



# **Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita**

## **Metodologia**

**Versão Abril de 2010**



## **SUMÁRIO**

<b>1. ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS .....</b>	<b>2</b>
<b>2. COMPENSAÇÃO PELA INFLAÇÃO NA ESTRUTURA A TERMO .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1 Aspectos Metodológicos da Inflação Implícita.....</b>	<b>7</b>
<b>3. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>9</b>

## 1. ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

A construção da ETTJ para as diferentes classes de títulos é baseada na mesma metodologia da construção do intervalo indicativo, disponibilizado no Sistema de Difusão de Taxas e na publicação do Mercado Secundário da ANDIMA. A premissa básica para estimação das curvas de juros é a de que o preço de um título de renda fixa é igual ao fluxo de caixa futuro prometido pelo emissor, trazido a valor presente por uma função desconto<sup>1</sup>.

$$P_{i,t} = \sum_{j=1}^{K_i} F_{i,j,t} b_t(T_{i,j}) + \varepsilon_{i,t}, \quad \forall i, t.$$

Na equação anterior:

$F_{i,j,t}$  : j-ésimo pagamento (cupom e/ou amortização) do i-ésimo título na data t

$T_{i,j}$  : prazo, em anos (dias úteis/252), em que ocorre o pagamento j do i-ésimo título

$K_i$  : número de pagamentos do título i

$P_{i,t}$  : preço do i-ésimo título na data t

$\varepsilon_{i,t}$  : erro cometido pelo modelo para o título i na data t

$b_t(T_{i,j})$  : função desconto discreta, definida pela equação:

$$b_t(T_{i,j}) = \frac{1}{(1 + r_t(T_{i,j}))^{T_{i,j}}}$$

No modelo proposto por Svensson (1994), a taxa de juros na data t para o prazo  $\tau$ , em anos (base dias úteis/252), é dada pela seguinte equação:

$$r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right)$$

<sup>1</sup> Como estamos tratando de títulos de um mesmo emissor (o governo federal), o risco de crédito é o mesmo para todos os títulos e por isto ele já está incorporado nos juros.

Esse modelo é amplamente utilizado por diversos bancos centrais por tratar-se de uma forma funcional simples que descreve toda a estrutura temporal das taxas de juros com um pequeno número de parâmetros. O formato da equação permite uma estrutura suave e flexível que acomoda os diversos formatos de ETTJ observados nos dados.

Os fatores da estrutura possuem a interpretação de nível ( $\beta_{1t}$ ), inclinação ( $\beta_{2t}$ ) e curvaturas ( $\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$ ). Os parâmetros  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$  caracterizam o decaimento, determinando onde as cargas de  $\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$  atingem seu máximo.

Tomando os limites da equação acima, temos:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} r_t(\tau) = \beta_{1t}$$

Desta forma,  $\beta_{1t}$  e  $\beta_{2t}$  são, respectivamente, os componentes de longo e de curto prazo da ETTJ. Já  $\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$  são os componentes de médio prazo, pois a carga que multiplica ambos,  $\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau}$ , começa em zero, é crescente no início e depois tende para zero quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Os parâmetros da ETTJ ( $\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, \beta_{4t}, \lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$ ) são obtidos através da minimização do somatório dos erros quadráticos (quadrado da diferença entre o preço indicativo<sup>2</sup> e o preço resultante do modelo) de todos os títulos ponderados pelo inverso da *duration*:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^N W_i (P_i - \sum_{j=1}^{k_i} F_{i,j} b_t(T_{i,j}))^2$$

---

<sup>2</sup> Preço indicativo calculado a partir da coleta das taxas consideradas justas pelas instituições para o título, independente de ter havido negócios com o papel.

Como observado acima, a função-objetivo visa à minimização dos erros nos preços dos ativos (quadrado da diferença entre o preço indicativo<sup>3</sup> e o preço resultante do modelo). O procedimento gera um resultado homocedástico em termos de erros nos preços, porém, heterocedástico nessa medida referente às correspondentes taxas internas de retorno. Essa característica é resultado da diferença de sensibilidade de alterações nas taxas em função de alterações no preço para ativos de durações diferentes. Com o objetivo de atenuar esse problema, utiliza-se o ponderador  $W_i$ , já que pequenas diferenças nos preços de ativos de curto prazo implicam em grandes diferenças em suas taxas. O inverso da Duration foi adotado por penalizar mais o erro para ativos de curto prazo e, ainda assim, considerar a influência dos vencimentos de prazos mais longos..

Esse critério de ajuste foi estabelecido considerando peculiaridades da estrutura da dívida doméstica, como concentração de vencimentos no curto prazo. A Associação monitorará o perfil da dívida pública brasileira para ajustar o modelo caso haja alteração da estrutura de vencimentos que justifique a alteração do ponderador.

Na construção do intervalo indicativo, a otimização é realizada com base nos quatro parâmetros  $\beta$ , pois os componentes de decaimento  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$  são mantidos fixos. Para permitir um menor nível de erro e, conseqüentemente, uma melhor aderência da curva aos dados, a ETTJ a ser divulgada será obtida através da estimação diária de todos os seis parâmetros do modelo. Com isso, a otimização torna-se um pouco mais complexa, uma vez que é altamente não linear, conforme mostrado por Bolder e Stréliniski (1999).

A alta não linearidade traz o risco da otimização não atingir um mínimo global, mas sim um mínimo local, isto é, o risco da falsa convergência. Esse problema pode ser claramente observado quando são usados os métodos de otimização tradicionais (mínimos quadrados não lineares ou máxima verossimilhança), uma vez que estes se mostram muito sensíveis aos parâmetros iniciais fornecidos: os resultados obtidos para uma mesma data variam muito, dependendo dos valores iniciais. Adicionalmente, a estimação por essa via leva à alta volatilidade da série histórica dos parâmetros, à abundância de valores anômalos

---

<sup>3</sup> Preço indicativo calculado a partir da coleta das taxas consideradas justas pelas instituições para o título, independente de ter havido negócios com o papel.

e à grande frequência de mudanças estruturais, não justificáveis pela evolução do mercado de títulos públicos no Brasil.

Com o intuito de contornar esses problemas, foi desenvolvido um algoritmo genético para estimação dos parâmetros do modelo de Svensson, possibilitando resultados mais satisfatórios, séries históricas menos voláteis e melhor ajuste aos dados. Para um resultado ainda melhor, refina-se os parâmetros  $\beta$  encontrados pelo genético através da estimação tradicional, onde os dados obtidos no primeiro são utilizados para definir a região inicial da otimização.

O algoritmo genético, introduzido por Holland (1975), é um algoritmo de busca, inspirado na biologia evolutiva e aplicável a diferentes situações, cuja ideia básica é criar uma população de cromossomos que representam candidatos à solução do problema. Essa população evolui ao longo do tempo através de novas gerações. A cada evolução, os melhores indivíduos são selecionados e submetidos a processos de *crossover* e mutação. Essas gerações são criadas até a população convergir para a solução ótima do problema.

A eficiência desse algoritmo, análogo à ideia de adaptação dos indivíduos ao longo da evolução, reside na capacidade de explorar a informação acumulada sobre um espaço de busca inicialmente desconhecido, de forma a enviesar as buscas subsequentes para espaços mais adequados. Seu desenvolvimento aplicado à solução do problema de estimação da ETTJ, segundo a equação de Svensson, tomou como base o trabalho de Gimeno e Nave (2006) do Banco Central da Espanha.

---



## 2. COMPENSAÇÃO PELA INFLAÇÃO NA ESTRUTURA A TERMO

O procedimento de extração da inflação implícita embutida na estrutura a termo de taxas de juros no mercado brasileiro foi motivado pela evolução da condução da administração da dívida mobiliária federal desde 2005, quando o Tesouro Nacional concentrou esforços na construção de uma curva de rendimentos prefixada mais longa, a partir da emissão NTN-F (títulos prefixados com cupons fixos de juros), e intensificou as emissões de títulos atrelados a índices de preços, principalmente as NTN-B, indexados ao IPCA.

Em janeiro daquele ano, a curva prefixada contava com vértices de vencimento em até três anos (NTN-F 1º/1/2008). Em dezembro do mesmo ano, a configuração da estrutura a termo apresentava vértices de até seis anos (NTN-F 1º/1/2012).

Ao mesmo tempo, o Tesouro Nacional promoveu a colocação de novos vencimentos de títulos indexados ao IPCA, com o objetivo de fixar vértices da estrutura a termo, intensificando os volumes nas colocações primárias. Entre janeiro e dezembro de 2005, a participação das NTN-B na dívida passou de 3,3% para 7,7%. No decorrer de 2006, esses ativos passaram a representar fatia importante da liquidez do mercado secundário de títulos públicos e, atualmente, o Brasil é um dos países com maior estoque de títulos atrelados à inflação (*fonte: Barclay's World Gilb Index*).

A nova configuração da estrutura das classes de remuneração de ativos, liquidez e maturidade da dívida passou a permitir a extração de informações importantes das curvas de juros, como o cálculo da inflação implícita. Apesar de haver ruídos em sua interpretação como estimativa de inflação futura, os participantes do mercado se utilizam dessas informações para calibrar modelos de precificação de ativos a partir da decomposição de riscos associados aos títulos e à condução da política monetária.

## 2.1 Aspectos Metodológicos da Inflação Implícita

A inflação implícita nas curvas de juros é obtida com base em uma relação conhecida como identidade de Fisher, que considera que a taxa de juros nominal é uma composição entre a taxa de juros real e a expectativa de inflação para o período:

$$(1 + r) = (1 + \rho) \times (1 + \pi) \quad (1)$$

Onde,  $r$  é a taxa de juros nominal,  $\rho$  é a taxa de juros real e  $\pi$  é a inflação

Reorganizando a equação (1), verifica-se que a inflação pode ser extraída pela relação entre os juros nominal e real. Esse *spread* encontrado, denominado taxa de compensação pela inflação ou Break Even Inflation Rate (BEIR), é a diferença das rentabilidades esperadas entre os ativos prefixados e os ativos indexados, ou seja, a taxa que equalizará a rentabilidade entre esses dois tipos de ativos.

$$\pi = [(1 + r) \div (1 + \rho)] - 1 \quad (2)$$

Onde,  $r$  é a taxa de juros nominal,  $\rho$  é a taxa de juros real e  $\pi$  é a inflação

Esse método, muito utilizado no segmento financeiro, não pode ser diretamente interpretado como expectativas de inflação futura. A aplicação da forma simples da identidade de Fisher não considera alguns aspectos importantes, que acabam causando super ou subestimação da taxa de inflação implícita. Dentre eles, destacam-se o prêmio de risco de inflação embutido nas taxas dos ativos prefixados, a diferença de liquidez dos ativos e a diferença na estrutura de pagamentos entre títulos prefixados e indexados.

O risco de inflação reflete a probabilidade atribuída pelos agentes à expectativa para inflação até o vencimento do título ser inferior à efetivamente registrada. Geralmente, as taxas





de retorno dos ativos financeiros prefixados embutem um *spread* para compensar esse risco, cuja magnitude dependerá do grau de incerteza em relação à variação dos preços.

No que se refere à liquidez, destaca-se que os ativos prefixados registram um volume de negociação consideravelmente maior que aos atrelados ao IPCA. Para estes últimos, essa diferença se traduz em maior prêmio exigido pelos investidores, pela potencial dificuldade em se desfazerem de posições com a rapidez e preços desejados.

A utilização das curvas zero cupom no cálculo da taxa de inflação implícita elimina os problemas gerados pela diferença na estrutura de pagamentos desses dois tipos de ativos. Além disso, permite analisar a série histórica da BEIR, para prazos fixos selecionados.

Em termos de inflação implícita, de uma forma geral, o risco de inflação embutido nas taxas prefixadas irá pressionar a BEIR, tornando-a acima da expectativa real. Analogamente, considerando-se a menor liquidez dos ativos indexados, a tendência é que ocorra uma pressão no sentido inverso. Logo, é possível concluir que a taxa de compensação pela inflação é composta pela expectativa de inflação e um *spread* refletindo a combinação dos riscos embutidos nos preços dos ativos. A identidade de Fisher pode ser, então, reescrita, considerando o efeito deste *spread*.

$$\pi = [(1 + r) \div (1 + \rho)] - 1 - Spread$$

### 3. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BANK OF ENGLAND. **Notes on the bank of England UK yield curves**. England, [s.d.], 6p. Disponível em:

<[http://search.bankofengland.co.uk/search?q=%93Notes+on+the+bank+of+England+UK+Yield+Curves&btnG=Search&entqr=0&ud=1&sort=date%3AD%3AL%3Ad1&output=xml\\_no\\_dtd&oe=UTF-8&ie=UTF-8&client=default\\_frontend&proxystylesheet=default\\_frontend&site=default\\_collection](http://search.bankofengland.co.uk/search?q=%93Notes+on+the+bank+of+England+UK+Yield+Curves&btnG=Search&entqr=0&ud=1&sort=date%3AD%3AL%3Ad1&output=xml_no_dtd&oe=UTF-8&ie=UTF-8&client=default_frontend&proxystylesheet=default_frontend&site=default_collection)>.

Último acesso em: set. 2009.

BOLDER, David Jamieson; ESTRÉLISKI, David. **Yield curve modelling at the Bank of Canada**. Ottawa: Bank of Canada, 1999. (Bank of Canada Technical Report, n. 84).

CHRISTENSEN, Ian; DION, Frédéric; REID, Christopher. **Real return bonds, inflation expectations and the break-even inflation rate**. Ottawa: Bank of Canada, 2004. (Working paper, n. 2004-43). Disponível em: <[dsp-psd.pwgsc.gc.ca/Collection/FB3-2-104-43E.pdf](http://dsp-psd.pwgsc.gc.ca/Collection/FB3-2-104-43E.pdf)>.

Último acesso em: set. 2009.

DIEBOLD, Francis X.; LI, Canlin. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, Philadelphia (USA), v. 130, n. 2, p. 337-364, 2005. Disponível em: <[www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf](http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf)>. Último acesso em: set. 2009

EJSING, Jacob; GARCÍA, Juan Angel; WERNER, Thomas. **The term structure of euro area break-even inflation rates: the impact of seasonality**. Frankfurt: European Central Bank, 2007. 43 p. (Working Paper Series, n. 830). Publicado em novembro de 2007. Disponível em: <[www.ecb.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp830.pdf](http://www.ecb.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp830.pdf)>. Último acesso em: set. 2009.

GIMENO, Ricardo; NAVE, Juan. **Genetic algorithm estimation of interest rate term structure**. Madrid: Banco de España, 2006. 35 p. (Documentos de Trabajo, n. 0634).

HÖRDAHL, Peter. The inflation risk premium in the term structure of interest rates. **BIS Quarterly Review**, Basel, sept. 2008. p. 23-38. Disponível em:

<[http://www.bis.org/publ/qtrpdf/r\\_qt0809e.pdf](http://www.bis.org/publ/qtrpdf/r_qt0809e.pdf)>. Último acesso em: set. 2009.

POOTER, Michiel de (2007): **Examining the Nelson-Siegel class of term structure models**. Amsterdam: Tinbergen Institute, 2007. 56 p. (Tinbergen Institute Discussion Papers, n. TI 2007-043/4). Disponível em: <[www.tinbergen.nl/discussionpapers/07043.pdf](http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/07043.pdf)>. Último acesso em: set. 2009.

SACK, Brian: **Deriving inflation expectations from nominal and inflation-indexed treasury yields**. Washington, DC: Federal Reserve, 2000. 24 p. (Finance and Economics Discussion Series, n. 2000-33). Disponível em:

<<http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2000/200033/200033pap.pdf>>. Último acesso em: set. 2009.



SILVA, Fátima; MONTEIRO, José. (2000): A informação sobre expectativas de inflação contida nos preços dos activos financeiros. **Boletim Económico**, Lisboa, dez. 2000. Publicação do Banco de Portugal. Disponível em: <[www.bportugal.pt/publish/bolecon/docs/2000\\_4\\_1\\_p.pdf](http://www.bportugal.pt/publish/bolecon/docs/2000_4_1_p.pdf)>. Último acesso em: set. 2009.

SVENSON, Lars E. O. **Estimating and interpreting forward interest rates**: Sweden 1992-1994. Washington, DC: International Monetary Fund, 1994. (IMF Working Papers, n. 94/114).