

# Método de Newton-Raphson em Uma Dimensão

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão: 25/03/2017

Primeira versão: 25/03/2017

## 1 Introdução

Neste documento apresentamos o Método de Newton-Raphson para se determinar as raízes de uma função. Trataremos somente o caso de uma dimensão, necessário às aplicações de cálculo de yield-to-maturity (YTM) de um título que paga cupons intermediários e de cálculo de volatilidade implícita de uma opção vanilla.

## 2 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson [Newton-Paphson] é usado para se determinar localmente, de forma aproximada, raiz de uma função conhecida. É necessário escolher uma aproximação inicial para a mesma, e a solução final resultará numa raiz próxima a esse local.

Após a escolha de uma aproximação inicial, calcula-se a derivada da função neste ponto, e a sua intersecção com o eixo das abcissas, que corresponderá à segunda aproximação para a raiz. O processo continua até o momento em que o novo ponto de tangência coincida com o ponto de intersecção da reta tangente com o eixo das abcissas, dentro de uma margem de erro.

De fato, tomando um ponto inicial  $x_0$ , como na figura abaixo, a equação de reta que tangencia a função neste ponto é dada por

$$y \equiv f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) \quad (1)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A reta cruza a abcissa no ponto  $x_1$ , o que significa que  $y = f(x_1) = 0$ , ou seja,

$$f(x_1) = 0 = f(x_0) + f'(x_0) \times (x_1 - x_0) \quad (2)$$

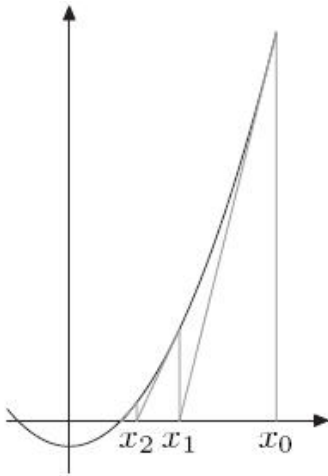
$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Repetindo o procedimento, de modo geral, temos:

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3)$$

O procedimento cessa quando a diferença entre a raiz proposta no novo passo e a do passo anterior é arbitrariamente pequena:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad (4)$$



## Referências

[Newton-Raphson] “Método de Newton-Raphson”. Wikipedia.