Método de Newton-Raphson

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em análise numérica, o **método de Newton** (ou **Método de Newton-Raphson**), desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson, tem o objetivo de estimar as raízes de uma função. Para isso, escolhe-se uma aproximação inicial para esta. Após isso, calcula-se a equação da reta tangente (derivada) da função nesse ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz. Repetindo-se o processo, cria-se um método iterativo para encontramos a raiz da função. Em notação matemática, o **método de Newton** é representado da seguinte forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

onde n indica a n-ésima iteração do algoritmo e $f'(x_n)$ é a derivada da função f em x_n.

Para que se obtenha sucesso na iteração, devemos respeitar a seguinte condição:

- A função f deve ser diferenciável em x_n e seu valor deve ser não nulo.

Índice

Interpretação geométrica do método de Newton

Consideremos o problema de calcular a raiz de uma função f, conforme a figura ao lado.[1][2][3][4]

Queremos calcular x_1 em função de x_0, sabendo que x_1 será a cota no eixo das abcissas interceptado pela reta tangente à curva, originada por x_0.

A equação da reta que passa por $(x_0,f(x_0))$ e é tangente à curva em $(x_0,f(x_0))$ tem inclinação $m=f'(x_0)$, é dada por:

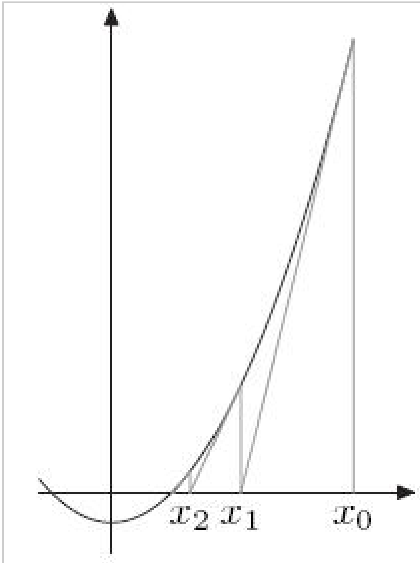
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sabendo que essa reta passa por $(x_1,0)$, temos que:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Portanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



As três primeiras iterações do método de Newton.[5]

De modo geral, teremos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Análise de convergência

Devemos ter em mente que, mesmo se a condição estabelecida na introdução for satisfeita, o **método de Newton** poderá não convergir para a raiz. Seja *f(x)* uma função e sua derivada diferente de zero, definimos aleatoriamente uma função $\phi(x)$ como:[2][3][4]

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Consideramos x^* uma aproximação da solução x de $f(x)=0$ tal que $f'(x^*)\neq 0$ e $|x - x^*|$ seja “pequeno”. Expandimos $\phi(x)$ por Série de Taylor em torno de x^* e obtemos:

$$\phi(x) = \phi(x^*) + (x - x^*)\phi'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2}\phi''(x^*) + O((x - x^*)^3)$$

Para a dedução do **método de Newton**, vamos supor que $|x - x^*|$ é pequeno, logo, o termo $(x - x^*)^2$ será muito menor. Com isso, dizemos que:

$$0 \approx \phi(x^*) + (x - x^*)\phi'(x^*)$$

Pelo processo iterativo do método do ponto fixo, sabemos que:

$$\phi(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*$$

$$\phi'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)f'(x^*) - f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 = 0$$

$$\phi''(x^*) = \frac{(f'(x^*)f''(x^*) + f(x^*)f'''(x^*))(f'(x^*))^2 - 2f(x^*)f''(x^*)f'(x^*)}{(f'(x^*))^4} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Portanto:

$$\phi(x) = x^* + (x - x^*)^2\frac{\phi''(x^*)}{2} + O((x - x^*)^3)$$

$$\phi(x) \approx x^* + (x - x^*)^2 \frac{\phi''(x^*)}{2}$$

Logo:

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

$$x^* + (x_n - x^*)^2 \frac{\phi''(x^*)}{2}$$

$$(x_{n+1} - x^*) \approx (x_n - x^*)^2 \frac{\phi''(x^*)}{2}$$

Considerando (x_n - x^*) o erro absoluto, obtemos:

$$\epsilon_{n+1} \approx \epsilon_n^2 \frac{\phi''(x^*)}{2} = \frac{1}{2} | \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} | \epsilon_n^2$$

Com isso, observamos que o erro (ϵ_n) é de ordem quadrática e, por isso, a iteração convergirá rapidamente para a raiz da função.

Generalização do método de Newton

Percebemos que o **método de Newton** é uma poderosa ferramenta para resolvermos equações de uma variável (*f(x)=0*). Esse método, contudo, pode ser utilizado em problemas mais complexos, como na solução de equações do tipo *Ax=b*, em que *x* e *b* são vetores e *A* é uma matriz. Queremos, portanto, generalizar o **método de Newton** para resolvermos um sistema de equações da forma:[2][3][4][6]

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Podemos analisar esse sistema de equações na forma vetorial, definindo o vetor *F(x)* tal que:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o problema de uma variável (*f(x)=0*), nós expandíamos a função *f(x)* em torno de x^* por sua Série de Taylor, de modo a obtermos:

$$f(x) \approx f(x^*) + (x - x^*)f'(x^*),$$

sendo x^* uma aproximação para a solução de *f(x)=0* . De modo equivalente, o problema matricial se resume a resolver a equação *F(x)=0*, e devemos expandir a função *F(x)* em torno de x^*, sendo x^* uma aproximação para a solução de *F(x)=0*. Efetuando-se essa expansão, obteremos:

$$F(x) \approx F(x^*) + (x - x^*)F'(x^*)$$

Portanto, será necessário definirmos a derivada de *F(x)*. Definimos, então, a Matriz Jacobiana por:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

E percebemos que a Matriz Jacobiana, ou o Jacobiano do vetor *F(x)*, é a matriz formada pelas derivadas parciais das componentes de *F(x)*:

$$F'(x) = (J_F)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Logo, podemos reescrever a expansão por Série de Taylor de *F(x)* como $F(x) \approx F(x^*) + (x - x^*)J_F(x^*)$. Também de acordo com o problema de uma variável, tínhamos que o **método de Newton** era dado pela iteração:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Consequentemente, em problemas envolvendo sistemas de equações, teremos que o **método de Newton** será dado pela iteração:[6]

$$x_{n+1} = x_n - J_F^{-1}(x_n)F(x_n)$$

Exemplos

1. Neste exemplo,[5] mostraremos porque a função *f* deve ser diferenciável em x_n, para a satisfazer a condição inicial. Considere a função *f(x)=|x-3|-1*. Essa função possui uma cúspide em (*3,-1*); portanto, *f* não é diferenciável nesse ponto. Analisando o gráfico dessa função, percebemos que *x=2* e *x=4* são suas raízes. Caso iniciemos o **método de Newton** com $x_0=3$, o processo iterativo falhará porque a derivada de *f* em *x=3* não é definida.
2. Neste exemplo,[5] mostraremos porque a função *f* deve ter derivada não nula em x_n. Considere a função $f(x)=x^2-1$. Essa função possui uma reta tangente horizontal em (*0,-1*); portanto, a derivada de *f* nesse ponto é nula. Como a reta tangente é horizontal, logo ela nunca interceptará o eixo das abcissas e, assim, o **método de Newton** falhará, pois ocorrerá uma indeterminação matemática (divisão por zero).

3. Neste exemplo,[5] mostraremos que mesmo escolhendo-se uma aproximação x_0 distante da real raiz da função *f*, o **método de Newton** ainda assim poderá convergirá rapidamente para a solução de $f(x)=0$. Considere a função $f(x)=sen(x)$. Se arbitrarmos $x_0=10,85\ rad$, valor relativamente distante da primeira raiz, $x=\pi\ rad$, o método convergirá para essa raiz rapidamente.

Isso mostra que a primeira aproximação da raiz não necessita ser um valor próximo dela. Existe casos em que essa aproximação é distante da raiz e mesmo assim o método converge, conforme mostrado no exemplo acima.

Considerações sobre o método

O método de Newton é considerado por muitos autores o melhor método para encontrar sucessivas melhores aproximações de raízes (ou zeros) de uma determinada função real e, portanto, tem sido estudado e utilizado em diversos ramos da ciência (Matemática, Física, Engenharia), sendo também muito utilizado na resolução de sistemas não lineares. Além disso, esse método tem sido alvo de novos estudos e aprimoramentos. Em 1984, Allan J. Macleod mostrou, num artigo da International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, que o método iterativo de Newton-Raphson para equações não lineares pode ser considerado um membro da família geral de um parâmetro de métodos de segunda ordem.[7]

Um ponto importante a ser observado diz respeito a praticidade do método de Newton. Caso a função *f* seja complicada, encontrar sua derivada pode ser muito trabalhoso e o método torna-se improdutivo. Nesses casos, o método das secantes é mais produtivo de ser utilizado, porque não exige que a derivada de *f* seja conhecida.

Referências

1. Howard Anton; Irl Bivens, Stephen Davis. Cálculo Volume 1. [S.l.]: Editora Bookman, 8° ediçao
2. Richard L. Burden; J. Douglas Faires. Análise Numérica. [S.l.]: Editora CENGAGE Learning, 8° ediçao
3. Borche, Alejandro. Métodos Numéricos. [S.l.]: Editora Ed. da UFRGS
4. Ruggiero, M; Lopes, V. Cálculo Númerico - Aspectos Teóricos e Computacionais. [S.l.]: Editora Pearson
5. «Construção geométrica do Método de Newton-Raphson» (http://omonitor.io/?q=geometriadometododenewton). *omonitor.io*. Consultado em 22 de março de 2016
6. «Método de Newton» (http://omonitor.io/?q=newtonsistemas+2). *omonitor.io*. Consultado em 22 de março de 2016
7. A.J. Macleod. «"A generalization of Newton-Raphson"» (http://www.informaworld.com/smpp/content~content=a746858577&db=all) (em inglês). Int. J. Math. Ed. Sci. Tech., v.15, n.1 January 1984, pages 117-120

Ligações externas

- Roots of a function - Rosetta Code (http://rosettacode.org/wiki/Roots_of_a_function) - implementações em diversas linguagens de programação
- Cálculo Numérico - Um Livro Colaborativo (https://www.ufrgs.br/numerico/livro/sdeduv-metodo_de_newton-raphson.html) - seção sobre o método de Newton para resolver equações algébricas no livro de Cálculo Numérico mantido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Cálculo Numérico - Um Livro Colaborativo (https://www.ufrgs.br/numerico/livro/sdsdenl-metodo_de_newton_para_sistemas.html) - seção sobre o método de Newton para resolver sistemas de equações algébricas no livro de Cálculo Numérico mantido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Obtida de "https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Método_de_Newton-Raphson&oldid=48341039"

Categorias: Análise numérica | Algoritmos

- Esta página foi modificada pela última vez à(s) 13h38min de 22 de março de 2017.
- Este texto é disponibilizado nos termos da licença Creative Commons - Atribuição - Compartilha Igual 3.0 Não Adaptada (CC BY-SA 3.0); pode estar sujeito a condições adicionais. Para mais detalhes, consulte as condições de uso.