SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

Gibbsovo uzorkovanje

Filip Boltužić
Voditelj: *Prof. dr. sc. Bojana Dalbelo Bašić*

Zagreb, veljača 2014.

SADRŽAJ

1. Uvod

Gibbsovo uzorkovanje pripada Monte Carlo Markovljevim (engl. *Monte Carlo Markov Chain, MCMC*) metodama. Markovljevim lancima modelira se bezmemorijski matematički sustav stanja i prijelaza između stanja (Kass et al., 1998). Markovljev lanac je niz vrijednosti generiranih u procesu s Markovljevim svojstvom. Prema Markovljevom svojstvu međuovisnost postoji samo između susjednih vrijednosti, tj. vrijednost u Markovljevom lancu generira se samo na temelju prethodne vrijednosti, zbog čega se nazivaju bezmemorijskim.

Gibbsovo uzorkovanje zadovoljava obilježja Monte Carlo metoda i Markovljevih lanaca. Metoda generira niz uzoraka, gdje su generirani susjedi međusobno zavisni (korelirani). Početni uzorci (engl. *burn out period*) Gibbsovog uzorkovanja se često zanemaruju jer ne predstavljaju ciljanu distribuciju.

1.1. Pretpostavke

Distribucija iz koje je potrebno uzorkovati je "posebna", jer nije moguće uzorkovati izravno. Izračun vjerojatnosti sunčanog ili kišovitog vremena tijekom sutrašnjeg dana proces je koji je moguće procijeniti Gibbsovim uzorkovanjem. No, informacije koje su potrebne za Gibbsovo uzorkovanje su informacije o uvjetnim distribucijama vjerojatnosti sunčanog, odnosno kišovitog vremena. Potrebno je poznavati vjerojatnosti o vremenu temeljem današnjeg vremena. Odnosno, ukoliko nas zanimaju $P(sutra = kiša)$ i $P(sutra = sunce)$, potrebno je poznavati vjerojatnosti:

- $P(sutra = kiša|danas = kiša)$
- $P(sutra = kiša|danas = sunce)$
- $P(sutra = sunce|danas = kiša)$
- $P(sutra = sunce|danas = sunce)$

2. Monte Carlo metode

2.1. Povijest

Monte Carlo metode obuhvaćaju računalne modele zasnovane na stohastičkoj matematici, točnije, uporabi nasumičnih brojeva u izračunima. Moderne Monte Carlo metode osmislio je Stanislaw Ulam (Kass et al., 1998), a ime su dobile po omiljenom odredištu zabave Ulamovog ujaka – Monte Carlo kockarnicama. Originalno su zamišljene kako bi pomogle pri difuziji neutrona. Svrha Monte Carlo metoda bila je izraditi umjetno stvoriti nasumičan proces bez mogućnosti upravljanja njime. John von Neumann, slavni znanstvenik, uvidio je potencijal Monte Carlo metode i implementirao ih na računalu ENIAC. Intenzivnija primjena Monte Carlo metoda počela je s pojavom snažnijih računala.

2.2. Mehanizam

Monte Carlo metode pokušavaju oponašati slučajne procese u prirodi (npr. bacanje novčića). Na taj način pokušavaju se predvidjeti svi mogući ishodi i vjerojatnosti događaja unutar okvira zadanog procesa.

Monte Carlo metoda je probabilistički računalni algoritam koji pokušava predvidjeti sve moguće ishode i vjerojatnosti procesa na koji je primijenjen. Temelji se na slučajnim varijablama, koje je potrebno zadati u obliku funkcije gustoće (Gilks et al., 1996). Na temelju funkcija gustoće $P(x)$ Monte Carlo metodama moguće je riješiti probleme:

- generiranja R uzoraka $\{x^{(r)}\}_{r=1}^{R}$ iz $P(x)$,
- izračun očekivanja funkcija s distribucije $P(x)$.

Monte Carlo metodama se simuliraju sustavi s mnogo neizvjesnosti. Pokazale su se iznimno učinkovite prilikom modeliranja složenih vjerojatnosti i strategija odlučivanja kojima nije moguće upravljati, ili ih je iznimno teško ili zahtjevno izgraditi.

Izračun osiguranja, modeliranje kreditnih rizika u financijskim institucijama, rekonstrukcija eksplozija samo su neki primjeri u kojima se koriste Monte Carlo metode, zbog činjenice da je navedene procese u stvarnosti teško simulirati i pratiti.

U Monte Carlo analizama potrebno je definirati distribucije vjerojatnosti slučajnih varijabli. Markovljevim lancima moguće je modelirati međuovisnost, što nije moguće Monte Carlo metodama. Ukoliko je potrebno dobiti uzorke iz aposteriori distribucije vjerojatnosti, Markovljevim lancima moguće je uzastopno uzorkovati dok uzorkovanje ne postane stabilan proces. Tada je moguće dobiti nezavisne uzorke iz aposteriori distribucije vjerojatnosti.

Monte Carlo integracija pripada Monte Carlo metodama, a služi za izračun integrala.

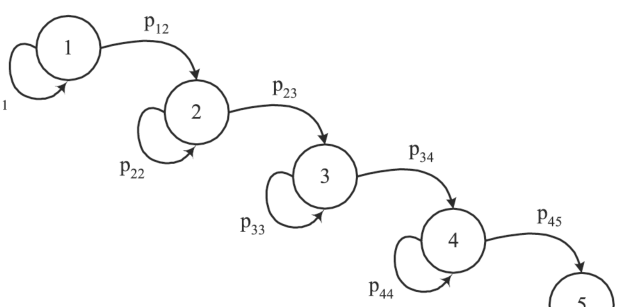
Monte Carlo metode imaju svojstvo crne kutije (engl. *black box*). Njima je moguće dobiti odgovore na razna pitanja procjene vjerojatnosti, kao: kolika je vjerojatnost kiše sutra, kolika je vjerojatnost da će Googleova dionica izgubiti na vrijednosti, kolika je vjerojatnost da će klijent vratiti kredit …No, nije moguće saznati koji su razlozi na temelju kojih je dobivena određena vjerojatnost.

3. Markovljev lanac

Markovljeve lance inicijalno je predstavio ruski znanstvenik Andrey Markov 1912. godine. Markov je pokušao modelirati slavno remek djelo Aleksandra Puškina *Jevgenij Onjegin*. Cilj modela bio je predviđanje idućih slova temeljem trenutnih. Markovljeva ideja je po prvi puta predstavila koncepte zavisne varijable i uvjetne vjerojatnosti.

Markovljevi lanci se, također, primjenjuju nad širokim spektrom problema. Koriste se za modeliranje događaja i njihovih vjerojatnosti kada nije potrebno pamtiti prošle događaje. Markovljevi lanci sastoje se od niza stanja i vjerojatnosti prijelaza između stanja. Primjer Markovljevog lanca prikazan je slikom 3.1. Na slici je vidljivo pet stanja označenim brojevima u krugovima, jednosmjernih strelica kojima se označavaju mogućih prijelazi te matrica prijelaza P, matrični zapis Markovljevog lanca. Markovljev lanac ima oblik usmjerenog grafa. Stanja na burzama dionica, vremenska prognoza, prepoznavanje govora su neke od problema koji se često modeliraju Markovljevim lancima.

Markovljevi lanci pretpostavljaju kako je sustav koji se modeliraju stabilan. U praksi, to često nije tako. Kompleksni sustavi, kao što su burze dionica, sastoje se od pravilnosti i šuma. No, često moguće procijeniti jesu li vjerojatnosti dobivene danas



$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Slika 3.1: Primjer Markovljevog lanca. Preuzeto iz (Wirahadikusumah i Abraham, 2003).

relevantne za nekoliko godina.

4. Gibbsovo uzorkovanje

Gibbsovo uzorkovanje je dobilo ime po Josiahu Willardu Gibbsu, američkom znanstveniku 19. stoljeća koji je izumio Gibbsova nasumična polja. Stuart i Donald Geman su prvi puta opisali postupak Gibbsovog uzorkovanja (Geman i Geman, 1984). Braća Geman bavili su se izradom modela za analizu slike. Gibbsovo uzorkovanje u njihovom radu je poseban slučaj Metropolis-Hastings algoritma (Metropolis et al., 1953). (Gelfand i Smith, 1990) su pokazali potencijalne primjene Gibbsovog uzorkovanja prilikom rješavanja velikog broja statističkih problema.

Gibbsovo uzorkovanje koristi Monte Carlo tehnike za procjenu vjerojatnosti u modelu zasnovanom na Markovljevom lancu. Prema tome, Gibbsovo uzorkovanje primjenjuje se u kompleksnim sustavima visokog stupnja entropije, gdje pretpostavljamo da iduće stanje ovisi samo o trenutnom stanju. Najčešće se koristi za izračune vrijednosti određenih integrala, posebice u višedimenzionalnim slučajevima.

Metropolis Hastings algoritam sličan je algoritmu Gibbsovog uzorkovanja. Metropolis Hastings algoritam ne donosi odluke temeljem svih uvjetnih distribucija vjerojatnosti, već donosi odluku o prihvaćanju ili odbijanju učinjenog koraka (odbijanje vodi u prethodni korak).

Ako je moguće dobiti nezavisne uzorke izravno iz distribucije, dovoljno je koristiti Monte Carlo mehanizme. Ukoliko su poznate samo uvjetne vjerojatnosti, a potrebno je uzorkovati iz zajedničke distribucije vjerojatnosti nužno je koristiti Metropolis Hastings algoritam ili Gibbsovo uzorkovanje. Gibbsovo uzkorkovanje daje uzorak za svaki korak, ali zahtjeva potpunu informaciju o uvjetnim distribucijama vjerojatnosti, što Metropolis Hastings algoritam ne zahtjeva, već odbacuje dobivene uzorke ukoliko su dobiveni na temelju izrazito niske vjerojatnosti.

Gibbsovo uzorkovanje neće uvijek konvergirati.

5. Povijest

Metoda Gibbsovog uzorkovanja kasnije se koristila za uzorkovanje skupova podataka s velikim brojem varijabli. Gibbsovo uzorkovanje najčešće se koristi kada su zadovoljena dva preduvjeta. Prvi preduvjet nalaže da zajednička distribucija (engl. *joint distribution*) nije eksplicitno poznata ili je zahtjevno izravno uzorkovati iz zajedničke distribucije. Drugi preduvjet je poznata uvjetna distribucija svake varijable te mogućnost relativno jednostavnog uzorkovanja iz uvjetnih distribucija.

Gibbsov algoritam uzorkovanja za svaku varijablu generira nizove iz pripadajućih uvjetnih distribucija.

6. Metoda Gibbsovog uzorkovanja

Zajednička distribucija (engl. *joint distribution*) definirana je jednadžbom:

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_p). \tag{6.1}$$

Potrebno je izračunati svojstva marginalne distribucije (engl. *marginal distribution*)

$$f(x) = \int \ldots \int f(x, y_1, y_2, \ldots, y_p) dy_1 dy_2 \ldots dy_p \tag{6.2}$$

kao što su srednja vrijednost (engl. *mean*) ili standardna devijacija (engl. *standard deviation*). Analitičkim izračunom integrala 6.2 dobije se $f(x)$, nakon čega je moguće izračunati željena svojstva. Analitički (ili numerički) izračun integrala može biti izuzetno složen. Gibbsovo uzorkovanje je alternativan način računjanja marginalne distribucije $f(x)$.

Gibbsovim uzorkovanjem generiraju se uzorci $X_1, ..., X_m$ $f(x)$ bez poznate funkcije $f(x)$. Generiranjem dovoljno velikog uzorka, moguće je izračunati svojstva, kao što su srednja vrijednost ili standardna devijacija, funkcije $f(x)$ s određenom preciznošću.

6.1. Dvodimenzionalni slučaj

Prvi primjer Gibbsovog uzorkovanja bit će objašnjen za dvodimenzionalni slučaj. Gibbsovim uzorkovanjem se za par slučajnih varijabli (X, Y) želi dobiti $f(x)$. Poznate su uvjetne distribucije $f(x|y)$ i $f(y|x)$. Generira se Gibbsova sekvenca:

$$Y_0^{'}, X_0^{'}, Y_1^{'}, X_1^{'}, \ldots, Y_k^{'}, X_k^{'}. \tag{6.3}$$

Postavlja je inicijalna vrijednost $Y_0^{'} = y_0^{'}$, dok se sve ostale vrijednosti generiraju prema

$$\begin{aligned} X_j^{'} &\sim f(x|Y_j^{'} = y_j^{'}) \\ Y_{j+1}^{'} &\sim f(y|X_j^{'} = x_j^{'}). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Generiranje niza (6.3) prema formuli (6.4) naziva se **Gibbsovo uzorkovanje**. (Gelfand i Smith, 1990) su predložili generiranje m nezavisnih Gibbsovih sekvenci duljine k. Posljednje vrijednosti X'_k svake od m sekvenci se potom koriste za aproksimaciju $f(x)$. Ako je k dovoljno velik, uzorak X' je nezavisna i jednako distribuirana varijabla (engl. *independent and identically distributed*) kao i inicijalna nasumična varijabla X. Primjere dvodimenzionalnog slučaja Gibbsovog uzorkovanja pokazali su (Casella i George, 1992).

6.1.1. Primjer 1

Primjer zajedničke distribucije nasumičnih varijabli X i Y:

$$\begin{aligned} f(x,y) \propto \binom{n}{x} y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1}, \\ x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 \leq y \leq 1. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Potrebno je izračunati svojstva marginalne distribucije $f(x)$ slučajne varijable X. Uvjetne distribucije su poznate:

$$f(x|y) = \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \tag{6.6a}$$

$$f(y|x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)} y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1} \tag{6.6b}$$

Generiranjem Gibbsove sekvence formulom (6.4) pomoću uvjetnih distribucija (6.6a) i (6.6b) dobivaju se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ iz $f(x)$. Dobiveni $f(x)$ je aproksimacija pravog $f(x)$ kojeg je moguće analitički ili numerički izračunati iz zajedničke distribucije (6.5). U ovome primjeru analitičkim izračunom dobiva se da je

$$\begin{aligned} f(x) = \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \\ x = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Ovdje je moguće usporediti koliko je precizno Gibbsovo uzorkovanje.

6.1.2. Primjer 2

Uvjetne distribucije slučajnih varijabli X i Y su eksponencijalne distribucije

$$\begin{aligned} f(x|y) \propto y e^{-yx}, 0 < x < B < \infty \\ f(y|x) \propto x e^{-xy}, 0 < y < B < \infty, \end{aligned} \tag{6.8}$$

gdje je B poznata konstanta veća od nule. Ograničenje uvjetnih distribucija na interval $(0, B)$ je dovoljan uvjet za postojanje marginalne distribucije $f(x)$.

Prosjek konačnih vrijednosti Y_k' i X_k' Gibbsovih sekvenci može poslužiti za izračun prave marginalne distribucije. Ako se generira m sekvenci Gibbsovim uzorkovanjem onda se vrijednost f(x) može aproksimirati

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x|y_i). \tag{6.9}$$

Jednadžba (6.9) je procjena gustoće. Prilikom izračuna $f(x)$ koristi se informacija o prethodnom stanju $y_1, \ldots, y_m$ iz m Gibbsovih sekvenci. Procjena sadrži više informacija od procjene s vrijednostima $x_1, \ldots x_m$. Reo-Blackwell teorem sadrži dokaz (Casella i Robert, 1996).

7. Dokaz konvergencije

Potreban je dokaz da Gibbsova sekvenca (6.3) proizvodi konvergentne nizove za nasumična varijabla distribucije $f(x)$.

X i Y su nasumične varijable, sa zajedničkom raspodjelom

$$\begin{bmatrix} f_{x,y}(0,0) & f_{x,y}(1,0) \\ f_{x,y}(0,1) & f_{x,y}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Marginalna distribucija x je

$$f_x = \begin{bmatrix} f_x(0) & f_x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 & p_2 + p_4. \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Prema tome, uvjetne distribucije $X|Y = y$ i $Y|X = x$ iznose:

$$A_{y|x} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1+p_3} & \frac{p_3}{p_1+p_3} \\ \frac{p_2}{p_2+p_4} & \frac{p_4}{p_2+p_4} \end{bmatrix}, A_{x|y} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1+p_2} & \frac{p_2}{p_1+p_2} \\ \frac{p_3}{p_3+p_4} & \frac{p_4}{p_3+p_4} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Dobivene matrice sliče matricama prijelaza karakterističnim za Markovljeve lance (Gilks et al., 1996). Generiranje Gibbsove sekvence (6.3) zahtjeva uvjetne distribucije, što je prikazano (7.3). U ovom slučaju Gibbsova sekvenca bit će niz nula i jedinica. Prema (6.4) potrebno je povezati uvjetne distribucije za dobivanje koraka Gibbsove sekvence, iz čega nastaje

$$P(X_1' = x_1|X_0' = x_0) = \sum_y P(X_1'|Y_1' = y_1) \cdot P(Y_1' = y_1|X_0' = x_0) \tag{7.4}$$

, u matričnom obliku

$$A_{x|x} = A_{y|x}Ax|y. \tag{7.5}$$

Vrijedi:

$$f_k = f_0 A_{x|x}^k = (f_0 A_{x|x}^{k-1})A_{x|x} = f_{k-1}A_{x|x} \tag{7.6}$$

Korak k Gibbsove sekvence se dobije kao $(A_{x|x}^k$. Ako su vrijednosti u $A_{x|x}$ pozitivne, onda (7.6) za bilokoju inicijalnu vjerojatnost f_0 i kada $k \to \infty$, f_k konvergiira distribuciji f koja je stacionarna točna niza (7.6) i zadovoljava jednakost

$$fA_{x|x} = f. \tag{7.7}$$

Ako se generiranje Gibbsove sekvence zaustavi kod dovoljno velikog broja koraka k, pretpostavlja se kako je distribucija X_k' približno f_x.

Sve navedeno ne vrijedi samo u slučaju $2x2$, već i u općem slučaju slučajnih varijabli X i Y s n i m mogućih vrijednosti.

7.1. Matematika za slučaj dvije varijable

Dvije slučajne varijable X i Y. Poznate su uvjetne vjerojatnosti $f_{X|Y}(x|y)$ i $f_{Y|X}(y|x)$. Moguće je izračunati marginalnu distribuciju varijable X: $f_X(x)$, kao i zajedničku distribuciju X i Y preko:

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)dy, \tag{7.8}$$

gdje je $f_{XY}(x,y)$ zajednička distribucija.

$$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \tag{7.9}$$

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X|Y}(x|y) \int f_{Y|X}(y|t)f_X(t)dtdy \\ &= \int \left[\int f_{X|Y}(x|y)f_{Y|X}(y|t)dy \right] f_X(t)dt \\ &= \int h(x,t)f_X(t)dt, \end{aligned}$$

gdje je

$$h(x,t) = \left[\int f_{X|Y}(x|y)f_{Y|X}(y|t)dy \right]. \tag{7.10}$$

7.2. Slučaj s više od dvije varijable

U slučaju više od dvije varijable generiranje Gibbsove sekvence radi se uzorkovanje supstitucijom (engl. *substitution sampling*).

U slučaju dvije varijable uzorkovanje supstitucijom je uvijek isto.

Za tri slučajne varijable X, Y i Z potrebno je izračunati marginalnu distribuciju $f_X(x)$. Ako se Y i Z promatraju kao jedna varijabla moguće je jednadžbom

$$f_X(x) = \int \left[\int \int f_{X|YZ}(x|y,z) f_{YZ|X}(y,z|t) dydz \right] f_X(t) dt \tag{7.11}$$

izračunati marginalnu distribuciju. Gibbsova sekvenca bi za j-ti korak bila:

$$\begin{aligned} X_j^{'} &\sim f(x|Y_j^{'} = y_j^{'}, Z_j^{'} = z_j^{'}) \\ Y_{j+1}^{'} &\sim f(y|X_j^{'} = x_j^{'}, Z_j^{'} = z_j^{'}) \\ Z_{j+1}^{'} &\sim f(z|X_j^{'} = z_j^{'}, Y_{j+1}^{'} = y_{j+1}^{'}) \end{aligned}$$

8. Praktični dio

Praktični dio napravljen je temeljem rada (**?**). Resnik i Hardisty objašnjavaju ostvarenje Naivnog Bayesa (engl. *Naive Bayes*) pomoću Gibbsovog uzorkovanja na primjeru klasifikacije polariteta dokumenata prema riječima u dokumentima.

U praktičnom dijelu napravit će se sustav koji izvodi algoritam Naivnog Bayesa, a potrebne vjerojatnosti računa Gibbsovim uzorkovanjem.

8.1. Modeliranje generiranje dokumenata

Dokumenti se definiraju kao skup riječi koje sadrže (engl. *bag of words*). Za dokument W_j potrebno je odabrati prikladniji polaritet $L_j = 0$ ili $L_j = 1$. Skup dokumenata $\mathbb{C}_k$ pripada skupini $L_j = 0$, a označava se s $\mathbb{C}_k = \{W_j | L_j = 0\}$. Potrebno je pronaći polaritet L_j koji za, poznati dokument W_j, maksimizira vjerojatnost $P(L_j|W_J)$. Prema Bayesovom pravilu vrijedi:

$$L_j = \operatorname*{argmax}_L P(L|W_j) = \operatorname*{argmax}_L \frac{P(W_j|L)P(L)}{P(W_j)} \tag{8.1}$$

. Moguće je izostaviti nazivnik $P(W_j)$ jer nije ovisan o L_j. Ovom formulom nastoji se modelirati način na koji su dokumenti nastali.

Odabir polariteta L_j modelira se Bernoulijevom raspodjelom s parametrom π:

$$L_j \sim Bernoulli(\pi) \tag{8.2}$$

, a zatim je potrebno za svaku poziciju riječi u dokumentu R_i odabrati riječ W_j temeljem distribucije vjerojatnosti riječi ovisne o parametru polariteta

$$W_j = Multinomijalna(R_j, \theta_{L_j}) \tag{8.3}$$

. Prema modelu Naivnog Bayesa dokumenti se generiraju

8.1.1. Apriori parametri

Gore spomenute parametre π i θ je nužno dobiti. Kada nisu poznati, ili ih nije moguće procijeniti specifičnom distribucijom, koristi se jednolika raspodjela. π se generira iz Beta distribucije parametrima $\gamma_{\pi 1}$ i $\gamma_{\pi 2}$

9. Zaključak

Zaključak.

10. Literatura

George Casella i Edward I George. Explaining the gibbs sampler. *The American Statistician*, 46(3):167–174, 1992.

George Casella i Christian P Robert. Rao-blackwellisation of sampling schemes. *Biometrika*, 83(1):81–94, 1996.

Alan E Gelfand i Adrian FM Smith. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association*, 85(410):398–409, 1990.

Stuart Geman i Donald Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (6):721–741, 1984.

Walter R Gilks, Sylvia Richardson, i David J Spiegelhalter. *Markov chain Monte Carlo in practice*, svezak 2. CRC press, 1996.

Robert E Kass, Bradley P Carlin, Andrew Gelman, i Radford M Neal. Markov chain monte carlo in practice: A roundtable discussion. *The American Statistician*, 52(2): 93–100, 1998.

Nicholas Metropolis, Arianna W Rosenbluth, Marshall N Rosenbluth, Augusta H Teller, i Edward Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21:1087, 1953.

Reini Wirahadikusumah i Dulcy M Abraham. Application of dynamic programming and simulation for sewer management. *Engineering, Construction and Architectural Management*, 10(3):193–208, 2003.