= E_Q \left[max \left(IDI_0 - K e^{-\int_0^T r(t)dt}, 0 \right) \right]$$

$$= E_Q \left[max \left(IDI_0 - K e^{-X}, 0 \right) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} max\left(IDI_0 - Ke^{-X}, 0\right)\rho(X)dX. \quad (32)$$

Definimos $Y = -X \sim N\left(-\mu, k^2\right)$, ou seja,

$$\rho(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} exp\left(-\frac{(Y+\mu)^2}{2k^2}\right). \quad (33)$$

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} max\left(IDI_0 - Ke^{Y}, 0\right)\rho(Y)dY. \quad (34)$$

O integrando não é nulo se

$$IDI_0 - Ke^Y > 0$$

$$\therefore Ke^Y < IDI_0$$

$$\Rightarrow y_{max} = ln\frac{IDI_0}{K}. \quad (35)$$

$$C_0 = \int_{-\infty}^{y_{max}} \left(IDI_0 - Ke^Y\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} exp\left(-\frac{(Y+\mu)^2}{2k^2}\right) dY \quad (36)$$

Redefinimos para a variável

$$x = \frac{Y+\mu}{k} \quad (37)$$

$$dx = \frac{dY}{k},\ x_{max} = \frac{y_{max}+\mu}{k}.$$

Então, temos as integrais

$$I_1 = IDI_0 \int_{-\infty}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = IDI_0 N\left(x_{max}\right) \quad (38)$$

e

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{y_{max}} Ke^Y \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} exp\left(-\frac{(Y+\mu)^2}{2k^2}\right) dY. \tag{39}$$

Completando quadrados,

$$-\frac{(Y+\mu)^2 - Y}{2k^2} =$$

$$= -\frac{1}{2k^2}\left[Y^2 + 2\left(\mu - k^2\right)Y + \mu^2 + \right.$$

$$\left.\left(\mu - k^2\right)^2 - \left(\mu - k^2\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2k^2}\left\{\left[Y + \left(\mu - k^2\right)\right]^2 + \mu^2 - \left(\mu - k^2\right)^2\right\}. \tag{40}$$

Nesta expressão,

$$-\frac{1}{2k^2}\left[\mu^2 - \left(\mu - k^2\right)^2\right] = \frac{1}{2}k^2 - \mu. \tag{41}$$

Assim,

$$I_2 = -K \cdot exp\left(\frac{1}{2}k^2 - \mu\right) \int_{-\infty}^{y_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} exp\left\{-\frac{\left[Y + \left(\mu - k^2\right)\right]^2}{2k^2}\right\} dY. \tag{42}$$

Mudando a variável para

$$z = \frac{Y + \left(\mu - k^2\right)}{k} \tag{43}$$

$$dz = \frac{d|Y}{k},\ z_{max} = \frac{y_{max} + \left(\mu - k^2\right)}{k}$$

$$I_2 = -K \cdot exp\left(\frac{1}{2}k^2 - \mu\right) \int_{-\infty}^{z_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= -K \cdot exp\left(\frac{1}{2}k^2 - \mu\right) N\left(z_{max}\right). \tag{44}$$

Note que, de (37) e (44),

$$z_{max} = x_{max} - k \tag{45}$$

$$C_0 = IDI_0 N\left(d_1\right) - K \cdot exp\left(\frac{1}{2}k^2 - \mu\right) N\left(d_2\right) \tag{46}$$

$$= IDI_0 \cdot N\left(d_1\right) - K \cdot P(0,T) \cdot N\left(d_2\right)$$

$$d_1 = x_{max} = \frac{ln\left(\frac{IDI_0}{K}\right) + \mu}{k}$$

$$d_2 = z_{max} = d_1 - k$$

$$k^2 = \frac{c^2 T^3}{3}$$

$$\mu = \frac{1}{2}k^2 - lnP(0,T)$$

Referências

[Catalão, 2023] Catalão, A., (2023), "Solução Geral de Equação Diferencial Linear Estocástica". Notas de Aula.

[Mikosch, 1998] Mikosch, T., (1998), "*Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*", 1st Edition, Word Scientific, Singapore.