Swaps

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão: 08/03/2020

Primeira versão: 08/03/2020

1 Introdução

Neste documento são tratados os apreçamentos e algumas características dos contratos de swaps.

2 Swaps

Assim como os contratos futuros, os contratos derivativos de swaps representam uma obrigação de transferência de mercadorias entre as partes em uma data futura. Embora de apreçamento linear, um swap tem seu preço dependente de um ativo-objeto.

Essencialmente, um contrato de swap é composto de duas pontas, ou "pernas" (*legs*), que são trocadas (do inglês, *swap*) entre as duas partes. Sem perda de generalidade, podemos chamar as partes de parte A e parte B; e as pontas de Leg 1, devida pela parte A à parte B, e Leg 2, devida pela parte B à parte A. Esquematicamente, temos o fluxo da figura (2).

O fluxo de pagamento das *legs* é programado para ocorrer em uma data de vencimento (t_V). O valor presente de uma operação de swap é a diferença entre valores presentes de cada *leg*. Na data da operação (t_0), as duas legs podem ter valores iguais, ou seja, os parâmetros do contrato podem ter sido estabelecidos de forma a haver igualdade entre as pontas. Neste caso, diz-se que o swap parte de um valor justo (*fair value*). Quando não há igualdade das pontas na saída, há uma transferência entre as partes, de forma a compensar a discrepância. Obviamente, aquela que deve mais paga a diferença.

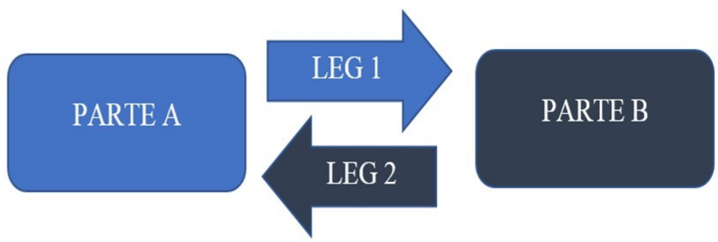
Esse instrumento possibilita a parte trocar de risco em sua carteira. Por exemplo, imagine que a parte A tenha feito uma operação no mercado de compra de PU de um certo vencimento de DI1, de forma que ficou aplicado na taxa pré desse prazo. A espera que as taxas de mercado caiam (PU sobe e ele daí vende esse PU mais caro). Mas, no meio do caminho, o Banco Central sinaliza aumento de taxa de juros, o que tornaria mais vantajoso estar aplicado numa taxa pós-fixada (LFT, por exemplo). Ao invés de se desfazer da posição de contrato futuro DI1, a parte A procura uma parte B para fazer um swap em que ele (A) garante a taxa pré enquanto a parte B garante a taxa CDI do período do swap. Claramente, tem-se que esperar o final do período para saber qual foi a ponta que no líquido termina devedora.

Uma operação de swap é tipicamente de balcão (*over-the-counter*), não havendo ajustes de margem, como no caso de um contrato futuro listado. Embora a forma do contrato depende do que for acordado entre as partes, a ISDA (International Swap and Derivatives Association) é um órgão internacional que visa estabelecer padrões. No Brasil, um contrato pode ser registrado na

CETIP, *clearing* que serve como central de liquidação para as pontas.

As *legs* de swaps envolvem tipicamente juros, ações, moedas, crédito, commodities, índices e inflação. Portanto, são comuns as *legs* de swaps: pré, taxa pós (CDI, Selic), proteção contra eventos de *default* (credit default swaps); variação cambial, de inflação, de índice ou ação e de preços de commodities. As operações podem conter vários fluxos periódicos, inclusive com *resets,* mas aqui veremos os de um fluxo, pois os de vários fluxos podem ser decompostos em vários swaps começando em datas específicas (a termo).

Neste documento apresentaremos uma fórmula genérica para uma *leg* e, em seguida, particularizaremos para alguns tipos. Depois mostramos a equivalência com o mercado de futuros e discutimos os riscos envolvidos, apresentando exemplos, também.



3 Apreçamento Geral de Uma *Leg* de Swap

O valor futuro de uma *leg* de um swap essencialmente é composto pela variação de um índice do período desde a emissão (t_0) ao vencimento (t_V), podendo incorporar *spread*, mais um cupom de juros $c(t_0, t_V)$, definido no início da operação (t_0)[1].

$$Leg(t_0, t_V) = \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}\,, \tag{1}$$

onde $T(t_0, t_V)$ é o prazo anualizado, calculado como $DU(t_0, t_V)/252$, por exemplo. A marcação a mercado na data de apreçamento (t) é feita descontando pela curva de juros livre de risco (taxa pré do mercado de DI), que também pode receber um spread de mercado

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{Leg(t_0, t_V)}{(1 + tx_{pré}\,(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \tag{2}$$

[1]Omitiremos a quantidade aplicada.

Ao usar o índice final em termos da cotação de futuro (3), a variação de índice passa a ser do início à data de apreçamento. O fator de juros pré no numerador do futuro cancela-se com o denominador do swap e o desconto passa a ser em termos de um cupom $y\,(t, t_V)$, como em (4),

$$I(t_V) = I(t) \times \frac{\left(1 + tx_{pré}\,(t, t_V)\right)^{T(t,t_V)}}{\left(1 + y\,(t, t_V)\right)^{T(t,t_V)}} \tag{3}$$

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{\left(1 + c\,(t_0, t_V)\right)^{T(t_0,t_V)}}{\left(1 + y\,(t, t_V)\right)^{T(t,t_V)}}. \tag{4}$$

Já o resultado de uma operação de swap é a diferença entre os $MtMs$ das *legs*.

A seguir especializamos esta relação para alguns tipos de *Legs*: cambial, pré, cdi, inflação e ação.

4 Pré

Este é o caso mais simples de uma *leg* de swap. A *leg* consiste em uma remuneração a uma taxa acordada no contrato para o período. Assim, o valor futuro da *leg* e seu MtM são

$$Leg(t_V) = \left(1 + c\,(t_0, t_V)\right)^{T(t_0,t_V)} \tag{5}$$

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{\left(1 + c\,(t_0, t_V)\right)^{T(t_0,t_V)}}{\left(1 + tx_{pré}\,(t, t_V)\right)^{T(t,t_V)}}. \tag{6}$$

O risco da *leg* pré é a oscilação da curva de desconto, a curva “pré”.

5 CDI

A *leg* consiste na acumulação da taxa diária (*overnight*) cdi_i aa entre a data inicial t_0 e a data de vencimento t_V. Essa acumulação, sem *spread*, é dada por

$$Leg\,(t_0, t_V) = \prod_{i=0}^{t_V} \left(1 + cdi_i\right)^{1/252}. \tag{7}$$

A planilha [CDI-Acum.] mostra como aculular CDI. Com *spread* (α_m) na forma *multiplicativa*, percentual, é convenção aplicar o mesmo sobre a taxa diária, obtida a partir do fator

$$Leg\alpha_m\left(t_0,t_V\right)=\prod_{i=0}^{t_V}\left\{\left[\left(1+cdi_i\right)^{1/252}-1\right]\times\frac{\alpha_m}{100}+1\right\}. \tag{8}$$

Com *spread* (α_a) na forma *aditiva*, em percentual, ao ano ocorre sobre o fator após o mesmo ser acumulado, funcionando como um cupom

$$Leg\alpha_a\left(t_0,t_V\right)=\left[\prod_{i=0}^{t_V}\left(1+cdi_i\right)^{1/252}\right]\times\left(1+\frac{\alpha_a}{100}\right)^{T(t_0,t_V)} \tag{9}$$

Como a série de CDI necessária à acumulação não é conhecida na data de contratação, a *leg* é pós fixada. Para marcação, numa data t, dividimos a acumulação em uma parte conhecida, do período(t_0,t), e uma parte futura, do período (t,t_V), que devemos projetar ao vencimento. Essa projeção nada mais é do que o fator da taxa pré da data de apreçamento ao vencimento, $tx_{pré}(t,t_V)$, ao ano. No caso sem *spread*,

$$Leg\left(t_0,t_V\right)=\left[\prod_{i=0}^{t}\left(1+cdi_i\right)^{1/252}\right]\left(1+tx_{pré}(t,t_V)\right)^{T(t,t_V)} \tag{10}$$

No caso com *spread* multiplicativo,

$$Leg\alpha_m\left(t_0,t_V\right)=\left(\prod_{i=0}^{t}\left\{\left[\left(1+cdi_i\right)^{1/252}-1\right]\times\frac{\alpha_m}{100}+1\right\}\right)$$

$$\times\left(\left\{\left[\left(1+tx_{pré}(t,t_V)\right)^{1/252}-1\right]\times\frac{\alpha_m}{100}+1\right\}^{du(t,t_V)}\right). \tag{11}$$

No caso do *spread* aditivo,

$$Leg\alpha_a\left(t_0,t_V\right)=\left[\prod_{i=0}^{t}\left(1+cdi_i\right)^{1/252}\right]\times\left(1+tx_{pré}(t,t_V)\right)^{T(t,t_V)}\times\left(1+\frac{\alpha_a}{100}\right)^{T(t_0,t_V)}. \tag{12}$$

Repare que os termos de *spread* da parte passada e da futura neste caso juntam-se, fazendo com que o termo do *spread* seja elevado à $T(t_0,t_V)$.

Quando não há *spread*, calculamos o MtM da *leg* (10) descontando pela taxa pré. Consequentemente, a parte de projeção de série para o futuro se cancela com o desconto e sobra somente a composição de cdi passado, como em (14).

$$MtM_{Leg}(t,t_V) = \frac{Leg\,(t_0,t_V)}{(1+tx_{pré}\,(t,t_V))^{T(t,t_V)}} \tag{13}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=0}^{t}(1+cdi_i)^{1/252}\right](1+tx_{pré}(t,t_V))^{T(t,t_V)}}{(1+tx_{pré}\,(t,t_V))^{T(t,t_V)}}$$

$$= \left[\prod_{i=0}^{t}(1+cdi_i)^{1/252}\right]. \tag{14}$$

Quando o *spread* é multiplicativo, calculamos o MtM da *leg* (11) descontando por uma curva pré em conjunto com um *spread* de mercado para o prazo $\alpha_m^{MKT}(t_V)$, ou seja,

$$MtM_{Leg\alpha_m}\,(t,t_V) = \frac{Leg\alpha_m\,(t_0,t_V)}{\left(\left\{\left[(1+tx_{pré}(t,t_V))^{1/252}-1\right]\times\frac{\alpha_m^{MKT}(t_V)}{100}+1\right\}^{du(t,t_V)}\right)}. \tag{15}$$

mas, simplificadamente, pode-se descontar por uma curva pré sem *spread*, como o desconto em (13).

O MtM da *leg* CDI no caso do *spread* aditivo, de forma semelhante, pode usar um spread aditivo de mercado para o prazo $\alpha_a^{MKT}(t_V)$ sobre a taxa pré de desconto da *leg*

$$MtM_{Leg\alpha_a}\,(t,t_V) = \frac{Leg\alpha_a\,(t_0,t_V)}{(1+tx_{pré}(t,t_V))^{T(t,t_V)}\times\left(1+\frac{\alpha_a^{MKT}(t_V)}{100}\right)^{T(t,t_V)}} \tag{16}$$

e aqui também, simplificadamente, pode-se descontar por uma curva pré sem *spread*, assim como no desconto em (13).

Como fica o risco da *leg* cdi? No caso em que não há *spread*, como em (7), há um cancelamento dos fatores de projeção futura e de desconto, como visto em (14). Desta forma, não há risco de mercado, pois a correção da *leg* é dada.

Nos caso de spread multiplicativo, (8), não é possível separar a taxa pré do spread, a rigor. Contudo, é residual, pequeno, o risco que se tem em pré, sendo tão menor quanto for a diferença entre o *spread* de mercado (que parca a posição) e o *spread* cobrado na operação. Resta o risco de mercado advindo da variação de *spread*.

Já no caso do spread aditivo, (12), a separação entre fator de acumulação pré e o fator de spread é total, tanto no numerador, quanto no denominador do MtM (16). O fator pré de acumulação que projeta a pré a futuro em (16) é cancelado com o que desconta o fluxo, restando somente como risco de mercado o *spread* de marcação.

6 Equivalência entre Swap CDI X Pré e Contrato de DI Futuro

Vimos em [Futuros]que um contrato de DI promete pagar um fluxo de 100.000 reais por contrato no vencimento. O investimento em t_0 em Q quantidades de um contrato de vencimento t_V , via uma taxa $tx_{pré}\left(t_0, t_V\right)$, implica em um desembolso financeiro de

$$Fin(t_0) = Q \times \frac{100.000}{\left(1 + tx_{pré}\left(t_0, t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}} \equiv Q \times PU\left(t_0, t_V\right) \tag{17}$$

O resultado acumulado até a data de vencimento é

$$P\&L(t, t_V) = Q \times \left(100.000 - PU\left(t_0, t_V\right) \times fcdi\left(t_0, t_V\right)\right) \tag{18}$$

com

$$fcdi\left(t_0, t_V\right) = \prod_{i=0}^{t_V} \left(1 + cdi_i\right)^{1/252}. \tag{19}$$

Agora montemos um swap Pré X CDI de mesmo vencimento e sem *spread* na taxa. Na *leg* pré, considere uma taxa pré acordada e um *Notional* N de forma a proporcionar um resgate de $Q \times 100.000$, como o contrato de DI1. Matematicamente,

$$Q \times 100.000 \equiv N \times \left(1 + c\left(t_0, t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}. \tag{20}$$

Se passarmos o fator de taxa do lado direito da equação para o lado esquerdo, temos o PU operado $PU\left(t_0, t_V\right)$, admitindo que a taxa negociada na leg pré seja a mesma do DI1 operado. Na *leg* cdi, o *Notional* N será a quantidade Q multiplicada pelo $PU\left(t_0, t_V\right)$, de forma que o valor atualizado até o vencimento é

$$N \times fcdi\left(t_0, t_V\right) \equiv Q \times PU\left(t_0, t_V\right) \times fcdi\left(t_0, t_V\right) \tag{21}$$

Então, o $P\&L$ acumulado do swap Pré X CDI no vencimento é dado por

$$P\&L\left(t_0, t_V\right) = N \times \left[\left(1 + c\left(t_0, t_V\right)\right)^{T\left(t_0, t_V\right)} - fcdi\left(t_0, t_V\right)\right] \tag{22}$$

e substituindo (20) e (21)

$$P\&L\left(t_0, t_V\right) = Q \times \left(100.000 - PU\left(t_0, t_V\right) \times fcdi\left(t_0, t_V\right)\right), \tag{23}$$

que é o $P\&L$ da posição de DI1 (18). Assim, demonstramos a equivalência entre o swap Pré X CDI e uma posição em DI1. O investidor que recebe a *leg* pré do swap é equivalente ao investidor que vende taxa via contrato de DI1[2].

7 Dólar

No desenvolvimento a seguir referir-nos-emos à cotação de dólar comercial à vista, e não à PTXA800. Consequentemente, a taxa de cupom cambial que usaremos será a taxa de cupom cambial limpa. No caso da *leg* de dólar, a equação (1) passa a compreender a variação cambial $S(t_V)/S(t_0)$ entre o lançamento da operação t_0 e o vencimento t_V e o cupom c trata-se do cupom cambial.

$$Leg_{DOL}(t_0, t_V) = \frac{S(t_V)}{S(t_0)} \times \left(1 + c\left(t_0, t_V\right)\right)^{T\left(t_0, t_V\right)}, \tag{24}$$

de onde o MtM numa data t é dado por

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{S(t_V)}{S(t_0)} \times \frac{\left(1 + c\left(t_0, t_V\right)\right)^{T\left(t_0, t_V\right)}}{\left(1 + tx_{pré}\left(t, t_V\right)\right)^{T\left(t, t_V\right)}}. \tag{25}$$

Se usarmos o preço de um um futuro de dólar, como em [Futuros],

$$S(t_V) = S(t) \times \frac{\left(1 + tx_{pré}\left(t, t_V\right)\right)^{T\left(t, t_V\right)}}{\left(1 + tx_{cupom}\left(t, t_V\right)\right)^{T\left(t, t_V\right)}}, \tag{26}$$

temos a equação (25) expressa em termos da variação cambial até a data t e o desconto em termos do cumpom de mercado $tx_{cupom}\left(t, t_V\right)$

[2] Lembre-se que vender o contrato de DI1 é justamente vender taxa, o que equivale a comprar PU.

$$MtM_{Leg}(t,t_V) = \frac{S(t)}{S(t_0)} \times \frac{(1+c(t_0,t_V))^{T(t_0,t_V)}}{(1+tx_{cupom}(t,t_V))^{T(t,t_V)}}. \tag{27}$$

Na equação (25), os riscos são a variação do spot futuro, para o vencimento t_V, ou seja, $S(t_V)$, e a taxa pré de desconto. Já na equação (27), os fatores de risco de mercado são o spot à vista, $S(t)$, e a taxa de cupom cambial limpa, $tx_{cupom}(t,t_V)$, que desconta o fluxo futuro. Ambas as formulações resultam no mesmo *VaR* total da posição.

8 Equivalência entre Swap CDI X Dólar e Contrato de DDI Futuro

Vimos em [Futuros] que um contrato de DDI promete pagar no vencimento, t_V, uma quantidade em dólar

$$Fin_{CTO}(t_V) = Q \times 0,5 \times 100.000 \tag{28}$$

que é apurado contra o $PU(t_0,t_V)$ adquirido pelo investidor, em dólar

$$Fin\,(t_0) = Q \times 0,5 \times PU(t_0,t_V), \tag{29}$$

levando ao $P\&L\,(t_0,t_V)$ acumulado, em reais,

$$P\&L_{DDI}\,(t_0,t_V) = Q \times 0,5 \times [100.000 - PU(t_0,t_V) \times f_{cupom}\,(t_0,t_V)] \times S\,(t_V)\,. \tag{30}$$

Lembre também que o fator de acumulação do cupom, $f_{cupom}\,(t_0,t_V)$, é obtido a partir da série de CDIs acumulada e da série de spots diários

$$f_{cupom}\,(t_0,t_V) = \prod_{i=1}^{t_V} \frac{(1+cdi_i)^{1/252}}{\frac{S_i}{S_{i-1}}}$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{t_V}(1+cdi_i)^{1/252}}{\frac{S_{t_V}}{S_0}} = \frac{f_{CDI}\,(t_0,t_V)}{\frac{S_{t_V}}{S_0}}. \tag{31}$$

Então,

$$P\&L_{DDI}\left(t_0,t_V\right)=Q\times 0,5\times 100.000\times S\left(t_V\right)-Q\times 0,5\times PU(t_0,t_V)\times S_0\times f_{CDI}\left(t_0,t_V\right) \quad (32)$$

Considere agora um swap DOL X CDI em que na *leg* **dólar** se opera um *Notional* N, em reais, convertido em dólar pela taxa de câmbio do início da operação, $S\left(t_0\right)$. Este *notional* em dólar é corrigido pelo cupom da operação de forma a resultar no que o contrato de DDI pagaria neste vencimento, isto é,

$$N\times\frac{1}{S\left(t_0\right)}\times\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}=Q\times 0,5\times 100.000. \quad (33)$$

Já para a *leg* de CDI teríamos o *notional* dado por (33), o que introduz a corresponência com o $PU(t_0,t_V)$ operado do DDI

$$N=Q\times 0,5\times\frac{100.000}{\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}}\times S\left(t_0\right)$$

$$=Q\times 0,5\times PU(t_0,t_V)\times S\left(t_0\right). \quad (34)$$

Por definição da *leg* CDI do swap, este notional é corrigido pelo fator de CDI, $f_{CDI}\left(t_0,t_V\right)$. Assim, o $P\&L$ do swap é

$$P\&L_{swap}\left(t_0,t_V\right)=N\times\left[\frac{S\left(t_V\right)}{S\left(t_0\right)}\times\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}-f_{CDI}\left(t_0,t_V\right)\right] \quad (35)$$

$$=Q\times 0,5\times 100.000\times S\left(t_V\right)-Q\times 0,5\times PU(t_0,t_V)\times S\left(t_0\right)\times f_{CDI}\left(t_0,t_V\right). \quad (36)$$

E assim demonstramos a equivalência entre um swap Dol X CDI e contrato futuro de DDI. A *leg* CDI do swap equivale à parte do PU operado do $P\&L$ do DDI, e que é carregada. Portanto, a *leg* dólar do swap corresponde à parte que o DDI “promete” no vencimento, ou seja, 50.000 dólares convertido em reais pela cotação no vencimento, por contrato.

9 Inflação

Neste caso, o valor da *leg* consiste *(1)* na variação acumulada de inflação entre a data inicial t_0 e a data de vencimento t_V, $I(t_V)/I(t_0)$, acrescida de um cupom de juros real, o chamado cupom de inflação, $c_0\,(t_0, t_V)$.

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c_0\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} \tag{37}$$

Como no caso de contratos futuros, o índice de inflação em cada data envolve uma acumulação pro rata tempore entre os índices de inflação mensais

$$I(t_X) = I_{Ant}\,(t_X) \times \left(\frac{I_{Próx}\,(t_X)}{I_{Ant}\,(t_X)} \right)^{\frac{T(t_{Ant}, t_X)}{T(t_{Ant}, t_{Próx})}} \tag{38}$$

onde

$I(t_X)$: índice de inflação, pro rata tempore, na data t_X.

$I_{Próx}\,(t_X)$: na data t_X, o próximo índice de inflação a vigorar;

$I_{Ant}\,(t_X)$: na data t_X, o índice de inflação vigente;

$t_{Próx}$: data em que o próximo índice de inflação passa a vigorar;

t_{Ant} : data em que o índice em vigor de inflação passou a vigorar;

Também como no caso de títulos públicos e futuros indexados à inflação, podemos usar a relação de Fisher entre o índice atual e o do vencimento

$$\frac{I(t_V)}{I(t)} = \frac{(1 + tx_{Pré}\,(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + c_{MkT}\,(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \tag{39}$$

na equação (37). Antes, reexpressamos a mesma em termos do índice corrente

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{I(t_V)}{I(t)} \times (1 + c_0\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} \tag{40}$$

e então

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{(1 + tx_{Pré}\,(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + c_{MkT}\,(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \times (1 + c_0\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}. \tag{41}$$

O MtM, dado pela equação (2), é

$$MtM_{Leg}(t,t_V) = \frac{Leg_{Infl}(t_0,t_V)}{\left(1+tx_{pré}\left(t,t_V\right)\right)^{T(t,t_V)}} \tag{42}$$

$$= \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{\left(1+c_0\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}}{\left(1+c_{MkT}\left(t,t_V\right)\right)^{T(t,t_V)}}. \tag{43}$$

Note que $I(t)$ também é obtida por (38), mas neste caso o próximo índice a vigorar, $I_{Próx}\left(t\right)$, ou tem projeção disponível, ou já estamos num dia que o índice foi divulgado e, portanto, pode ser usado no cálculo do pro rata, ao invés da projeção (como no caso do título público e futuro).

Os fatores de risco de mercado no swap de inflação são inflação futura (no valor futuro da *leg*, (37)) e pré (no desconto, como em (42)). A outra posibilidade é o fator de risco pelo cupom de inflação, como em (43).

10 Equivalência entre Swap Inflação X CDI e Contrato Futuro DAP

Vimos em [Futuros] que um contrato de DAP promete pagar no vencimento, t_V, uma quantidade em reais corrigido pela inflação até o vencimento t_V

$$Fin_{CTO}(t_V) = Q \times 100.000 \times M \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \tag{44}$$

onde $M = 0,00025$. Este resultado é apurado contra o financeiro do $PU(t_0,t_V)$ de aquisição ajustado pela inflação até o vencimento t_V e corrigido pelo fator de juros reais (cupom) no período

$$Fin\left(t_0\right) = Q \times PU(t_0,t_V) \times M \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times f_{cupom}\left(t_0,t_V\right) \tag{45}$$

Como em (31), temos a relação

$$f_{cupom}\left(t_0,t_V\right) = \prod_{i=1}^{t_V} \frac{\left(1+cdi_i\right)^{1/252}}{\frac{I(t_i)}{I(t_{i-1})}}$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252}}{\frac{I(t_V)}{I(t_0)}} = \frac{f_{CDI}\,(t_0, t_V)}{\frac{I(t_V)}{I(t_0)}}. \tag{46}$$

Então

$$P\&L_{DAP}\,(t_0, t_V) = Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} - Q \times M \times PU(t_0, t_V) \times f_{CDI}\,(t_0, t_V)$$

Considere agora um swap Inflação X CDI em que na *leg* **inflação** se opera um *Notional* N, em reais, corrigido pela inflação entre o início da operação, $I\,(t_0)$ e o vencimento $I\,(t_V)$. Este *notional* corrigido pela inflação é também corrigido pelo cupom da operação de forma a resultar no que o contrato de DAP pagaria neste vencimento, isto é,

$$N \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} = Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \tag{47}$$

Já para a *leg* de CDI teríamos o *notional* dado por (47), o que introduz a corresponência com o $PU(t_0, t_V)$ operado do DAP

$$N = Q \times M \times \frac{100.000}{(1 + c\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}$$

$$= Q \times M \times PU(t_0, t_V) \tag{48}$$

Por definição da *leg* CDI do swap, este notional é corrigido pelo fator de CDI, $f_{CDI}\,(t_0, t_V)$. Assim, o $P\&L$ do swap é

$$P\&L_{swap}\,(t_0, t_V) = N \times \left[\frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c\,(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} - f_{CDI}\,(t_0, t_V)\right] \tag{49}$$

$$= Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} - Q \times M \times PU(t_0, t_V) \times f_{CDI}\,(t_0, t_V) \tag{50}$$

E assim demonstramos a equivalência entre um swap Inflação X CDI e contrato futuro de DAP. A *leg* CDI do swap equivale à parte do PU operado do $P\&L$ do DAP, e que é carregada. Portanto, a *leg* inflação do swap corresponde à parte que o DAP "promete" no vencimento, ou seja, 100.000 reais corrigidos pela inflação até o vencimento, por contrato.

11 Variação de Índice e Ação

Neste caso, a *leg* remunera a variação do preço do ativo objeto (índice ou ação, aqui) no período, geralmente acrescido de um cupom de juros. O calendário adequado é o que envolve datas de negociação do índice ou ações: no caso daqueles negociados na B3, trata-se do calendário que inclui os feriados de São Paulo. Por facilidade, referir-nos-emos aos índices, mas é o mesmo tratamento para ação. O desenvolvimento segue exatamente as equações da seção (3). Neste caso, $I\left(t\right)$ é o valor do ativo na data t e $y(t,t')$ é taxa de aluguel no período $\left(t,t'\right)$. Como o contrato futuro de índice não consiste em um valor futuro pré-fixado (por exemplo, em 100.000, como os contratos de juros que vimos), a equivalência entre swap de Índice X PRÉ com um *forward* é mais imediata de se determinar. De fato, o valor futuro do swap é

$$P\&L_{Swap}\left(t_0,t_V\right)=N\times\left[\frac{I(t_V)}{I(t_0)}\times\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}-\left(1+tx_{pré}\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}\right] \tag{51}$$

Se escolhermos para a quantidade a ser operada em contratos de forward de índice o valor

$$Q=\frac{N\times\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}}{I(t_0)}, \tag{52}$$

Então, dado o P&L acumulado do forward,

$$P\&L_{Forward}\left(t_0,t_V\right)=Q\times\left\{I(t_V)-\left[I(t_0)\times\frac{\left(1+tx_{pré}\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}}{\left(1+c\left(t_0,t_V\right)\right)^{T(t_0,t_V)}}\right]\right\} \tag{53}$$

substituímos (52) e obtemos (51).

Por fim, a leg de Índice operada na B3 pode incorporar um spread $\alpha\%$ sobre o retorno do mesmo. Então, ao invés da variação $I(t_V)/I(t_0)$, temos

$$\left(\frac{I(t_V)}{I(t_0)}-1\right)\times\alpha\%+1 \tag{54}$$

12 Exemplos

Mostraremos exemplos de MtM de *legs*. Usaremos o calendário de feriados nacional, da Anbima, que em nossos exemplos parecerá como BCB.

12.1 Pré

Em 02/01/2020 um investidor opera R$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta pré em 01/06/2020. A taxa negociada foi de 4% a.a. Em 26/02/2020, a taxa pré de mercado para este vencimento é de 3,5% a.a. Calcule o MtM desta *leg*.

Solução.

Notional: $R\$1.000.000,00$

Data inicial t_0: 02/01/2020;

Data final t_V: 01/06/2020;

Data de apreçamento t: 26/02/2020.

$du\left(t_0, t_V\right) = 102$

$du\left(t, t_V\right) = 65$

$$MtM_{pré}\left(t\right) = R\$1.000.000,00 \times \frac{\left(1+4\%\right)^{102/252}}{\left(1+3,5\%\right)^{65/252}} = 1.007.026,24$$

12.2 CDI

Em 02/01/2020 um investidor opera R$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta CDI em 01/06/2020. O spread multiplicativo negociado foi de 110%. Em 26/02/2020, a taxa pré de mercado para este vencimento é de 3,5% a.a. Calcule o MtM desta *leg*.

Solução.

Notional: $R\$1.000.000,00$

Data inicial t_0: 02/01/2020;

Data final t_V: 01/06/2020;

Data de apreçamento t: 26/02/2020.

$\alpha = 110\%$

$du\left(t, t_V\right) = 65$

Fator cdi passado

$$\prod_{t_0}^{t}\left\{\left[(1+cdi_i)^{1/252}-1\right]\times\alpha+1\right\}=f_{cdi}(t_0,t)=1,006852300$$

Fator pré para estimar o índice cdi acumulado futuro

$$\left\{\left[(1+tx_{pré}\,(t,t_V))^{1/252}-1\right]\times\alpha+1\right\}^{du(t,t_V)}=f_{pré,\alpha}\,(t,t_V)$$

$$=\left\{\left[(1+3,5\%)^{1/252}-1\right]\times\frac{110}{100}+1\right\}^{65}=1,00980845$$

Fator pré de desconto

$$f_{pré}(t,t_V)=(1+tx_{pré}\,(t,t_V))^{du(t,t_V)/252}$$

$$=(1+3,5\%)^{65/252}=1,00891287$$

MtM da *leg*

$$MtM_{CDI}\,(t)=N\times\frac{f_{cdi}(t_0,t)\times f_{pré,\alpha}\,(t,t_V)}{f_{pré}(t,t_V)}$$

$$=1.000.000\times\frac{1,006852300\times 1,00980845}{1,00891287}$$

$$=1.007.746,05$$

12.3 Inflação

Em 02/01/2020 um investidor opera R$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta IPCA em 01/06/2020. O cupom de inflação negociado foi de 2%. Em 26/02/2020, a taxa de cupom de inflação de mercado para este vencimento é de 4,0% a.a. A projeção para o IPCA de fev/20, em 26/02/2020, era de 0,15%. Calcule o MtM desta *leg*.

Solução.

Notional: $R\$1.000.000,00$

Data inicial t_0: 02/01/2020;

Data final t_V: 01/06/2020;

Data de apreçamento t: 26/02/2020;

cupom de inflação da operação $c\left(t_0, t_V\right) : 2\%$.

Dias úteis envolvendo datas de efetividade de índice e as datas da operação:

$du(Nov19, Dez19) : 20$

$du(Jan20, Fev20) : 18$

$du(Nov19, t_0) : 11$

$du(Jan20, t) : 5$

Índice	Data de Efetividade	Valor / Projeção
Nov/19	16/12/2019	5259,76
Dez/19	15/01/2020	5320,25
Jan/20	17/02/2020	5331,42
Fev/20	16/03/2020	0,15%

Índices

$$I\left(t_0\right) = I\left(Nov19\right) \times \left(\frac{I\left(Dez19\right)}{I\left(Nov19\right)}\right)^{\frac{du(Nov19,t_0)}{du(Nov19,Dez19)}} = 5259,76 \times \left(\frac{5320,25}{5259,76}\right)^{\frac{11}{20}} = 5292,943886$$

$$I\left(t\right) = I\left(Jan20\right) \times \left(1 + proj(Fev20)\right)^{\frac{du(Jan20,t)}{du(Jan20,Fev20)}} = 5331,42 \times \left(1 + 0,15\%\right)^{\frac{5}{18}} = 5333,640223$$

Variação de índice:

$$\frac{I\left(t\right)}{I\left(t_0\right)} = \frac{5333,640223}{5292,943886} = 1,00768879$$

Fatores:

$$f_{operação}(t_0, t_V) = \left(1 + 2\%\right)^{\frac{102}{252}} = 1,00804756$$

$$f_{cupom}\left(t,t_V\right)=\left(1+4\%\right)^{\frac{65}{252}}=1,0101677981029$$

MtM:

$$MtM(t)=N\times\frac{I\left(t\right)}{I\left(t_0\right)}\times\frac{f_{operação}(t_0,t_V)}{f_{cupom}\left(t,t_V\right)}$$

$$=1.000.000\times1,00768879\times\frac{1,00804756}{1,0101677981029}$$

$$=1.005.573,75$$

12.4 Dólar

Em 02/01/2020, um investidor opera R$1.000.000,00 num swap no qual receberá em 01/06/2020 a variação cambial mais um cupom limpo de 3,5% a.a., em dias corridos, linear. O spot na data da operação era de 4,05. Na data de 26/02/2020, o spot era de 4,45 e o cupom cambial limpo de mercado era 4% a.a., em dias corridos, linear. Calcule o MtM nesta data.

Solução.

Notional: $R\$1.000.000,00$

Data inicial t_0: 02/01/2020;

Data final t_V: 01/06/2020;

Data de apreçamento t: 26/02/2020;

cupom cambial da operação $c\left(t_0,t_V\right)$: 3,5%;

cupom cambial de mercado na data de apreçamento $c\left(t,t_V\right)$: 4,0%;

spot na data da operação $S\left(t_0\right)$: 4,05;

spot na data da operação $S\left(t\right)$: 4,45;

$dc\left(t_0,t_V\right)=151$;

$dc\left(t,t_V\right)=96$;

base: 360.

Variação cambial

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \frac{4,45}{4,05} = 1,098765432$$

Fatores de juros

$$f_{operação}(t_0, t_V) = \left(1 + c(t_0, t_V) \times \frac{dc(t_0, t_V)}{360}\right)$$

$$= \left(1 + 3,5\% \times \frac{151}{360}\right) = 1,01468056$$

$$f_{cupom}(t, t_V) = \left(1 + c(t, t_V) \times \frac{dc(t, t_V)}{360}\right)$$

$$= \left(1 + 4,0\% \times \frac{96}{360}\right) = 1,01066667$$

MtM

$$MtM(t) = N \times \frac{S(t)}{S(t_0)} \times \frac{f_{operação}(t_0, t_V)}{f_{cupom}(t, t_V)}$$

$$= 1.000.000,00 \times 1,098765432 \times \frac{1,01468056}{1,01066667}$$

$$= 1.103.129,21$$

12.5 Ação

Em 02/01/2020, um investidor opera R$1.000.000,00 num swap no qual receberá em 01/06/2020 a variação de uma ação mais um cupom de 1% a.a., em dias úteis, exponencial. O spot da ação na data da operação era de 22. Na data de 26/02/2020, o spot era de 19 e a taxa de aluguel de mercado era 1,5% a.a., em dias úteis, exponencial. Calcule o MtM nesta data.

Referências

[CDI-Acum.] Planilha de acumulação de CDI: CDIAcumulaçãoSimples.xls.

[Futuros] Catalão, André. Futuros. Notas de Aula.