Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Gestão de Títulos de Renda Fixa

André Borges Catalão

Versão: 22/03/2017

Primeira versão: 20/03/2017

1 Introdução

Neste documento apresentamos a formação da estrutura a termo das taxas de juros, segundo [Fabozzi]. Em seguida, mostramos como construir uma curva de juros no mercado brasileiro. Antes, estabelecemos algumas definições.

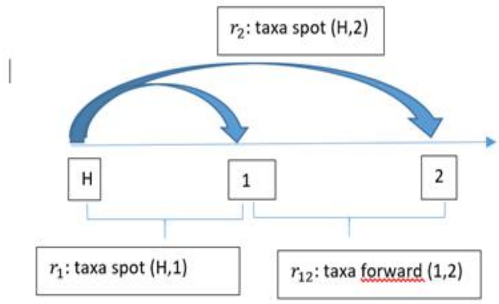
2 Definições

- Taxa spot (para um certo prazo T): taxa referente a um instrumento que não paga cupom intermediário. Também chamadas taxas zero-coupon;
- Taxa forward: taxa embutida entre dois prazos futuros. Por não-arbitragem,

$$e^{r_2(T_2-T_H)} = e^{r_1(T_1-T_H)}e^{r_{12}(T_2-T_1)} \tag{1}$$

- Taxa yield: taxa de rendimento de um título que paga cupons, pressupondo reinvestimentos dos mesmos à essa taxa;

- Estrutura a termo da taxa de juros: curva de juros formada por um conjunto de taxas spot e seus respectivos prazos.



- A conversão entre as convenções contínua, exponencial e linear de taxas geralmente usadas é a seguinte:

$$e^{rT} = (1 + tx)^T = (1 + l \cdot T) \tag{2}$$

3 Formação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros

3.1 Teorias Baseadas em Expectativas

Assumem que as taxas de juros são basicamente formadas pelas expectativas dos participantes de mercado sobre as taxas futuras. Três teorias encaixam-se nesta classificação: hipótese de expectativas puras ([Lutz]), teoria de preferência por liquidez ([Keynes]) e teoria do habitat preferido ([Modigliani e Sutch]).

3.1.1 Hipótese de Expectativas Puras

Nesta teoria, as taxas forward são expectativas das taxas spot numa data futura. Nesta teoria, o retorno esperado de se investir por um longo período, em uma vez, é igual ao retorno esperado de se rolar investimentos curtos várias vezes até o final do referido período. Ou seja, a taxa de longo prazo é média daquelas de curto prazo. De fato, matematicamente, em taxas contínuas, podemos escrever:

$$e^{r_{i,j}\cdot(T_j-T_i)} = e^{r_{i,(i+1)}\cdot(T_{i+1}-T_i)}e^{r_{(i+1),(i+2)}\cdot(T_{i+2}-T_{i+1})}...e^{r_{(j-1),(j-2)}\cdot(T_{j-1}-T_{j-2})}e^{r_{(j-1),j}\cdot(T_j-T_{j-1})} = \tag{3}$$

$$\prod_{k=i}^{j} e^{r_{k,(k+1)}\cdot(T_{k+1}-T_k)}$$

Calculando o ln de ambos os lados, temos:

$$r_{i,j}\cdot(T_j-T_i) = \sum_{k=i}^{j} r_{k,(k+1)}\cdot(T_{k+1}-T_k)$$

$$r_{i,j} = \frac{1}{(T_j-T_i)}\sum_{k=i}^{j} r_{k,(k+1)}\cdot(T_{k+1}-T_k) \tag{4}$$

Esta equação é uma equação da média.

O problema desta teoria é que ela negligencia o risco de se investir em um instrumento de juros: os preços futuros de títulos não são os previstos hoje. É diferente investir (i) em um título de 5 anos, (ii) em um título de 12 anos e vendê-lo em 5 anos (quando ele terá 7 anos a transcorrer), (iii) em um título de 30 anos e vendê-lo em 5 anos (quando ele terá 25 anos a transcorrer); pois não sabemos como estarão as taxas de títulos de 7 anos e de 25 anos daqui a 5 anos. Além disso, não sabemos como estarão as taxas de reinvestimento para o caixa que se obtém de títulos que vencem antes de 5 anos. Este é o risco de reinvestimento.

Assim, nesta teoria, um investidor espera iguais rendimentos advindos de instrumentos de vencimentos diferentes ao longo de um mesmo horizonte de investimento (no exemplo acima, esperaria que um título de 12 anos rendesse igual a um título de 30 anos e um título de 5 anos por um horizonte de 5 anos).

Uma variante de interpretação, a teoria de expectativas locais, pressupõe que os retornos serão os mesmos ao longo de um curto horizonte de investimento. Por exemplo, um investidor com intenção de investir por 6 meses poderia comprar um bond de 1, ou de 5, ou de 10 anos, obtendo o mesmo rendimento.

3.1.2 Preferência por Liquidez

Manter um título em carteira por um longo prazo é mais arriscado que por um curto prazo. Investidores tendem a aceitar manter um título de prazo longo em carteira se ele oferecer uma remuneração maior que aquele de um prazo curto. Isto é, o investidor, para aceitar a incerteza exige um prêmio de risco. Uma curva positivamente inclinada (taxas subindo com o prazo) pode conter a informação de expectativas de movimento para cima, para baixo ou permanência, mas um prêmio de liquidez crescente com o prazo é adicionado de forma a alterar o formato. Se este prêmio não for suficientemente alto no longo prazo para gerar uma curva final positivamente inclinada, podemos ter uma curva negativamente inclinada, devido às expectativas de baixa, que superam o prêmio de liquidez.

3.1.3 Teoria do Habitat Preferido

A teoria do Habitat Preferido é uma extensão da teoria de Segmentação de Mercado. Esta trabalha com a ideia de que os participantes operam setores da curva de juros de acordo com a estrutura de suas dívidas e aplicações. Então a curva é um resultado da oferta e procura por instrumentos de diferentes vencimentos. Ou seja, esta teoria aceita a proposição de que a estrutura a termo reflete as expectativas de mercado da trajetória das taxas de juros. Aceita também o conceito de prêmio de risco, mas contesta a idéia de que este tem que ser crescente com o prazo, ao propor que as instituições tomam atitudes de financiamento de acordo com a estrutura de seus passivos.

Já a teoria do Habitat Preferido segue no mesmo caminho, mas estende a ideia ao afirmar que investidores fazem posições em setores da curva, não só por sua estrutura de caixa, mas também para aproveitar oportunidades. Se há um desequilíbrio na estrutura de caixa, os investidores migram suas preferências de um setor para outro para aproveitar o desequilíbrio. O mecanismo para o movimento é o prêmio que possibilita assumir o risco de sair da posição anteriormente feita em outro setor da curva.

4 Construção de Curvas - Caso do Mercado Brasileiro

Diferentes estruturas a termo de taxas de juros podem ser formuladas, no sentido que diferentes mercados adotam diferentes curvas. Por exemplo, podemos diferenciar curvas corporate de curvas soberanas. Por sua vez, dentro destas classificações, podemos atribuir uma curva para cada categoria de crédito dos emissores de instrumentos envolvidos. Ainda assim, podemos desejar criar uma curva para cada tipo de instrumento empregado, por entender que há diferentes prêmios e custos envolvidos na escolhas dos mesmos. Os instrumentos tipicamente utilizados para a construção de curvas no mercado brasileiro, são os seguintes: títulos (soberanos e privados), swaps e futuros[1]. Além disso, estes instrumentos podem ser emitidos com diferentes indexadores (por exemplo, inflação real, TR, pré, cupom de dólar, etc.), possibilitando a construção de curvas a eles associadas. Para efeito didático, consideraremos a construção da curva Pré.

4.1 Curva Pré

Mostraremos exemplos de construção usando os instrumentos: títulos, swaps e futuros.

4.1.1 Títulos

No caso da curva de "taxa pré de títulos públicos", os instrumentos usados são títulos públicos federais, que podem ser emitidos com fluxos de caixa intermediários (coupon-bonds) até que chegue o vencimento (no caso de títulos públicos Pré-fixados, trata-se da NTN-F), ou com um fluxo de caixa só (zero-coupon bonds), denominados LTN.

Interessa-nos obter taxas spot a partir de títulos de diferentes vencimentos. No caso de LTN's, zero-coupons, a curva é construída pela coleta de preços unitários (PU) de vários vencimentos. A relação entre taxa (exponencial) e PU de uma LTN de valor de face 1000 é dada por:

$$PU(tx,T) = \frac{1000}{(1+tx)^T} \tag{5}$$

A curva fica estabelecida pelo conjunto $\{(T_i, tx_i)\}$.

Títulos que pagam cupons intermediários podem ser usados para construção de curva, através do procedimento de bootstrap ([Catalão]). No caso de títulos públicos Pré que pagam cupons, as NTN-F's, a curva deve ser da mesma natureza que a gerada por LTN's.

As "taxas pré de títulos corporativos" são extraídos de debêntures, e o procedimento de bootstrap deve também ser empregado.

4.1.2 Swap Pré-CDI

Um swap Pré-CDI possibilita a troca de fluxos, ao final de um período T, com relação à data inicial, sobre um notional N, entre dois participantes do mercado, um devendo uma remuneração

[1] Outros instrumentos poderiam ser usados, como taxas de CDB, para a construção de uma curva privada, mas não há ampla divulgação das mesmas

à taxa pré-fixada, tx_{pre} , no início da operação, e o outro devendo uma remuneração à taxa flutuante representada pelo CDI-overnight. A divulgação de taxas de swap pelo mercado geralmente pressupõe igualdade de preços entre as pontas da transação (valor justo, ou fair value), a zero de jogo, e que não há spread comercial aplicados às taxas:

$$MtM_{swap}(t_{operação}) = MtM_{pré}(t_{operação}) - MtM_{CDI}(t_{operação}) \tag{6}$$

$$MtM_{swap}(t_{operação}) = \frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré})^T} - \frac{N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i^{projetado})^{1/252}}{(1 + tx_{pré})^T} \tag{7}$$

Fair value:

$$MtM_{pré}(t_{operação}) \equiv MtM_{CDI}(t_{operação}) \tag{8}$$

$$\frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{(1 + tx_{pré})^T} \equiv \frac{N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i^{projetado})^{1/252}}{(1 + tx_{pré})^T} = \frac{N \cdot (1 + tx_{pré})^T}{(1 + tx_{pré})^T} = N$$

Note que, como não sabemos a trajetória das taxas CDI overnight, projetamos seu acumulado diário pela pré do período (como na teoria de expectativas puras). Isto significa que, desconsiderando spreads entre as partes, a taxa da operação de um swap, a zero de jogo, é a do mercado, supondo valor justo. Então, a curva de swap, tal como publicada, é a curva "Pré BM&F"[2].

4.1.3 Futuros

O mercado de futuros de DI permite também a construção da curva "Pré BM&F". Na realidade, um futuro de DI de vencimento T tem correspondência com o swap Pré-CDI (sem spread) de mesmo vencimento. De fato, preço unitário do contrato de DI (PU, ou MtM) é especificado pelo desconto de um valor que no FUTURO vale R$100.000,00:

$$PU_T = \frac{100.000}{(1 + tx_{pré})^T} \tag{9}$$

[2]Costuma-se denominá-la assim, pois é construída com instrumentos listados na BM&F

Para verificar a correspondência, devemos apurar o P&L, no vencimento T, de uma compra de Q contratos em $t_{operação}$, o dia da operação. O lucro (prejuízo) futuro ocorrerá quando a taxa acumulada realmente ocorrida no período subsequente à compra for menor (maior) que a operada. Em T o contrato é liquidado por R$100.000,00. Já o dinheiro investido é dado por (9), e deve ser corrigido pela taxa acumulada observada até T, para comparar com o valor do contrato liquidado, no vencimento:

$$P\&L(T) = Q \cdot 100.000 - \frac{Q \cdot 100.000}{\left(1 + tx_{pré}(t_{operação})\right)^T} \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252} \tag{10}$$

Considerando o dia da operação, $t_{operação}$, se em (9) isolarmos o montante futuro $R\$100.000$, e multiplicarmos ambos os lados pelo número de contratos operados, Q, então $R\$100.000 \cdot Q$ faz as vezes do valor futuro $N \cdot \left(1 + tx_{operação}\right)^T$de um swap : $Q \cdot PU_T(t_{operação}) \cdot (1 + tx_{operação})^T = Q \cdot R\$100.000 \longleftrightarrow N \cdot (1 + tx_{operação})^T$. A priori, a taxa pré de fechamento no dia da operação, $tx_{pré}(t_{operação})$, não necessariamente é igual à taxa pré operada no contrato, $tx_{operação}$; contudo, supomos que sejam iguais: $tx_{operação} = tx_{pré}(t_{operação})$.

Diante disto, a taxa pré de um contrato de DI é

$$P\&L(T) = Q \cdot R\$100.000 - \frac{Q \cdot PU_T(t_{operação}) \cdot (1 + tx_{operação})^T}{\left(1 + tx_{pré}(t_{operação})\right)^T} \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

$$P\&L(T) = N \cdot (1 + tx_{operação})^T - \frac{N \cdot (1 + tx_{operação})^T}{\left(1 + tx_{pré}(t_{operação})\right)^T} \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252}$$

$$P\&L(T) = N \cdot (1 + tx_{operação})^T - N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252} \tag{11}$$

O $P\&L$ a valor presente numa data $t < T$ é, então, equivalente àquele de um swap Pré x CDI:

$$\frac{1}{(1 + tx_{pré}(t))^{T-t}} P\&L(t,T) = \frac{1}{(1 + tx_{pré}(t))^{T-t}} \left[N \cdot (1 + tx_{operação})^T - N \cdot \prod_{i=1}^{T} (1 + cdi_i)^{1/252} \right] \tag{12}$$

Então, a curva de swaps Pré x CDI deve, a priori, ser igual à de futuros DI, se construída com instrumentos de mesmos vencimentos.

Referências

[Fabozzi] Fabozzi, F. (2007). “Fixed Income Analysis”. Chapter 8.

[Lutz] Lutz, F. (1940). The structure of interest rates. The quarterly journal of economics

[Modigliani e Sutch] Modigliani, F., Sutch, R. (1966). Innovations in interest rate policy.

[Keynes] Keynes, J. (1936). The General Theory of Employment, Interest and Money.

[Catalão] Catalão, A. (2017). Método de booststrap de construção de curvas.