

Laboratorium 3

Filip Dziurdzia

19 Marzec 2023

1 Specyfikacja sprzętowa

Jednostka: MacBook Pro 2020

System operacyjny: macOS Ventura 13.0

Procesor: Apple M1

Architektura procesora: ARM

Pamięć RAM: 8GB

2 Środowisko

Zadanie rozwiązałem przy użyciu języka **Python 3.9.13** oraz dwóch bibliotek pomocniczych - **matplotlib** i **numpy**. Biblioteka **numpy** została wykorzystana do tworzenia równoodległych węzłów oraz do uproszczenia działania na danych. Paczka **matplotlib** umożliwiła zwizualizowanie zarówno zadanej funkcji jak i funkcji interpolującej. Wszystkie wykresy zamieszczone w tym sprawozdaniu zostały wygenerowane dzięki tej bibliotece.

3 Zadany problem

Dla funkcji

$$f(x) = \sin \frac{4x}{\pi} \cdot e^{\frac{-0.2x}{\pi}}, x \in (-2 \cdot \pi^2, \pi^2) \quad (1)$$

wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliży zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

4 Wstęp teoretyczny

Zagadnienie interpolacji Lagrange’a polega na znalezieniu wielomianu interpolującego, który przechodzi przez znane nam punkty należące do zadanej funkcji. Dla $n + 1$ znanych punktów, wielomian interpolujący jest n -tego stopnia, dlatego wraz ze wzrostem liczby znanych punktów należących do funkcji, rośnie dokładność jej przybliżenia przez wielomian.

Postać Lagrange’a

Dla zadanych węzłów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, wielomian Lagrange’a ma postać

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) \quad (2)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3)$$

Postać Newtona

Dla zadanych $n+1$ węzłów, podobnie jak w postaci Lagrange’a, wielomian stopnia n przyjmuje postać

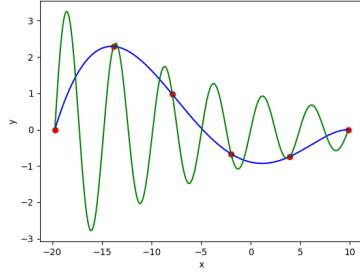
$$p(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad (4)$$

5 Część doświadczalna

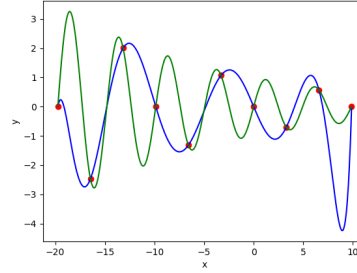
Węzły rozmieszczone równomiernie na przedziale

Poniższe wykresy (??) przedstawiają wielomian interpolujący otrzymany z postaci Lagrange’a dla $n \in (6, 10, 12, 20)$.

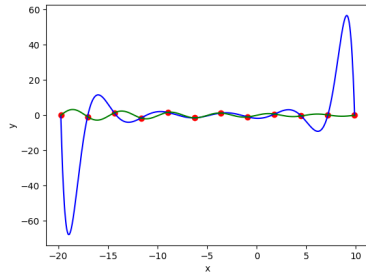
Analizując wyniki możemy wyciągnąć kilka poważnych wniosków. Po pierwsze, dla funkcji okresowych, nawet ze zmienną amplitudą, równoodległe rozmieszczenie węzłów daje bardzo ubogie efekty, ponieważ często nakładają się one wraz z okresowością funkcji. Dla $n \in (1, 6)$ funkcja interpolująca jest funkcją stałą $y = 0$. Po drugie, równomierne rozmieszczenie węzłów, dużo lepiej radzi sobie z przybliżaniem funkcji w okolicach środka przedziału niż na brzegach. Wraz ze wzrostem n , odchylenia na brzegach rosną. Zjawisko to zostało nazwane efektem Runge’ego, i może pierwszy raz zostać zaobserwowane dla $n = 10$ (2). Ostatni wniosek jaki można wyciągnąć, to obserwacja niepraktyczności takiego rozstawienia. Dokładność funkcji interpolującej rośnie wraz z liczbą węzłów (ignorując odchylenia na brzegach), jednak równocześnie rośnie zauważalność efektu Runge’ego, który znacząco utrudnia oszacowanie poprawności dopasowania w środkowej części przedziału.



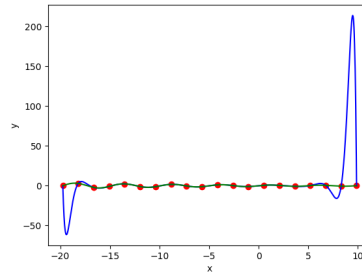
Rysunek 1: Równoodległe węzły przy liczbie węzłów $n = 6$



Rysunek 2: Równoodległe węzły przy liczbie węzłów $n = 10$



Rysunek 3: Równoodległe węzły przy liczbie węzłów $n = 12$



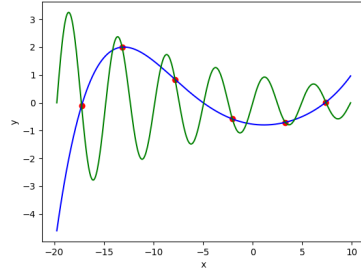
Rysunek 4: Równoodległe węzły przy liczbie węzłów $n = 20$

Węzły rozmieszczone według zer wielomianu Czebyszewa

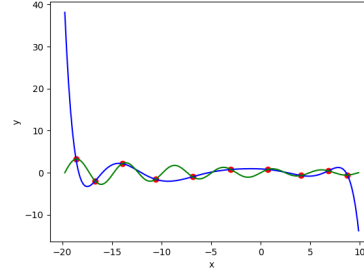
Poniższe wykresy (5) przedstawiają wielomian interpolujący otrzymany z postaci Lagrange'a dla $n \in (6, 10, 15, 50)$.

Stawiając rozmieszczenie węzłów według zer wielomianu Czebyszewa w kontrze do poprzedniego przypadku, możemy naprawdę zauważyć supremację drugiego wariantu nad pierwszym. Największym benefitem korzystania z tego sposobu rozkładu węzłów jest brak występowania efektu Runge'ego. Ten kluczowy fakt pozwala nam ustawić liczbę węzłów bez żadnych ograniczeń. Najlepiej ukazuje to porównanie wykresu dla $n = 50$ (8) w obecnym przypadku do wykresu dla $n = 20$ (4) omówionego powyżej. Kolejny plus dla tego rozwiązania jest mniejszy wpływ okresowości na dokładność funkcji interpolującej dla małych n . Niestety, istnieje pewna wada obecnego rozwiązania. Na wykresach dla $n = 15$ (7) oraz $n = 50$ (8) możemy zauważyć, że więcej węzłów zlokalizowanych jest bliżej końców przedziałów, co wpływa na dokładność w tamtych rejonach, jednak równocześnie skutkuje spadkiem dokładności w środku rozważanego przedziału. Rozwiązaniem na to jest zwiększanie n , aż otrzymamy wymaganą dokładność, co jednak wiąże się z większym zapotrzebowaniem na moc obliczeniową kom-

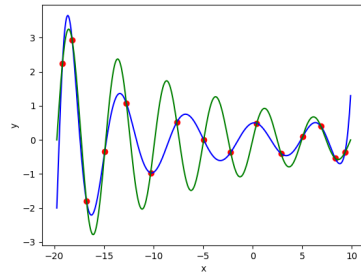
putera. Biorąc jednak wszystko pod uwagę, korzyści ze stosowania takiego rozmieszczenia zdecydowanie przewyższają wady, stąd można uznać, że rozkład węzłów według zer wielomianu Czebyszewa jest dużo lepszym rozwiązaniem od równoodległego rozmieszczenia węzłów.



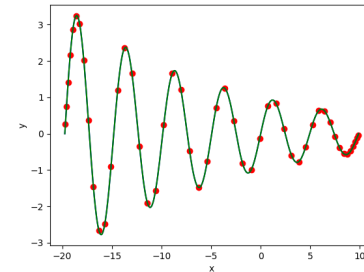
Rysunek 5: Zera Czebyszewa przy liczbie węzłów $n = 6$



Rysunek 6: Zera Czebyszewa przy liczbie węzłów $n = 10$



Rysunek 7: Zera Czebyszewa przy liczbie węzłów $n = 12$



Rysunek 8: Zera Czebyszewa przy liczbie węzłów $n = 20$

6 Błąd maksymalny i uśredniony

W tabelach (9) poniżej zamieszczone zostały maksymalne odchylenia dla przypadków interpolacji omawianych wcześniej. Błąd został policzony ze wzoru

$$\max_{i=0,\dots,500} |f(x_i) - w(x_i)| \quad (5)$$

Tabele:

n	Błąd maksymalny
6	4.83
10	4.60
12	70.66
15	146.41

Rysunek 9: Równoodległe węzły

n	Błąd maksymalny
6	5.63
10	38.15
15	2.16
50	$6.01 \cdot 10^{-5}$

Rysunek 10: Zera Czebyszewa

Następnie uśredniamy otrzymane błędy korzystając ze wzoru

$$\frac{1}{500} \sum_{i=0}^{500} |f(x_i) - w(x_i)| \quad (6)$$

Wyniki zostały zamieszczone w poniższych tabelach (11)

n	Błąd uśredniony
6	1.40
10	1.39
12	9.11
15	7.99

Rysunek 11: Równoodległe węzły

n	Błąd uśredniony
6	1.18
10	1.93
15	0.70
50	$1.44 \cdot 10^{-6}$

Rysunek 12: Zera Czebyszewa

7 Postać Newtona

Pomimo występowania ilorazów w postaci Lagrange'a, nie zaobserwowałem żadnych różnic zarówno między wykresami oraz między dokładnością dla obliczeń wykonywanych dla wielomianu postaci Lagrange'a i Newtona, dlatego postanowiłem nie dublować otrzymanych wyników i ograniczyć się do tego krótkiego wyjaśnienia.

8 Podsumowanie

Interpolacja Lagrange'a stanowi bardzo potężne narzędzie w dziedzinie metod obliczeniowych, które zezwala nam na zobrazowanie funkcji posiadając tylko

część prawdziwego obrazka. Pośród omawianych sposobów rozstawienia węzłów, zdecydowany prym wie dzie rozkład według zer wielomianu Czebyszewa. Korzyści wynikające z takie rozwiązania to między innymi większa dokładność na brzegach przedziałów oraz nieograniczona liczba przyjmowanych węzłów. Zadanie wymagało od nas nie brania węzłów na końcach przedziału w rozkładzie Czebyszewa, co ogranicza dokładność metody oraz pozostawia miejsca do optymalizacji.