

# Método de Bootstrap de Construção de Curvas

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão 2: 05/04/2020

Primeira versão: 20/03/2017

## 1 Introdução

Neste documento apresentamos o método de construção de curvas zero-coupon por bootstrap, a partir de *yields* de títulos com fluxos de caixa. Como o método original carece idealmente de títulos com quantidades de fluxos de pagamentos variando de um em um, a partir de um, discutimos adicionalmente como proceder se essa condição não for satisfeita.

## 2 Metodologia

A metodologia de bootstrap, na sua forma mais didática, envolve um conjunto de títulos  $\{B_i\}_{i=1..n}$ , onde o título  $i$  possui  $i$  fluxos remanescentes e nas datas  $T_j$

paga fluxos  $F_{ij}$  ( $j \leq i$ ), que são descontados por *yields*  $y_i$ , cada uma associada ao preço  $P_i$ . Através de  $n$  passos, a metodologia permite obter  $n$  taxas zero-coupon de desconto, preservando os preços dos títulos. O primeiro título é, na verdade, zero-coupon, então seu *yield* representa a primeira taxa zero,  $tx_1$ , da curva zero-coupon que queremos construir  $\{tx_i, T_i\}_{i=1, \dots, n}$ . Os títulos subsequentes usam as taxas obtidas nos passos anteriores, substituindo-as nos descontos de seus fluxos de caixa, de forma que sempre sobra uma taxa zero a ser descoberta, referente ao último fluxo do título da vez, mas que pode ser calculada porque o preço é conservado. A seguir, apresentamos esquematicamente a metodologia:

- Passo 1:  $P_1 = \frac{1}{(1+y_1)^{T_1}} \rightarrow tx_1 = y_1 \rightarrow$
- Passo 2:  $P_2 = \frac{1}{(1+y_2)^{T_1}} + \frac{1}{(1+y_2)^{T_2}} = \frac{1}{(1+tx_1)^{T_1}} + \frac{1}{(1+tx_2)^{T_2}} \rightarrow tx_2 \rightarrow$
- ... Passo  $n$ :  $P_n = \frac{1}{(1+y_n)^{T_1}} + \dots + \frac{1}{(1+y_n)^{T_n}} = \frac{1}{(1+tx_1)^{T_1}} + \frac{1}{(1+tx_2)^{T_2}} + \dots + \frac{1}{(1+tx_n)^{T_n}} \rightarrow tx_n$

Se não há casamento de fluxos de caixa, mas ainda assim há títulos em quantidade suficiente para realizar o método, pode-se assumir a constância de *forwards* entre fluxos.

Se o título mais curto tiver mais que um fluxo de caixa, pode-se deixar a curva *flat* no valor do *yield* do primeiro título. Alternativamente, pode-se adotar para a parte inicial em que há carência de taxas para completar o método, taxas de outro mercado equivalente, como de swaps. Neste caso, pode-se ainda adicionar um spread, de acordo com a dinâmica entre o mercado de swaps e o de títulos.

Se nos passos seguintes houver descasamento ou falta de fluxos, a taxa *forward* entre fluxos de caixa pode ser mantida constante, de forma que a nova taxa zero é obtida a partir da zero anterior, com o *accrual* da *forward* ( $f$ ):

$$(1 + tx_i)^{T_i} = (1 + tx_{i-1})^{T_{i-1}} (1 + f_{i-1,i})^{T_i - T_{i-1}} \quad (1)$$

### 3 Exemplo

A tabela abaixo apresenta dados de três títulos, que pagam fluxos com frequência anual. Aplique o procedimento de bootstrapping para obter os três pontos de uma curva zero-coupon.

Notional	título	Cupom (aa)	yield(aa)	T(anos)	Valor presente dos Fluxos			preço
					Fluxo1	Fluxo2	Fluxo3	
100	1	6%	8%	1	98,14815			98,14815
100	2	5%	12%	2	4,464286	83,70536		88,16964
100	3	7%	15%	3	6,086957	5,293006	70,35424	81,7342

Figura 1: Tabela com dados para bootstrap.

- Passo 1. O primeiro título é zero-coupon. Portanto, sua TIR é usada diretamente para a curva  $tx_1 \equiv y_1 = 8\%$
- Passo 2.

$$tx_2 = \left\{ \left[ P_2 - \frac{100 \times C_2}{(1 + tx_1)^{T_1}} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + C_2)} \right\}^{-1/T_2} - 1$$

$$= \left\{ \left[ 88,16964 - \frac{5}{(1 + 8\%)^1} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + 5\%)} \right\}^{-1/2} - 1 = 12,11\%$$

- Passo 3.

$$tx_3 = \left\{ \left[ P_3 - \frac{100 \times C_3}{(1 + tx_1)^{T_1}} - \frac{100 \times C_3}{(1 + tx_2)^{T_2}} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + C_3)} \right\}^{-1/T_3} - 1$$

$$= \left\{ \left[ 81,7342 - \frac{7}{(1 + 8\%)^1} - \frac{7}{(1 + 12,11\%)^2} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + 7\%)} \right\}^{-1/3} - 1 = 15,37\%$$

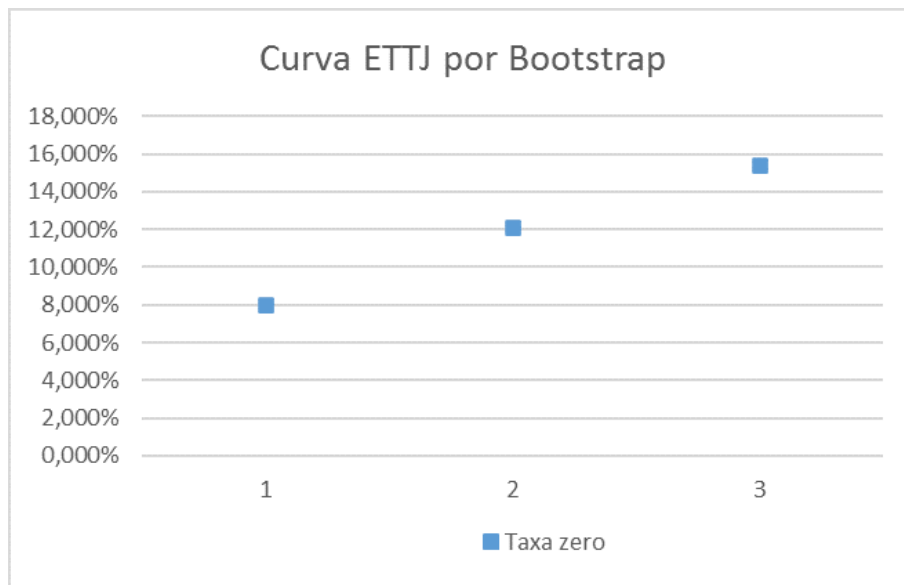


Figura 2: ETTJ a partir de Bootstrap