Rentabilidade de Títulos

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão 2: 26/04/2020

Primeira versão: 26/03/2017

1 Introdução

Neste documento apresentamos conceitos de rentabilidade de títulos: yield-to-maturity, taxa de retorno corrente e taxa de retorno total.

2 Yield-to-Maturity

Usualmente, a cotação de um título de renda fixa é divulgada ou no formato preço (P), ou através do yield-to-maturity (YTM). Como o próprio nome diz, YTM (y) é a taxa de rentabilidade até o vencimento do título. Trata-se de uma taxa única que desconta todos os n fluxos F_i de um título, cada um desembolsado em T_i:

$$P = \frac{F_1}{(1+y)^{T_1}} + ... + \frac{F_n}{(1+y)^{T_n}} \tag{1}$$

Os fluxos de um título podem ser estabelecidos de acordo com o contrato. No caso de um título de notional N, n fluxos, que paga cupons fixos C, expressa ao ano, a uma dada frequência, usualmente os fluxos são $F_i = N \times C \times freq$, $i = 1, ..., n-1$, e $F_n = N \times (1 + C \times freq)$. Se os pagamentos são semestrais, $freq = 1/2$.

A hipótese por trás do conceito de YTM é que, uma vez recebido um fluxo intermediátrio, ele é reinvestido à taxa y até o vencimento. Há juros sobre juros, portanto. Os reinvestimentos na data de vencimento são dados abaixo:

$$
\begin{array}{cc}
\textit{Fluxo} & \textit{Reinvestimento} \\
F_1 & F_1 \times (1+y)^{T_n - T_1} \\
F_2 & F_2 \times (1+y)^{T_n - T_2} \\
\vdots & \vdots \\
Fn & F_n
\end{array}
$$

Comparando os reinvestimentos com o preço pago, para obter a rentabilidade R, vemos que y é a taxa de rentabilidade:

$$R = \frac{F_1 \times (1+y)^{T_n - T_1} + F_2 \times (1+y)^{T_n - T_2} + ... + F_n}{P} =$$

$$(1+y)^{T_n} \frac{F_1 \times (1+y)^{-T_1} + F_2 \times (1+y)^{-T_2} + ... + F_n \times (1+y)^{-T_n}}{P} =$$

$$(1+y)^{T_n} \tag{2}$$

Desta forma, vemos que os riscos de se investir em um título de renda fixa compreendem (i) o risco de taxa de juros: uma vez em carteira, se quisermos vender um título, há o risco de seu YTM ter mudado; (ii) o risco de reinvestimento: não conseguirmos reinvestir os fluxos à taxa YTM. Obviamente, isso quase nunca acontece.

Por fim, note que, no caso de um título de notional 100 e que paga cupons fixos, quando a taxa YTM for superior (inferior) à taxa de cupom, o preço do título fica abaixo (acima) de 100, e diz-se do mesmo que é operado a desconto (prêmio).

2.1 Calculando o YTM a Partir do Preço

Dado o preço de um título, perguntamo-nos como achar y. Trata-se de um problema de achar raízes de (1). Isso pode ser feito numericamente, pelo método de Newton-Raphson de uma dimensão [Catalão]. Para tanto, notamos que achar a raiz $\bar{x}$ da função $f(x)$ significa obter $\bar{x}$ de tal forma que $f(\bar{x}) = 0$. Desta forma, no caso de um título, queremos achar um $\bar{y}$ tal que:

$$f(\bar{y}) \equiv P - \left(\frac{F_1}{(1+\bar{y})^{T_1}} + ... + \frac{F_n}{(1+\bar{y})^{T_n}} \right) = 0 \tag{3}$$

Ou seja, a função usada para aplicar o método é

$$f(y) = P - \left(\frac{F_1}{(1+y)^{T_1}} + ... + \frac{F_n}{(1+y)^{T_n}} \right) \tag{4}$$

e queremos achar sua raiz $\bar{y}$ de tal forma que $f(\bar{y}) = 0$.

Veja que, para usar Newton-Raphson, precisamos da derivada da função f em certos pontos determinados pelo método. A derivada em um ponto x_0 pode ser calculada, de forma geral, numericamente:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5}$$

Mas também podemos calculá-la analiticamente para um caso específico como o nosso, considerando a equação (4):

$$f^{'}(y_0) \equiv \frac{df(y_0)}{dy} = \frac{1}{1+y_0} \left(\frac{T_1 \cdot F_1}{(1+y_0)^{T_1}} + ... + \frac{T_n \cdot F_n}{(1+y_0)^{T_n}} \right) \tag{6}$$

Observação: veremos mais adiante que 6 pode ser computada com o auxílio da duration do título.

3 Exemplo

Um título que paga cupom a cada 6 meses vence daqui a 1 ano. Seu cupom semestral é de $C = 10\%$ $a.a.$ e o valor de face é de $N = 100$. Calcule o YTM para um preço de mercado de $P_{alvo} = R\$103$.

Solução: Aplicamos o método de Newton-Raphson e vemos como a função (4) se comporta em cada etapa. Começamos com yield $y_1 = 12\%$. Calculamos numericamente a derivada com relação ao yield com choque $\delta = 0,01\%$. Pararemos o método quando o erro for menor que 10^{-5}.

1. Etapa 1

- Yield inicial: 12%
- Preço Título

$$P(y) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{7}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+12\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+12\%)^{1}} = 98,4745559126153$$

- Função

$$f(y) = P_{alvo} - P(y) \tag{8}$$

$$= 103 - 98,4745559126153 = 4,52544408738467$$

- Preço Título + choque no yield

$$P(y+\delta) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{9}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+12\%+0,01\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+12\%+0,01\%)^{1}} = 98,4659752206518$$

- Função + choque no yield

$$f(y+\delta) = P_{alvo} - P(y+\delta) \tag{10}$$

$$= 103 - 98,4659752206518 = 4,53402477934819$$

- Derivada da Função

$$f^{'}(y) = \frac{df}{dy} = \frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} \tag{11}$$

$$= \frac{4,53402477934819 - 4,52544408738467}{0,01\%} = 85,8069196351607$$

- Novo Yield

$$y_2 = y_1 - \frac{f(y_1)}{f^{'}(y_1)} \tag{12}$$

$$y_2 = 12\% - \frac{4,52544408738467}{85,8069196351607} = 6,7260149803463\%$$

1. Etapa 2

- Yield inicial: $6,7260149803463\%$

- Preço Título

$$P(y) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{13}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+6,7260149803463\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+6,7260149803463\%)^{1}} = 103,222643710064$$

- Função

$$f(y) = P_{alvo} - P(y) \tag{14}$$

$$= 103 - 103,222643710064 = -0,222643710064261$$

- Preço Título + choque no yield

$$P(y+\delta) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{15}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+6,7260149803463\% + 0,01\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+6,7260149803463\% + 0,01\%)^{1}} = 103,213199591419$$

- Função + choque no yield

$$f(y+\delta) = P_{alvo} - P(y+\delta) \tag{16}$$

$$= 103 - 103,21319959141 = -0,213199591418558$$

- Derivada da Função

$$f^{'}(y) = \frac{df}{dy} = \frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} \tag{17}$$

$$= \frac{-0,213199591418558 - (-0,222643710064261)}{0,01\%} = 94,4411864570327$$

- Novo Yield

$$y_3 = y_2 - \frac{f(y_2)}{f'(y_2)} \tag{18}$$

$$y_3 = 6,7260149803463\% - \frac{-0,222643710064261}{94,4411864570327} = 6,96176351169872\%$$

1. Etapa 3

- Yield inicial: $6,96176351169872\%$
- Preço Título

$$P(y) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{19}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+6,96176351169872\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+6,96176351169872\%)^{1}} = 103,000467084259$$

- Função

$$f(y) = P_{alvo} - P(y) \tag{20}$$

$$= 103 - 103,000467084259 = -0,000467084258787054$$

- Preço Título + choque no yield

$$P(y+\delta) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1+C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{21}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1+6,96176351169872\% + 0,01\%)^{0.5}} + \frac{(1+10\%/2) \times 100}{(1+6,96176351169872\% + 0,01\%)^{1}} = 102,991064299158$$

- Função + choque no yield

$$f(y+\delta) = P_{alvo} - P(y+\delta) \tag{22}$$

$$= 103 - 102,991064299158 = 0,00893570084171813$$

- Derivada da Função

$$f^{'}(y) = \frac{df}{dy} = \frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} \tag{23}$$

$$= \frac{0,00893570084171813 - (-0,000467084258787054)}{0,01\%} = 94,0278510050518$$

- Novo Yield

$$y_4 = y_3 - \frac{f(y_3)}{f'(y_3)} \tag{24}$$

$$y_4 = 6,96176351169872\% - \frac{-0,000467084258787054}{94,0278510050518} = 6,96226026266537\%$$

1. Etapa 4

- Yield inicial: $6,96226026266537\%$

- Preço Título

$$P(y) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1 + C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{25}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1 + 6,96226026266537\%)^{0.5}} + \frac{(1 + 10\%/2) \times 100}{(1 + 6,96226026266537\%)^{1}} = 102,99999995875$$

- Função

$$f(y) = P_{alvo} - P(y) \tag{26}$$

$$= 103 - 102,99999995875 = 4,12495779755773E - 08$$

- Preço Título + choque no yield

$$P(y+\delta) = \frac{(C/2) \times N}{(1+y)^{T_1}} + \frac{(1 + C/2) \times N}{(1+y)^{T_2}} \tag{27}$$

$$= \frac{(10\%/2) \times 100}{(1 + 6,96226026266537\% + 0,01\%)^{0.5}} + \frac{(1 + 10\%/2) \times 100}{(1 + 6,96226026266537\% + 0,01\%)^{1}} = 102,990597260457$$

- Função + choque no yield

$$f(y+\delta) = P_{alvo} - P(y+\delta) \tag{28}$$

$$= 103 - 102,990597260457 = 0,00940273954279292$$

- Derivada da Função

$$f^{'}(y) = \frac{df}{dy} = \frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} \tag{29}$$

$$= \frac{0,00940273954279292 - (4,12495779755773E-08)}{0,01\%} = 94,0269829321494$$

- Novo Yield

$$y_5 = y_4 - \frac{f(y_4)}{f'(y_4)} \tag{30}$$

$$y_5 = 6,96226026266537\% - \frac{4,12495779755773E-08}{94,0269829321494} = 6,96226021879544\%$$

Dado que o erro em (26) é menor que 10^{-5}, paramos o método e o yield é $y = 6,96226021879544\%$, onde executamos uma etapa a mais.

4 Total Return

Vimos que o risco de reinvestimento afeta o uso de YTM como um parâmetro de análise de rentabilidade do investimento. Embora ainda possamos reinterpretá-lo como uma "rentabilidade média", mas que pressupõe reinvestimento à taxa constante, surge uma medida mais realista de rentabilidade, que é o total return, ou retorno total.

O retorno total consiste em fazer o exercício de reinvestir cada fluxo à taxa forward implícita pela curva de mercado. Lembremos que a taxa forward f_{ij} é a taxa spot entre dois prazos futuros T_i e T_j, $T_i < T_j$. Pode ser obtida pelo fator forward entre os prazos: $f_{ij} = f_j/f_i$

$$\begin{array}{cc} Fluxo & Reinvestimento \\ F_1 & F_1 \times f_{1n} \\ F_2 & F_2 \times f_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ Fn & F_n \end{array}$$

A rentabilidade média, em formato de retorno, é dada por:

$$R = \frac{F_1 \times f_{1n} + F_2 \times f_{2n} + ... + F_n}{P} \tag{31}$$

$$\equiv (1 + y_{TR})^{T_n}$$

Onde y_{TR} é a rentabilidade média, em formato de taxa composta do conceito total return.

5 Taxa de Retorno Corrente

É a relação entre o fluxo intermediário recebido $F_{i<n}$ e o preço pago. No caso de um título de cupons fixos:

$$R = \frac{F_{i<n}}{P} = \frac{C \times freq \times N}{P} \tag{32}$$

Referências

[Catalão] "O Método de Newton-Raphson em Uma Dimensão". Nota de Aula.