Interpolação e Mapeamento em Vértices

26 de março de 2017

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão: 22/03/2017

Primeira versão: 20/03/2017

1 Introdução

O intuito deste documento é mostrar que o mapeamento em vértices depende do tipo de interpolação adotada, não se tratando de uma mera escolha.

2 Interpolação

2.1 *Flat-Forward*

Sejam os fatores de composição para os períodos T_1, T_2, e T: $f_1(T_1)$, $f_2(T_2)$ e $f(T)$

$$lnf = lnf_1 + \frac{lnf_2 - lnf_1}{T_2 - T_1}(T - T_1)$$

$$= ln\left[f_1\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)}\right]$$

$$f = f_1\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)} \tag{1}$$

Vê-se que a interpolação *flat-forward* é equivalente à interpolação linear no log-fator.

2.2 Linear

Neste caso:

$$tx = tx_1 + \frac{tx_2 - tx_1}{T_2 - T_1}(T - T_1). \tag{2}$$

3 Mapeamento em Vértices

3.1 Interpolação *Flat-Forward*

Considere a composição contínua. O preço de um *zero coupon bond* é dado por:

$$P = e^{-rT}. \tag{3}$$

A taxa *forward* entre dois períodos é dada por:

$$e^{r_F T_F} = e^{r_2 T_2}/e^{r_1 T_1} \tag{4}$$

$$r_F = \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{T_F} \tag{5}$$

Uma taxa interpolada na metodologia *flat-forward* é dada por:

$$e^{rT} = \left[\left(\frac{e^{r_2 T_2}}{e^{r_1 T_1}} \right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}} \right]^{T - T_1} e^{r_1 T_1}$$

ou

$$rT = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} T_2 r_2 - \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} T_1 r_1 + T_1 r_1$$

$$r = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \frac{T_2}{T} r_2 + \left(1 - \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right) \frac{T_1}{T} r_1$$

$$r = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \frac{T_2}{T} r_2 + \left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \right) \frac{T_1}{T} r_1 \tag{6}$$

$$\alpha = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \tag{7}$$

$$1 - \alpha = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \tag{8}$$

$$\beta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \frac{T_2}{T} = \frac{T_2}{T} \alpha \tag{9}$$

$$1 - \beta = \frac{T_2 T - T_1 T - T_2 T + T_2 T_1}{T_2 - T_1} \frac{1}{T} = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \frac{T_1}{T} = (1 - \alpha) \frac{T_1}{T} \tag{10}$$

$$\therefore r = r_2 \beta + r_1 (1 - \beta) . \tag{11}$$

Os retornos dos preços envolvidos são

$$\frac{dP}{P}, \ \frac{dP_2}{P_2} \ e \ \frac{dP_1}{P_1}, \tag{12}$$

ao passo que os retornos de taxas serão

$$dr,\ dr_2 \text{ e } dr_1. \tag{13}$$

Também temos a relação entre variâncias de preço e taxa:

$$dP = -Te^{-rT}dr = -TPdr \tag{14}$$

$$\sigma_P^2 = E\left[\frac{dP}{P}\right]^2; \sigma_r^2 = E\left[dr\right]^2 \tag{15}$$

$$\therefore \sigma_P^2 = T^2\sigma_r^2. \tag{16}$$

A expansão de Taylor dos retornos de 11 é:

$$dr = dr_2\beta + dr_1\left(1-\beta\right) \tag{17}$$

Então

$$dr^2 = \beta^2 dr_2^2 + \left(1-\beta\right)^2 dr_1^2 + 2dr_1 dr_2\beta\left(1-\beta\right)$$

$$\sigma_r^2 = \beta^2\sigma_{r_2}^2 + \left(1-\beta\right)^2\sigma_{r_1}^2 + 2\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{r_2,r_1}. \tag{18}$$

Esta é a equação de variância de taxa.

Usando a conversão de taxa para preço:

$$\frac{1}{T}\frac{dP}{P} = \frac{dP_2}{P_2}\frac{1}{T_2}\beta + \frac{dP_1}{P_1}\frac{1}{T_1}\left(1-\beta\right) \tag{19}$$

$$\frac{1}{T}\frac{dP}{P} = \frac{dP_2}{P_2}\frac{1}{T_2}\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)\frac{T_2}{T} + \frac{dP_1}{P_1}\frac{1}{T_1}\left(\frac{T_2-T}{T_2-T_1}\right)\frac{T_1}{T}$$

$$\frac{1}{T}\frac{dP}{P} = \frac{dP_2}{P_2}\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right) + \frac{dP_1}{P_1}\left(\frac{T_2-T}{T_2-T_1}\right) \tag{20}$$

Assim, a variância dos retornos de preços é dada por:

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P_2}^2\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)^2 + \sigma_{P_1}^2\left(\frac{T_2-T}{T_2-T_1}\right)^2 + 2\sigma_{P_1,P_2}\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)\left(\frac{T_2-T}{T_2-T_1}\right) \tag{21}$$

Esta é a forma usual de mapeamento por *duration* no tempo. Note que, segundo 18, o uso de taxa como fator de risco leva a pesos diferentes destes.

3.2 Interpolação linear em taxa

A equação 2 pode ser reorganizada:

$$tx = \left(1 - \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right) tx_1 + \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} tx_2$$

$$tx = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} tx_1 + \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} tx_2. \tag{22}$$

O retorno de taxa expandido em Taylor é dado por:

$$dtx = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} dtx_1 + \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} dtx_2. \tag{23}$$

Seguindo a definição de variância de retornos de taxas, ao estilo de 15, $\sigma^2_{tx} = E\left[dtx\right]^2$. Então,

$$\sigma^2_{tx} = \left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right)^2 \sigma^2_{tx_1} + \left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right)^2 \sigma^2_{tx_2} + 2\left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right)\left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right) \sigma_{tx_1, tx_2}. \tag{24}$$

Vemos, portanto, que a interpolação linear na taxa leva a um mapeamento também por *duration* para variância de taxa.

Se usarmos a interpolação linear, mas adotarmos a variância de retornos de preços, podemos ver que o mapeamento não seguirá o de *duration*. Por exemplo, consideremos que a taxa desta seção advenha de uma convenção linear. Então, a relação entre retornos de preço e de taxa é:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{T}{1 + txT} dtx. \tag{25}$$

Em 23,

$$\frac{dP}{P}\frac{(1 + txT)}{T} = \left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right)\frac{(1 + tx_1T_1)}{T_1}\frac{dP_1}{P_1} + \left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right)\frac{(1 + tx_2T_2)}{T_2}\frac{dP_2}{P_2} \tag{26}$$

$$\sigma^2_P = \left[\left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right)\frac{(1 + tx_1T_1)}{T_1}\right]^2 \left(\frac{T}{1 + txT}\right)^2 \sigma^2_{P_1} \tag{27}$$

$$+ \left[\left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right)\frac{(1 + tx_2T_2)}{T_2}\right]^2 \left(\frac{T}{1 + txT}\right)^2 \sigma^2_{P_2}$$

$$+2\left[\left(\frac{T_2-T}{T_2-T_1}\right)\frac{(1+tx_1T_1)}{T_1}\right]\left[\left(\frac{T-T_1}{T_2-T_1}\right)\frac{(1+tx_2T_2)}{T_2}\right]\left(\frac{T}{1+txT}\right)^2\sigma_{P_1,P_2}.$$

Vemos que o mapeamento passa a envolver taxas e fatores não lineares de prazos.

4 Conclusão

Vimos que se a interpolação é *flat-forward*, o mapeamento linear funciona para variância de retornos de preços. Se a interpolação é linear na taxa, o mapeamento linear funciona para variância de taxa.