Modelos Matemáticos para Apreçamento de Derivativos

Engenharia Financeira
Módulo EGF-12
Prof. Bruno Angélico

Sumário

- Introdução
- Árvores binomiais de Cox-Ross-Rubinstein
- Probabilidade neutra ao risco
- Efeitos de custos de transação
- Método das diferenças finitas: Opções americanas
- Erros de rebalanceamento discreto da carteira de replicação
- Aplicações em Python

Referência Principal

John C. Hull. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**, Bookman; 9ª edição, 2016. (PRINCIPAL)

Introdução

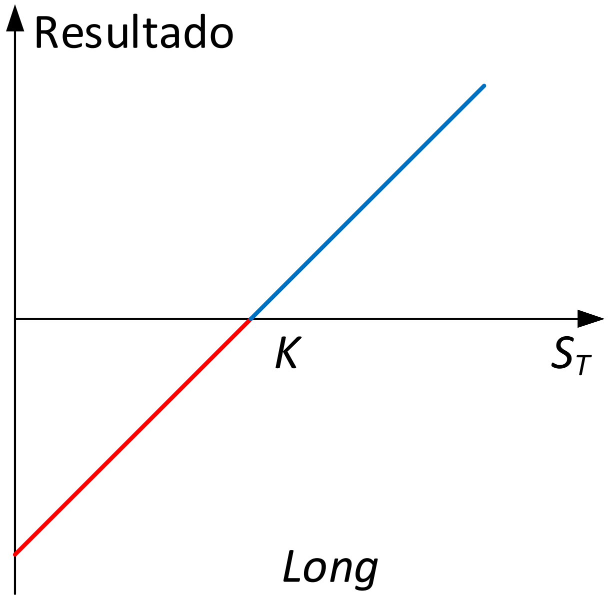
Derivativo: instrumento financeiro cujo valor depende (ou deriva) dos valores de outros ativos. Exemplos: contrato a termo, contratos futuros e opções.

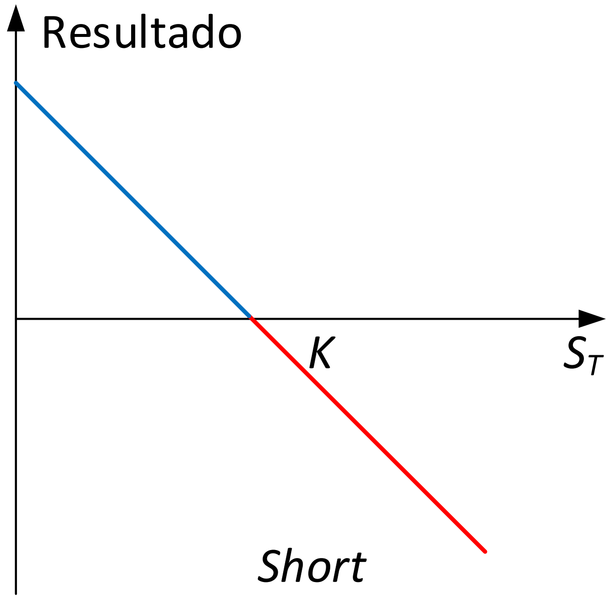
Contrato a termo (ou Mercado a termo):

- Contrato para comprar ou vender um ativo em uma data futura por um preço específico previamente acordado. É negociado no mercado de balcão.
- Uma das partes de um contrato a termo assume a posição comprada (*long*) e concorda em comprar o ativo em uma data futura por determinado preço. A outra parte assume a posição vendida (*short*) e concorda em vender o ativo na mesma data e pelo mesmo preço.
- As partes são obrigadas a levar o contrato até o prazo final do contrato.

Introdução

- O resultado de uma *long* em um contrato a termo sobre uma unidade do ativo é $(S_T - K)$, sendo K o preço de entrega e S_T o preço à vista do ativo no vencimento do contrato. Ou seja, o titular é obrigado a comprar um ativo que vale S_T por K no vencimento.
- Similarmente, o resultado de uma opção *short* em um contrato a termo é $(K - S_T)$, pois o titular é obrigado a vender o ativo que vale S_T por K no vencimento.





Introdução

Contratos futuros (ou Mercado futuro):

- As partes aqui também se comprometem a comprar ou vender certa quantidade de um ativo por um preço estipulado para a liquidação em data futura. São negociados somente em bolsas.
- As contrapartes não estão vinculadas entre si. Isso significa que elas podem repassar o contrato para outra pessoa a qualquer momento, o que gera maior liquidez.
- As alterações de preços são ajustadas diariamente. Sendo assim, as partes realizam desembolsos frequentes para apurar perdas e ganhos.
- É uma negociação mais transparente, mas mais “burocrática”.

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

Estratégia	Hoje	Data de entrega
Compro 1 contrato futuro	?	$S_T - K$
Compro 1 unidade do ativo	$-S_0$	S_T
Pego emprestado	$e^{-rT}K$	$-K$

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

Estratégia	Hoje	Data de entrega
Compro 1 contrato futuro	$e^{-rT} K - S_0$	$S_T - K$
Compro 1 unidade do ativo	$-S_0$	S_T
Pego emprestado	$e^{-rT} K$	$-K$

- Valor de um contrato futuro na data *t*:

$$F_t = S_t - e^{-r(T-t)} K$$

Introdução

Exemplo de replicação de um contrato futuro

- Contrato futuro com valor presente nulo:

$$F_0 = S_0 - e^{-rT}K \overset{\text{deposita só a margem}}{\Rightarrow} 0 = S_0 - e^{-rT}K$$

- Logo, o valor futuro do empréstimo (K) é igual ao preço atual do ativo-objeto levado a valor futuro pela taxa livre de risco:

$$K = S_0 e^{rT}$$

Esse valor é chamado de preço futuro do contrato.

Introdução

Opções:

- No mercado de opções, negocia-se o direito de executar uma ação e a obrigação da contraparte de realizá-la.
- Quem adquirir o direito deve pagar um **prêmio** ao vendedor, ou seja, um valor pago para ter a opção de comprar ou vender o referido bem em uma data futura por um preço previamente acordado.
- O preço no contrato é denominado preço de exercício, ou *strike price* (K).
- O Exercício de opções é o comando que o titular da opção realiza para exercer esse direito, que pode ser a venda ou a compra da ação pelo preço pré-determinado.
- São negociadas em bolsa e no mercado de balcão. Há dois tipos: opção de compra (*call*) e opção de venda (*put*).

Introdução

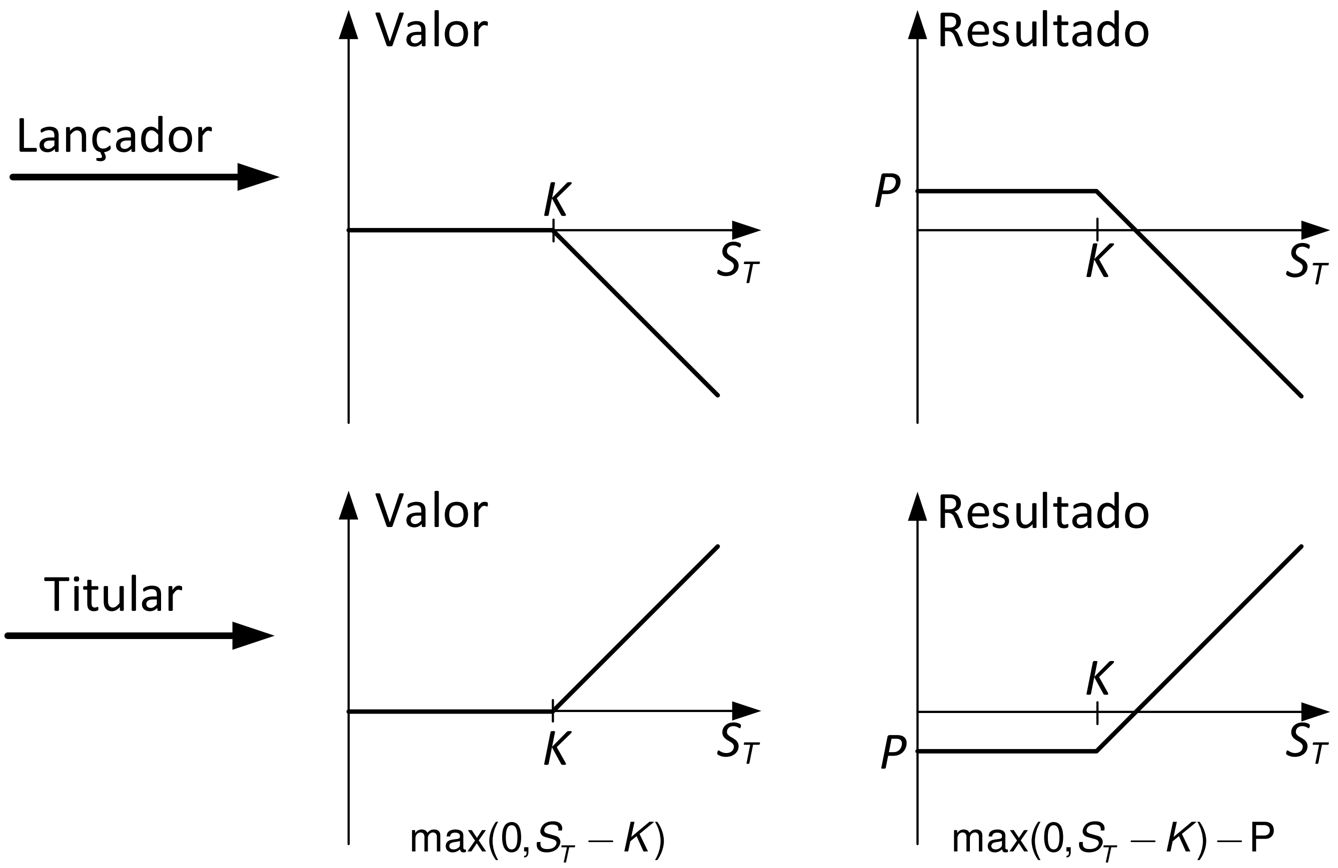
- A opção de *call* dá ao titular o direito de comprar o ativo subjacente até uma determinada data, por um preço específico.
- A opção de *put* dá ao titular o direito de vender o ativo subjacente até uma determinada data, por um preço específico.
- Uma opção dá o direito ao titular de exercer, mas não a obrigação. Essa é a diferença fundamental em relação aos contratos futuros e a termo.
- Seja S o preço do ativo:
  - ➢ Uma opção *call* está *in the money* se $S > K$, *at the money* se $S = K$, e *out of the money* se $S < K$.
  - ➢ Uma opção *put* está *in the money* se $S < K$, *at the money* se $S = K$, e *out of the money* se $S > K$.

Introdução

- Há duas classes mais famosas: opções europeias e opções americanas:
  - Opções europeias só podem ser exercidas no vencimento do contrato.
  - Opções americanas, que são as mais comuns, podem ser exercidas em qualquer momento até a data de vencimento.
- Há quatro tipos de participantes: compradores de opções de compra, vendedores de opções de compra, compradores de opções de venda e vendedores de opções de venda.
  - Quem compra uma *call* deseja um preço acima do *strike*;
  - Quem vende uma *call* deseja um preço abaixo do *strike*;
  - Quem compra uma *put* deseja um preço abaixo do *strike*;
  - Quem vende uma *put* deseja um preço igual ou acima do *strike.*
- Quem vende é chamado de lançador e quem compra de titular. O lançador tem a obrigação e o titular tem o direito de escolher se exercerá a opção.

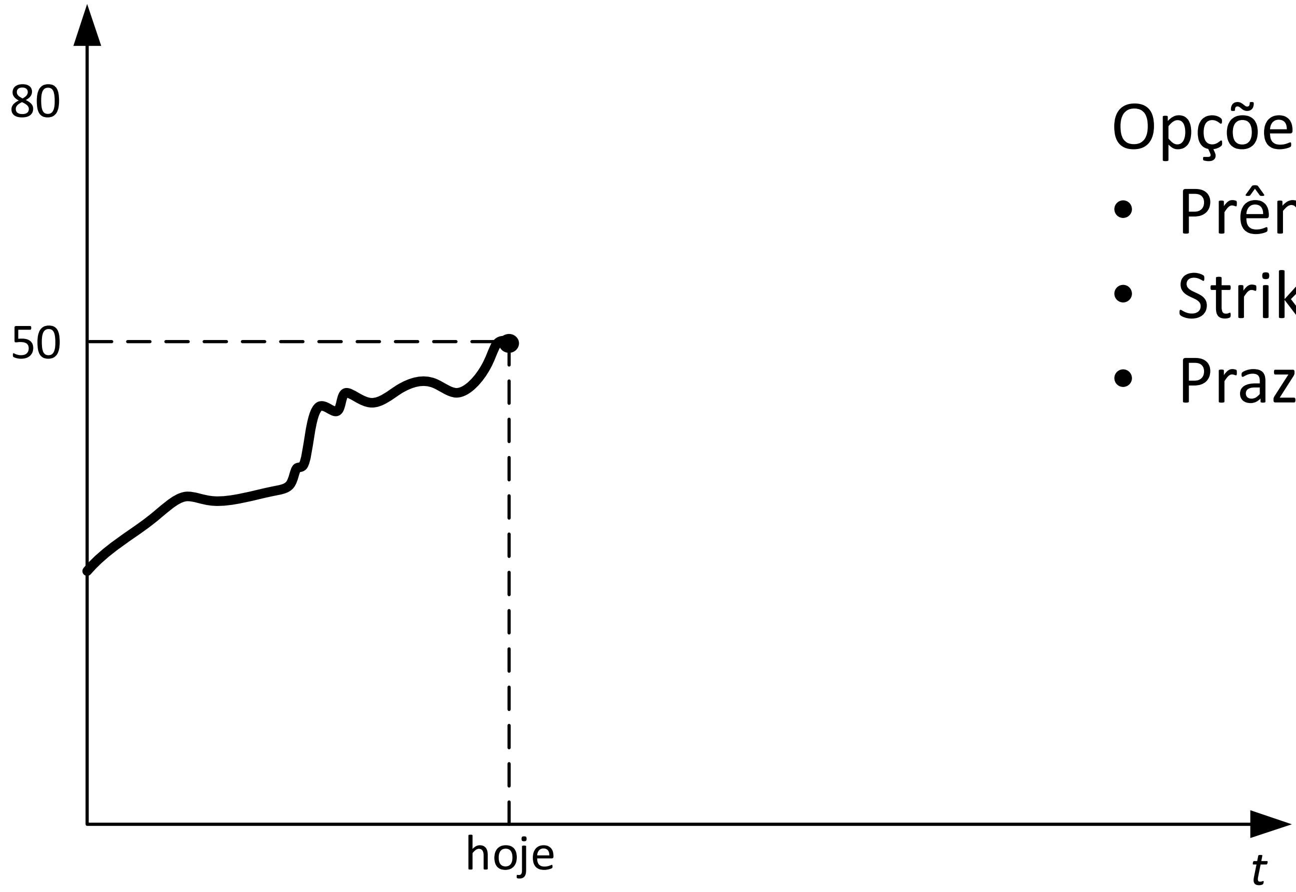
Introdução

- Como exemplo, na *call*, o titular paga o prêmio P para ter direito à opção. Seja S_T o preço no vencimento. Se $S_T > K$ (*in the money*), o portador da opção vai exercer a operação e receberá o preço da ação menos o valor do *strike*. Todavia, se $S_T < K$ (*out of the money*), ele não irá exercer e quem ganha, nesse caso, é laçador.



Introdução

- Exemplo - opção americana: uma ação da compania X vale R$ 50 reais hoje e acompanha a linha de crescimento no gráfico abaixo:



Opções da *Call*:

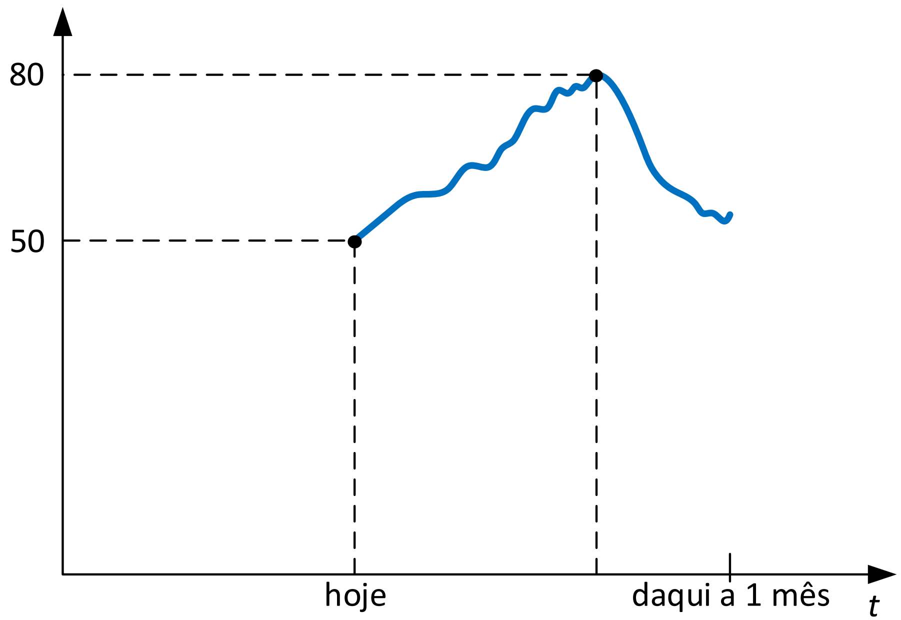
- Prêmio: R$ 5,00
- Strike: R$ 60,00
- Prazo: 1 mês

Introdução

Considere o cenário favorável que a ação subiu e, quando atingiu R$80,00 o titular exerceu a opção. O lucro é:

$$S_T - K - P = 80 - 60 - 5 = \text{R\$ } 15{,}00$$

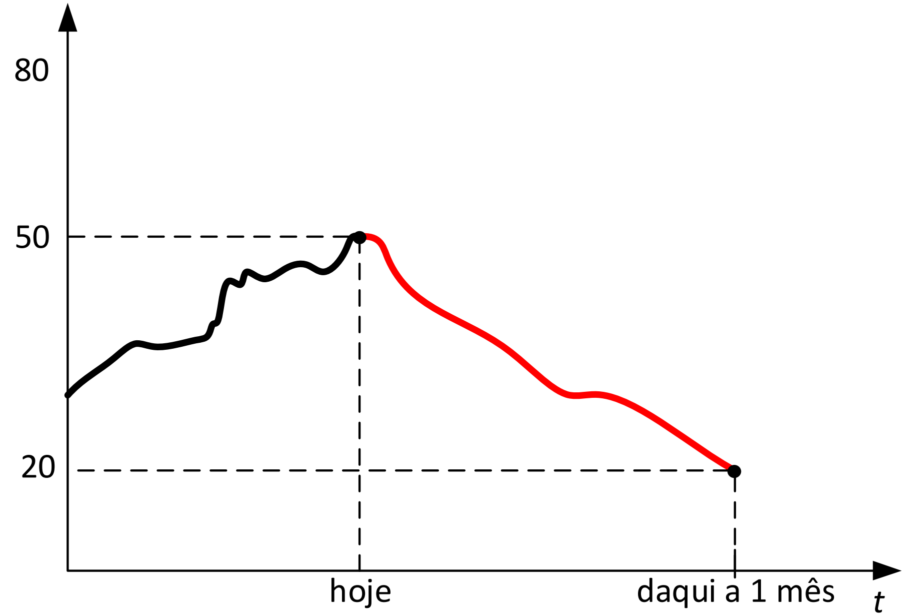
Se ao invés da opção, o investidor tivesse comprado a ação por R$50 e vendido por R$80, o lucro seria R$30,00.



Introdução

No entanto no cenário de perda, como ilustrado abaixo, o valor da ação cai para R$ 20,00 no vencimento e, na opção, o titular não exerceu a opção e seu prejuízo foi o prêmio de R$ 5,00.

Se, ao invés da opção, o investidor tivesse comprado a ação por R$50, o prejuízo seria de R$30,00 em caso de venda da ação na mesma data do vencimento.



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Método de avaliação de opções desenvolvido em 1979 por Cox, Ross e Rubinstein.
- COX, John C.; ROSS, Stephen A.; RUBINSTEIN, Mark. Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, v. 7, n. 3, p. 229-263, 1979. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0304405X79900151
- Procedimento interativo que permite a especificação de nós ou pontos no tempo, durante o período entre a data de avaliação e a data de vencimento da opção.
- Expresso por um diagrama denominado **árvore binomial**, que representa os diferentes caminhos que podem ser seguidos pelo preço do ativo subjacente.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Ex. feito pelo Prof. Márcio Menezes:

Suponha uma opção de compra de um ativo-objeto. O valor atual do ativo-objeto é de R$ 10,00. O preço de exercício (*K*) é de R$ 10,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (*r*) é de 10% ao ano. Baseando-se em dados históricos descobre-se que a volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 22,31% ao ano, enquanto que sua taxa de crescimento do ativo (taxa de retorno média μ) é de 16% ao ano.

Movimentos para cima e para baixo são representados por:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}; \qquad d = 1/u$$

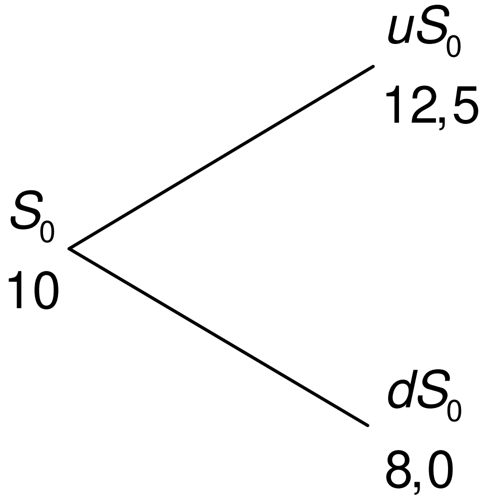
σ:volatilidade do ativo objeto ao ano

Δt: intervalo de tempo (mesma unidade da unidade de tempo da vol.)

Só a título de exemplo numérico, vamos assumir que o vencimento é em um ano e a árvore será discretizada em ano. Assim:

$$u = e^{0,2231\sqrt{1}} = 1{,}25 \Rightarrow \; d = 0{,}8$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein



- Note que:

$$puS_0 + (1 - p)dS_0 = \mu S_0$$

$$pu + (1 - p)d = \mu$$

$$p = \frac{\mu - d}{u - d} = \frac{1{,}16 - 0{,}8}{1{,}25 - 0{,}8} = 80\%$$

p: prob. do preço subir; (1-*p*) prob. do preço cair

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Neutralidade ao risco: a ideia é montar uma carteira livre de risco:

$$\Pi_u = \Pi_d$$

- Calcula-se o valor Δ (quantidade do ativo objeto) para que a carteira seja *risk-free.*
- Se o movimento do ativo é para $S_0 u\,\Delta$, então o *payoff* para a opção é V_u.
- Se o movimento do ativo é para $S_0 d\,\Delta$, então o *payoff* para a opção é V_d.

$$\underbrace{S_0 u}_{S_u} \Delta - V_u = \underbrace{S_0 d}_{S_d} \Delta - V_d$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Neutralidade ao risco: a ideia é montar uma carteira livre de risco:

$$\Pi_u = \Pi_d$$

- Calcula-se o valor Δ (quantidade do ativo objeto) para que a carteira seja *risk-free.*
- Se o movimento do ativo é para $S_0 u \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_u.
- Se o movimento do ativo é para $S_0 d \Delta$, então o *payoff* para a opção é V_d.

$$\underbrace{S_0 u}_{S_u} \Delta - V_u = \underbrace{S_0 d}_{S_d} \Delta - V_d$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

Compara com

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Do modelo B&S.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- No exemplo em questão:

$$\Delta = \frac{2{,}5 - 0}{12{,}5 - 8} \Rightarrow \Delta = 0{,}5556$$

$$V_u = \max(0,\ S_0 u - K) = \max(0,\ [12{,}5 - 10]) \Rightarrow V_u = 2{,}5$$

$$V_d = \max(0, S_0 d - K) = \max(0,\ [8 - 10]) \Rightarrow V_d = 0$$

$$\Pi_u = 12{,}5 \cdot 0{,}5556 - 2{,}5 = 4{,}44$$

$$\Pi_d = 8 \cdot 0{,}5556 - 0 = 4{,}44$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Se a carteira é neutra ao risco,

$$\Pi_0 = e^{-rT}\Pi_T$$

Em que Π_T é o valor futuro livre de risco ($\Pi_T = \Pi_d = \Pi_u$).
Assim,

$$\Pi_0 = e^{-0,10\cdot 1} 4,44 = 4,02$$

Portanto,

$$\Pi_0 = S_0\Delta - V_0 \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - \Pi_0$$

$$V_0 = 10 \cdot 0,5556 - 4,02 \approx 1,54$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Probabilidade neutra ao risco: $\Pi_0 = S_0\Delta - V_0 \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - \Pi_0$

- Como Π_0 é um investimento sem risco:

$$V_0 = S_0\Delta - e^{-rT}\Pi_T \Rightarrow V_0 = S_0\Delta - e^{-rT}\left(S_0 u\Delta - V_u\right)$$

- Rearranjando:

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0\Delta\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u \\
&= S_0\left(\frac{V_u - V_d}{S_0\left(u-d\right)}\right)\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u \\
&= \frac{1}{\left(u-d\right)}\left[V_u\left(1 - e^{-rT}u\right) - V_d\left(1 - e^{-rT}u\right) + e^{-rT}V_u\left(u-d\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(u-d\right)}\left[V_u\left(1 - e^{-rT}d\right) - V_d\left(1 - e^{-rT}u\right)\right] \\
&= e^{-rT}\left[V_u\frac{\left(e^{rT} - d\right)}{\left(u-d\right)} + V_d\frac{\left(u - e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}\right]
\end{aligned}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Perceba que:

$$\frac{\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}+\frac{\left(u-e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}=1$$

- Define-se:

$$q=\frac{\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}$$

- Na condição de não arbitragem tem-se que: $0 < q \leq 1$. O termo q pode ser interpretado como uma probabilidade. Nesse caso, a **probabilidade neutra ao risco**. Veja também que:

$$1-q=\frac{\left(u-d\right)-\left(e^{rT}-d\right)}{\left(u-d\right)}=\frac{\left(u-e^{rT}\right)}{\left(u-d\right)}$$

- No exemplo, q = 0,6782.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto,

$$V_0 = e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]$$

- Ou seja,

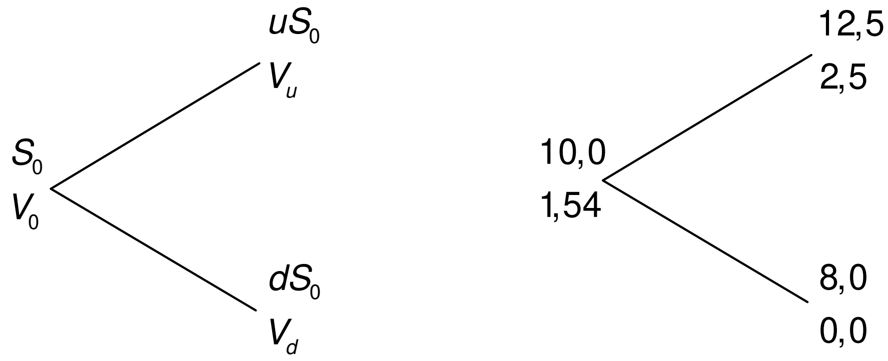
$$V_0 = e^{-rT}E_q\left[V_T\right]$$

- Aplicando esse resultado, verifica-se que:

$$V_0 = e^{-0,10\cdot 1}\left[0,6782\cdot 2,5 + (1-0,6782)\cdot 0\right] \approx 1,54$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto,



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Replicando uma opção:

$$\Pi_T = S_T \Delta - V_T$$

- A opção poderia ser replicada como

$$V_T = S_T \Delta - \Pi_T$$

Sendo Π_T interpretado como uma dívida a ser assumida, mas livre de risco. Como é livre de risco,

$$\Pi_u = \Pi_d$$

Então:

$$\Pi_T = e^{rT} \Pi_0$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Portanto, o valor da opção é igual a uma carteira com:
  - Uma quantidade Δ de ativos
  - Uma dívida de valor *B* a uma taxa de juros livre de risco

- Replicação:

$$V_0 = S_0\Delta - B$$

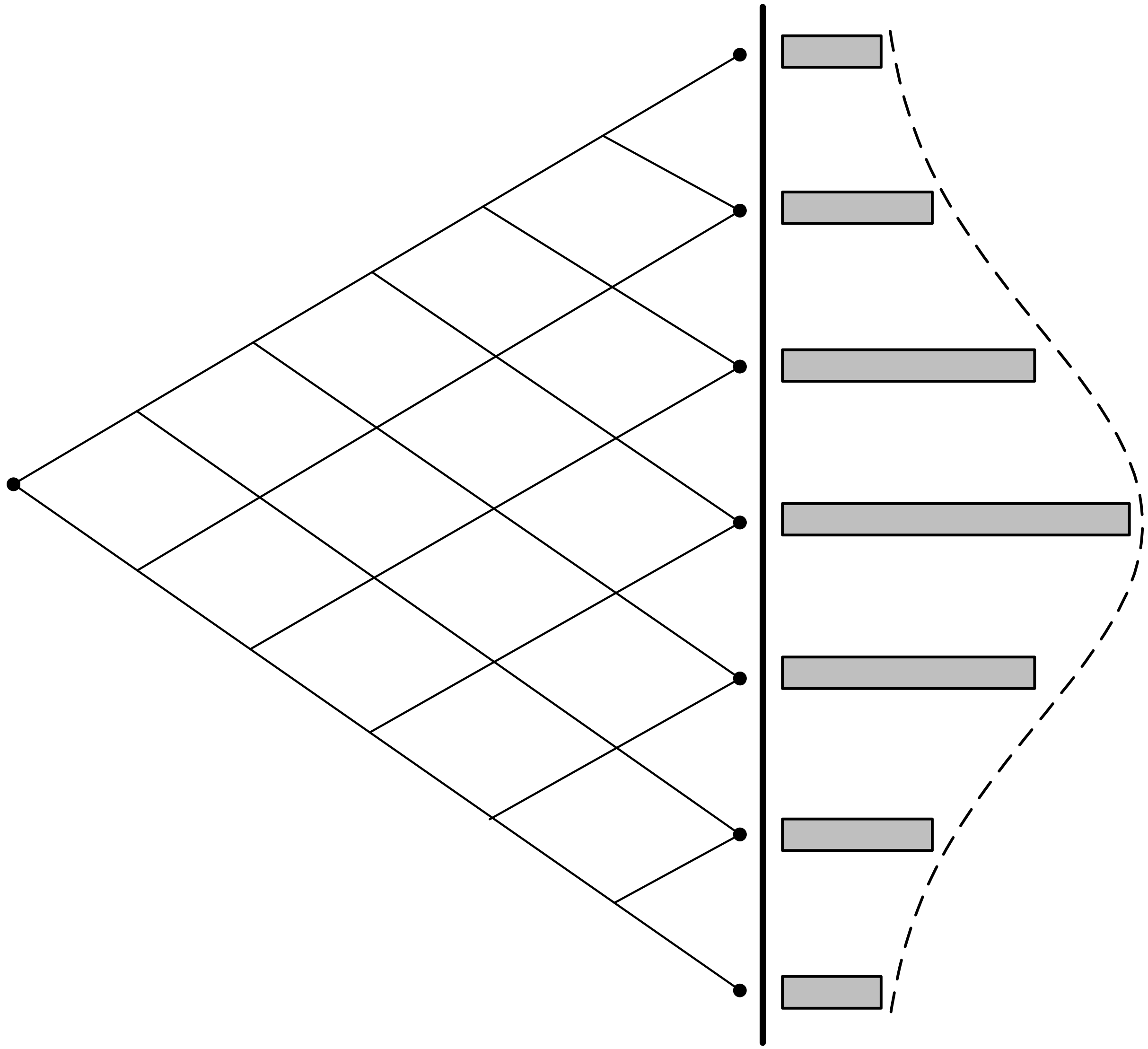
$$\begin{cases} V_u = S_u\Delta - e^{rT}B \\ V_d = S_d\Delta - e^{rT}B \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{uS_0 - dS_0}$$

$$B = e^{-rT}\frac{dV_u - uV_d}{u - d}$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Árvore com vários nós:



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

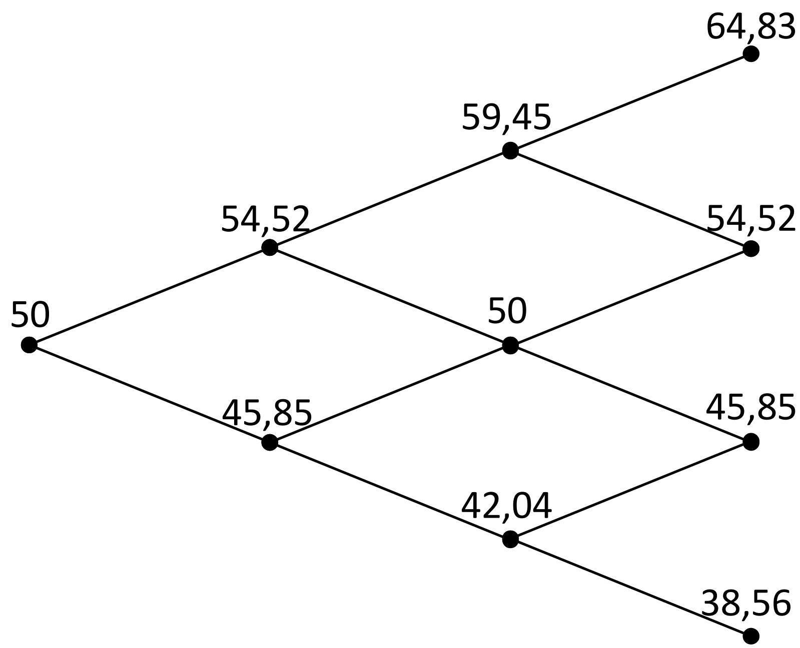
- Exemplo: Suponha uma *call* de **opção europeia** em que o valor atual do ativo-objeto (S_0) é de R$ 50,00. O preço de exercício (K) é de R$ 49,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (r) é de 6% ao ano. A volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 30% ao ano. O vencimento é em 3 meses. Qual o prêmio da opção?

Vamos discretizar mensalmente. Assim, como a escala de tempo da volatilidade é anual, tem-se que $\Delta T = 1/12$. Portanto,

$$u = e^{0,3\sqrt{1/12}} = 1,0905; \qquad d = 1/u = 0,9170$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

O preço do ativo subjacente é evoluído de acordo com a seguinte árvore:



A probabilidade neutra ao risco é dada por:

$$q = \frac{\left(e^{0{,}061/12} - 0{,}9170\right)}{\left(1{,}0905 - 0{,}9170\right)} = 0{,}5073$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

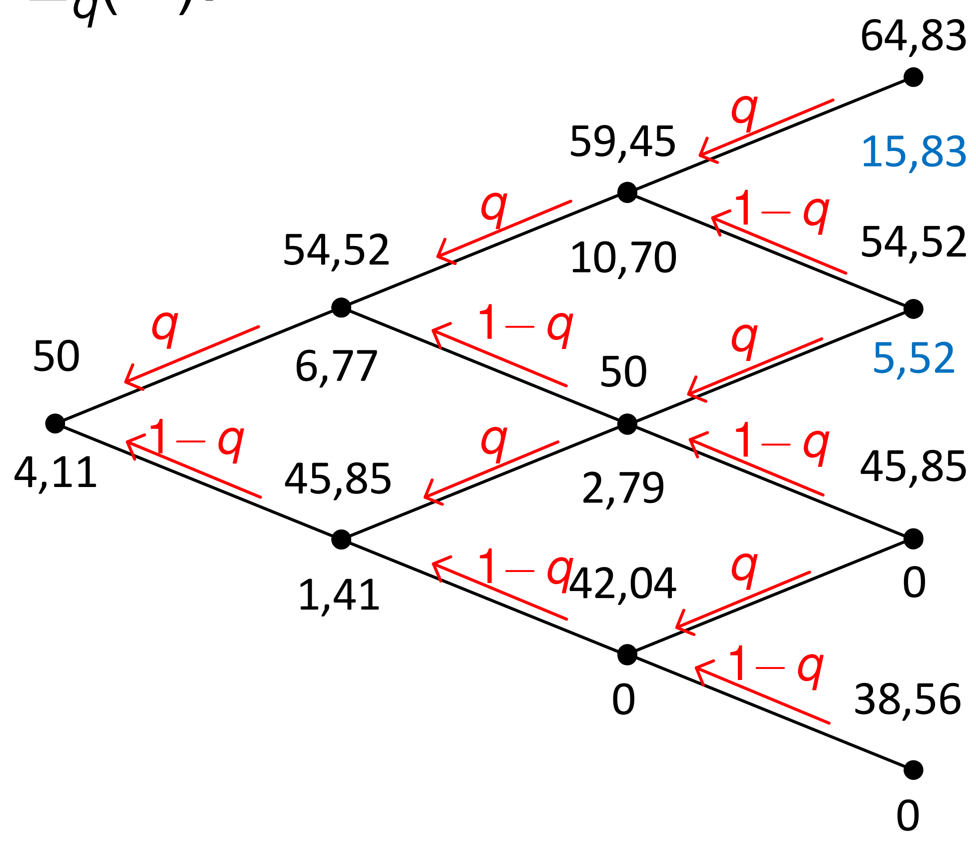
Monta-se então a árvore com os valores das opções, de trás para frente, utilizando $E_q(\cdot)$.

- Em $t = T$:

  $V_{ex} = \max(S - K, 0)$

- Em $t < T$;

  $V = e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]$



Portanto, $V_0 \approx 4{,}11$.

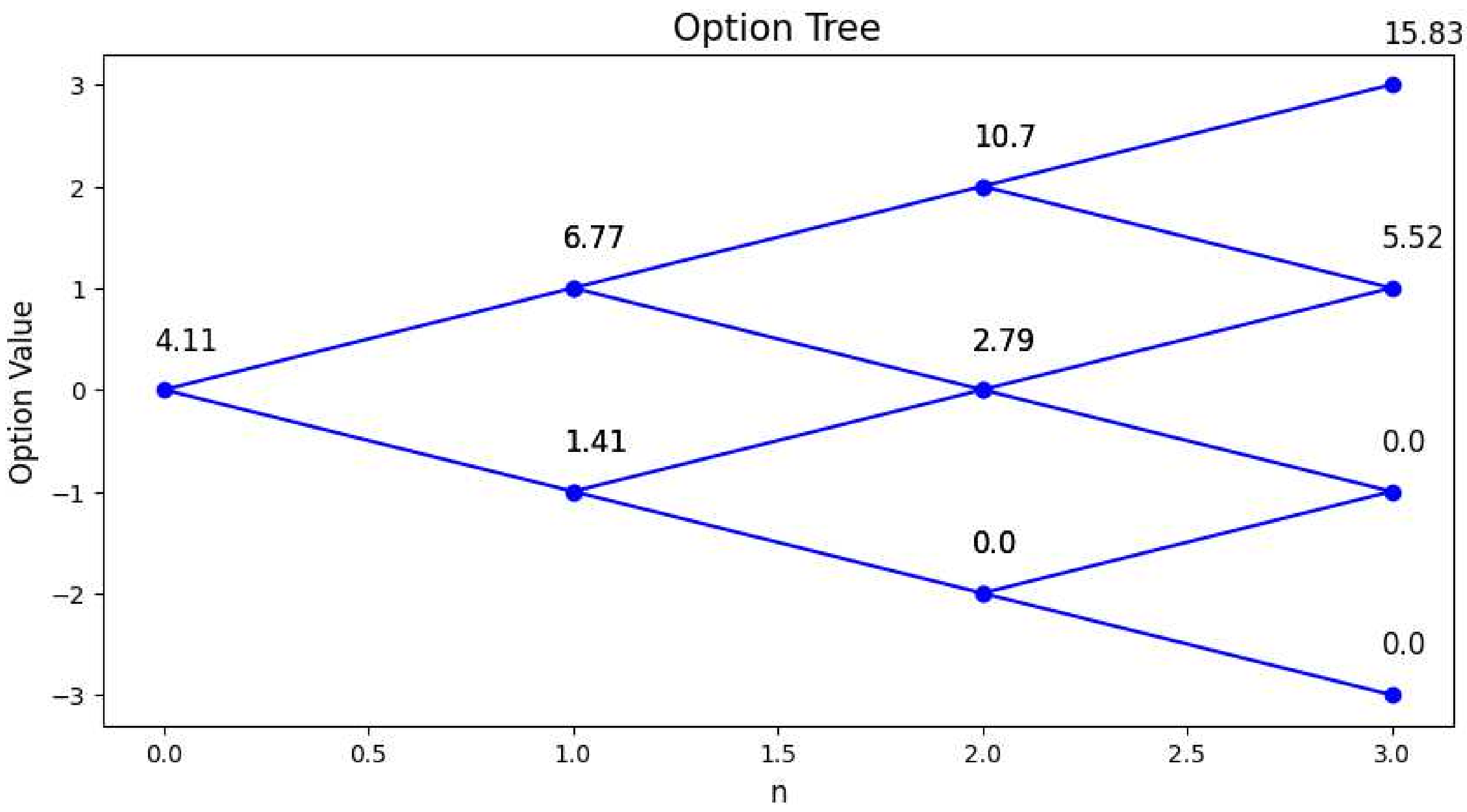
Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
#Importação e instalação de pacotes
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as py
!pip install finoptions
import finoptions as fo
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
```

```
opt1_CRR = fo.binomial_tree_options.CRRBinomialTreeOption(S=50,K=49,...
                                                            t=3/12,r=0.06,...
                                                            b=r,sigma = 0.3,...
                                                            n=3, type='european')
opt1_CRR.call()
print(opt1_CRR.call(tree=True))
opt1_CRR.plot(call=True, figsize=(10,5));
```

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
[[ 4.10560131 6.76738523   10.6998857    15.83403044   ]
 [ 0.          1.40707432   2.78774014    5.52315892    ]
 [ 0.          0.           0.            0.            ]
 [ 0.          0.           0.            0.            ]]
```



Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

- Exemplo: Suponha uma *put* de **opção americana** em que o valor atual do ativo-objeto (S_0) é de R$50,00, o preço de exercício (K) é de R$52,00, enquanto que a taxa de juros livre de risco (r) é de 5% ao ano. A volatilidade (σ) do ativo-objeto é de 30% ao ano. O vencimento é em 2 anos. Qual o prêmio da opção?

Vamos discretizar mensalmente. Assim, como a escala de tempo da volatilidade é anual, tem-se que $\Delta T = 1$. Portanto,

$$u = e^{0,3\sqrt{1}} = 1,3499; \qquad d = 1/u = 0,7408$$

$$q = \frac{\left(e^{0,05 \cdot 1} - 0,7408\right)}{\left(1,3499 - 0,7408\right)} = 0,5097$$

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Monta-se então a árvore com os valores das opções, de trás para frente, utilizando $E_q(\,\cdot\,)$.

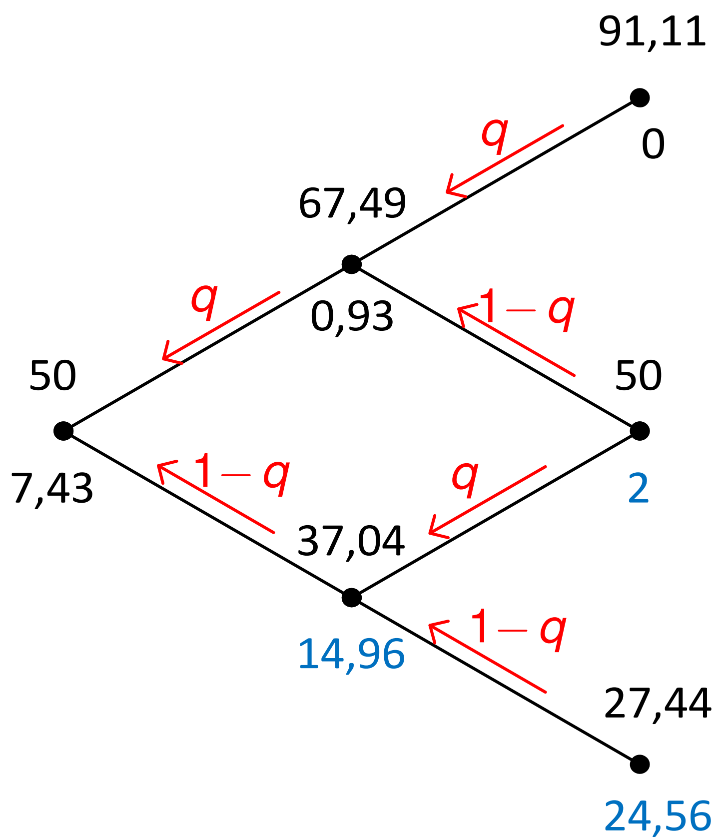
- Em t = T:

$$V_{ex} = \max(K - S, 0)$$

- Em t < T;

$$V_{ex} = \max(K - S, 0)$$

$$V = \max\left(V_{ex},\ e^{-rT}\left[qV_u + (1-q)V_d\right]\right)$$



Portanto, $V_0 \approx 7{,}43$.

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

Código em R:

```
opt2_CRR =
fo.binomial_tree_options.CRRBinomialTreeOption(S=50,K=52,t=2,
r=0.05,b=r,sigma = 0.3,n=2, type='american')
opt2_CRR.put()
print(opt2_CRR.put(tree=True))
opt2_CRR.plot(call=False, figsize=(10,4));
```

Árvore de Cox, Ross e Rubinstein

```
[[ 7.4284019  0.93269783   0.          ]
 [ 0.         14.95908897  2.          ]
 [ 0.         0.           24.5594182  ]]
```