Modelos Matemáticos para Apreçamento de Derivativos

Engenharia Financeira
Módulo EGF-12
Prof. Bruno Angélico

Sumário

- Introdução
- Árvores binomiais de Cox-Ross-Rubinstein
- Probabilidade neutra ao risco
- Efeitos de custos de transação
- Método das diferenças finitas: Opções americanas
- Erros de rebalanceamento discreto da carteira de replicação
- Aplicações em Python

Referência Principal

John C. Hull. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**, Bookman; 9ª edição, 2016. (PRINCIPAL)

Introdução

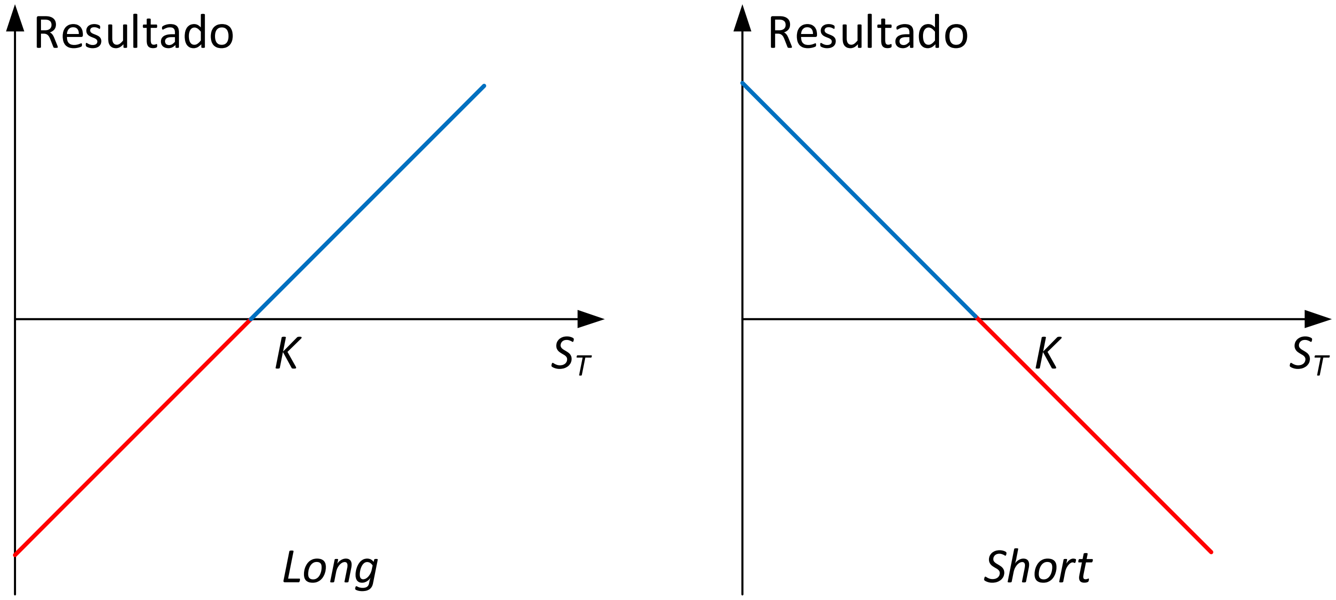
Derivativo: instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) dos valores de outros ativos. Exemplos: contrato a termo, contratos futuros e opções.

Contrato a termo (ou Mercado a termo):

- Contrato para comprar ou vender um ativo em uma data futura por um preço específico previamente acordado. É negociado no mercado de balcão.
- Uma das partes de um contrato a termo assume a posição comprada (*long*) e concorda em comprar o ativo em uma data futura por determinado preço. A outra parte assume a posição vendida (*short*) e concorda em vender o ativo na mesma data e pelo mesmo preço.
- As partes são obrigadas a levar o contrato até o prazo final do contrato.

Introdução

- O resultado de uma *long* em um contrato a termo sobre uma unidade do ativo é ($S_T - K$), sendo K o preço de entrega e S_T o preço à vista do ativo no vencimento do contrato. Ou seja, o titular é obrigado a comprar um ativo que vale S_T por K no vencimento.
- Similarmente, o resultado de uma opção *short* em um contrato a termo é ($K - S_T$), pois o titular é obrigado a vender o ativo que vale S_T por K no vencimento.



Introdução

Contratos futuros (ou Mercado futuro):

- As partes aqui também se comprometem a comprar ou vender certa quantidade de um ativo por um preço estipulado para a liquidação em data futura. São negociados somente em bolsas.
- As contrapartes não estão vinculadas entre si. Isso significa que elas podem repassar o contrato para outra pessoa a qualquer momento, o que gera maior liquidez.
- As alterações de preços são ajustadas diariamente. Sendo assim, as partes realizam desembolsos frequentes para apurar perdas e ganhos.
- É uma negociação mais transparente, mas mais “burocrática”.

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

Estratégia	Hoje	Data de entrega
Compro 1 contrato futuro	?	$S_T - K$
Compro 1 unidade do ativo	$-S_0$	S_T
Pego emprestado	$e^{-rT}K$	$-K$

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

Estratégia	Hoje	Data de entrega
Compro 1 contrato futuro	$e^{-rT} K - S_0$	$S_T - K$
Compro 1 unidade do ativo	$-S_0$	S_T
Pego emprestado	$e^{-rT} K$	$-K$

- Valor de um contrato futuro na data *t*:

$$F_t = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

- Contrato futuro com valor presente nulo:

$$F_0 = S_0 - e^{-rT} K \xRightarrow{\text{deposita só a margem}} 0 = S_0 - e^{-rT} K$$

- Logo, o valor futuro do empréstimo (*K*) é igual ao preço atual do ativo-objeto levado a valor futuro pela taxa livre de risco:

$$K = S_0 \, e^{rT}$$

Esse valor é chamado de preço futuro do contrato.

Introdução

Opções:

- No mercado de opções, negocia-se o direito de executar uma ação e a obrigação da contraparte de realizá-la.
- Quem adquirir o direito deve pagar um **prêmio** ao vendedor, ou seja, um valor pago para ter a opção de comprar ou vender o referido bem em uma data futura por um preço previamente acordado.
- O preço no contrato é denominado preço de exercício, ou *strike price* (*K*).
- O Exercício de opções é o comando que o titular da opção realiza para exercer esse direito, que pode ser a venda ou a compra da ação pelo preço pré-determinado.
- São negociadas em bolsa e no mercado de balcão. Há dois tipos: opção de compra (*call*) e opção de venda (*put*).

Introdução

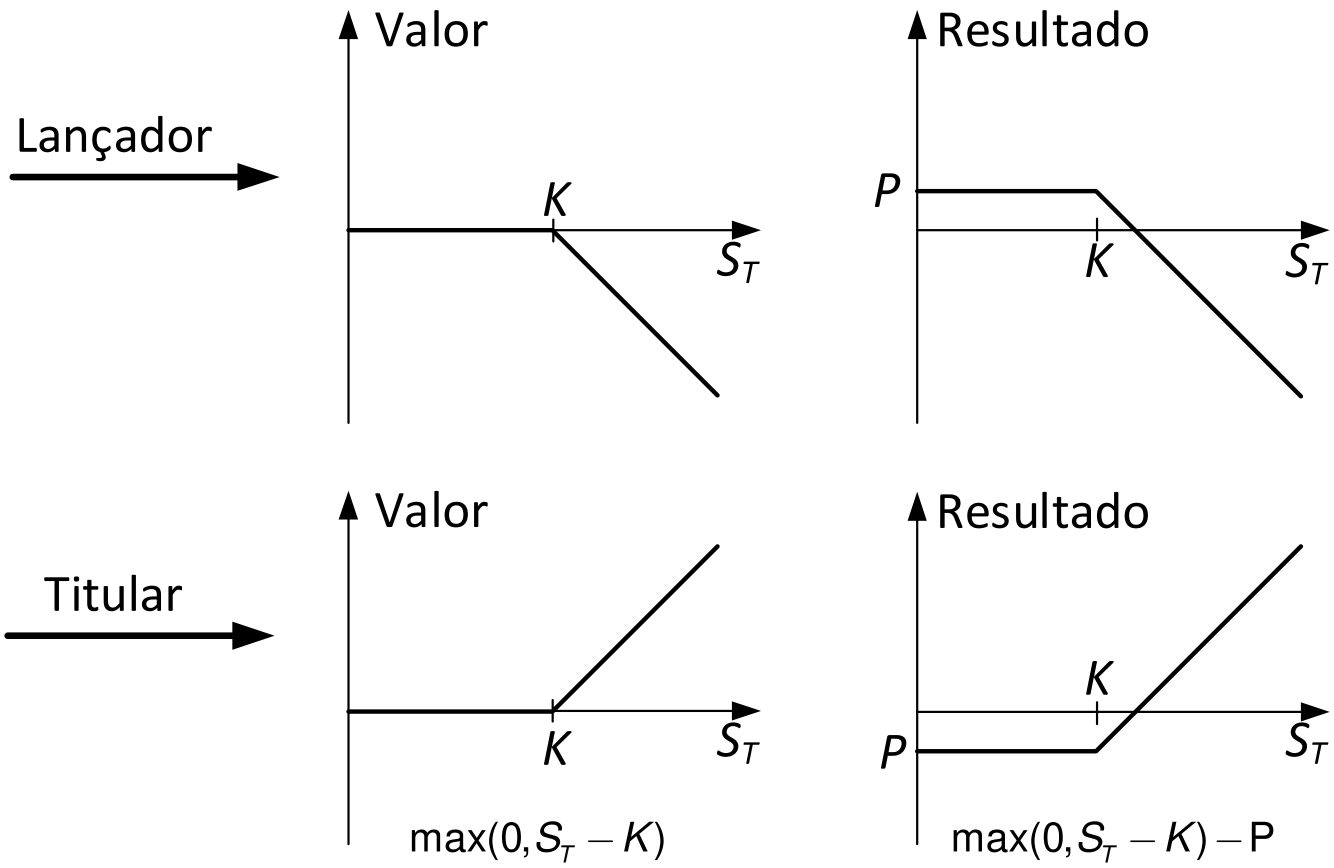
- A opção de *call* dá ao titular o direito de comprar o ativo subjacente até uma determinada data, por um preço específico.
- A opção de *put* dá ao titular o direito de vender o ativo subjacente até uma determinada data, por um preço específico.
- Uma opção dá o direito ao titular de exercer, mas não a obrigação. Essa é a diferença fundamental em relação aos contratos futuros e a termo.
- Seja S o preço do ativo:
  - ➢ Uma opção *call* está *in the money* se $S > K$, *at the money* se $S = K$, e *out of the money* se $S < K$.
  - ➢ Uma opção *put* está *in the money* se $S < K$, *at the money* se $S = K$, e *out of the money* se $S > K$.

Introdução

- Há duas classes mais famosas: opções europeias e opções americanas:
  - Opções europeias só podem ser exercidas no vencimento do contrato.
  - Opções americanas, que são as mais comuns, podem ser exercidas em qualquer momento até a data de vencimento.
- Há quatro tipos de participantes: compradores de opções de compra, vendedores de opções de compra, compradores de opções de venda e vendedores de opções de venda.
  - Quem compra uma *call* deseja um preço acima do *strike*;
  - Quem vende uma *call* deseja um preço abaixo do *strike*;
  - Quem compra uma *put* deseja um preço abaixo do *strike*;
  - Quem vende uma *put* deseja um preço igual ou acima do *strike.*
- Quem vende é chamado de lançador e quem compra de titular. O lançador tem a obrigação e o titular tem o direito de escolher se exercerá a opção.

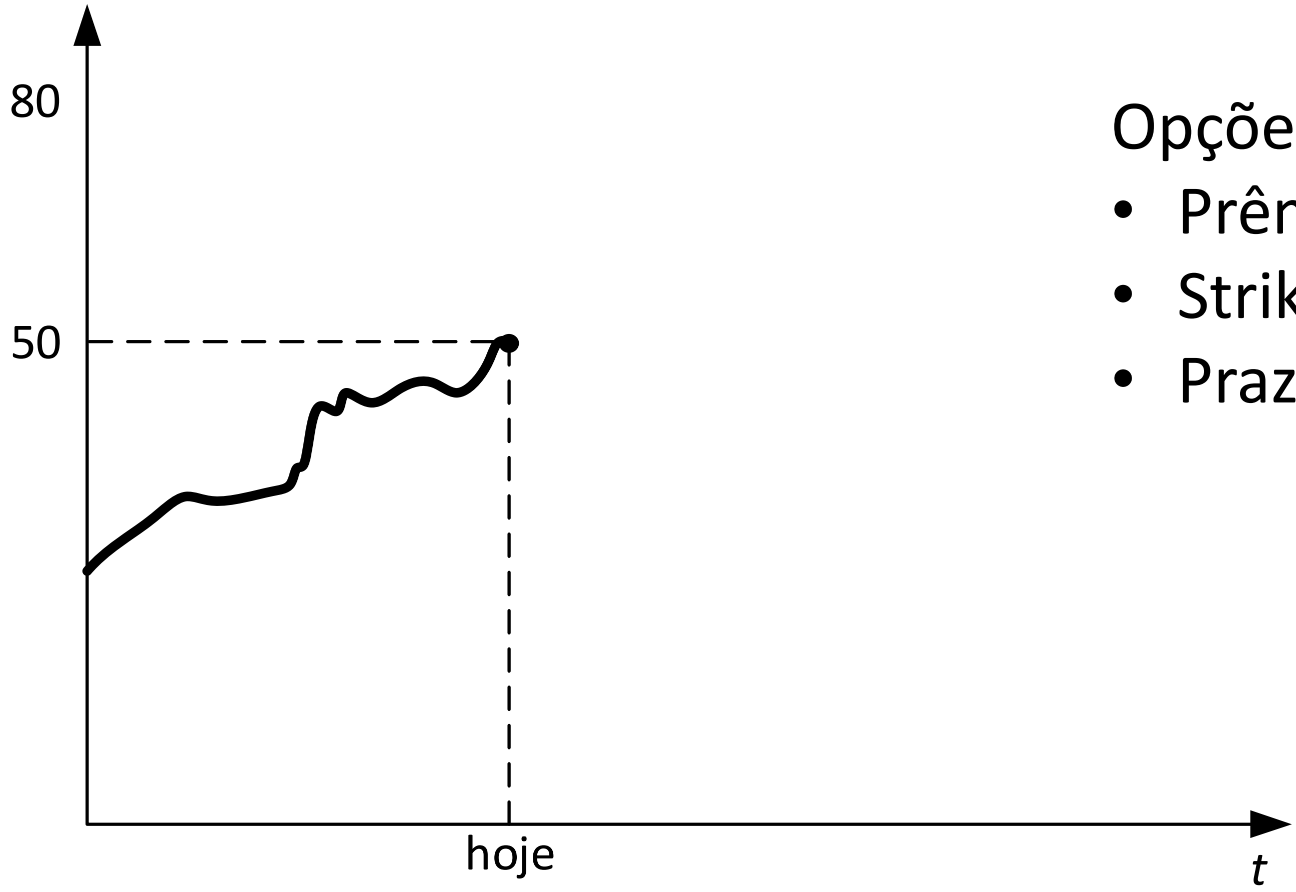
Introdução

- Como exemplo, na *call*, o titular paga o prêmio P para ter direito à opção. Seja S_T o preço no vencimento. Se $S_T > K$ (*in the money*), o portador da opção vai exercer a operação e receberá o preço da ação menos o valor do *strike*. Todavia, se $S_T < K$ (*out of the money*), ele não irá exercer e quem ganha, nesse caso, é laçador.



Introdução

- Exemplo - opção americana: uma ação da compania X vale R$ 50 reais hoje e acompanha a linha de crescimento no gráfico abaixo:



Opções da *Call*:

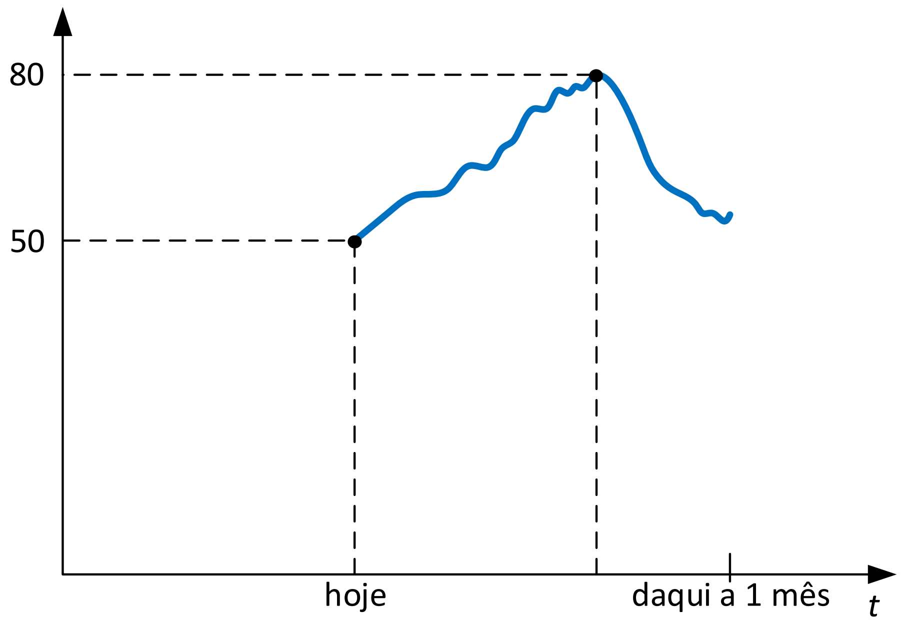
- Prêmio: R$ 5,00
- Strike: R$ 60,00
- Prazo: 1 mês

Introdução

Considere o cenário favorável que a ação subiu e, quando atingiu R$80,00 o titular exerceu a opção. O lucro é:

$$S_T - K - P = 80 - 60 - 5 = \text{R\$ } 15{,}00$$

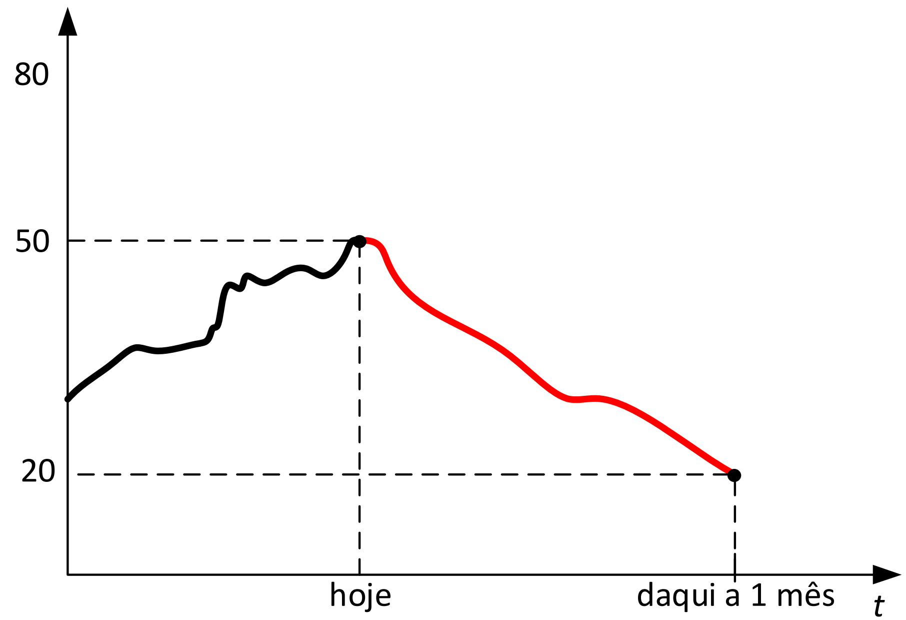
Se ao invés da opção, o investidor tivesse comprado a ação por R$50 e vendido por R$80, o lucro seria R$30,00.



Introdução

No entanto no cenário de perda, como ilustrado abaixo, o valor da ação cai para R$ 20,00 no vencimento e, na opção, o titular não exerceu a opção e seu prejuízo foi o prêmio de R$ 5,00.

Se, ao invés da opção, o investidor tivesse comprado a ação por R$50, o prejuízo seria de R$30,00 em caso de venda da ação na mesma data do vencimento.



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Método de avaliação de opções desenvolvido em 1979 por Cox, Ross e Rubinstein.
- COX, John C.; ROSS, Stephen A.; RUBINSTEIN, Mark. Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, v. 7, n. 3, p. 229-263, 1979. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0304405X79900151
- Procedimento interativo que permite a especificação de nós ou pontos no tempo, durante o período entre a data de avaliação e a data de vencimento da opção.
- Expresso por um diagrama denominado **árvore binomial**, que representa os diferentes caminhos que podem ser seguidos pelo preço do ativo subjacente.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Ex. feito pelo Prof. Márcio Menezes:

Suponha uma opção de compra de um ativo-objeto. O valor atual do ativo-objeto é de R$ 10,00. O preço de exercício (K) é de R$ 10,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (r) é de 10% ao ano. Baseando-se em dados históricos descobre-se que a volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 22,31% ao ano, enquanto que sua taxa de crescimento do ativo (taxa de retorno média μ) é de 16% ao ano.

Movimentos para cima e para baixo são representados por:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}; \qquad d = 1/u$$

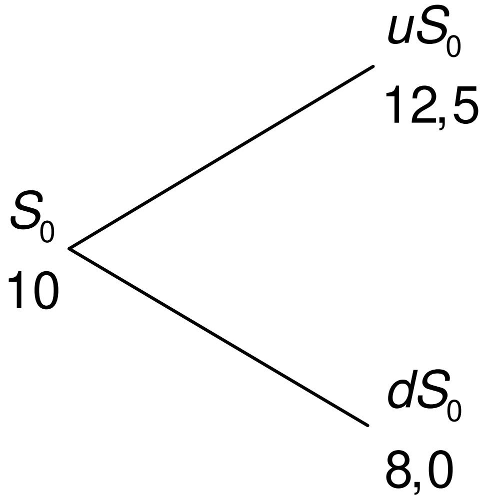
σ:volatilidade do ativo objeto ao ano

Δt: intervalo de tempo (mesma unidade da unidade de tempo da vol.)

Só a título de exemplo numérico, vamos assumir que o vencimento é em um ano e a árvore será discretizada em ano. Assim:

$$u = e^{0,2231\sqrt{1}} = 1,25 \Rightarrow \; d = 0,8$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein



- Note que:

$$puS_0 + (1 - p)dS_0 = \mu S_0$$

$$pu + (1 - p)d = \mu$$

$$p = \frac{\mu - d}{u - d} = \frac{1{,}16 - 0{,}8}{1{,}25 - 0{,}8} = 80\%$$

p: prob. do preço subir; (1-*p*) prob. do preço cair

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Neutralidade ao risco: a ideia é montar uma carteira livre de risco:

$$\Pi_u = \Pi_d$$

- Calcula-se o valor Δ (quantidade do ativo objeto) para que a carteira seja *risk-free.*
- Se o movimento do ativo é para $S_0 u \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_u.
- Se o movimento do ativo é para $S_0 d \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_d.

$$\underbrace{S_0 u}_{S_u} \Delta - V_u = \underbrace{S_0 d}_{S_d} \Delta - V_d$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Neutralidade ao risco: a ideia é montar uma carteira livre de risco:

$$\Pi_u = \Pi_d$$

- Calcula-se o valor Δ (quantidade do ativo objeto) para que a carteira seja *risk-free.*
- Se o movimento do ativo é para $S_0 u \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_u.
- Se o movimento do ativo é para $S_0 d \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_d.

$$\underbrace{S_0 u}_{S_u} \Delta - V_u = \underbrace{S_0 d}_{S_d} \Delta - V_d$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

Compara com

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Do modelo B&S.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- No exemplo em questão:

$$\Delta = \frac{2{,}5 - 0}{12{,}5 - 8} \Rightarrow \Delta = 0{,}5556$$

$$V_u = \max(0,\ S_0 u - K) = \max(0,\ [12{,}5 - 10]) \Rightarrow V_u = 2{,}5$$

$$V_d = \max(0, S_0 d - K) = \max(0,\ [8 - 10]) \Rightarrow V_d = 0$$

$$\Pi_u = 12{,}5 \cdot 0{,}5556 - 2{,}5 = 4{,}44$$

$$\Pi_d = 8 \cdot 0{,}5556 - 0 = 4{,}44$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Se a carteira é neutra ao risco,

$$\Pi_0 = e^{-rT}\Pi_T$$

Em que Π_T é o valor futuro livre de risco ($\Pi_T = \Pi_d = \Pi_u$).
Assim,

$$\Pi_0 = e^{-0,10\cdot 1}4,44 = 4,02$$

Portanto,

$$\Pi_0 = S_0\Delta - V_0 \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - \Pi_0$$

$$V_0 = 10\cdot 0,5556 - 4,02 \approx 1,54$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Probabilidade neutra ao risco: $\Pi_0 = S_0\Delta - V_0 \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - \Pi_0$

- Como Π_0 é um investimento sem risco:

$$V_0 = S_0\Delta - e^{-rT}\Pi_T \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - e^{-rT}\left(S_0 u\Delta - V_u\right)$$

- Rearranjando:

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0\Delta\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u \\
&= S_0\left(\frac{V_u - V_d}{S_0\left(u-d\right)}\right)\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u \\
&= \frac{1}{\left(u-d\right)}\left[V_u\left(1 - e^{-rT}u\right) - V_d\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u\left(u-d\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(u-d\right)}\left[V_u\left(1 - e^{-rT}d\right) - V_d\left(1 - e^{-rT}u\right)\right] \\
&= e^{-rT}\left[V_u\frac{\left(e^{rT} - d\right)}{\left(u-d\right)} + V_d\frac{\left(u - e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}\right]
\end{aligned}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Perceba que:

$$\frac{\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}+\frac{\left(u-e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}=1$$

- Define-se:

$$q=\frac{\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}$$

- Na condição de não arbitragem tem-se que: $0 < q \leq 1$. O termo q pode ser interpretado como uma probabilidade. Nesse caso, a **probabilidade neutra ao risco**. Veja também que:

$$1-q=\frac{\left(u-d\right)-\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}=\frac{\left(u-e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}$$

- No exemplo, q = 0,6782.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto,

$$V_0 = e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]$$

- Ou seja,

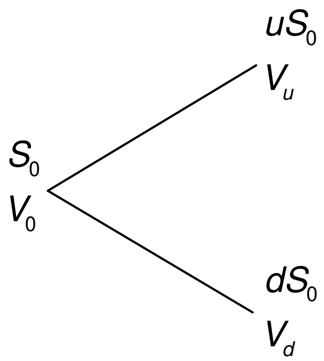
$$V_0 = e^{-rT}E_q\left[V_T\right]$$

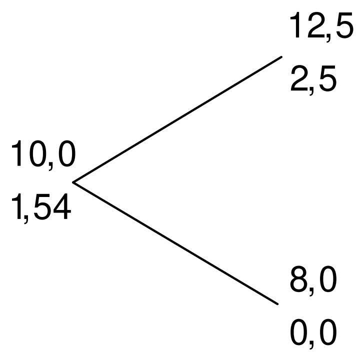
- Aplicando esse resultado, verifica-se que:

$$V_0 = e^{-0,10\cdot 1}\left[0,6782\cdot 2,5 + (1-0,6782)\cdot 0\right] \approx 1,54$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto,





Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Replicando uma opção:

$$\Pi_T = S_T\Delta - V_T$$

- A opção poderia ser replicada como

$$V_T = S_T\Delta - \Pi_T$$

Sendo Π_T interpretado como uma dívida a ser assumida, mas livre de risco. Como é livre de risco,

$$\Pi_u = \Pi_d$$

Então:

$$\Pi_T = e^{rT}\Pi_0$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto, o valor da opção é igual a uma carteira com:

  – Uma quantidade Δ de ativos
  – Uma dívida de valor *B* a uma taxa de juros livre de risco

- Replicação:

$$V_0 = S_0\Delta - B$$

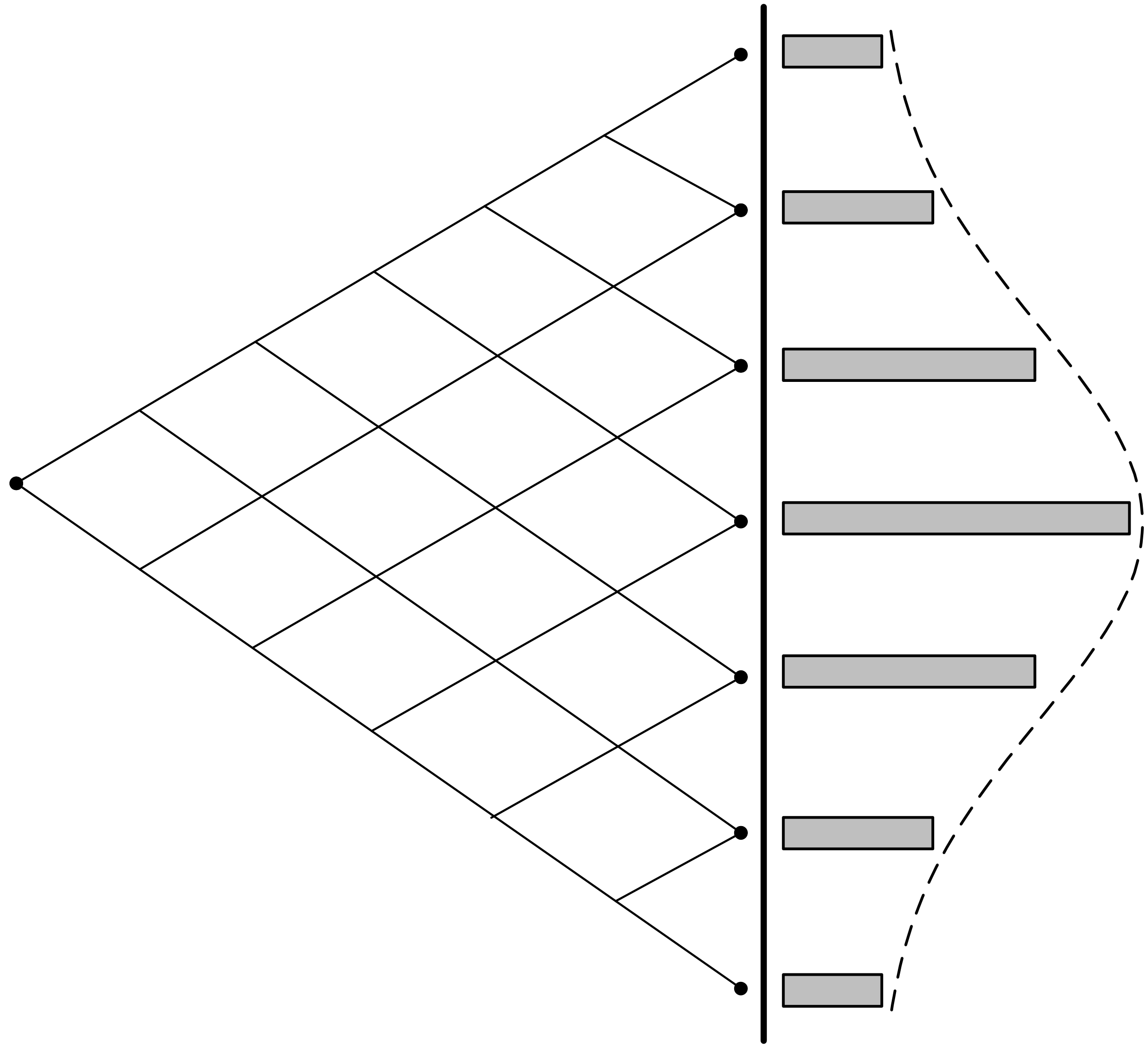
$$\begin{cases} V_u = S_u\Delta - e^{rT}B \\ V_d = S_d\Delta - e^{rT}B \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{uS_0 - dS_0}$$

$$B = e^{-rT}\frac{dV_u - uV_d}{u - d}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Árvore com vários nós:



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

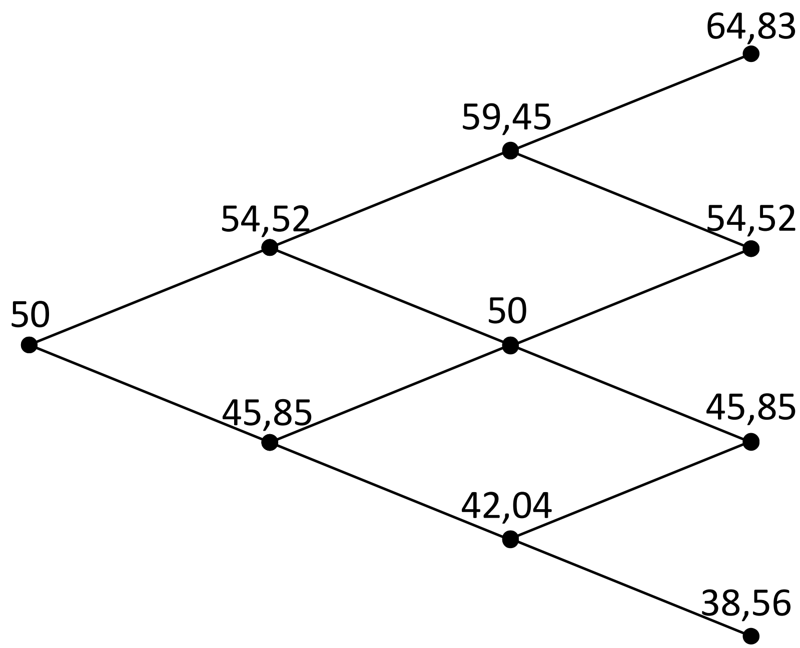
- Exemplo: Suponha uma *call* de **opção europeia** em que o valor atual do ativo-objeto (S_0) é de R$ 50,00. O preço de exercício (K) é de R$ 49,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (r) é de 6% ao ano. A volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 30% ao ano. O vencimento é em 3 meses. Qual o prêmio da opção?

Vamos discretizar mensalmente. Assim, como a escala de tempo da volatilidade é anual, tem-se que $\Delta T = 1/12$. Portanto,

$$u = e^{0{,}3\sqrt{1/12}} = 1{,}0905; \qquad d = 1/u = 0{,}9170$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

O preço do ativo subjacente é evoluído de acordo com a seguinte árvore:



A probabilidade neutra ao risco é dada por:

$$q = \frac{\left(e^{0,061/12} - 0,9170\right)}{\left(1,0905 - 0,9170\right)} = 0,5073$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

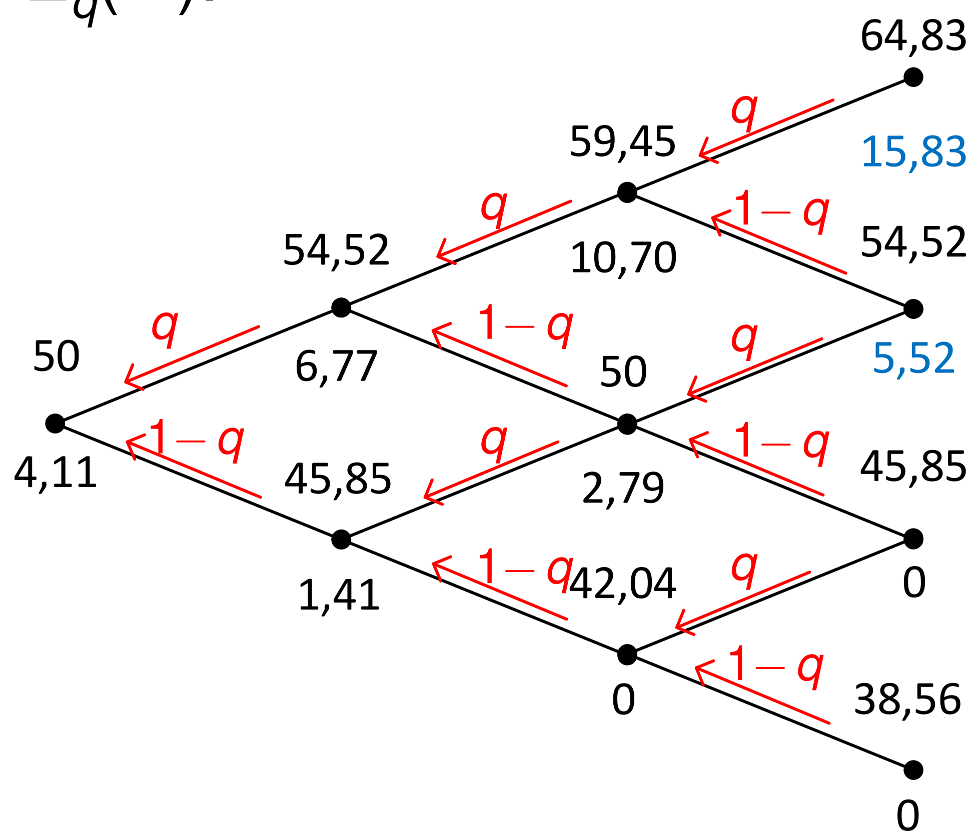
Monta-se então a árvore com os valores das opções, de trás para frente, utilizando $E_q(\,\cdot\,)$.

- Em $t = T$:

$$V_{ex} = \max(S - K, 0)$$

- Em $t < T$:

$$V = e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]$$



Portanto, $V_0 \approx 4{,}11$.

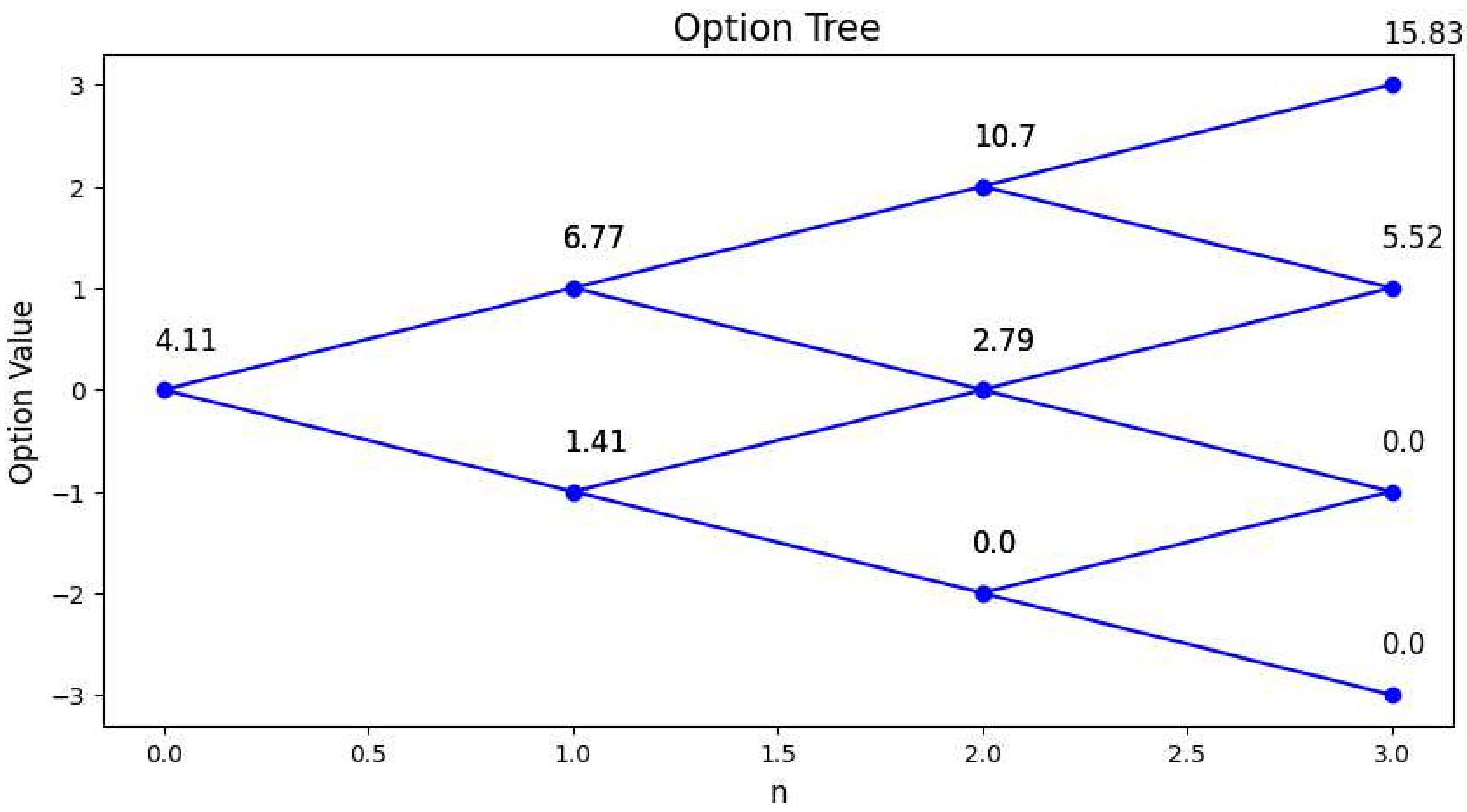
Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
#Importação e instalação de pacotes
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as py
!pip install finoptions
import finoptions as fo
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
```

```
opt1_CRR = fo.binomial_tree_options.CRRBinomialTreeOption(S=50,K=49,...
                                                          t=3/12,r=0.06,...
                                                          b=r,sigma = 0.3,...
                                                          n=3, type='european')
opt1_CRR.call()
print(opt1_CRR.call(tree=True))
opt1_CRR.plot(call=True, figsize=(10,5));
```

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
[[ 4.10560131 6.76738523   10.6998857    15.83403044   ]
 [ 0.          1.40707432   2.78774014    5.52315892    ]
 [ 0.          0.           0.            0.            ]
 [ 0.          0.           0.            0.            ]]
```



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Exemplo: Suponha uma *put* de **opção americana** em que o valor atual do ativo-objeto (S_0) é de R$50,00, o preço de exercício (K) é de R$52,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (r) é de 5% ao ano. A volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 30% ao ano. O vencimento é em 2 anos. Qual o prêmio da opção?

Vamos discretizar anualmente. Assim, como a escala de tempo da volatilidade é anual, tem-se que $\Delta T = 1$. Portanto,

$$u = e^{0,3\sqrt{1}} = 1,3499; \qquad d = 1/u = 0,7408$$

$$q = \frac{\left(e^{0,05 \cdot 1} - 0,7408\right)}{\left(1,3499 - 0,7408\right)} = 0,5097$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Monta-se então a árvore com os valores das opções, de trás para frente, utilizando $E_q(\cdot)$.

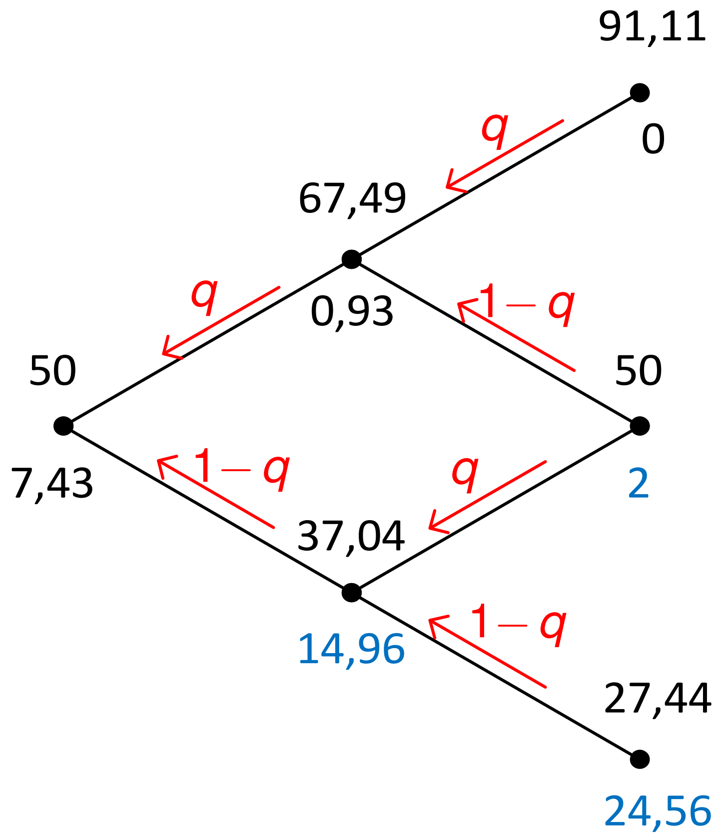
- Em t = T:

$$V_{ex} = \max(K - S, 0)$$

- Em t < T;

$$V_{ex} = \max(K - S, 0)$$

$$V = \max\left(V_{ex},\ e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]\right)$$



Portanto, $V_0 \approx 7{,}43$.

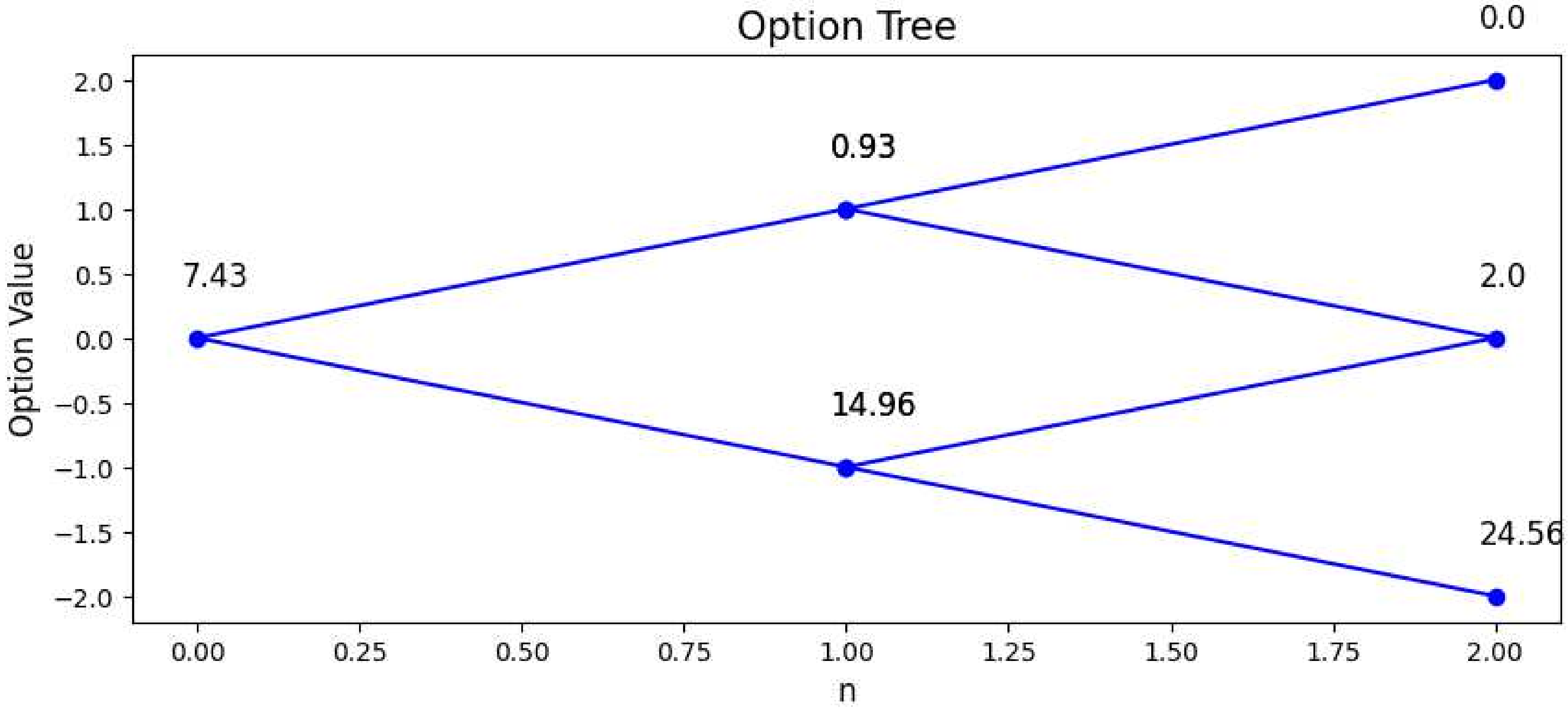
Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Código em R:

```
opt2_CRR =
fo.binomial_tree_options.CRRBinomialTreeOption(S=50,K=52,t=2,
r=0.05,b=r,sigma = 0.3,n=2, type='american')
opt2_CRR.put()
print(opt2_CRR.put(tree=True))
opt2_CRR.plot(call=False, figsize=(10,4));
```

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
[[ 7.4284019  0.93269783   0.          ]
 [ 0.         14.95908897  2.          ]
 [ 0.         0.           24.5594182  ]]
```



Erro no Prêmio de uma Opção

- Ao calcular o preço de uma opção, é muito comum esse preço ser diferente do preço observado no mercado.
- Por que isso ocorre?
  - Talvez o modelo matemático de apreçamento apresenta alguma premissa errada.
  - Talvez algum dos parâmetros do modelo está incorreto.
- Vamos supor que há algum parâmetro impreciso.

Erro no Prêmio de uma Opção

- Parâmetros do modelo Black & Scholes:
  - S: preço do ativo objeto;
  - K: preço de exercício;
  - $(T - t)$: intervalo de tempo até o vencimento;
  - σ: volatilidade (de hoje até o vencimento)
  - r: taxa de juros livre de risco (de hoje até o vencimento)
- A volatilidade é que comumente apresenta maior flutuação.

Revisão de Black-Scholes

Revisão do modelo Black-Scholes:

- Assume-se que o preço do ativo-objeto segue um movimento browniano geométrico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

μ é uma taxa de retorno esperada do ativo, σ representa sua volatilidade, e W refere-se ao processo de Wiener padrão

- Assume-se que o preço da opção (*V*) é uma função que depende de *S* e de *t*:

$$V(S,t)$$

Revisão de Black-Scholes

- Pode-se escrever o diferencial *dV* como:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

- Verifica-se que: $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$, pois para o processo de Wiener, $dW^2 = dt$. Logo:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

- Monta-se uma carteira com uma opção *V* e com uma quantidade Δ de ativos:

$$\Pi = V - S\Delta$$

Revisão de Black-Scholes

- O diferencial da carteira é dado por:

$$d\Pi = dV - dS\Delta$$

$$d\Pi = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW - \left(\mu S dt + \sigma S dW\right)\Delta$$

$$d\Pi = \left(\mu S\left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right] + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \sigma S\left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right]dW$$

- A incerteza é representada por *dW*. Deseja-se eliminar a incerteza desta carteira. Qual deve ser Δ para eliminar o risco presente na certeira?

Revisão de Black-Scholes

- Note que deve-se escolher

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Com isso:

$$d\Pi = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

- Como a carteira montada não apresenta risco, o seu retorno deve ser o mesmo de um título livre de risco, ou seja

$$d\Pi = r\Pi dt \Rightarrow \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Revisão de Black-Scholes

- Portanto,

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{\partial V}{\partial t}=rV-rS\frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t}=rV-rS\frac{\partial V}{\partial S}-\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

que é a equação de Black-Scholes, uma Equação Diferencial Parcial (EDP).

Revisão de Black-Scholes

- Para chegar ao preço da opção de compra (*call*) a partir da EDP de B-S, considera-se a seguinte condição de contorno:

$$C(0,t) = 0, \ \forall t$$

$$C(S,t) \to S, \text{ quando } S \to \infty$$

$$C(S,T) = \max\left(S - K, 0\right)$$

Revisão de Black-Scholes

- A solução para opção de *call* é dada por:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- O preço de uma *put* por sua vez, é dado por:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

- $N(x)$ é a c.d.f. de uma normal padrão.
- Essas são as fórmulas de Black-Scholes-Merton para precificação de opções Europeias.

Gregas

- São medidas de sensibilidade do valor de uma opção em relação às variáveis que compõe o preço da opção.
- **Delta**: dado pela primeira derivada do preço da ação em relação ao preço do ativo.

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$$

  - Mede o quanto varia o preço da opção para uma variação do preço do ativo subjacente.
  - Numa *call*, varia entre 0 e +1.
  - Numa *put*, varia entre 0 e -1.

Gregas

- **Gamma**: dado pela segunda derivada do preço da ação em relação ao preço do ativo.

$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

  – Mede o quanto varia o delta da opção para uma variação do preço do ativo subjacente.
  – Positivo na *call* e na *put*.
  – É maior para opções no dinheiro (*at-the-money*).

Gregas

- **Vega**: dado pela primeira derivada do preço da ação em relação à volatilidade.

$$\text{Vega} := \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

  - Mede o quanto varia o preço da opção para uma determinada variação na volatilidade.
  - Positivo na *call* e na *put*.
  - É maior para opções no dinheiro (*at-the-money*).
  - Fica maior quanto maior o prazo de vencimento da opção.

Gregas

- **Theta**: dado pelo negativo da primeira derivada do preço da ação em relação ao tempo. $$\Theta := -\frac{\partial V}{\partial t}$$
  - Mede o quanto varia o preço da opção com o passar do tempo (um dia).
  - Mostra o "custo de carregamento".
  - É sempre negativo.
  - Maior amplitude para opções no dinheiro.

Gregas

- **Rho**: dado pela primeira derivada do preço da ação em relação à taxa de juros.

$$\mathrm{P} := \frac{\partial V}{\partial r}$$

  - Mede o quanto varia o preço da opção para uma mudança na taxa de juros.
  - Variável que menos afeta o preço da opção.
  - Positivo na *call* e negativo na *put*.

Gregas

No modelo B&S:

		Call	*Put*
Delta	$\frac{\partial V}{\partial S}$	$N(d_1)$	$-N(-d_1) = N(d_1) - 1$
Gamma	$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Vega	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$S_0 N'(d1)\sqrt{T-t}$	
Theta	$-\frac{\partial V}{\partial t}$	$-\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho	$\frac{\partial V}{\partial r}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

Lembrando que:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t \qquad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Retorno e Volatilidade

Retorno de ativos

- O retorno de um ativo é um resumo completo e de escala livre da oportunidade de investimento.
- Séries de retornos geralmente são mais fáceis de manipular do que séries de preços.
- Seja P_t o preço de um ativo no instante t.

Retorno e Volatilidade

- Fixando o ativo pelo período de tempo de (t–1) a t, o retorno líquido simples (retorno aritmético) para um período (ou retorno simples) é:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- Fixando o ativo entre (t–k) a t, tem-se o retorno para k períodos:

$$1 + R_{t,k} = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \ldots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

$$\Rightarrow R_{t,k} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) - 1$$

Retorno e Volatilidade

- Retorno Logarítmico:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log P_t - \log P_{t-1}$$

- Vantagem: para múltiplos períodos, o retorno é composto pela simples soma dos retornos em cada período:

$$r_{t,k} = \log(1 + R_{t,k}) = \log\left[\prod_{j=0}^{k-1}(1 + R_{t-j})\right]$$

$$= \log(1 + R_t) + \log(1 + R_{t-1}) + \ldots \log(1 + R_{t-(k-1)})$$

$$= r_t + r_{t-1} + \ldots r_{t-(k-1)}$$

Retorno e Volatilidade

$$r_t = \ln\left(1 + R_t\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} R_t^k = R_t - \frac{1}{2} R_t^2 + \frac{1}{3} R_t^3 - \ldots$$

- Quando os retornos são pequenos, o valor do retorno logarítmico se aproxima muito do retorno aritmético $r_t \approx R_t$.
- Pode-se então usar as séries dos retornos logarítmicos dos ativos no lugar do retorno aritmético.
- Na ampla maioria dos casos, os retornos logarítmicos podem e são empregados.

Retorno e Volatilidade

Volatilidade

- Volatilidade do preço de um ativo corresponde à incerteza em relação a movimentos futuros nos preços deste ativo.
- Medida mais comum de incertezas no mercado.
- A volatilidade por si só já é considerada uma medida de risco.
- O valor da volatilidade pode oscilar de período para período.
- A volatilidade parece reagir diferentemente para grandes aumentos de preços ou grandes quedas.

Retorno e Volatilidade

- Existem vários modelos de estimadores de volatilidade.
- Aplicando o modelo escolhido aos dados históricos, tem-se estimativas da volatilidade passada.
- Geram-se também previsões da volatilidade de agora até algum ponto futuro no tempo.
- Uma boa “seleção” dos dados levantados torna-se crucial para a eficiência do modelo.

Retorno e Volatilidade

- Esses fatos indicam que os retornos são não-autocorrelacionados, mas dependentes.
- Os modelos de volatilidade tentam capturar esta dependência.
- Seja $F_{t\text{-}1}$ o conj. de informações até t-1. A média e a var. condicionais de r_t dado $F_{t\text{-}1}$ são:

$$\mu_t = \mathrm{E}\left(r_t \mid F_{t-1}\right), \qquad \sigma_t^2 = \mathrm{var}\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left[\left(r_t - \mu_t\right)^2 \mid F_{t-1}\right]$$

Retorno e Volatilidade

- Assume-se que r_t siga um modelo simples estacionário, como ARMA(p,q):

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \mu_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

OBS: Para a maioria das séries de log retorno de ativos, as autocorrelações são fracas, se houver. Nesse caso, μ_t equivale à média incondicional.

Retorno e Volatilidade

- Além disso, vamos assumir que o retorno médio é zero.
- Embora isso não seja estritamente correto, a média condiconal é uma ordem de grandeza menor do que a volatilidade e, portanto, geralmente pode ser ignorada para fins de previsão de volatilidade.

Retorno e Volatilidade

- Ao assumir que o retorno médio é nulo:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left({\varepsilon_t}^2 \mid F_{t-1}\right) = \mathrm{var}\left(\varepsilon_t \mid F_{t-1}\right)$$

Volatilidade Implícita

- Qual o melhor estimador para volatilidade:
  – Baseado em dados históricos?
  – Baseado em uma análise de “sentimento” do mercado? O preço da opção daria uma estimativa da volatilidade (volatilidade implícita).
- Considere que o preço calculado para a opção está errado. Se o modelo estiver correto, vamos considerar que a volatilidade inserida no modelo está errada.

Volatilidade Implícita

- Se a volatilidade inserida no modelo está errada, então vamos tentar descobrir a volatilidade que o mercado está usando.
- Não existe uma fórmula fechada para encontrar a volatilidade implícita. Pode-se “chutar” valores até se obter o preço correto.
- O processo de “chutar” é chamado de processo iterativo. Simples de ser feito por um computador.

Volatilidade Implícita

- O cálculo da volatilidade implícita pode ser considerado como uma estimativa de mercado para a volatilidade futura do retorno proporcionado por um ativo objeto.
- Nesse processo, percebe-se que a volatilidade não é a mesma para todos os valores do *strike* (K).
- A volatilidade varia em função do preço de exercício! Para valores extremos de K a volatilidade costuma ser mais alta.

Volatilidade Implícita

- Exemplo: (Prof. Marcio Menezes): Em 9/12/2014 o valor de uma ação da Petrobrás era dado por R$ 11,36, enquanto que a taxa SELIC era de 11,65% ao ano. A tabela seguinte apresenta um conjunto de opções de compra de Petrobrás, por diferentes preços de exercício. Todas elas vencem no dia 19/01/2015.

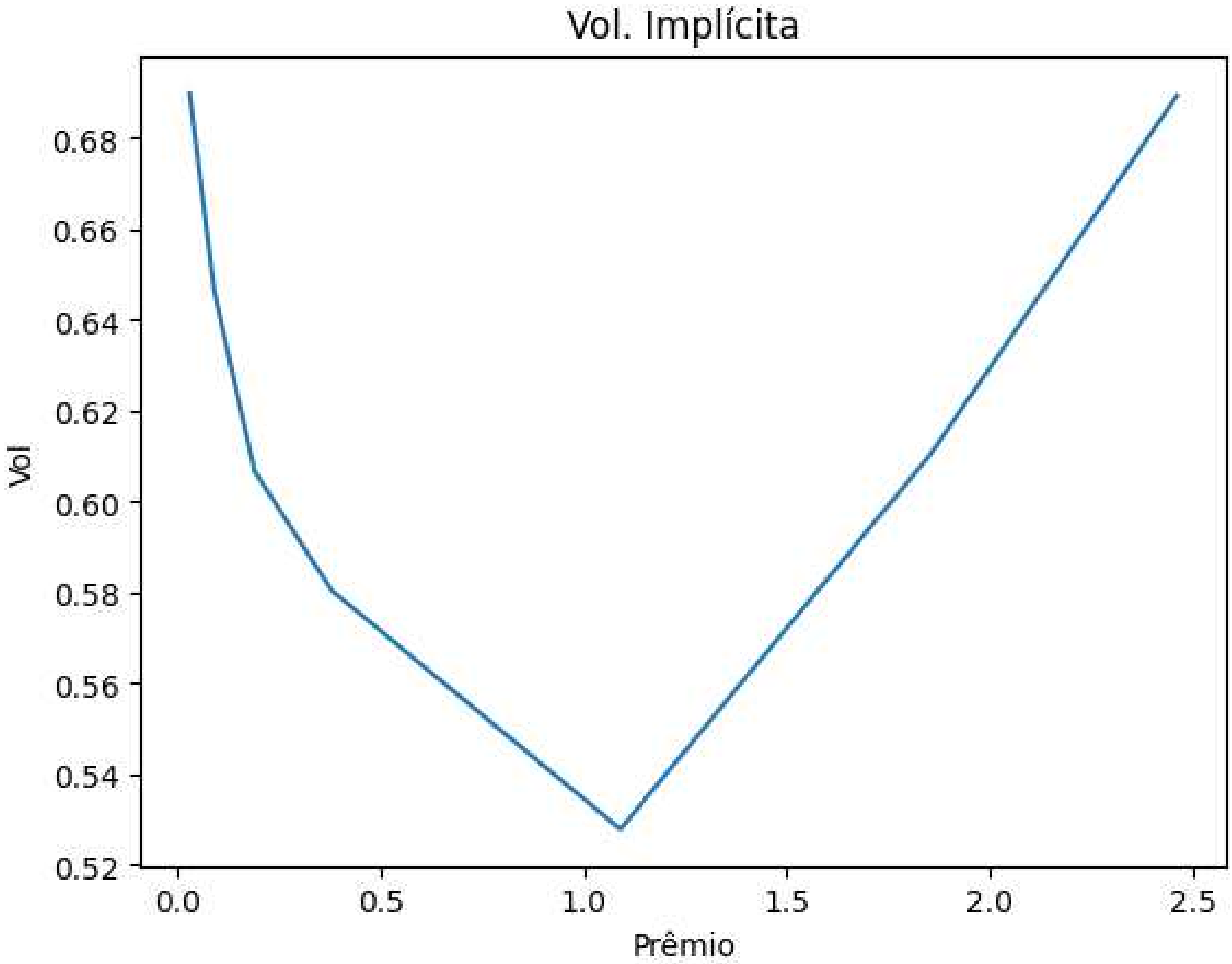
Volatilidade Implícita

Exercício	Prêmio
9,21	2,46
9,91	1,85
10,91	1,09
12,91	0,38
14,16	0,19
15,66	0,09
17,91	0,03

- Obtenha a volatilidade implícita para cada preço de exercício.

Volatilidade Implícita

array([0.68932409, 0.60999969, 0.52791046, 0.58039075, 0.60661184,
0.64642015, 0.68981403])



Exponentially Weighted Moving Average – EWMA

Média Móvel

- A maneira mais óbvia e fácil de prever a volatilidade é simplesmente calcular a variância de uma amostra de retornos.
- Se a janela de amostra é constante ao longo do tempo e, todos os dias, adicionarmos o retorno mais recente à amostra e dispensarmos o mais antigo, tem-se o modelo de média móvel (MA).

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{W_E} \sum_{i=1}^{W_E} r_{t-i}^2$$

Exponentially Weighted Moving Average – EWMA

onde r_t e é o retorno observado no dia t e W_E é o comprimento da janela de estimação.

Média Móvel com Ponderação Exponencial (EWMA)

- Modificação do MA, em que pesos passados decaem exponencialmente:

$$\sigma_t^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda\left(1-\lambda^{W_E}\right)} \sum_{i=1}^{W_E} \lambda^i r_{t-i}^2$$

Exponentially Weighted Moving Average – EWMA

onde $0 < \lambda < 1$ é o fator de decaimento. Note que:

$$\sum_{i=1}^{W_E} \lambda^i = \frac{\lambda\left(1 - \lambda^{W_E}\right)}{1 - \lambda}$$

ou seja, o termo que multiplica o somatório garante que a soma dos pesos seja unitária.

- Se $W_E \to \infty$, tem-se:

$$\sigma_t^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2\right) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\lambda^1 r_{t-1}^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2\right)$$

Exponentially Weighted Moving Average – EWMA

Observe que:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\left(r_{t-1}^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2\right) = (1-\lambda)\left(r_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} r_{t-i-1}^2\right)$$

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) r_{t-1}^2 + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} r_{t-i-1}^2$$

e que:

$$\sigma_t^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} r_{t-i}^2\right) \Rightarrow \sigma_{t-1}^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} r_{t-1-i}^2\right)$$

Assim:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2$$

Exponentially Weighted Moving Average – EWMA

Costuma-se usar $\lambda =$ 0,94 para dados diários e $\lambda =$ 0,97 para dados mensais.

ARCH-GARCH

Modelos ARCH (Engle – 1982)

- IDEIA:
  - o choque ε_t de um retorno seja não autocorrelacionado, mas dependente; e
  - a dependência de ε_t possa ser escrita por uma função quadrática simples de seus valores atrasados.

- Considere $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$. Se $\mu_t \sim 0$, então $r_t = \varepsilon_t$.

ARCH-GARCH

Modelos ARCH (Engle – 1982)

- Modelo ARCH(m):

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

onde $\{\eta_t\}$ é uma v.a. i.i.d., com média nula e variância unitária, $\omega > 0$ e $\alpha_i \geq 0$, para $i > 0$.

- Alguns autores escrevem como:

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2$$

em que V_L é uma variância de longo prazo, e

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1; \quad \omega = \gamma V_L \Rightarrow V_L = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

ARCH-GARCH

- Na prática, η_t é frequentemente assumida com distribuição normal.
- Nota-se que grandes choques quadráticos passados $\left\{\varepsilon_{t-i}^2\right\}_{i=1}^{m}$ implicam em grande σ_t^2 para ε_t .
- ε_t tende a assumir um grande valor em módulo, ou seja, sob o enfoque ARCH, grandes choques tendem a ser seguidos por outros grandes choques.

ARCH-GARCH

- ARCH(1): $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \;\; \eta_t \sim N.iid(0,1),$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \;\; \omega > 0, \alpha > 0$$

- Pode-se mostrar que:

$$\boxed{\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha}} \quad \leftarrow$$

Variância incondicional de ε_t, que é igual a V_L.

- Desvantagens:
  - Choques positivos e negativos desencadeiam o mesmo efeito de volatilidade. Na prática, sabe-se que o preço de um ativo responde distintamente para choques positivos e negativos.
  - Modelos propícios a preverem com excesso a volatilidade, pois respondem lentamente a grandes choques isolados.

ARCH-GARCH

- Previsões de modelos ARCH podem ser obtidas recursivamente com em modelos AR.
- Considere um modelo ARCH(m).
- 1 Período à frente:

$$\hat{\sigma}^2_{t+1} = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2_t + \alpha_2 \varepsilon^2_{t-1} + \cdots + \alpha_m \varepsilon^2_{t+1-m}$$

- A previsão dois períodos à frente é:

$$\hat{\sigma}^2_{t+2} = \omega + \alpha_1 \hat{\sigma}^2_{t+1} + \alpha_2 \varepsilon^2_t + \alpha_3 \varepsilon^2_{t-1} + \cdots + \alpha_m \varepsilon^2_{t+2-m}$$

ARCH-GARCH

- A previsão *f* períodos à frente é:

$$\hat{\sigma}^2_{t+f} = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{\sigma}^2_{t+f-i}$$

onde $\hat{\sigma}^2_{t+f-i} = \varepsilon^2_{t+f-i}$, se f - $i \leq 0$.

ARCH-GARCH

Modelos GARCH (Bollerslev – 1986)

- ARCH é simples, mas geralmente requer ordem elevada.
- Alternativa: ARCH generalizado (GARCH).
- Para retornos log, frequente $\mu_t \sim 0$, então $r_t = \varepsilon_t$.

ARCH-GARCH

ε_t segue um modelo GARCH(m,s) se:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

onde $\{\eta_t\}$ é uma v.a. i.i.d, com média nula e variância unitária. Além disso:

$$\omega > 0 \ , \ \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\max(m,s)} \left(\alpha_i + \beta_j\right) < 1$$

- A última restrição implica que a variância incondicional de ε_t seja finita.
- Na prática, η_t é frequentemente assumida com distribuição normal.

ARCH-GARCH

- Alguns autores descrevem como:

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

em que V_L é uma variância de longo prazo, e

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1$$

$$\omega = \gamma V_L \Rightarrow V_L = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \right)}$$

ARCH-GARCH

- GARCH(*m*,*s*) se reduz a ARCH(*m*) se *s*=0.
- α_i e β_j são denominados parâmetros ARCH e GARCH, respectivamente.

- Considere o modelo GARCH(1,1) com:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \sim N.iid(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \;\; \alpha \geq 0, \;\; \beta \geq 0$$

- Um grande valor de ε_{t-1}^2 ou σ_{t-1}^2, gera um grande valor de σ_t^2.
- Um grande valor de ε_{t-1}^2 tende a ser seguido por um grande σ_t^2, gerando assim o conhecido comportamento dos agrupamentos de volatilidade.

Modelos Heteroscedásticos Condicionais

- Vimos que, se $0 \leq (\alpha + \beta) < 1$, então:

$$\boxed{\operatorname{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}} \longleftarrow$$

Variância incondicional de ε_t, que é igual a V_L.

ARCH-GARCH

- Para o modelo GARCH(1,1), a previsão um período à frente, na data *t*, é dado por:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \omega + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_t^2, \quad \varepsilon_t \text{ e } \sigma_t^2 \text{ conhecidos na data } t$$

- Para previsões múltiplos períodos à frente, usa-se $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2\eta_t^2$. Assim:

soma e subtrai mesmo termo

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= \omega + \alpha\sigma_t^2\eta_t^2 + \beta\sigma_t^2 \boxed{+\alpha\sigma_t^2 - \alpha\sigma_t^2} \\ &= \omega + (\alpha + \beta)\sigma_t^2 + \alpha\sigma_t^2\left(\eta_t^2 - 1\right) \end{aligned}$$

ARCH-GARCH

- Para t+2:

$$\sigma_{t+2}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t+1}^2 + \alpha\sigma_{t+1}^2\left(\eta_{t+1}^2 - 1\right)$$

- Assim:

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\hat{\sigma}_{t+1}^2, \qquad \text{pois} \;\; E\left[\eta_{t+1}^2 - 1\right] = 0$$

- De forma geral:

$$\hat{\sigma}_{t+f}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\hat{\sigma}_{t+f-1}^2, \qquad f > 1$$

- Que, em termos de γ e V_L, fica:

$$\hat{\sigma}_{t+f}^2 = \gamma V_L + (\alpha + \beta)\hat{\sigma}_{t+f-1}^2, \qquad f > 1$$

ARCH-GARCH

- Como $\gamma + \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \gamma = 1 - \alpha - \beta$. Assim,

$$\hat{\sigma}^2_{t+f} = (1 - \alpha - \beta)V_L + (\alpha + \beta)\hat{\sigma}^2_{t+f-1} \Rightarrow \left[\hat{\sigma}^2_{t+f} - V_L\right] = (\alpha + \beta)\left[\hat{\sigma}^2_{t+f-1} - V_L\right]$$

- Note que:

$$\left[\hat{\sigma}^2_{t+2} - V_L\right] = (\alpha + \beta)\left[\hat{\sigma}^2_{t+1} - V_L\right]$$

$$\left[\hat{\sigma}^2_{t+3} - V_L\right] = (\alpha + \beta)\left[\hat{\sigma}^2_{t+2} - V_L\right] = (\alpha + \beta)^2\left[\hat{\sigma}^2_{t+1} - V_L\right]$$

$$\vdots$$

$$\left[\hat{\sigma}^2_{t+f} - V_L\right] = (\alpha + \beta)^{f-1}\left[\hat{\sigma}^2_{t+1} - V_L\right]$$

ARCH-GARCH

- Para $f \rightarrow \infty$ e desde que $(\alpha + \beta) < 1$, tem-se:

$$(\alpha+\beta)^{f-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{t+f} \rightarrow V_L = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$$

- As previsões convergem para a variância incondicional de ε_t (V_L) para $f \rightarrow \infty$.

ARCH-GARCH

- Somente modelos de baixa ordem são utilizados na maioria das aplicações: GARCH(1,1), GARCH(2,1) e GARCH(1,2).
- Em alguns casos, a distribuição *t-Student* com ν graus de liberdade é utilizada para modelar os choques ao invés da distribuição normal.
- tanto ARCH como GARCH tratam simetricamente os retornos, pois a variância condicional é uma função quadrática dos retornos.
- Mas sabe-se que na prática a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos e tende a ser maior para retornos negativos.

ARCH-GARCH

- Há modelos que buscam levar em conta o efeito assimétrico. Alguns exemplos:
  - EGARCH (Nelson - 1991)
  - GJR-GARCH (Glosten – 1993)

ARCH-GARCH

- EGARCH (*Exponential* GARCH)
  - Modelos ARCH e GARCH tratam simetricamente os retornos, pois a volatilidade é função quadrática dos mesmos.
  - Sabe-se, entretanto, que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, com tendência de ser maior para valores negativos.
  - O modelo EGARCH permite capturar esse comportamento

ARCH-GARCH

- EGARCH(1,1)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \qquad \log(\sigma_t^2) = \omega + g(\eta_{t-1}) + \beta \log(\sigma_{t-1}^2)$$

$g(.)$ é a curva de impacto de informação, dada por:

$$g(\eta_t) = \alpha\eta_t + \gamma\left(|\eta_t| - E\{|\eta_t|\}\right)$$

α e γ são parâmetros reais e $(|\eta_t|$-E$\{|\eta_t|\})$ é uma sequência de v.a. i.i.d. com média zero.

ARCH-GARCH

$$g(\eta_t) = \begin{cases} (\alpha + \gamma) - \gamma E\{|\eta_t|\}, \text{ se } \eta_t \geq 0 \\ (\alpha - \gamma) - \gamma E\{|\eta_t|\}, \text{ se } \eta_t < 0 \end{cases}$$

ARCH-GARCH

- EGARCH(m,s)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha_i \eta_{t-i} + \gamma_i \left(|\eta_{t-i}| - E\{|\eta_{t-i}|\} \right) \right] + \sum_{i=1}^{s} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

ARCH-GARCH

- GJR-GARCH
  - Este modelo também consegue capturar efeitos assimétricos na volatilidade;
- GJR-GARCH(1,1)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

em que: $D_{t-1} = \begin{cases} 1, \text{ se } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, \text{ se } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$

ARCH-GARCH

- GRJ-GARCH(*m*,*s*)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k + \gamma_k D_{t-k}\right) \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

em que: $D_{t-k} = \begin{cases} 1, \text{ se } \varepsilon_{t-k} < 0 \\ 0, \text{ se } \varepsilon_{t-k} \geq 0 \end{cases}$

Custo de Transação#

Preço do ativo a tempo discreto

- O passeio aleatório (em tempo discreto) do preço do ativo é dado por:

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t}$$

onde ϕ é uma variável aleatória dada por um sorteio com distribuição normal padrão N(0, 1).

- O preço da opção depende do preço do ativo-objeto e do tempo: $V(S,t)$.
- O diferencial fica assim:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\delta S)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t$$

#: Material reproduzido das notas de aula do Prof. Márcio Menezes.

Custo de Transação

- Substituindo δS, tem-se:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\left(\mu S\delta t + \sigma S\phi\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(\sigma^2 S^2 \delta t\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t$$

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\delta t + \sigma S\phi\sqrt{\delta t}\,\frac{\partial V}{\partial S}$$

em que utilizou-se do fato que $\delta t^2 << \delta t$.

- Seja uma carteira replicando um título livre de risco:

$$\Pi = V - S\Delta$$

- Assume-se que a quantidade de ativos é mantida constante num intervalo de tempo δt. Assim,

$$\delta\Pi = \delta V - \delta S\,\Delta$$

Custo de Transação

- Substituindo δV e δS, tem-se:

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t}\,\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\left(\mu S \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t}\right)$$

- A quantidade de ativos (Δ) varia quando há compra ou venda de ativos. Define-se: $\nu = \delta\Delta$.
- Sempre que houver compra ou venda de ativos, haverá um custo de transação.
- Assume-se que o custo de transação é proporcional ao preço do ativo-objeto:

$$\text{Custo} \propto S,$$

- e proporcional à quantidade de ativos comprados ou vendidos:

$$\text{Custo} \propto |\nu|$$

Custo de Transação

- Utilizou-se o módulo porque a variação na quantidade de ativos pode ser:
  - Positiva: aumento no valor de Δ (maior a quantidade de ativos vendidos);
  - Negativa: diminuição no valor de Δ (menor a quantidade de ativos vendidos).
- A constante de proporcionalidade será *k*, tal que:

$$\text{Custo} = kS|\nu|$$

- Com o custo de transação, a variação no valor da carteira será:

$$\delta\Pi = \delta V - \delta S\,\Delta - kS|\nu|$$

Custo de Transação

- Após as substituições:

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t} \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \left(\mu S \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t} \right) - kS|\nu|$$

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right] + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t} \left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right] - kS|\nu|$$

- Para anular o risco da carteira, é feito o ajuste na quantidade de ativos:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Com isso:

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \delta t - kS|\nu|$$

Custo de Transação

Variação na quantidade de ativos

- A quantidade de ativos no instante *t* é:

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$$

- A quantidade de ativos no instante (t + δt) é:

$$\Delta_{t+\delta t} = \frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S,\ t+\delta t)$$

- A variação na quantidade de ativos é:

$$\delta\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S,\ t+\delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$$

- Com a expansão em primeira ordem pelo Teorema de Taylor, chega-se em:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S,\ t+\delta t) \approx \frac{\partial V}{\partial S}(S,t) + \delta S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) + \delta t\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$$

Custo de Transação

- Como $\delta t \ll \sqrt{\delta t}$, verifica-se que:

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t} \approx \sigma S \phi \sqrt{\delta t} + O(\delta t)$$

- Então:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S + \delta S,\ t + \delta t) \approx \frac{\partial V}{\partial S}(S,t) + \sigma S \phi \sqrt{\delta t}\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)$$

- Assim:

$$\delta \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S + \delta S,\ t + \delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S,t) \Rightarrow \delta \Delta = \sigma S \phi \sqrt{\delta t}\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)$$

- Tem-se então o custo:

$$\begin{aligned} \text{Custo} &= kS|\nu| \\ &= kS\left|\sigma S \phi \sqrt{\delta t}\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \\ &= kS\sigma S|\phi|\sqrt{\delta t}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \end{aligned}$$

Custo de Transação

- Como:

$$E\left[\|\phi\|\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

tem-se:

$$\text{Custo esperado} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\sigma S^2 \sqrt{\delta t} \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|$$

e:

$$E\left[\delta\Pi\right] = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} k\sigma S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\right)\delta t$$

- Escrevendo a evolução do preço da carteira (que replica um ativo livre de risco), obtém-se:

$$E\left[\delta\Pi\right] = r\Pi\delta t$$

Custo de Transação

$$E\left[\delta\Pi\right] = r\Pi\delta t$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma S^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\right)\delta t = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\delta t$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma S^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| - rV = 0$$

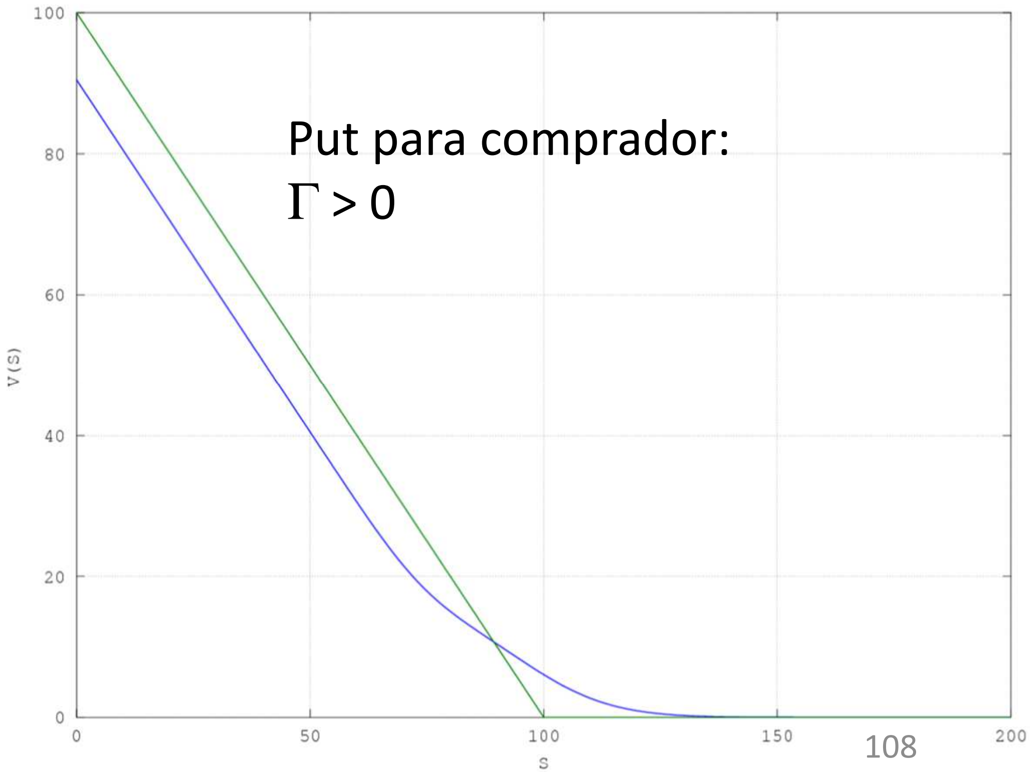
- Note que como há |.| na eq. diferencial, não é possível obter uma solução analítica. No entanto, em alguns casos, esse módulo pode ser substituído pelo seu argumento. Vejamos...

Custo de Transação

Perda no valor da opção

Perda para o comprador de uma *put* ou de uma *call plain vanilla*:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$



Custo de Transação

- Para o titular de *put* ou *call plain vanilla,* a eq. dif.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma S^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|-rV=0$$

pode ser escrita como:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{S^2}{2}\left(\sigma^2-2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma\right)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0$$

- Ao considerar a seguinte mudança na volatilidade:

$$\bar{\sigma}^2=\sigma^2-2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma$$

Chega-se à equação de Black-Scholes:

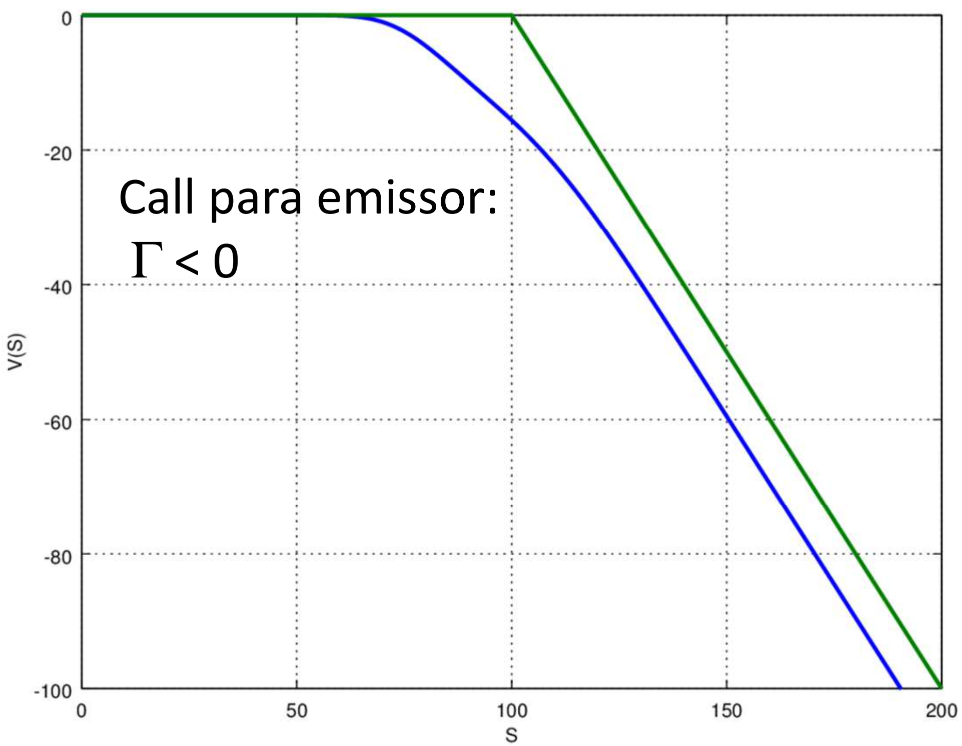
$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\bar{\sigma}^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0$$

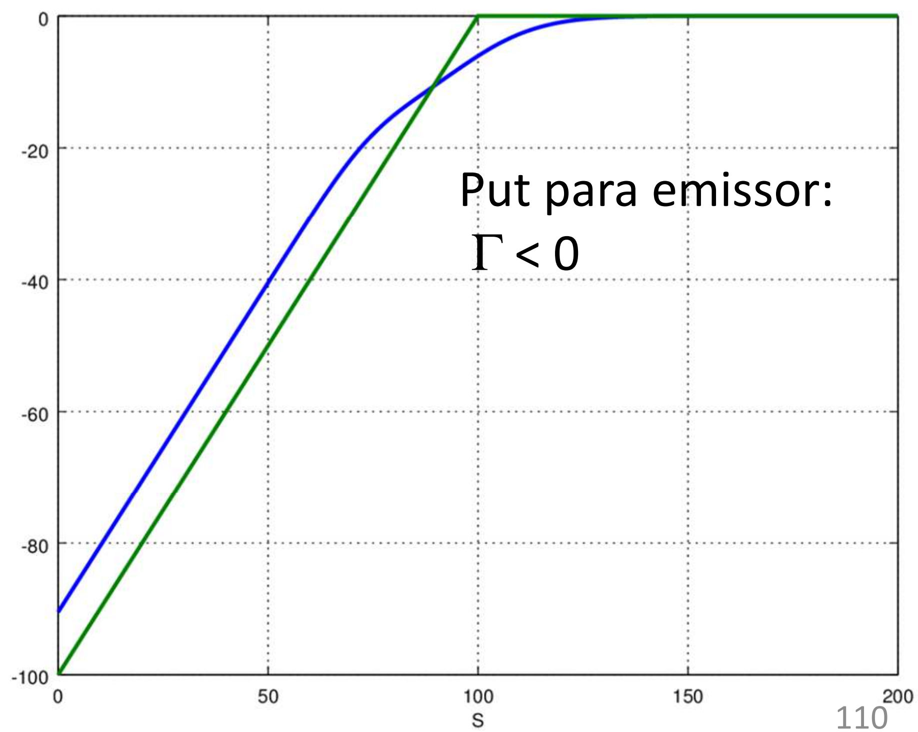
$\therefore$ a perda no valor da opção é similar a uma diminuição na vol.

Custo de Transação

Perda para o emissor de uma *put* ou de uma *call plain vanilla*:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} < 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$





Custo de Transação

- Para o lançador de *put* ou *call plain vanilla,* considera-se:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} k\sigma$$

$\therefore$ a perda no valor da opção é similar a um aumento na vol.

Custo de Transação

Equacionando o novo valor da opção

- A variação no valor da opção é dada por:

$$\delta V = V\left(S,t;K,r,\bar{\sigma}\right) - V\left(S,t;K,r,\sigma\right)$$

- Ao expandir em série de Taylor e considerar o termo de primeira ordem, pode-se escrever:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \sigma}\delta\sigma = \frac{\partial V}{\partial \sigma}\left(\bar{\sigma} - \sigma\right)$$

- Note que a variação do preço da opção é proporcional à Vega.
- Como: $$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k\sigma \Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\frac{k}{\sigma}}$$
- Para $\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\frac{k}{\sigma}\right) \ll 1$, pode-se ter a seguinte aproximação:

$$\bar{\sigma} \approx \sigma\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\frac{k}{\sigma}\right) \Rightarrow \bar{\sigma} \approx \sigma + \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}k$$

Custo de Transação

- Portanto:

$$\delta V = k\sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}}\frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

- Para uma call, Veja é:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = S N(d_1)\sqrt{T-t}$$

- Assim,

$$\delta V = k\sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} S N(d_1)\sqrt{T-t}$$

Custo de Transação

- Com a nova volatilidade:

$$\bar{\sigma} \approx \sigma\left(1+\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\frac{k}{\sigma}\right)$$

o termo que altera a volatilidade é (constantes foram ignoradas):

$$\mathrm{K} = \frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

- Note que k e σ são fatores externos. O único parâmetro que se pode escolher é δt, ou seja, o intervalo de tempo entre rebalanceamentos.

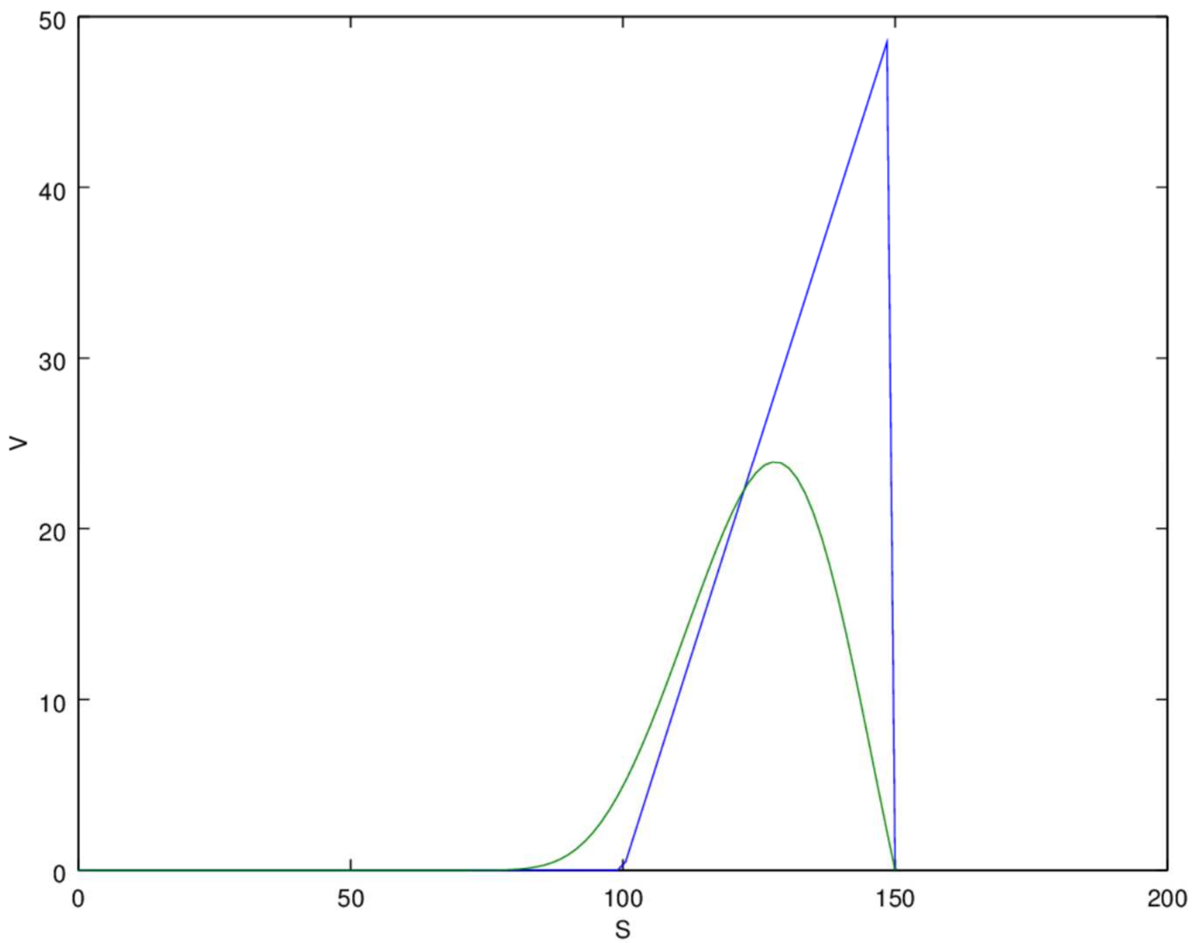
Custo de Transação

$$\mathrm{K} = \frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

- Se $\mathrm{K} \gg 1$, então os custos de transação são muito altos. Pode-se aumentar δt para diminuir tais custos.
- Se $\mathrm{K} \ll 1$, os custos de transação são baixos, mas o número de ajustes na carteira é muito baixo, fazendo com que a replicação não seja eficiente. Nesse caso, pode-se diminuir δt, o que aumenta os custos, mas melhora a replicação.

Custo de Transação

Solução numérica – Ex. de opção com barreira



- Note que Δ e Γ podem assumir valores positivos e negativos.
- Não há solução analítica. Deve-se utilizar algum método numérico.

Custo de Transação

Resumo

- Já sabíamos que a quantidade de ativos necessária para montar uma carteira neutra ao risco é

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Agora vimos que a variação na quantidade de ativos (num intervalo de tempo discreto) é proporcional a

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- Vimos também que a opção sofre uma perda no seu valor, proporcional a

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

- O intervalo de tempo entre as replicações (δt) deve ser escolhido com cuidado, de tal
- forma que a constante K assuma o valor próximo de 1. (K = $k/\sigma\delta t$)
  - K >> 1 δt é muito pequeno.
  - K << 1 δt é muito grande.
- Se Γ assume valores positivos e negativos, a eq. deve ser resolvida numericamente.

Método de Monte Carlo

- Método de Monte Carlo (MMC): baseado em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos.
- Tem boa precisão, mas com consumo elevado de recursos computacionais.
- Método simples para opções Europeias:
  - simula-se várias trajetórias de preços e calcula-se o *payoff* para cada trajetória.
  - o preço da opção no vencimento é a média destes *payoffs*.
  - traz-se o preço a valor presente pela taxa de juros livre de risco.

Método de Monte Carlo

- Cada uma das trajetórias de preço é simulada como:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right]$$

em que:

- S_t: preço do ativo no instante t;
- r : taxa de juros livre de risco;
- σ: volatilidade do preço da opção
- Δt : janela de tempo
- ε: v.a. N(0,1)

Método de Longstaff e Schwartz

- Método LSM de Longstaff & Schwartz: método de Monte Carlo com mínimos quadrados para precificação de opções americanas.
- A cada instante anterior à data de vencimento da opção, pode-se comparar o *payoff* do exercício antecipado da opção com o seu valor de continuação -> Opções Americanas.
- O exercício ideal da Opção Americana é determinado pela esperança condicionada ao seu valor de continuação.
- Tal esperança condicional é obtida a partir de informações obtidas pela simulação Monte Carlo com regressão dos mínimos quadrados.

Método de Longstaff e Schwartz

- Por praticidade, considere o exemplo de uma Opção Americana tipo *put* apresentado no livro:
  - N.H. Chan & H.Y. Wong. *Simulation Techniques in Fanancial Risk Management*, 2nd Ed., Wiley, 2015
- Parâmetros: $S(0)=10$; $r=0,03$; $\sigma=0,4$; $K=12$; $T=1$; $n=3$ (t = 1/3, 2/3, 3/3)
- A tabela seguinte apresente a simulação de 8 trajetórias preço e o valor da opção no vencimento:

Trajetória	t=1/3	t=2/3	t=3/3	V_3 = max(K – S(T), 0)
1	8,3826	9,9528	6.,581	5,2419
2	11,9899	13,8988	14,5060	0
3	13,1381	17,4061	13,4123	0
4	6,8064	7,8115	10,6520	1,3480
5	7,0508	9,1293	7,4551	4,5449
6	11,2214	8,3600	9,2896	2,7104
7	8,9672	8,7787	9,0822	2,9178
8	11,5336	10,9398	8,6958	3,3042

Método de Longstaff e Schwartz

- Em t = 2/3, o titular da opção deve decidir se exerce a opção imediatamente ou se continua com a opção quando *in-the-money*.

- Comparam-se os fluxos de caixa do exercício imediato com o valor esperado da continuação, dado o preço do ativo em t = 2/3. A Tabela seguinte apresenta $V_3 e^{-r\Delta t}$ nos casos *in-the-money* e $S(2/3)$.

Trajetória	$V_3\, e^{-r\Delta t}$	$S(2/3)$	In-the-Money?
1	5,1898	9,9528	Sim
2	—	13,8988	Não
3	—	17,4061	Não
4	1,3346	7,8115	Sim
5	4,4997	9,1293	Sim
6	2,6834	8,3600	Sim
7	2,8888	8,7787	Sim
8	3,2714	10,9398	Sim

- Em t = 2/3, modela-se o *payoff* esperado da continuação como

$$V_3\, e^{-r\Delta t} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\, [S(2/3)] + \hat{a}_2\, [S(2/3)]^2 + \epsilon$$

- Os valores são ajustados pelo método dos mínimos quadrados:

$$E[V_3\, e^{-r\Delta t} \mid S(2/3)] = -\,82{,}5347 + 17{,}7788\, [S(2/3)] - 0{,}9063\, [S(2/3)]^2 + \epsilon := f_2(S)$$

Método de Longstaff e Schwartz

- Em t=2/3, para cada trajetória, tem-se o seguinte valor da opção:

$$V_2 = \begin{cases} K - S(2/3), & se\, K - S(2/3) \geq f_2(S(2/3)) \\ V_3 e^{-r\Delta t}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- O *payoff* em t = 2/3 é (K − S), se o fato de exercer a opção valer mais do que o *payoff* esperado de mantê-la; caso contrário, o *payoff* em t = 2/3 torna-se o valor do próximo período com o desconto da taxa de juros livre de risco.

Trajetória	Exercício K − (2⁄3)	Continuação $f_2(S(2/3))$	$e^{-r\Delta t} V_3$	V_2
1	2,0472	4,6380	5,1898	5,1898
2	—	—	0	0
3	—	—	0	0
4	4,1885	1,0428	1,3346	4,1885
5	2,8707	4,2388	4,4997	4,4997
6	3,6400	2,7554	2,6834	3,6400
7	3,2213	3,6959	2,8888	2,8888
8	1,0602	3,4968	3,2714	3,2714

Método de Longstaff e Schwartz

- Repete-se então o processo para t = 1/3:

$$E[V_2\, e^{-r\Delta t} |\; S(1/3)] = -8.9488 + 3.3104\, [S(1/3)] - 0.2036\, [S(1/3)]^2 := f_1(S).$$

- Esta função de regressão determina a política de exercício em t = 1/3.

Trajetória	$V_2 e^{-r\Delta t}$	$S(1/3)$	In-the-Money?
1	5,1381	8,3826	Sim
2	0	11,9899	Sim
3	0	13,1381	Não
4	4,1468	6,8064	Sim
5	4,4549	7,0508	Sim
6	3,6038	11,2214	Sim
7	2,8600	8,9672	Sim
8	3,2388	11,5336	Sim

- Mais uma vez, V_1 é calculado de acordo com:

$$V_1 = \begin{cases} K - S(1/3), & se\ K - S(1/3) \geq f_1(S(1/3)) \\ V_2 e^{-r\Delta t}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Método de Longstaff e Schwartz

Trajetória	Exercício $K - S(1/3)$	Continuação $f_1(S(1/3))$	$e^{-r\Delta t} V_2$	V_1
1	3,6174	4,4921	5,1381	5,1381
2	0,0101	1,4689	0	0
3	—	—	0	0
4	5,1936	4,1494	4,1468	5,1936
5	4,9492	4,2688	4,4549	4,9492
6	0,7786	2,5572	3,6038	3,6038
7	3,0328	4,3620	2,8600	2,8600
8	0,4664	2,1440	3,2388	3,2388

- Finalmente, o preço atual da opção americana é estimado pela média de $V_1 e^{-r\Delta t}$, ou seja, 3,0919.

Método das Diferenças Finitas[#]

- O método das diferenças finitas é utilizado para se obter uma solução numérica para uma EDP.
- Extremamente útil para os casos em que não há solução analítica.
- Pode ser utilizado para solução da Equação de B-S, quando:
  - Opções com barreira: acima ou abaixo de um determinado preço, a opção perde seu valor;
  - Opções americanas: pode-se exercer a opção antes do vencimento.
  - Opções asiáticas: o valor da opção depende do caminho.
- Em alguns casos, os parâmetros precisam ser escolhidos com cuidado para garantir a convergência da solução.
- Quando utilizado corretamente, o método leva a resultados acurados.

[#] Adaptado das notas de aula do Prof. Marcio Menezes.

Método das Diferenças Finitas

Aproximações para derivadas → diferença finita

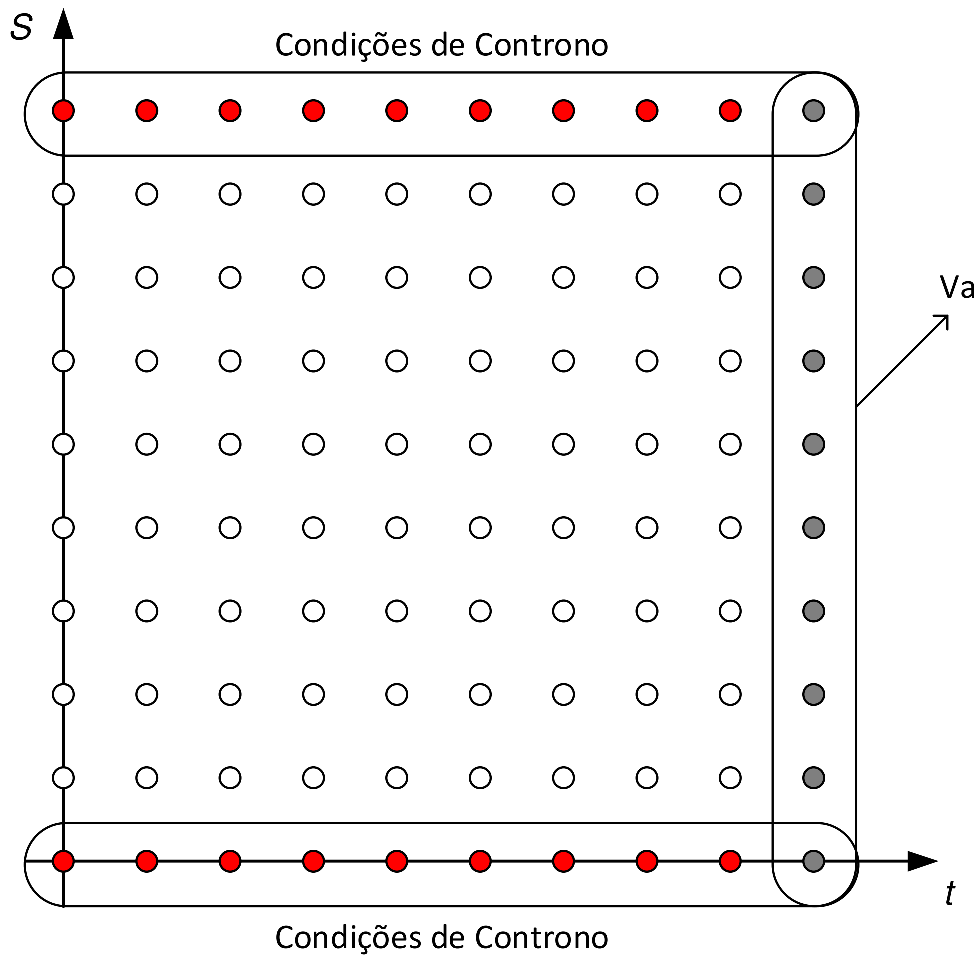
- Derivadas são aproximadas por equações de diferenças.
- Uma derivada utiliza variações infinitesimais e é definida como:

$$\frac{dV}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\delta V}{\delta S}$$

- No método das diferenças finitas as variações não tendem a zero – elas são finitas.
- A seguinte aproximação é considerada:

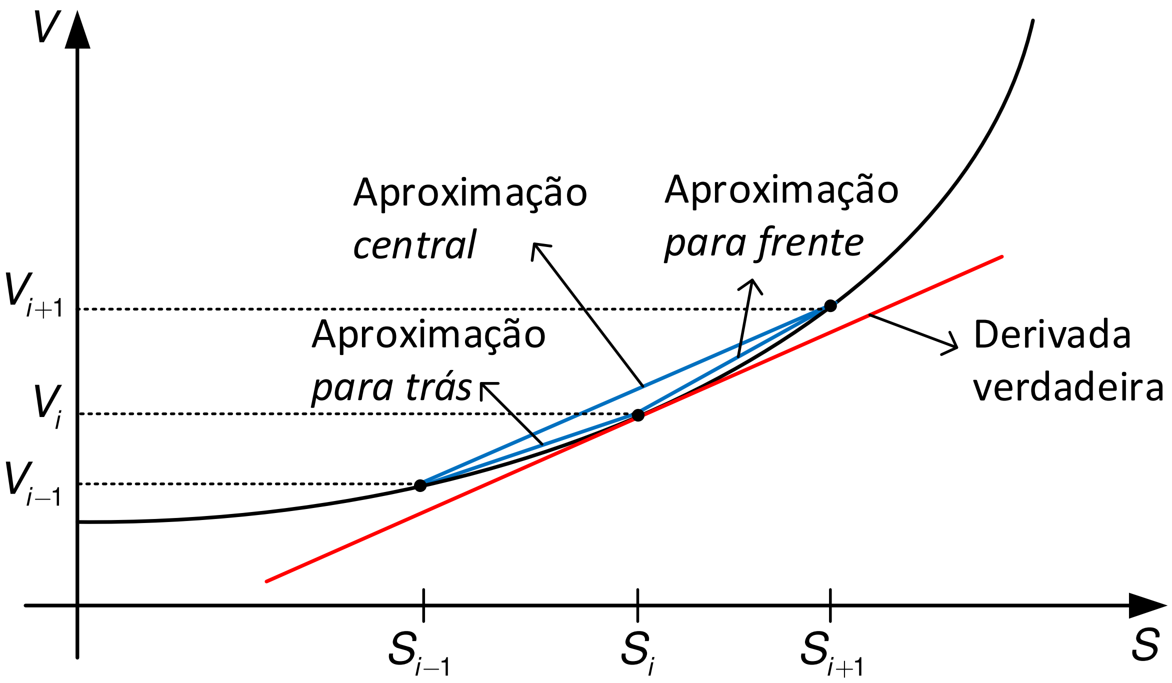
$$\frac{dV}{dS} \approx \frac{\delta V}{\delta S}$$

Método das Diferenças Finitas



Método das Diferenças Finitas

Primeira derivada



- Aproximação p/ trás:

$$\frac{dV}{dS} \approx \frac{V(S_i) - V(S_{i-1})}{\delta S} = \frac{V_i - V_{i-1}}{\delta S}$$

- Aproximação p/ frente:

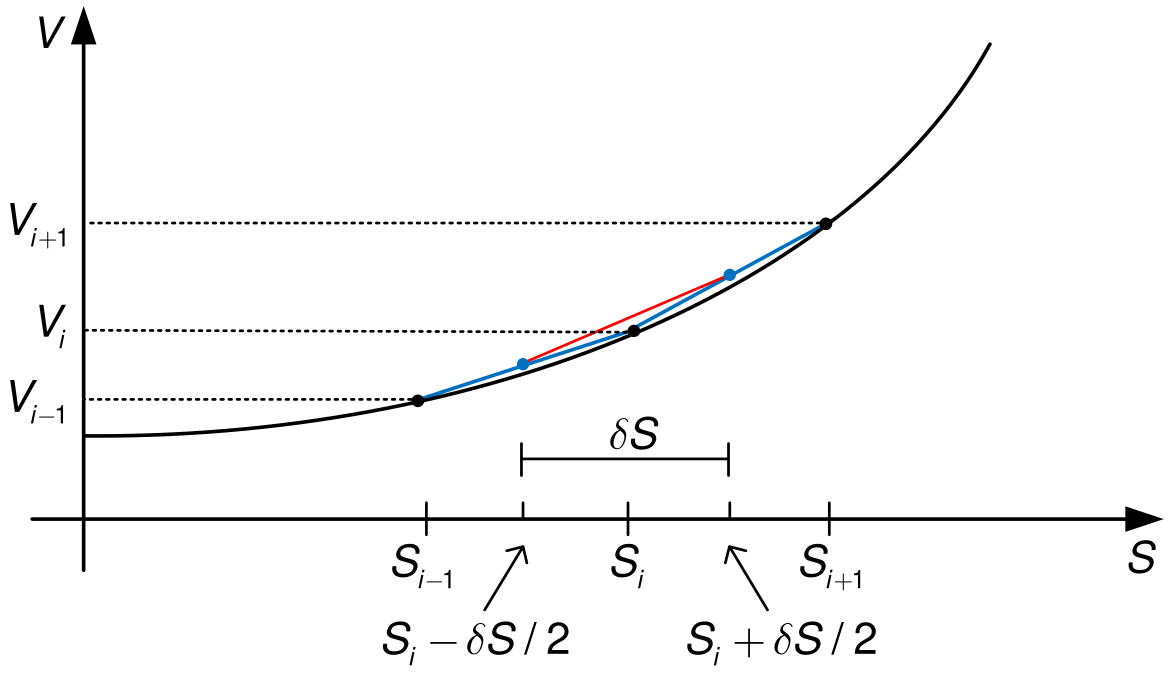
$$\frac{dV}{dS} \approx \frac{V(S_{i+1}) - V(S_i)}{\delta S} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\delta S}$$

- Aproximação central:

$$\frac{dV}{dS} \approx \frac{V(S_{i+1}) - V(S_{i-1})}{2\delta S} = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\delta S}$$

Método das Diferenças Finitas

Segunda derivada



$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial}\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{\dfrac{V_{i+1} - V_i}{\delta S} - \dfrac{V_i - V_{i-1}}{\delta S}}{\delta S} = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{\left(\delta S\right)^2}$$

Método das Diferenças Finitas

Derivada temporal

- Devido à causalidade, para a derivada temporal utiliza-se a aproximação para trás:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_j - V_{j-1}}{\delta t}$$

Método das Diferenças Finitas

Equação de Black-Scholes

- O valor da opção, *V*(*s*, *t*), é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- Pelo método das diferenças finitas:

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}}}_{\text{Aproximação p/ trás}} = rV - rS\underbrace{\boxed{\frac{\partial V}{\partial S}}}_{\text{Aproximação central}} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}}_{\text{Aproximação p/ 2ª derivada}}$$

$$\boxed{\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t}} = rV_{i,j} - rS_{i,j}\boxed{\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S}} - \frac{\sigma^2 S_{i,j}^2}{2}\boxed{\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2}}$$

Método das Diferenças Finitas

Equação de Black-Scholes

$$\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} = rV_{i,j} - rS_{i,j}\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} - \frac{\sigma^2 S_{i,j}^2}{2}\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2}$$

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - \delta t\left(rV_{i,j} - rS_{i,j}\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} - \frac{\sigma^2 S_{i,j}^2}{2}\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2}\right)$$

- Faz-se $S = i\,\delta S$. Assim:

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - \delta t\left(rV_{i,j} - ri\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2} - \frac{\sigma^2 i^2}{2}\left[V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}\right]\right)$$

Método das Diferenças Finitas

Equação de Black-Scholes

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - \delta t\left(rV_{i,j} - ri\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2} - \frac{\sigma^2 i^2}{2}\left[V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}\right]\right)$$

$$V_{i,j-1} = \left(\frac{\sigma^2 i^2}{2}\delta t - \frac{ri}{2}\delta t\right)V_{i-1,j} + \left(1 - r\delta t - \sigma^2 i^2 \delta t\right)V_{i,j} + \left(\frac{ri}{2}\delta t + \frac{\sigma^2 i^2}{2}\delta t\right)V_{i+1,j}$$

- Definem-se:

$$a_i = \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta t - \frac{1}{2} ri\delta t;\quad b_i = 1 - r\delta t - \sigma^2 i^2 \delta t;\quad c_i = \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta t + \frac{1}{2} ri\delta t$$

- Assim:

$$\boxed{V_{i,j-1} = a_i V_{i-1,j} + b_i V_{i,j} + c_i V_{i+1,j}}$$

- Note que:

$$a_i + b_i + c_i = 1 - r\delta t$$

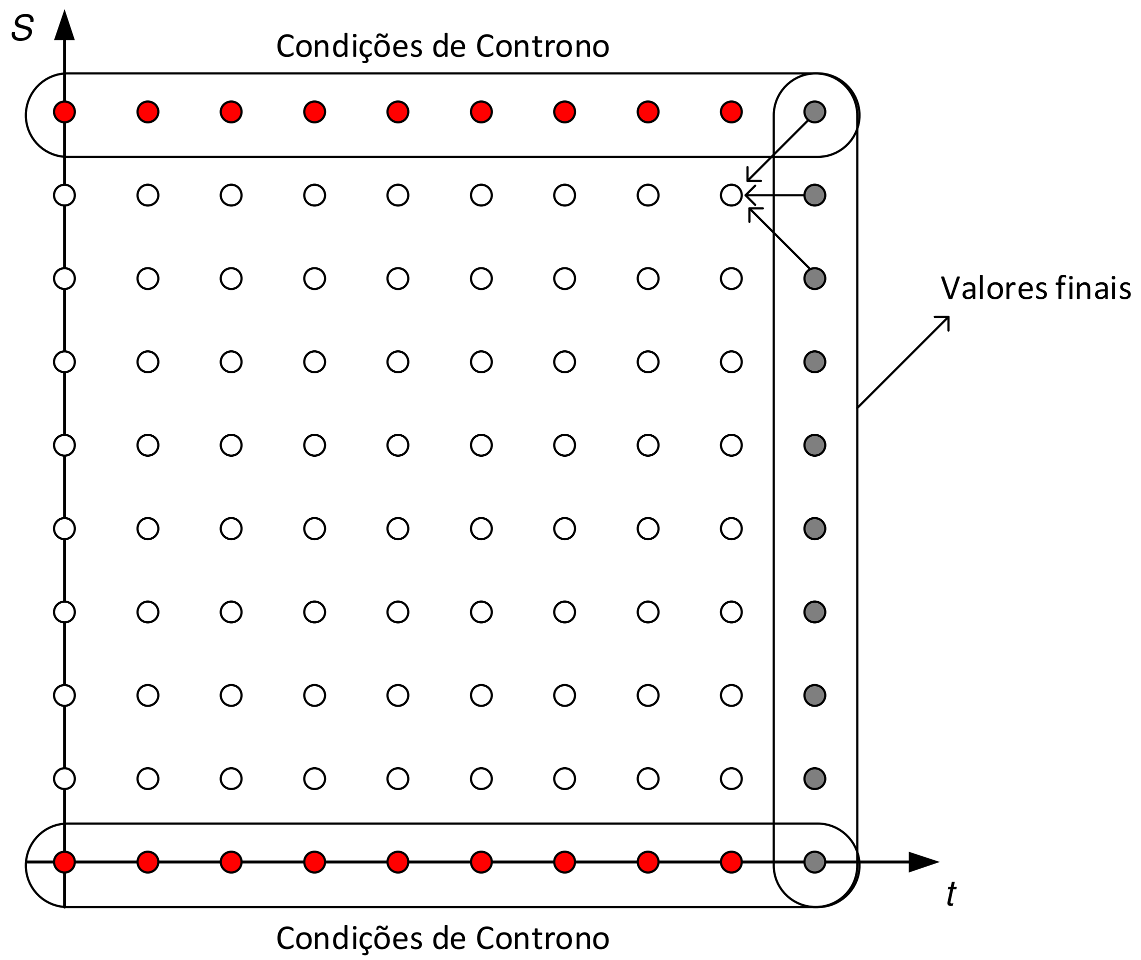
Método das Diferenças Finitas

- Os termos a_i, b_i e c_i são similares a probabilidades trazidas a valor presente pela taxa de juros livre de risco.

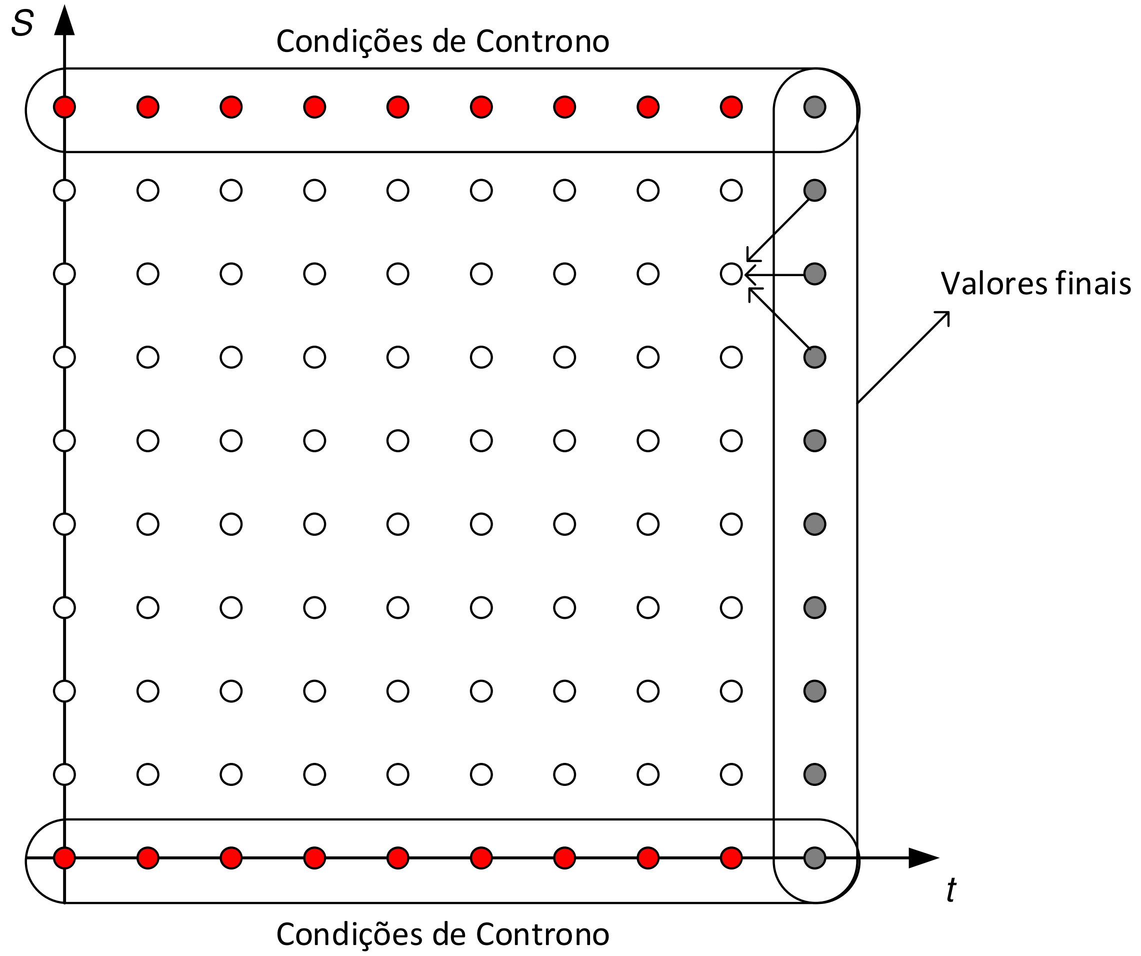
$$a_i + b_i + c_i = 1 - r\delta t$$

- O preço no instante atual depende:
  - da probabilidade do preço cair (a_i)
  - da probabilidade do preço se manter (b_i)
  - da probabilidade do preço subir (c_i)

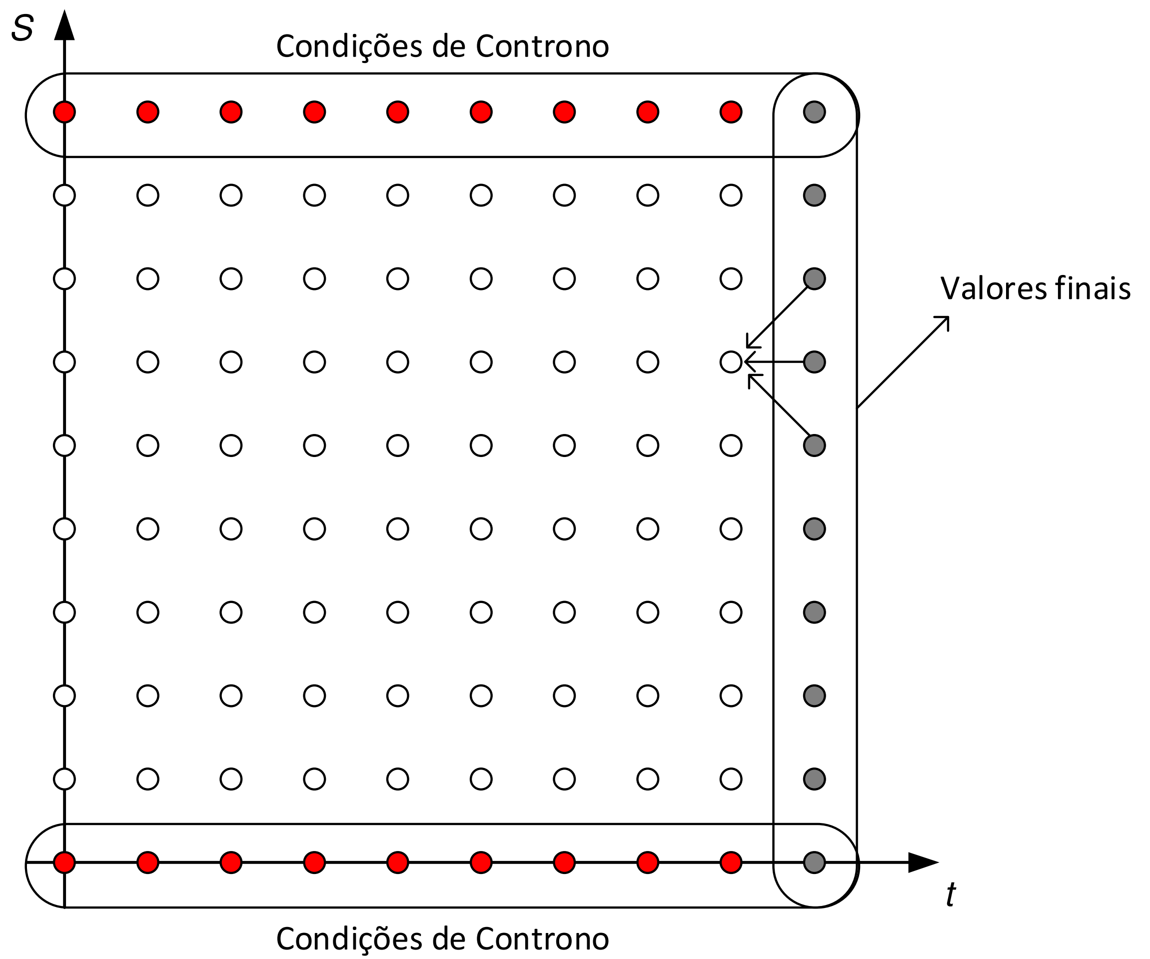
Método das Diferenças Finitas



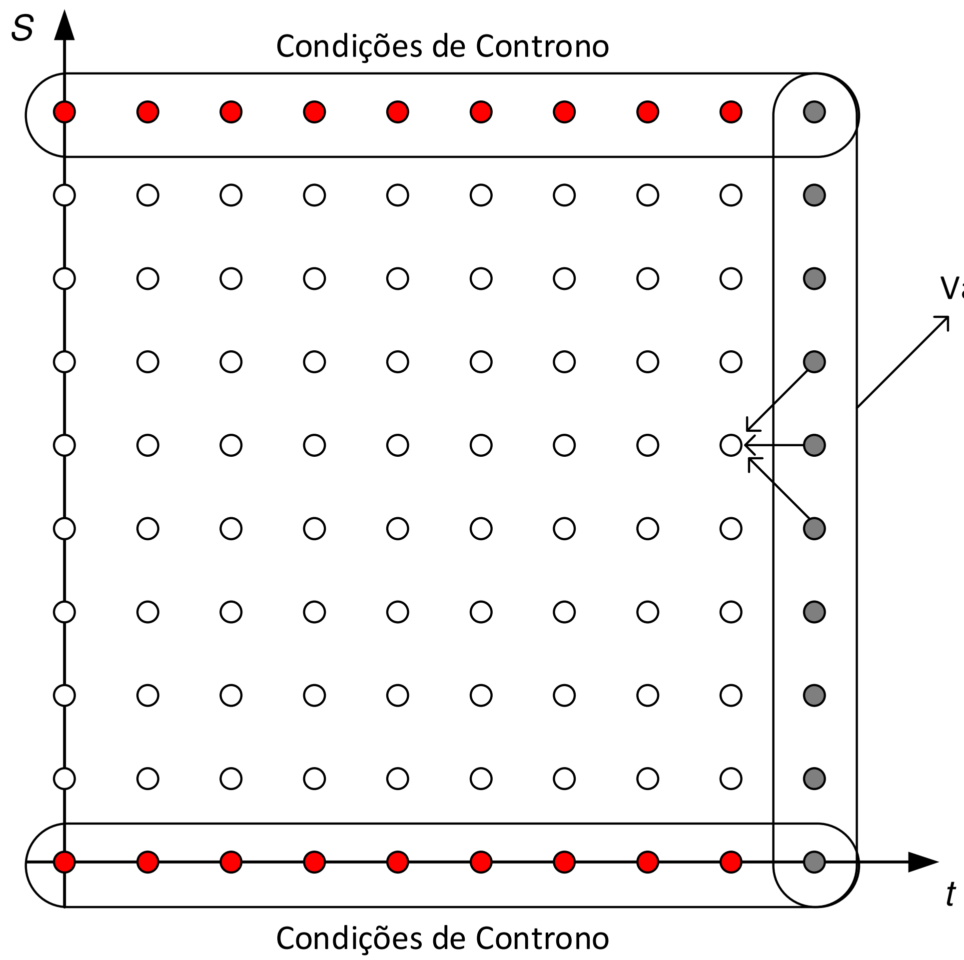
Método das Diferenças Finitas



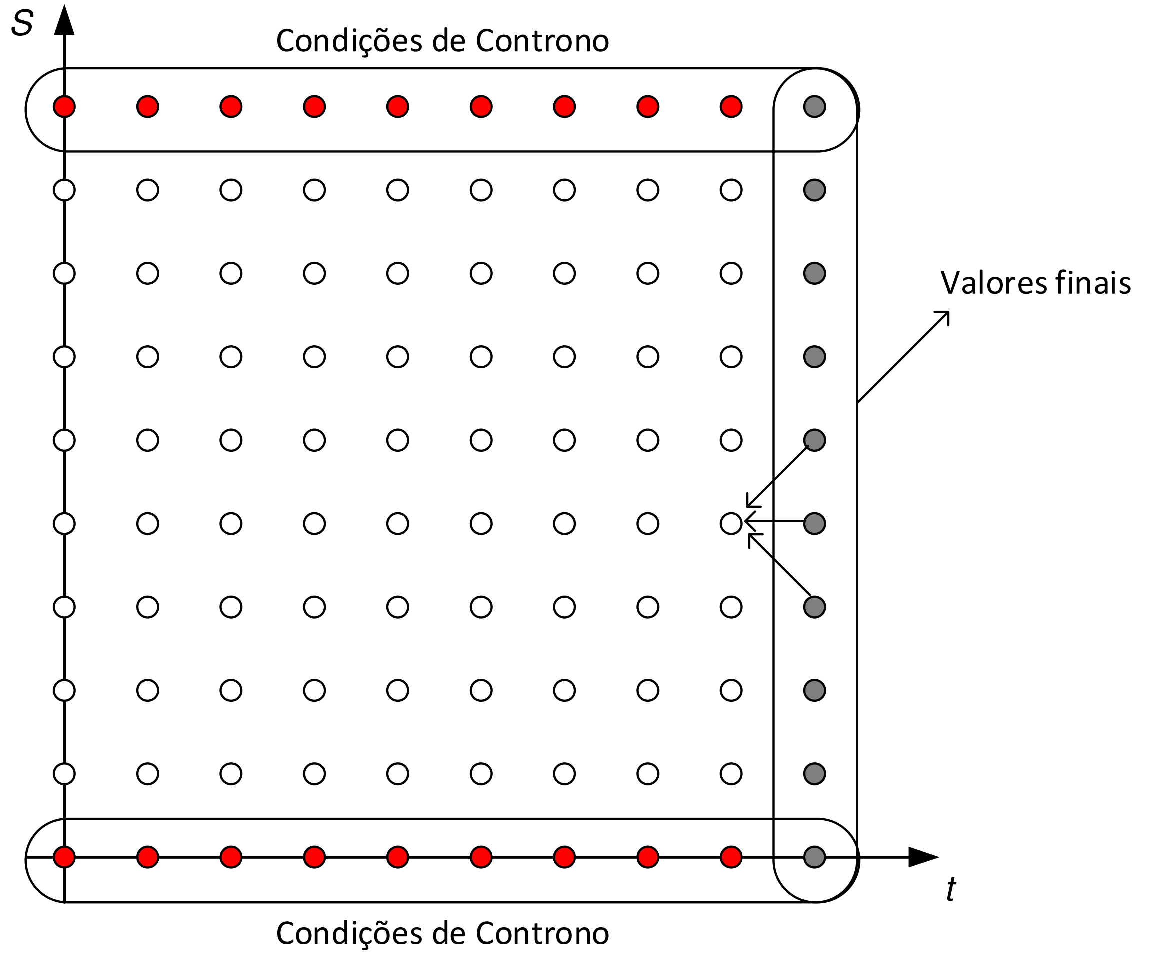
Método das Diferenças Finitas



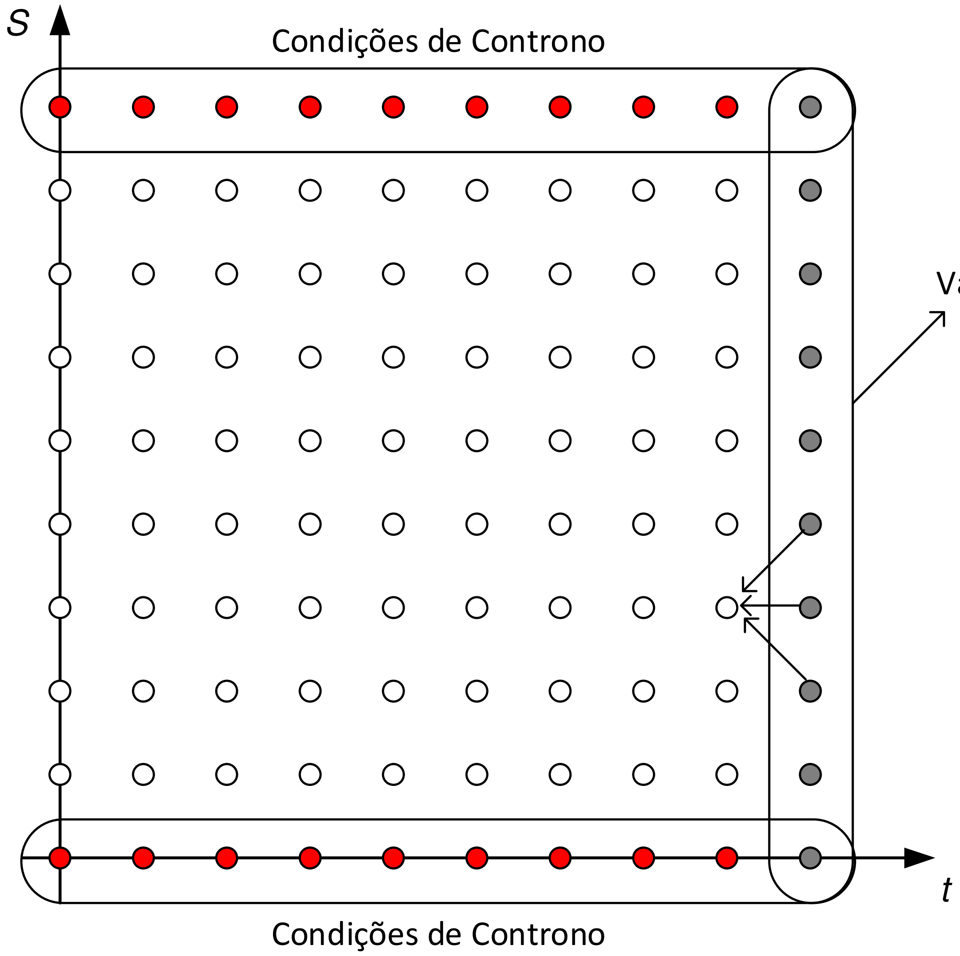
Método das Diferenças Finitas



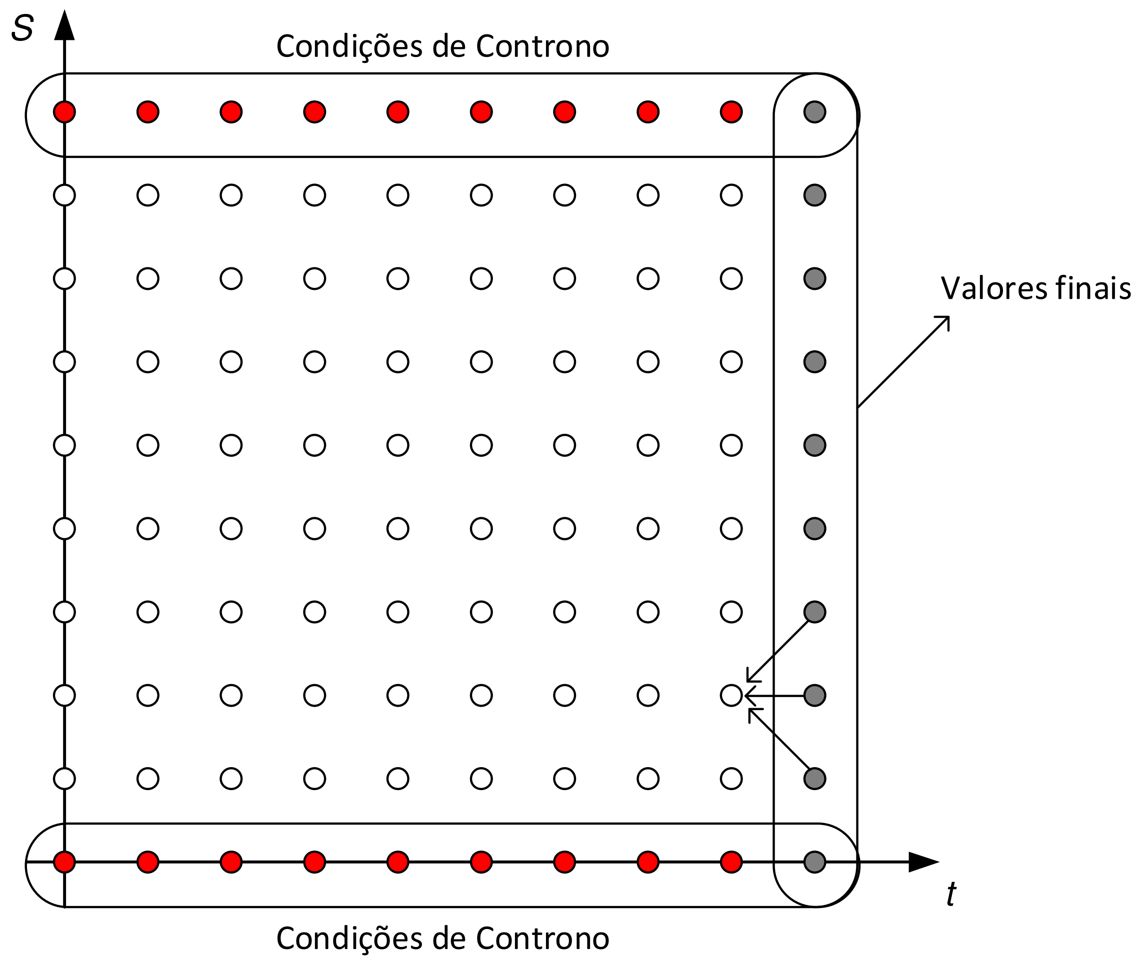
Método das Diferenças Finitas



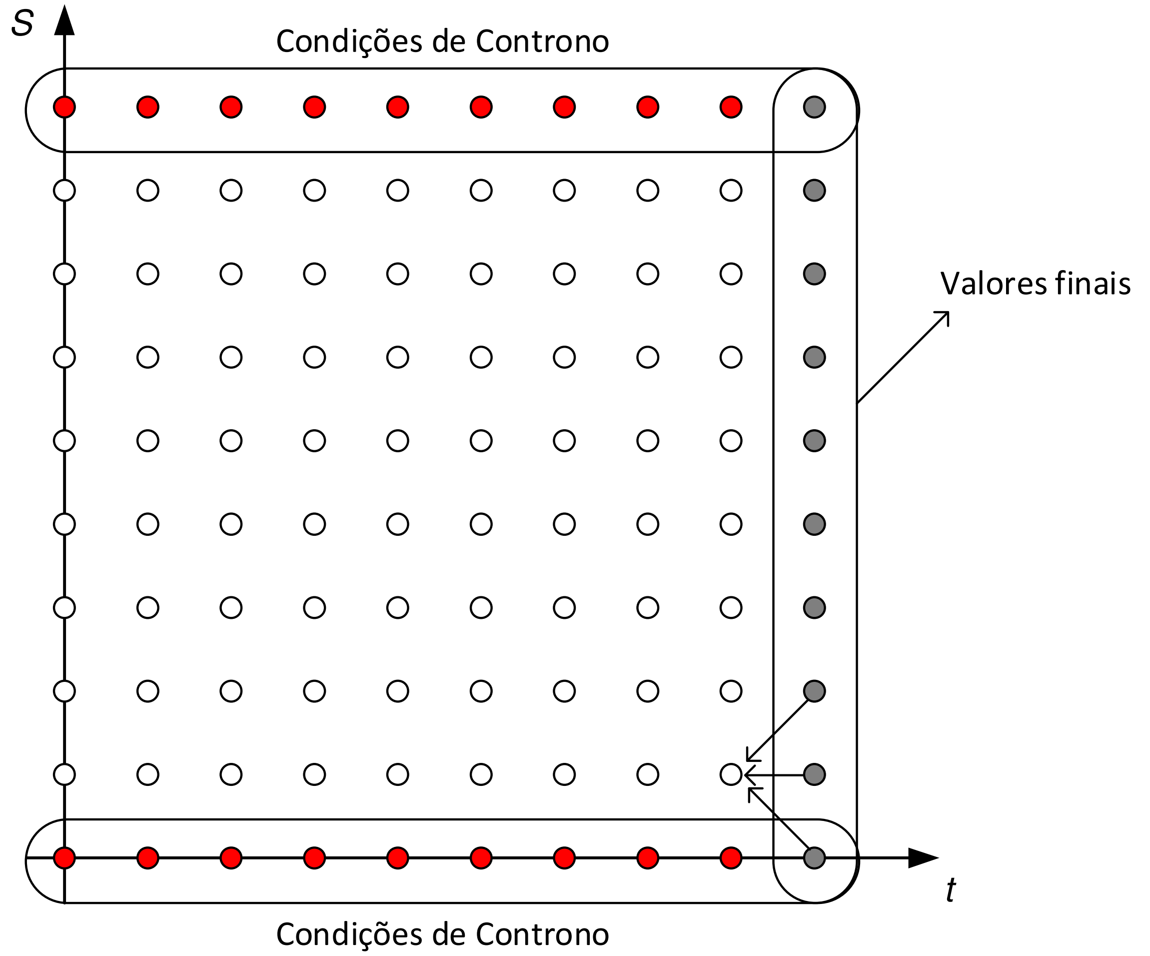
Método das Diferenças Finitas



Método das Diferenças Finitas



Método das Diferenças Finitas



Método das Diferenças Finitas

Usando as Gregas

$$\Theta_{i,j} = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} \Rightarrow V_{i,j-1} = V_{i,j} - \Theta_{i,j}\delta t$$

$$\Delta_{i,j} = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S}$$

$$\Gamma_{i,j} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta S)^2}$$

- Black-Scholes:

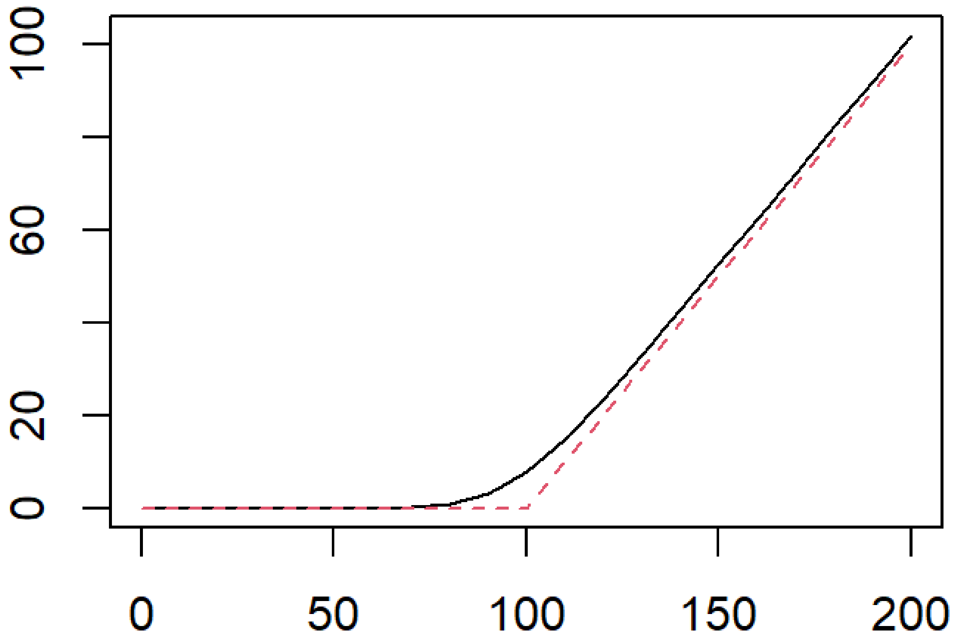
$$\Theta_{i,j} = rV_{i,j} - rS\boxed{\Delta_{i,j}} - \frac{\sigma^2 S_{i,j}^2}{2}\boxed{\Gamma_{i,j}}$$

$$\boxed{V_{i,j-1} = V_{i,j} - \Theta_{i,j}\delta t}$$

Método das Diferenças Finitas

Condições de Contorno

- A função fica plana nas extremidades, ou seja, a primeira derivada não se altera. Ex: *call*



- Observe que as extremidades correspondem às regiões onde estão as condições de contorno.

Método das Diferenças Finitas

Condições de Contorno

- Com a primeira derivada constante, a segunda derivada é nula:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

- Extremidade inferior:

$$\frac{V_{2,j} - 2V_{1,j} + V_{0,j}}{(\delta S)^2} = 0 \Rightarrow V_{0,j} = 2V_{1,j} - V_{2,j}$$

- Extremidade superior:

$$\frac{V_{N_s,j} - 2V_{N_s-1,j} + V_{N_s-2,j}}{(\delta S)^2} = 0 \Rightarrow V_{N_s,j} = 2V_{N_s-1,j} - V_{N_s-2,j}$$

Método das Diferenças Finitas

Algoritmo

1. Comece do instante de tempo final ($j = j_{max}$, $t = T$);
2. Para cada valor de S (cada índice i), calcule:

2.a) $\Delta_{i,j} = \dfrac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S}$

2.b) $\Gamma_{i,j} = \dfrac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\left(\delta S\right)^2}$

2.c) $\Theta_{i,j} = rV_{i,j} - rS\Delta_{i,j} - \dfrac{\sigma^2 S_{i,j}^2}{2}\Gamma_{i,j}$

2.d) $V_{i,j-1} = V_{i,j} - \Theta_{i,j}\delta t$

4. Aplique as condições iniciais:

4.a) $V_{0,j} = 2V_{1,j} - V_{2,j}$

4.b) $V_{N_s,j} = 2V_{N_s-1,j} - V_{N_s-2,j}$

5. Vá para o instante anterior (decremente j) e volte para o passo 2.

Método das Diferenças Finitas

Evitar oscilações

- Lembre-se que

$$V_{i,j-1} = a_i V_{i-1,j} + b_i V_{i,j} + c_i V_{i+1,j}$$

em que:

$$a_i = \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta t - \frac{1}{2} r i \delta t; \quad b_i = 1 - r\delta t - \sigma^2 i^2 \delta t; \quad c_i = \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta t + \frac{1}{2} r i \delta t$$

- Converge sem oscilar se $b_i > 0$:

$$b_i > 0 \Rightarrow 1 - r\delta t - \sigma^2 i^2 \delta t > 0$$

$$\left(r + \sigma^2 i^2\right)\delta t < 1 \Rightarrow \delta t < \frac{1}{r + \sigma^2 i^2} \Rightarrow \boxed{\delta t < \frac{1}{r + \sigma^2 N_s^2}}$$

Método das Diferenças Finitas

Método explícito x implícito

- O método das diferenças finitas pode ser explícito ou implícito. Até o momento, vimos o método explícito:

$$V_{i,j-1} = a_i V_{i-1,j} + b_i V_{i,j} + c_i V_{i+1,j}$$

- Pode-se obter o valor de *V*, no instante $j - 1$, diretamente a partir de alguns valores de *V* no instante *j.*
- No método implícito, a equação relaciona 3 valores no instante $j - 1$ com um único valor no instante *j*. Assim, cada equação tem 3 incógnitas.
- Vantagem do implícito: não existe o risco de soluções que oscilam e não convergem para o valor correto.
- Desvantagem do implícito: necessita da inversa de uma matriz que pode implicar num custo computacional alto. Com boas práticas de programação, essa desvantagem pode ser mitigada.

Método das Diferenças Finitas

Método explícito x implícito

- Em ambos os métodos, o erro nas derivadas $\frac{\partial V}{\partial S}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ é:

$$O\left[(\delta S)^2\right]$$

- Já para a derivada temporal, $\frac{\partial V}{\partial t}$, o erro é da ordem de:

$$O[\delta t]$$

- Em ambos os métodos (explícito e implícito) o erro na derivada temporal é grande.
- O método de Crank-Nicolson combina os dois métodos para reduzir o erro na derivada temporal, tal que:

$$O\left[(\delta t)^2\right]$$

Método das Diferenças Finitas

Opção Americana

- Na opção americana, o titular pode exercer a qualquer momento até (incluindo) o vencimento. Vimos que:
  - Em uma *call*:

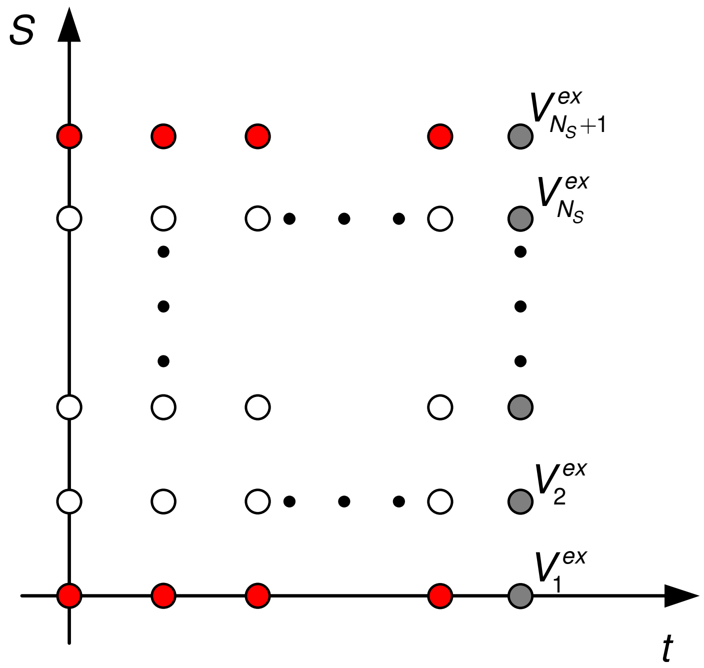
$$V_i^{ex} = \max(S_i - K, 0)$$

$$V_{i,j-1} = \max(V_i^{ex}, V_{i,j-1})$$

  - Em uma *put*:

$$V_i^{ex} = \max(K - S_i, 0)$$

$$V_{i,j-1} = \max(V_i^{ex}, V_{i,j-1})$$



Erro de Rebalanceamento

Exemplo de Rebalanceamento

- Exemplo do livro: John C. Hull. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**
- Texto e planilha `rebalanceamento_hull_alunos.xlsx` preparados pelo Prof. Marcio Menezes.
- Considere uma opção de compra (*call*) sobre uma ação que não paga dividendos, onde:
  - o preço da ação é R$ 49,00;
  - o preço de exercício é de R$ 50,00;
  - a taxa de juros livre de risco é de 5% ao ano;
  - o tempo até o vencimento é de 20 semanas (= 0,3846 ano);
  - a volatilidade é de 20% ao ano.

Erro de Rebalanceamento

- O objetivo é fazer o hedge da opção. Imagine a posição de um banco que vendeu 100.000 opções de compra para o seu cliente.
- O banco pretende fazer o hedge semanalmente. Para isso, monta-se uma carteira neutra ao risco e a cada semana faz-se o rebalanceamento desta carteira.

$$\Pi = V - S\Delta$$

- A planilha tem duas abas. Ambas começam com o preço do ativo de R$ 49,00. A opção está *at the money*. A diferença é:
  - 1: À medida que o preço evolui na primeira aba da planilha, a opção vai ficando *in the money*.
  - 2: À medida que o preço evolui na segunda aba da planilha, a opção vai ficando *out of the money*.

Erro de Rebalanceamento

- Complete as planilhas com:
  1. d_1, $N(d_1)$, d_2 e $N(d_2)$.
  2. O Delta da opção.
  3. O preço da opção.
  4. A quantidade de ações necessárias a cada instante na carteira neutra ao risco.
  5. A quantidade de ações a ser comprada ou vendida semanalmente (rebalanceamento).
  6. O custo da carteira a cada instante devido ao rebalanceamento.
  7. O custo dos juros a cada instante.
  8. O custo cumulativo (ações compradas + juros) ao longo do tempo.
  9. O custo de se fazer o *hedge* da opção.

Erro de Rebalanceamento

- Vimos que:

Call: $$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Put: $$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

No Excel: $N(\cdot)$ = DISTNORMP($\cdot$)

Erro de Rebalanceamento

Observações:

- O custo do *hedge* foi próximo ao valor do prêmio da opção.
- O erro na diferença de valores ocorre por causa das limitações do rebalanceamento.
  - O rebalanc. foi feito em tempo discreto, com periodicidade semanal.
  - O rebalanc. Foi feito com quantidades discretas do ativo objeto – lote de 100 unidades.
- Se o rebalanceamento fosse feito a cada dia, erro no custo de se fazer o hedge seria menor.
- Se custos de transação fossem inseridos, o custo do hedge seria maior.
- Enquanto o Δ é positivo para uma *call* comprada, ele é negativo para uma *call* vendida. De uma forma geral, para carteiras grandes, os ajustes são pequenos e os custos de transação são muito pequenos.

Erro de Rebalanceamento

Replicação de uma *call*:

- Para ter uma carteira neutra ao risco, foi necessário, a cada instante de tempo
  - Comprar/vender ações do ativo-objeto;
  - Aumentar/diminuir a dívida.
- Esta estratégia é equivalente a comprar uma opção de compra (*call*) para neutralizar a venda da *call* feita pela instituição financeira.