Descripción de este documento

La cuarta Práctica de Laboratorio está asociada al tema de Dualidad en Programación Lineal. Ello es debido a que, en los juegos bipersonales de suma cero (los más sencillos que se pueden presentar en Teoría de Juegos), hay una relación de dualidad entre ambos jugadores. Por tanto, la cuarta Práctica de Laboratorio versa sobre este tipo de juegos.

Al objeto de facilitar la realización de la práctica de laboratorio, en estas páginas se hace un repaso de los conceptos básicos sobre juegos bipersonales de suma cero que aparecen en la práctica.

Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos está estrechamente relacionada con la Teoría de la Decisión. Pero, si bien en Teoría de la Decisión el rival es un oponente pasivo (la naturaleza), que actúa de forma aleatoria y sin manifestar interés por la decisión que se tome, en Teoría de Juegos participan decisores (jugadores), que tienen intereses encontrados, y a veces en competencia.

Juegos bipersonales de suma cero

Se llaman así porque en ellos participan sólo dos adversarios, ó jugadores (ejércitos, equipos, empresas, etc.), tal que un jugador gana lo que otro pierde, de forma que la suma de las ganancias de ambos jugadores es cero.

Tenemos entonces dos jugadores, que llamaremos jugador fila (J_F), y jugador columna (J_C), (también se les puede llamar jugadores 1 y 2: J_1 y J_2).

- Asunciones importantes: (i) Ambos jugadores son *racionales*. (ii) Cada jugador elige su estrategia para obtener su propio beneficio ó bienestar (sin consideraciones para el oponente). Esto es: no hay cooperación.
- El jugador fila dispone de m estrategias (m filas), y el jugador columna de n estrategias (n columnas). Y cada jugador conoce las estrategias de su oponente.
- Se representa mediante una matriz: La matriz de recompensa, o ganancias, del jugador fila:

				Jugador J_C		
		Estrategia 1	...	Estrategia j	...	Estrategia n
	Estrategia 1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	...	...	...	...	...	...
Jugador J_F	Estrategia i	a_{i1}	...	$\boldsymbol{a_{ij}}$	...	a_{in}
	...	...	...	...	...	...
	Estrategia m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Matriz de ganancias del Jugador fila J_F

- Si el jugador fila elige la estrategia i, y el jugador columna la estrategia j, habrá una *ganancia* a_{ij} para el jugador fila, y una ganancia de $-a_{ij}$ para el jugador columna (esto es, una *pérdida* de a_{ij} para el jugador columna).

Estrategia pura (existe punto de silla)

Ejemplo 0.1

	J_C			Mínimo (por columnas)	
	1	2	4	1	← Valor máximo
J_F	1	0	5	0	
	0	1	-1	-1	
Máximo (por filas)	1	2	5		
	↑ Valor mínimo				

- **Jugador fila:** Intenta maximizar su ganancia mínima, por ello utiliza la estrategia Maximin: primero calcula la mínima ganancia que puede obtener en las columnas de cada fila. Y luego, el máximo de las mismas.

$$\text{Jugdor fila } J_F: \quad \max_{i=1,\dots,m}\{\min_{j=1,\dots,n} a_{ij}\} = \max\{1, 0, -1\} = 1$$

- **Jugador columna:** Intenta minimizar su máxima pérdida, por ello utiliza la estrategia Minimax: Primero calcula la máxima pérdida que puede obtener en las filas de cada columna. Y luego, el mínimo de las mismas.

$$\text{Jugador columna } J_C: \quad \min_{j=1,\dots,n}\{\max_{i=1,\dots,m} a_{ij}\} = \min\{1, 2, 5\} = 1$$

Un juego bipersonal de suma cero en el que ambos valores coincidan, esto es, tal que

$$\max_{i=1,\dots,m}\{\min_{j=1,\dots,n} a_{ij}\} = \min_{j=1,\dots,n}\{\max_{i=1,\dots,m} a_{ij}\}$$

se dice que tiene **punto de silla**, y a dicho número se le llama **valor del juego**.

El **valor del juego** representa la ganancia del Jugador fila J_F cuando ambos jugadores juegan de manera óptima. Se dice que se trata de un **juego justo**, (ó equilibrado), cuando el valor del juego es cero.

En nuestro ejemplo, existe punto de silla, ya que se cumple la condición de punto de silla:

$$\max_{i=1,\dots,m}\{\min_{j=1,\dots,n} a_{ij}\} = 1 = \min_{j=1,\dots,n}\{\max_{i=1,\dots,m} a_{ij}\}$$

Por tanto, el valor del juego es $a_{11} = 1$ (no es un juego justo). El juego tiene una **estrategia pura:** ambos jugadores **siempre** elegirán su primera estrategia: $i = 1$, $j = 1$.

- Una forma sencilla de determinar si un juego tiene punto de silla es buscar un número de la matriz que sea el menor en su fila, y el mayor en su columna.
- La búsqueda del punto de silla se puede simplificar mediante el concepto de *estrategias dominadas*.

  Una estrategia j está dominada por una estrategia i si la estrategia i es siempre al menos tan buena (y algunas veces mejor) que la estrategia j, sin importar lo que hace el oponente.
- Una estrategia dominada se puede eliminar de inmediato, sin ninguna consideración.

En el ejemplo anterior, para el jugador fila J_F, la estrategia 3 (fila 3), está dominada por la estrategia 1 (fila 1), ya que, para cualquier estrategia (columna) del jugador J_C, el jugador J_F obtiene ganancias más elevadas con la fila 1 que con la fila 3.

Al eliminar la estrategia dominada, se obtiene una matriz de recompensa reducida:

	Jugador J_C		
Jugador J_F	1	2	4
	1	0	5
	0	1	-1

$\xrightarrow[\text{estrateg. 3}]{\text{Eliminamos}}$

	Jugador J_C		
Jugador J_F	1	2	4
	1	0	5

Ahora, para el jugador columna J_C (que busca minimizar la máxima pérdida), la estrategia 3 (columna 3), está dominada por las estrategias (columnas) 1 y 2, puesto que ambas le suponen menos pérdidas que la 3. Por tanto podemos eliminar la estrategia 3 del jugador columna:

	Jugador J_C		
Jugador J_F	1	2	4
	1	0	5

$\xrightarrow[\text{estrateg. 3}]{\text{Eliminamos}}$

	Jugador J_C	
Jugador J_F	1	2
	1	0

Y en esta última matriz, para el jugador J_F (que persigue maximizar la mínima ganancia), la estrategia 2 (fila 2), está dominada por la estrategia 1 (fila 1), luego se puede eliminar:

	Jugador J_C	
Jugador J_F	1	2
	1	0

$\xrightarrow[\text{estrateg. 2}]{\text{Eliminamos}}$

	Jugador J_C	
Jugador J_F	1	2

En consecuencia, en 1 hay un punto de silla, lo que implica que ambos jugadores deberán elegir la estrategia 1, y el valor del juego es $a_{11} = 1$.

Estrategias Mixtas ó Aleatorizadas (no existe punto de silla)

Cuando un juego no tiene punto de silla (y por tanto no hay estrategias puras), para cualquier decisión de estrategias hay un jugador que puede beneficiarse cambiando de estrategia unilateralmente. En tal caso, cada jugador deberá seleccionar su estrategia con una determinada probabilidad: Es lo que se conoce como *estrategias mixtas ó aleatorizadas*. Sea

$$\begin{aligned} x_i &= \text{probabilidad de que el Jugador fila } J_F \text{ use la estrategia } i,\ (i = 1, \dots, m), \\ y_j &= \text{probabilidad de que el Jugador columna } J_C \text{ use la estrategia } j,\ (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Donde, por ser probabilidades, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, con $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, y análogamente $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, con $y_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Ejemplo 0.2 En el ejemplo del juego de "*Pares ó Nones*" de la práctica de laboratorio, tenemos que la matriz de ganancias del jugador fila J_F es:

		Jugador J_C		
		1 dedo	2 dedos	Mínimo
Jugador J_F	1 dedo	-1	1	-1
	2 dedos	1	-1	-1
	Máximo	1	1	

Que no presenta punto de silla. Desde un punto de vista racional, ningún jugador elegirá una estrategia pura (esto es, sacar *siempre* el mismo número de dedos), porque beneficiaría a su adversario, por tanto cada jugador optará por utilizar sus estrategias según un porcentaje de veces, lo cual supone introducir aleatoriedad en la selección de las estrategias. Esto es, cada jugador utilizará una estrategia *mixta*.

Resolución gráfica: Vamos a buscar el valor del juego gráficamente.

- **Jugador fila** J_F:

  Asignamos probabilidades (x_1, x_2) a las dos estrategias de J_F. Como $x_1 + x_2 = 1$, equivale a decir que el Jugador fila J_F tiene una estrategia aleatorizada $(x_1, 1 - x_1)$, con $0 \leq x_1 \leq 1$. Tenemos así:

			Jugador J_C	
	Probabilidad		1 dedo	2 dedos
Jugador J_F	x_1	1 dedo	-1	1
	$1-x_1$	2 dedos	1	-1

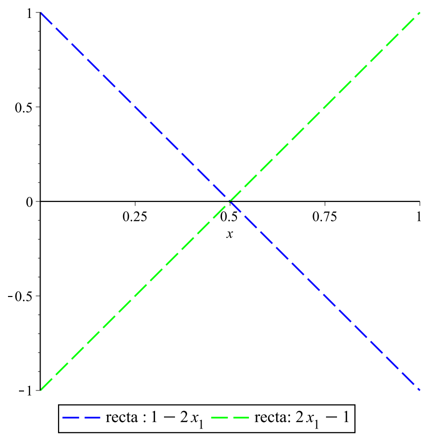
Observación: Claramente, una estrategia pura para J_F se obtendría bien para $x_1 = 1$ (J_F *siempre* saca un dedo), ó para $x_1 = 0$ (J_F *siempre* saca dos dedos).

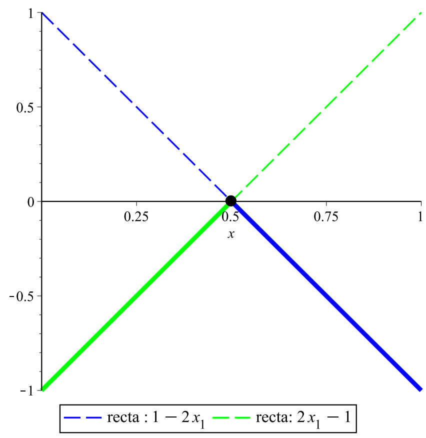
La **GANANCIA ESPERADA** del Jugador fila J_F es:

Si J_C elige su primera estrategia (1^{a} columna): $(-1)x_1 + (1-x_1) = 1 - 2x_1$
Si J_C elige su segunda estrategia (2^{a} columna): $x_1 + (-1)(1-x_1) = 2x_1 - 1$

Y según el criterio Maxmin del jugador fila, hay que resolver: $\max\min\{1-2x_1, 2x_1-1\}$.

A continuación están representadas las dos rectas en la gráfica de la izquierda, ambas en $x_1 \in [0,1]$ (ya que x_1 es una probabilidad). Asimismo, en la gráfica de la derecha está representada la función $\min\{1-2x_1, 2x_1-1\}$ en el intervalo $[0,1]$: es la línea gruesa en forma de "V" invertida. El punto $(0.5, 0)$, es el que maximiza dicha función y proporciona la mejor estrategia para J_F, que se consigue para $x_1 = 0.5$, con valor del juego igual a 0. Como $x_1 = 0.5$ implica $1 - x_1 = 0.5$, la solución para J_F se obtiene asignando probabilidades $(1/2, 1/2)$ a sus dos estrategias.





- **Jugador columna** J_C:

Al igual que antes, asignamos probabilidades $(y_1, 1-y_1)$ a las dos estrategias de J_C, con $0 \leq y_1 \leq 1$:

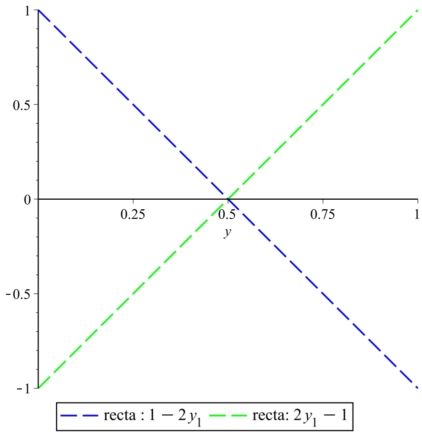
		Jugador J_C Probabilidad			
		y_1	$1-y_1$		
		1 dedo	2 dedos		
Jugador J_F	1 dedo	-1	1	$\longrightarrow$	$1-2y_1$
	2 dedos	1	-1	$\longrightarrow$	$2y_1-1$

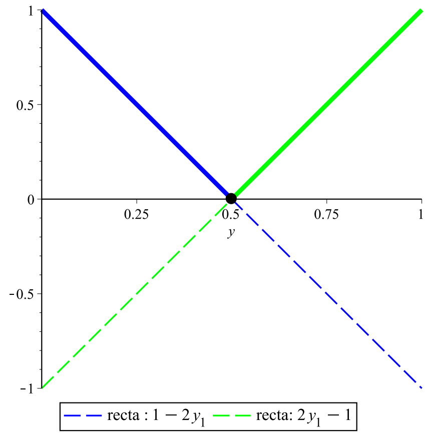
La **GANANCIA ESPERADA** del Jugador columna J_C es:

Si J_F elige su primera estrategia (1^{a} fila): $(-1)y_1 + (1-y_1) = 1 - 2y_1$
Si J_F elige su segunda estrategia (2^{a} fila): $y_1 + (-1)(1-y_1) = 2y_1 - 1$

Y según el criterio Minmax del jugador columna, hay que resolver: $\min\max\{1-2y_1, 2y_1-1\}$.

Nuevamente se muestra la representación gráfica de ambas rectas en el intervalo $y_1 \in [0,1]$. La función $\max\{1-2y_1, 2y_1-1\}$ es la línea gruesa en forma de "V" de la gráfica de la derecha.





El punto $(0.5, 0)$ es la solución del problema Minimax de J_C, que se alcanza para $y_1 = 0.5$, esto es, asignando probabilidades $(1/2, 1/2)$ a sus dos estrategias, con valor del juego igual a 0.

Observemos que en ambos casos hemos obtenido el mismo valor $= 0$ del juego, esto es:

$$\max \min\{1 - 2x_1, 2x_1 - 1\} = 0 = \min \max\{1 - 2y_1, 2y_1 - 1\}$$

Que no es una coincidencia: es lo que establece el teorema MinMax debido a Von Neumann. Y más adelante, veremos también que es una consecuencia de la relación de dualidad entre ambos jugadores.

Estrategias mixtas: Resolución con Programación Lineal

Consideremos cualquier juego bipersonal de suma cero con estrategias mixtas tal que, después de eliminar las estrategias dominadas, los jugadores tienen sólo **dos** estrategias. En este caso, el valor del juego se puede encontrar por el procedimiento gráfico. Sin embargo, en el caso general, se debe aplicar la Programación Lineal. El proceso es el siguiente:

1. Verificar si hay punto de silla. Si existe, es la solución óptima, tenemos el valor del juego y las estrategias puras óptimas de cada jugador (lo que se también se llama una *solución de equilibrio*), y hemos terminado.

2. Caso contrario: eliminar las estrategias dominadas por el Jugador fila. Después se pasa a eliminar las estrategias dominadas del Jugador columna. Luego las del Jugador fila, y así sucesivamente, hasta que no queden estrategias dominadas.

3. Si la matriz de ganancias del juego es 2×2, se puede resolver gráficamente (y también por Programación Lineal, claro está).

4. En caso contrario, se resolverá por Programación Lineal.

Ejemplo 0.3 Consideremos la matriz de recompensas del Jugador fila J_F del juego "*Piedra, Papel, Tijera*", de la práctica de laboratorio. En dicho juego, "piedra gana (aplasta) a tijera, tijera gana (corta) a papel, y papel gana (envuelve) a piedra". La ganancia, ó pérdida, de cada estrategia es de 1 ó -1. La matriz de ganancias del jugador fila J_F es:

		Jugador J_C		
		piedra	papel	tijera
	piedra	0	-1	1
Jugador J_F	papel	1	0	-1
	tijera	-1	1	0

Que no tiene punto de silla, ni tampoco estrategias dominadas que se puedan eliminar. Por tanto hay que aplicar estrategias mixtas ó aleatorizadas, como hicimos anteriormente, y los problemas resultantes no se pueden resolver gráficamente: habrá que resolverlos mediante Programación Lineal.

- **Jugador fila** J_F. Asignamos probabilidades (x_1, x_2, x_3) a las estrategias de J_F, con $x_1+x_2+x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, y operamos igual que antes para calcular la ganancia esperada de J_F según cuál sea la estrategia (columna) que elija J_C:

	Probab.	Jugador J_C		
	x_1	0	-1	1
Jugador J_F	x_2	1	0	-1
	x_3	-1	1	0
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
		$x_2 - x_3$	$-x_1 + x_3$	$x_1 + x_2$

Según el criterio Maximin, el Jugador fila J_F, intentará maximizar el mínimo de tales ganancias, luego hay que resolver:

$$\max \min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 + x_2\}$$

Sea v una nueva variable, tal que:

$$\max \underbrace{\min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 + x_2\}}_{v} = \max v$$

Como $v = \min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 + x_2\}$, se tiene: $v \leq x_2 - x_3$, $v \leq -x_1 + x_3$, y $v \leq x_1 + x_2$.

Por tanto, el problema de Programación Lineal del Jugador fila J_F:

$$\begin{array}{ll} \max & Z := v \\ \text{s.t.} & v \leq x_2 - x_3 \\ & v \leq -x_1 + x_3 \\ & v \leq x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1,2,3 \\ & v \text{ no restringida} \end{array} \quad \xrightarrow[v_1, v_2 \geq 0]{v = v_1 - v_2} \quad \begin{array}{ll} \max & Z := v_1 - v_2 \\ \text{s.t.} & v_1 - v_2 \leq x_2 - x_3 \\ & v_1 - v_2 \leq -x_1 + x_3 \\ & v_1 - v_2 \leq x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1,2,3 \\ & v_1, v_2 \geq 0 \end{array}$$

- **Jugador columna** J_C. Asignamos probabilidades (y_1, y_2, y_3) a las estrategias de J_C, con $y_1+y_2+y_3 = 1$, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, y operamos igual que antes para calcular la ganancia esperada de J_C según cuál sea la estrategia (fila) que elija J_F:

	Jugador J_C				
	y_1	y_2	y_3		
	0	-1	1	$\longrightarrow$	$-y_2 + y_3$
Jugador J_F	1	0	-1	$\longrightarrow$	$y_1 - y_3$
	-1	1	0	$\longrightarrow$	$-y_1 + y_2$

Y por el criterio Minimax, el Jugador columna J_C intentará minimizar la máxima pérdida, luego hay que resolver:

$$\min \max\{-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2\}$$

Sea w una nueva variable tal que:

$$\min \underbrace{\max\{-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2\}}_{w} = \min w$$

Como $w = \max\{-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2\}$, se tiene: $w \geq -y_2 + y_3$, $w \geq y_1 - y_3$, $w \geq -y_1 + y_2$

Y el problema de Programación Lineal del Jugador columna J_C es:

$$\begin{array}{ll} \min & G := w \\ \text{s.t.} & w \geq -y_2 + y_3 \\ & w \geq y_1 - y_3 \\ & w \geq -y_1 + y_2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_i \geq 0, i = 1,2,3 \\ & w \text{ no restringida} \end{array} \quad \xrightarrow[w_1, w_2 \geq 0]{w = w_1 - w_2} \quad \begin{array}{ll} \min & G := w_1 - w_2 \\ \text{s.t.} & w_1 - w_2 \geq -y_2 + y_3 \\ & w_1 - w_2 \geq y_1 - y_3 \\ & w_1 - w_2 \geq -y_1 + y_2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_i \geq 0, i = 1,2,3 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Observaciones:

1. El dual del problema de Programación Lineal del Jugador fila es el problema del jugador columna.
2. Por el criterio de optimalidad de la Dualidad (”Principio supervisor”), el valor óptimo de ambos problemas es el mismo (lo que también dice el Teorema Minimax): $Z^* = G^*$. Que es el valor del juego.