

# Derivativos de Renda Fixa

## Parte 2: Swaps

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Catalão

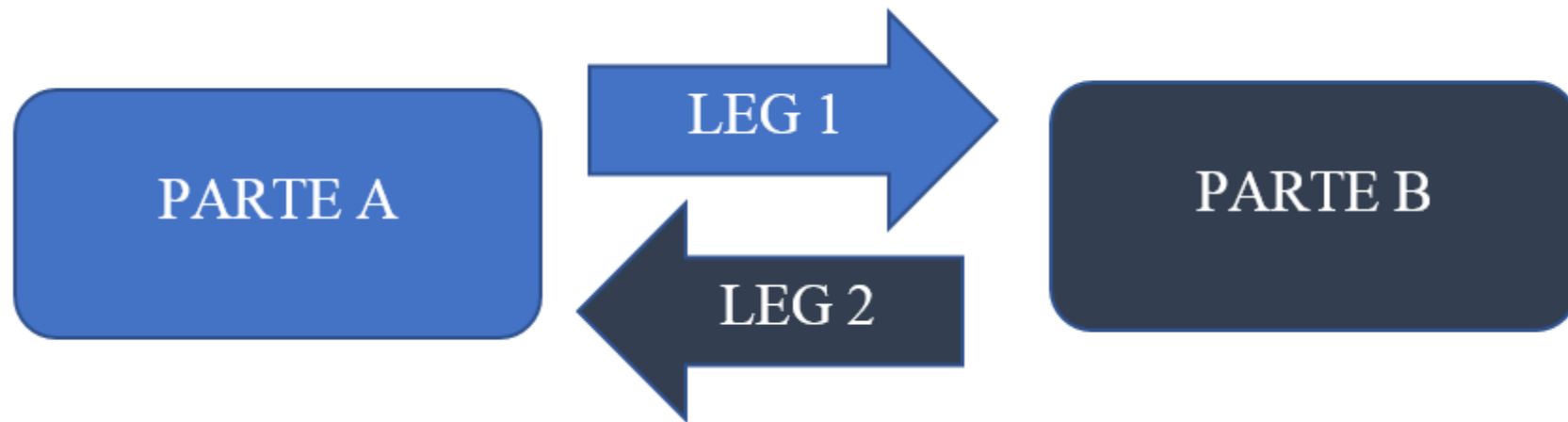
22/03/2020

# Objetivos

- Definição
- Características de negociação;
- Forma geral de construção de um fluxo e apreçamento;
- Especialização para os casos:
  - Pré;
  - CDI;
  - Dólar;
  - Inflação;
  - Ações / Índice;
- Equivalência com o mercado de futuros.

# Definição

- Instrumento derivativo em que os agentes trocam (daí o termo swap) fluxos de caixa em datas pré-acordadas. Num caso simples, na data de vencimento;
- O lado tomado por um investidor é chamado de ponta ou perna (*leg*);
- São contratos de balcão (OTC), mas padronizações são comuns (ISDA);



# Características

- Legs podem envolver juros, moedas, ações, índices, inflação, crédito, commodities, etc.;
- Legs comuns no Brasil são: pré; cdi; moedas (dólar, euro); inflação; ações e índice de bolsa; commodity (ouro);
- Permitem a troca de riscos para o agente;
  - Exemplo: Imagine um investidor que tenha vendido (taxa) um contrato de DI1, imaginando que a taxa iria cair, mas resolve trocar o risco, numa operação de swap, ao achar que a taxa de juros passaria a subir: este investidor recebe CDI e entrega Pré para a contraparte neste swap.
- Um swap justo tem equilíbrio entre as *legs* na data de início, ou seja, o MtM das mesmas são iguais. No caso de um swap não justo, há um ajuste de fluxos pela diferença daquele que deve a ponta de maior marcação para o de menor.

# Forma geral de formação de uma *leg* de swap e apreçamento

- A formação de uma *leg* em geral envolve a variação de um indexador (entre a data inicial,  $t_0$ , e a de vencimento,  $t_V$ ), que pode receber um *spread*, e um cupom;

$$Leg(t_0, t_V) = \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

- O MtM é obtido pelo desconto pela taxa pré (que também pode receber um spread)

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{Leg(t_0, t_V)}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

# Utilizando a relação do Futuro para o MtM

- Podemos fazer uso da equação do preço de um futuro na equação do MtM do swap

$$I(t_V) = I(t) \times \frac{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + y(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + y(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

# Leg Pré

- Taxa fixa  $c(t_0, t_V)$

$$Leg(t_V) = (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

# Exemplo

Em 02/01/2020 um investidor opera R\$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta pré em 01/06/2020. A taxa negociada foi de 4% a.a. Em 26/02/2020, a taxa pré de mercado para este vencimento é de 3,5% a.a. Calcule o MtM desta *leg*.

$$du(t_0, t_V) = 102$$

$$du(t, t_V) = 65$$

$$MtM_{pré}(t) = R\$1.000.000,00 \times \frac{(1 + 4\%)^{102/252}}{(1 + 3,5\%)^{65/252}} = 1.007.026,24$$



# Leg CDI

- Sem spread

$$Leg(t_0, t_V) = \prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

- Spread multiplicativo

$$Leg\alpha_m(t_0, t_V) = \prod_{i=0}^{t_V} \left\{ \left[ (1 + cdi_i)^{1/252} - 1 \right] \times \frac{\alpha_m}{100} + 1 \right\}$$

- Spread aditivo

$$Leg\alpha_a(t_0, t_V) = \left[ \prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252} \right] \times \left( 1 + \frac{\alpha_a}{100} \right)^{T(t_0, t_V)}$$

# Leg CDI

- Composição de índice
  - A parte futura da série de acumulação do CDI não é conhecida. Dividimos, portanto, a acumulação na parte passada e futura;
- Sem spread

$$Leg(t_0, t_V) = \left[ \prod_{i=0}^t (1 + cdi_i)^{1/252} \right] (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}$$

# Leg CDI

- Com spread multiplicativo

$$\begin{aligned} Leg\alpha_m(t_0, t_V) = & \left( \prod_{i=0}^t \left\{ \left[ (1 + cdi_i)^{1/252} - 1 \right] \times \frac{\alpha_m}{100} + 1 \right\} \right) \\ & \times \left( \left\{ \left[ (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{1/252} - 1 \right] \times \frac{\alpha_m}{100} + 1 \right\}^{du(t, t_V)} \right) \end{aligned}$$

# Leg CDI

- Com spread aditivo

$$Leg\alpha_a(t_0, t_V) = \left[ \prod_{i=0}^t (1 + cdi_i)^{1/252} \right] \times (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)} \times \left( 1 + \frac{\alpha_a}{100} \right)^{T(t_0, t_V)}$$

# Leg CDI

- MtM: desconto sem spread. Se reduz à acumulação até a data  $t$ .

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{Leg(t_0, t_V)}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

$$= \frac{\left[ \prod_{i=0}^t (1 + cdi_i)^{1/252} \right] (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

$$= \left[ \prod_{i=0}^t (1 + cdi_i)^{1/252} \right].$$

# Leg CDI

- MtM: caso de spread multiplicativo

$$MtM_{Leg\alpha_m}(t, t_V) = \frac{Leg\alpha_m(t_0, t_V)}{\left( \left\{ \left[ (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{1/252} - 1 \right] \times \frac{\alpha_m^{MKT}(t_V)}{100} + 1 \right\}^{du(t, t_V)} \right)}$$

- MtM: desconto com spread aditivo

$$MtM_{Leg\alpha_a}(t, t_V) = \frac{Leg\alpha_a(t_0, t_V)}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)} \times \left( 1 + \frac{\alpha_a^{MKT}(t_V)}{100} \right)^{T(t, t_V)}}$$

# Equivalência entre Swap Pré X CDI e contrato DI1

- DI1:

- PU em  $t_0$

$$Fin(t_0) = Q \times \frac{100.000}{(1 + tx_{pré}(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}} \equiv Q \times PU(t_0, t_V)$$

- P&L

$$P\&L(t, t_V) = Q \times (100.000 - PU(t_0, t_V) \times fcdi(t_0, t_V))$$

$$fcdi(t_0, t_V) = \prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

# Equivalência entre Swap Pré X CDI e contrato DI1

- Swap Pré X CDI com Notional de forma a se equiparar a um DI1

$$Q \times 100.000 \equiv N \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

- Para a Leg CDI,

$$P\&L(t_0, t_V) = N \times \left[ (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} - fcdi(t_0, t_V) \right]$$

- Daí temos a equivalência entre o P&L do swap e o do DI1

$$P\&L(t_0, t_V) = Q \times (100.000 - PU(t_0, t_V) \times fcdi(t_0, t_V))$$



# Exemplo

Em 02/01/2020 um investidor opera R\$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta CDI em 01/06/2020. O spread multiplicativo negociado foi de 110%. Em 26/02/2020, a taxa pré de mercado para este vencimento é de 3,5% a.a. Calcule o MtM desta *leg*.

$$du(t, t_V) = 65$$

Fator cdi passado

$$\prod_{t_0}^t \left\{ \left[ (1 + cdi_i)^{1/252} - 1 \right] \times \alpha + 1 \right\} = f_{cdi}(t_0, t) = 1,006852300$$

Fator pré para estimar o índice cdi acumulado futuro

$$\left\{ \left[ (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{1/252} - 1 \right] \times \alpha + 1 \right\}^{DU(t, t_V)} = f_{pré, \alpha}(t, t_V)$$

$$= \left\{ \left[ (1 + 3,5\%)^{1/252} - 1 \right] \times \frac{110}{100} + 1 \right\}^{65} = 1,00980845$$

# Exemplo

Fator pré de desconto

$$\begin{aligned} f_{pré}(t, t_V) &= (1 + tx_{pré}(t, t_V))^{du(t, t_V)/252} \\ &= (1 + 3,5\%)^{65/252} = 1,00891287 \end{aligned}$$

MtM da *leg*

$$\begin{aligned} MtM_{CDI}(t) &= N \times \frac{f_{cdi}(t_0, t) \times f_{pré, \alpha}(t, t_V)}{f_{pré}(t, t_V)} \\ &= 1.000.000 \times \frac{1,006852300 \times 1,00980845}{1,00891287} \\ &= 1.007.746,05 \end{aligned}$$

# Leg Dólar

- Variação cambial + cupom cambial
  - aqui, usamos o dólar à vista e cupom limpo;
  - Alternativamente, poderíamos usar ptax800 e cupom sujo;

$$Leg_{DOL}(t_0, t_V) = \frac{S(t_V)}{S(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

- MtM em termos da cotação futura de dólar e desconto pela pré

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{S(t_V)}{S(t_0)} \times \frac{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

# Leg Dólar

- Utilizando a equação do preço do futuro de dólar

$$S(t_V) = S(t) \times \frac{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + tx_{cupom}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

- Obtemos o MtM em termos do desconto por cupom de mercado

$$MtM_{Leg}(t, t_V) = \frac{S(t)}{S(t_0)} \times \frac{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + tx_{cupom}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

# Equivalência entre Swap DOL X CDI e contrato DDI

- Quantidade paga pelo contrato de DDI no vencimento (em dólares)

$$Fin_{CTO}(t_V) = Q \times 0,5 \times 100.000$$

- Que é apurado contra o PU da operação (em dólares)

$$Fin(t_0) = Q \times 0,5 \times PU(t_0, t_V)$$

- Levando ao P&L acumulado em reais

$$P\&L_{DDI}(t_0, t_V) = Q \times 0,5 \times [100.000 - PU(t_0, t_V) \times f_{cupom}(t_0, t_V)] \times S(t_V)$$

# Equivalência entre Swap DOL X CDI e contrato DDI

- Lembre a relação que permite calcular o fator de cupom acumulado

$$f_{cupom}(t_0, t_V) = \prod_{i=1}^{t_V} \frac{(1 + cdi_i)^{1/252}}{\frac{S_i}{S_{i-1}}} = \frac{\prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252}}{\frac{S_{t_V}}{S_0}} = \frac{f_{CDI}(t_0, t_V)}{\frac{S_{t_V}}{S_0}}$$

- Então, o P&L do DDI pode ser escrito como

$$P\&L_{DDI}(t_0, t_V) = Q \times 0,5 \times 100.000 \times S(t_V) - Q \times 0,5 \times PU(t_0, t_V) \times S_0 \times f_{CDI}(t_0, t_V)$$

# Equivalência entre Swap DOL X CDI e contrato DDI

- Leg DOL de um Swap DOL X CDI que se equipara ao que um DDI paga no vencimento

$$N \times \frac{1}{S(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} = Q \times 0,5 \times 100.000$$

- Aplicando o Notional a partir dessa relação à leg cdi, temos a equivalência com o PU operado

$$N = Q \times 0,5 \times \frac{100.000}{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}} \times S(t_0)$$

$$= Q \times 0,5 \times PU(t_0, t_V) \times S(t_0)$$

# Equivalência entre Swap DOL X CDI e contrato DDI

- P&L acumulado do Swap DOL X CDI

$$P\&L_{swap}(t_0, t_V) = N \times \left[ \frac{S(t_V)}{S(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} - f_{CDI}(t_0, t_V) \right]$$

$$= Q \times 0,5 \times 100.000 \times S(t_V) - Q \times 0,5 \times PU(t_0, t_V) \times S(t_0) \times f_{CDI}(t_0, t_V)$$

... que é o P&L acumulado do DDI.



# Exemplo

Em 02/01/2020, um investidor opera R\$1.000.000,00 num swap no qual receberá em 01/06/2020 a variação cambial mais um cupom limpo de 3,5% a.a., em dias corridos, linear. O spot na data da operação era de 4,05. Na data de 26/02/2020, o spot era de 4,45 e o cupom cambial limpo de mercado era 4% a.a., em dias corridos, linear. Calcule o MtM nesta data.

$$dc(t_0, t_V) = 151;$$

$$dc(t, t_V) = 96;$$

base: 360.

Variação cambial

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \frac{4,45}{4,05} = 1,098765432$$

# Exemplo

- Fatores de Juros

$$\begin{aligned} f_{\text{operação}}(t_0, t_V) &= \left( 1 + c(t_0, t_V) \times \frac{dc(t_0, t_V)}{360} \right) \\ &= \left( 1 + 3,5\% \times \frac{151}{360} \right) = 1,01468056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{cupom}}(t, t_V) &= \left( 1 + c(t, t_V) \times \frac{dc(t, t_V)}{360} \right) \\ &= \left( 1 + 4,0\% \times \frac{96}{360} \right) = 1,01066667 \end{aligned}$$

# Exemplo

- MtM

$$MtM(t) = N \times \frac{S(t)}{S(t_0)} \times \frac{f_{\text{operação}}(t_0, t_V)}{f_{\text{cupom}}(t, t_V)}$$

$$= 1.000.000,00 \times 1,098765432 \times \frac{1,01468056}{1,01066667}$$

$$= 1.103.129,21$$

# Leg Inflação

- Leg remunera segundo variação de inflação no período e um cupom

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c_0(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

- O índice de inflação  $I(t_x)$  para uma data  $t_x$  é calculado de forma pro rata tempore entre os índices “vizinhos” à data

# Leg Inflação

$$I(t_X) = I_{Ant}(t_X) \times \left( \frac{I_{Próx}(t_X)}{I_{Ant}(t_X)} \right)^{\frac{T(t_{Ant}, t_X)}{T(t_{Ant}, t_{Próx})}}$$

$I(t_X)$  : índice de inflação, pro rata tempore, na data  $t_X$ .

$I_{Próx}(t_X)$  : na data  $t_X$ , o próximo índice de inflação a vigorar;

$I_{Ant}(t_X)$  : na data  $t_X$ , o índice de inflação vigente;

$t_{Próx}$  : data em que o próximo índice de inflação passa a vigorar;

$t_{Ant}$  : data em que o índice em vigor de inflação passou a vigorar;

# Leg Inflação

- Lembremos da relação de Fisher, que une a taxa nominal, de variação de inflação e cupom de inflação (juros reais)

$$\frac{I(t_V)}{I(t)} = \frac{(1 + tx_{Pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + c_{MkT}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}$$

- Então,

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{I(t_V)}{I(t)} \times (1 + c_0(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

$$Leg_{Infl}(t_0, t_V) = \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{(1 + tx_{Pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}}{(1 + c_{MkT}(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \times (1 + c_0(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}$$

# Leg Inflação

- MtM

$$\begin{aligned} MtM_{Leg}(t, t_V) &= \frac{Leg_{Infl}(t_0, t_V)}{(1 + tx_{pré}(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \\ &= \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{(1 + c_0(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + c_{MkT}(t, t_V))^{T(t, t_V)}} \end{aligned}$$

# Equivalência entre Swap de Inflação X CDI e DAP

- Um DAP paga ( $M = 0,00025$ ), no vencimento

$$Fin_{CTO}(t_V) = Q \times 100.000 \times M \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)}$$

- E um contrato operado em  $t_0$  é corrigido segundo

$$Fin(t_0) = Q \times PU(t_0, t_V) \times M \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times f_{cupom}(t_0, t_V)$$

$$f_{cupom}(t_0, t_V) = \prod_{i=1}^{t_V} \frac{(1 + cdi_i)^{1/252}}{\frac{I(t_i)}{I(t_{i-1})}} = \frac{\prod_{i=0}^{t_V} (1 + cdi_i)^{1/252}}{\frac{I(t_V)}{I(t_0)}} = \frac{f_{CDI}(t_0, t_V)}{\frac{I(t_V)}{I(t_0)}}$$



# Equivalência entre Swap de Inflação X CDI e DAP

- Então, o P&L acumulado até o vencimento do DAP é

$$P\&L_{DAP}(t_0, t_V) = Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} - Q \times M \times PU(t_0, t_V) \times f_{CDI}(t_0, t_V)$$

- Definamos o Notional para que a Leg de Inflação pague no vencimento o mesmo que um DAP paga ( $M = 0,00025$ )

$$N \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} = Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)}$$

- O que leva à correspondência entre o Notional e o PU operado do DAP

$$N = Q \times M \times \frac{100.000}{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}} = Q \times M \times PU(t_0, t_V)$$

# Equivalência entre Swap de Inflação X CDI e DAP

- Para um swap de inflação X CDI

$$P\&L_{swap}(t_0, t_V) = N \times \left[ \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} - f_{CDI}(t_0, t_V) \right]$$

- Substituindo o Notional, chegamos à equivalência

$$Q \times M \times 100.000 \times \frac{I(t_V)}{I(t_0)} - Q \times M \times PU(t_0, t_V) \times f_{CDI}(t_0, t_V)$$

# Exemplo

Em 02/01/2020 um investidor opera R\$1.000.000 num swap no qual receberá a ponta IPCA em 01/06/2020. O cupom de inflação negociado foi de 2%. Em 26/02/2020, a taxa de cupom de inflação de mercado para este vencimento é de 4,0% a.a. A projeção para o IPCA de fev/20, em 26/02/2020, era de 0,15%. Calcule o MtM desta *leg*.

Dias úteis envolvendo datas de efetividade de índice e as datas da operação:

$$du(Nov19, Dez19) : 20$$

$$du(Jan20, Fev20) : 18$$

$$du(Nov19, t_0) : 11$$

$$du(Jan20, t) : 5$$

# Exemplo

- Índices divulgados, projeção e índices pro rata tempore

Índice	Data de Efetividade	Valor / Projeção
Nov/19	16/12/2019	5259,76
Dez/19	15/01/2020	5320,25
Jan/20	17/02/2020	5331,42
Fev/20	16/03/2020	0,15%

$$I(t_0) = I(Nov19) \times \left( \frac{I(Dez19)}{I(Nov19)} \right)^{\frac{du(Nov19, t_0)}{du(Nov19, Dez19)}} = 5259,76 \times \left( \frac{5320,25}{5259,76} \right)^{\frac{11}{20}} = 5292,943886$$

$$I(t) = I(Jan20) \times (1 + proj(Fev20))^{\frac{du(Jan20, t)}{du(Jan20, Fev20)}} = 5331,42 \times (1 + 0,15\%)^{\frac{5}{18}} = 5333,640223$$

# Exemplo

- Variação de índice

$$\frac{I(t)}{I(t_0)} = \frac{5333,640223}{5292,943886} = 1,00768879$$

- fatores

$$f_{operação}(t_0, t_V) = (1 + 2\%)^{\frac{102}{252}} = 1,00804756$$

$$f_{cupom}(t, t_V) = (1 + 4\%)^{\frac{65}{252}} = 1,0101677981029$$

# Exemplo

- MtM

$$\begin{aligned} MtM(t) &= N \times \frac{I(t)}{I(t_0)} \times \frac{f_{operação}(t_0, t_V)}{f_{cupom}(t, t_V)} \\ &= 1.000.000 \times 1,00768879 \times \frac{1,00804756}{1,0101677981029} \\ &= 1.005.573,75 \end{aligned}$$

## Leg Índice (ou Ação) e Equivalência de Swap Índice X Pré com Forward

- Idêntico à proposição geral apresentada no [início](#);
- Pode conter spread para a variação do índice:  $\left( \frac{I(t_V)}{I(t_0)} - 1 \right) \times \alpha\% + 1$
- Equivalência de Swap Índice X PRÉ com Forward de Índice:
  - P&L de um swap Índice X PRÉ

$$P\&L_{Swap}(t_0, t_V) = N \times \left[ \frac{I(t_V)}{I(t_0)} \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} - (1 + tx_{pré}(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)} \right]$$

- Quantidade a ser operada em contratos de forward

$$Q = \frac{N \times (1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{I(t_0)}$$

# Equivalência de Swap Índice X Pré com Forward

- Dado o P&L acumulado do forward

$$P\&L_{Forward}(t_0, t_V) = Q \times \left\{ I(t_V) - \left[ I(t_0) \times \frac{(1 + tx_{pré}(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}}{(1 + c(t_0, t_V))^{T(t_0, t_V)}} \right] \right\}$$

- Substituimos  $Q$  e obtemos o P&L do Swap Índice X PRÉ.



# Exercício

Em 02/01/2020, um investidor opera R\$1.000.000,00 num swap no qual receberá em 01/06/2020 a variação de uma ação mais um cupom de 1% a.a., em dias úteis, exponencial. O spot da ação na data da operação era de 22. Na data de 26/02/2020, o spot era de 19 e a taxa de aluguel de mercado era 1,5% a.a., em dias úteis, exponencial. Calcule o MtM nesta data.

- Sugestão:
  - use o mesmo procedimento do caso de dólar, mas trocando a composição de linear, dias corridos, para exponencial, dias úteis.
- Cuidado:
  - Como se trata de ações, use o calendário de dias de “trade” da B3, de São Paulo (TRD), fornecido em planilha.