Estrutura a Termo das Taxas de Juros

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Catalão

Versão 2: 05/04/2020

Objetivos

- Definições e conversão entre convenções de taxas;
- Algumas teorias explicativas da formação da curva de juros, baseadas em expectativas;
- Construção de curvas no mercado brasileiro, de acordo com diferentes instrumentos;
  - Caso da curva pré;
  - Instrumentos usados na construção: títulos, swaps e futuros;
  - Exemplo;

Definições

- Taxa spot (para um certo prazo T):
  - Taxa válida da data de hoje ao prazo T.
  - Refere-se a instrumentos que não pagam cupons (“zero-coupon”);
  - Também chamadas taxas “zero-coupon”;
  - Tipicamente, são as taxas que especificam uma curva;
- Estrutura a termo de taxas de juros:
  - Conjunto de pares prazo/taxa: $\{T_i; tx_i\}$;
  - Convenção específica de divulgação de taxas

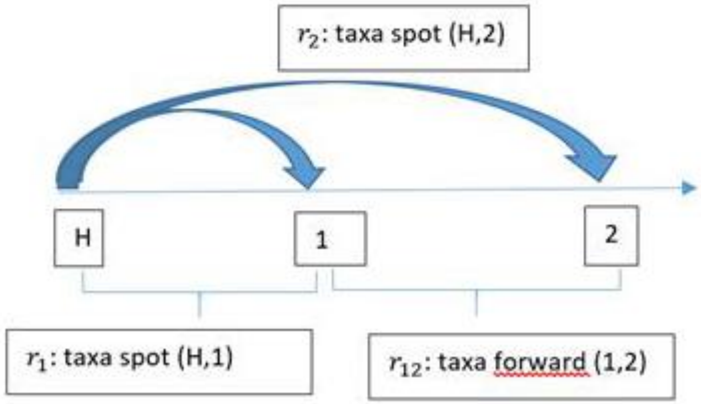
Convenções de taxas

- Relação entre taxas é obtida igualando-se fatores.
  - Taxa contínua (r) / taxa exponencial (tx) / linear (l)

$$e^{rT} = (1 + tx)^T = (1 + l \cdot T)$$

Definições

- Taxa forward:
  - Taxa embutida entre dois prazos;
  - $f_2 = f_1 \times f_{12}$
    - Em taxa contínua: $e^{r_2 T_2} = e^{r_1 T_1} e^{r_{12} T_{12}} = e^{r_1 T_1 + r_{12} T_{12}}$
      - $e^a = e^b \rightarrow a = b$
      - $r_2 T_2 = r_1 T_1 + r_{12} T_{12}$



- Taxa yield:
  - Taxa de rendimento de um título que paga cupons;
  - Pressupõe reinvestimentos à esta mesma taxa.

$$P_n = \frac{F_1}{(1+y)^{T_1}} + \frac{F_2}{(1+y)^{T_2}} + \cdots + \frac{F_n}{(1+y)^{T_n}}$$

Formação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros

- Teorias baseadas em expectativas
  - Assumem que as taxas de juros são basicamente formadas por expectativas dos participantes do mercado sobre as taxas futuras;
    - Hipótese de Expectativas Puras (Lutz);
    - Teoria por preferência por Liquidez (Keynes);
    - Teoria do Habitat Preferido (Modigliani e Sutch);

Hipótese de Expectativas Puras

- As taxas Forward são expectativas da taxa spot numa data futura;
- O retorno esperado ao se investir por um prazo é igual a investir seguidamente em prazos menores que totalizam aquele prazo;
    - Por exemplo, investir em um título de 5 anos seria o mesmo que investir por 5 anos em um de vencimento 12, que acaba com 7, após os 5 anos passarem;
    - Isto faz com que a taxa de um prazo seja a média das taxas intermediárias:

$$e^{r_{i,j}\cdot(T_j - T_i)} = e^{r_{i,(i+1)}\cdot(T_{i+1}-T_i)} e^{r_{(i+1),(i+2)}\cdot(T_{i+2}-T_{i+1})} \dots e^{r_{(j-1),(j-2)}\cdot(T_{j-1}-T_{j-2})} e^{r_{(j-1),j}\cdot(T_j - T_{j-1})} =$$

$$\prod_{k=i}^{j} e^{r_{k,(k+1)}\cdot(T_{k+1}-T_k)} \quad \Rightarrow \quad r_{i,j} = \frac{1}{(T_j - T_i)} \sum_{k=i}^{j} r_{k,(k+1)} \cdot (T_{k+1} - T_k)$$

Hipótese de Expectativas Puras

- Problemas:
  - Não necessariamente a taxa esperada hoje ocorrerá de fato;
  - Desconsidera elementos formadores de taxas, como inflação e dívida.

Preferência por Liquidez

- Manter um título em carteira por um longo período é mais arriscado que por um curto prazo;
  - Os investidores aceitam, se houver um prêmio de risco;
  - As taxas podem subir ou descer ao longo da curva, mas um prêmio de risco de liquidez crescente com o prazo é adicionado, de forma a alterar o formato;
  - Este prêmio pode não ser suficientemente alto para gerar uma curva positivamente inclinada;

Teoria do Habitat Preferido

- Extensão da Teoria de Segmentação de Mercado (TSM);
  - TSM: participantes investem em setores da curva motivados por sua estrutura e caixa. Um participante com passivo com certo vencimento pode demandar empréstimo para pagar esta obrigação;
  - A teoria do Habitat Preferido (THP) reconhece essa característica, mas acrescenta que participantes podem simplesmente reconhecer um desequilíbrio na curva e migrar suas preferências, para aproveitar oportunidade de lucro.

Construção de Curvas

- Instrumentos:
  - Usualmente utilizam-se: títulos (públicos, privados), taxas de swaps e futuros;
  - Diferentes indexações em instrumentos: inflação, TJLP, cupom cambial, TR, etc.
- Seleção de instrumentos de acordo com o tipo de mercado;
  - Alguns balizadores:
    - Curvas por setores: privado (corporate) ou governamental (sovereign);
    - Perfil de crédito implícito no instrumento: curvas por ratings;
    - Custos: impostos;
- Embora possamos falar em vários tipos de curvas (índices, taxas forward, etc.), vamos discutir a construção de curva de taxas spot;
- Descrevemos a metodologia através da aplicação da construção de curva de taxas pré-fixadas, a "curva pré".

Construção usando títulos: Bootstrap

- Se os títulos têm um fluxo (zero coupon), como as LTNs, a taxa é spot;
  - Se a divulgação é por PU, é só inverter a fórmula;
- Se os títulos pagam cupons intermediários (por exemplo, NTN-F):
  - Divulgação de yield-to-maturity (YTM);
  - Curva final, em spot rates, é obtida por bootstrap:

    - Passo 1: $P_1 = \frac{1}{(1+y_1)^{T_1}} \rightarrow tx_1 = y_1 \rightarrow$
    - Passo 2: $P_2 = \frac{1}{(1+y_2)^{T_1}} + \frac{1}{(1+y_2)^{T_2}} = \frac{1}{(1+tx_1)^{T_1}} + \frac{1}{(1+tx_2)^{T_2}} \rightarrow tx_2 \rightarrow$
    - ... Passo n: $P_n = \frac{1}{(1+y_n)^{T_1}} + \ldots + \frac{1}{(1+y_n)^{T_n}} = \frac{1}{(1+tx_1)^{T_1}} + \frac{1}{(1+tx_2)^{T_2}} + \cdots + \frac{1}{(1+tx_n)^{T_n}} \rightarrow tx_n$

- O método tradicional pressupõe um conjunto suficientemente completo de bonds, cada um contribuindo com uma taxa para a curva final;
- Importante: note que os preços dos títulos participantes do Bootstrap são preservados.

Exemplo

					Valor presente dos Fluxos			preço
Notional	título	Cupom (aa)	yield(aa)	T(anos)	Fluxo1	Fluxo2	Fluxo3	
100	1	6%	8%	1	98,14815			98,14815
100	2	5%	12%	2	4,464286	83,70536		88,16964
100	3	7%	15%	3	6,086957	5,293006	70,35424	81,7342

- Passo 1. O primeiro título é zero-coupon. Portanto, sua TIR é usada diretamente para a curva $tx_1 \equiv y_1 = 8\%$
- Passo 2.

$$tx_2 = \left\{ \left[P_2 - \frac{100 \times C_2}{(1 + tx_1)^{T_1}} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + C_2)} \right\}^{-1/T_2} - 1$$

$$= \left\{ \left[88,16964 - \frac{5}{(1 + 8\%)^1} \right] \times \frac{1}{100 \times (1 + 5\%)} \right\}^{-1/2} - 1 = 12,11\%$$

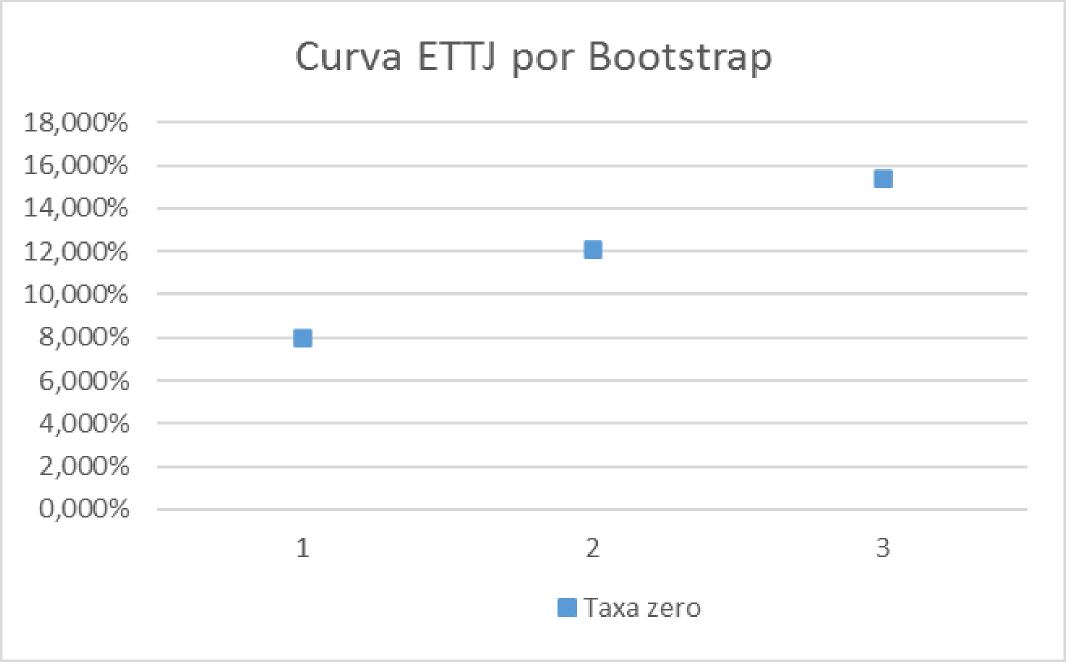
Exemplo

- Passo 3.

$$tx_3 = \left\{ \left[P_3 - \frac{100 \times C_3}{(1+tx_1)^{T_1}} - \frac{100 \times C_3}{(1+tx_2)^{T_2}} \right] \times \frac{1}{100 \times (1+C_3)} \right\}^{-1/T_3} - 1$$

$$= \left\{ \left[81,7342 - \frac{7}{(1+8\%)^1} - \frac{7}{(1+12,11\%)^2} \right] \times \frac{1}{100 \times (1+7\%)} \right\}^{-1/3} -1 = 15,37\%$$

Exemplo


Curva ETTJ por Bootstrap
18,000%
16,000%
14,000%
12,000%
10,000%
8,000%
6,000%
4,000%
2,000%
0,000%
1
2
3
Taxa zero

Construção usando títulos: observação

- As NTN-F’s e LTN’s seriam os títulos com coupom e zero coupons, respectivamente, adequados para se construir uma curva pré-fixada com risco governamental;
- Uma curva do setor corporativo seria construída a partir de emissões de debêntures, onde usualmente ainda há divisão por ratings, setor da indústria, etc. Falaríamos de curvas pré corporativas;
- Curvas pré do setor interbancário são usualmente formadas no mercado de swaps e futuros.

Construção pelo mercado de Swaps Pré x CDI

- Swap pré-cdi:
  - Agente A deve para B uma remuneração à taxa pre-fixada sobre um principal no início da operação;
  - B deve a A uma remuneração à taxa pós-fixada do CDI overnight, a priori desconhecida;
- A divulgação de taxas de swap referem-se à operações de diversos prazos, mas que estariam começando no dia da divulgação. Então, pode-se falar de uma curva de taxas spot de swap, uma vez que usualmente os swaps não têm fluxos intermediários (na BM&F);
- Tal curva pressupõe igualdade entre as pontas, na data da operação;
- Isto faz com que a taxa da operação nesta divulgação represente a taxa da curva pré. De fato,

Taxas de Swaps Pré-CDI

$$MtM_{swap}(t_{operação}) = MtM_{pré}(t_{operação}) - MtM_{CDI}(t_{operação})$$

$$MtM_{swap}(t_{operação}) = \frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré})^T} - \frac{N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i^{projetado})^{1/252}}{(1 + tx_{pré})^T}$$

$$MtM_{pré}(t_{operação}) \equiv MtM_{CDI}(t_{operação})$$

Fair value

Teoria de expectativas puras !

$$\frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré})^T} \equiv \frac{N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i^{projetado})^{1/252}}{(1 + tx_{pré})^T} = \frac{N \cdot (1 + tx_{pré})^T}{(1 + tx_{pré})^T} = N$$

Futuro de DI

- DI, ou depósitos interfinanceiros, é um contrato que retrata o preço, ou preço unitário (PU), de um fluxo de R$100.000,00 em um prazo T;
- A relação entre o preço unitário e a taxa pré é dada por:

$$PU_T = \frac{100.000}{\left(1 + tx_{pré}\right)^T}$$

- Pergunta: construir uma curva pré bancária usando DI's é equivalente à construção empregando swaps?
- A resposta é que, teoricamente, sim. Diferenças podem advir de atritos de mercado, como falta de liquidez em algum mercado;
- Supondo condições ideais, podemos verificar:

Futuro de DI X Swap Pré-CDI

- P&L, no vencimento, de uma operação de DI:

$$P\&L(T) = Q \cdot 100.000 - \overbrace{\frac{Q \cdot 100.000}{(1 + tx_{pré}(t_{operação}))^T}}^{\text{Valor de R\$100K operado}} \cdot \overbrace{\prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}}^{\text{Carregamento ao vencimento}}$$

- Substituindo R$100.000,00 em termos dos dados formados no instante da operação:
  $R\$100.000{,}00 = \ (1 + tx_{operação})^T . PU_T(t_{operação})$

$$P\&L(T) = Q \cdot R\$100.000 - \frac{Q \cdot PU_T(t_{operação}) \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré}(t_{operação}))^T} \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

- $Q \cdot PU$ faz as vezes de um notional N de um swap

$$P\&L(T) = N \cdot (1 + tx_{operação})^T - \frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré}(t_{operação}))^T} \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

Futuro de DI X Swap Pré-CDI

- Supondo que $tx_{operação} = tx_{pré}(t_{operação})$, ou seja, se a taxa operada foi a taxa pré de marcação do dia da operação:

$$P\&L(T) = N \cdot (1 + tx_{operação})^T - N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

- Trazendo o P&L do vencimento para uma data t qualquer:

$$\frac{1}{(1 + tx_{pré}(t))^{T-t}} P\&L(t,T) = \frac{1}{(1 + tx_{pré}(t))^{T-t}} \left[N \cdot (1 + tx_{operação})^T - N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252} \right]$$

que é o MtM de um Swap.