2.2 基本逻辑运算和基本门电路

主要内容

1. 逻辑代数的基本公式和定理

2. 逻辑函数的表示方法

3. 逻辑函数的化简

概述

研究数字电路的数字基础为逻辑代数，由英国数学家George Boole在1849年提出的，逻辑代数也称布尔代数.

逻辑代数的特点：

（1） 所有变量的取值只有两个：“0“ 和 “1“；

（2）” 0“和 “1“表示两个对立的逻辑状态；

（3）具有独特的运算规则。

逻辑变量和表达式

逻辑变量：逻辑代数中出现的变量，用于描述客观事物对立统一的二个方面。

{0，1}集合，用单个字母 或单个字母加下标表示

是、非；有、无；开、关；低电平、高电平

基本逻辑运算

逻辑代数中只有三种基本逻辑运算, 即“与”、“或”、“非”。

一、“与”运算（逻辑乘）

1. 定义： 决定一个事情发生的多个条件都具备，事情就发生，这种逻辑关系叫“与”逻辑。

例1: 打开有两把锁的自行车。

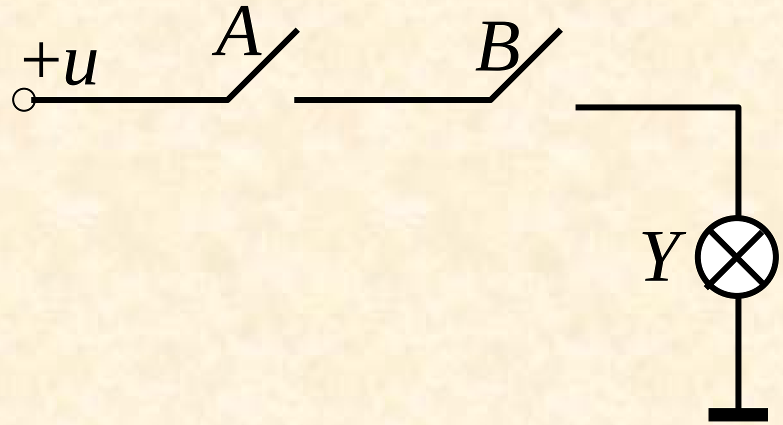
例2: 打开有两个串联开关的灯。

例3: 楼道里自动感应灯。

2. 真值表

全部输入条件的<u>所有组合</u>与输出的关系。

例　打开有两个串联开关的灯。设开关为**A**、**B**，合上为**1**，断开为**0**；灯为**Y**，灯亮为**1**，灭为**0**。（逻辑赋值）



真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由“与”运算的真值表可知“与”运算法则为：

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

有0出0
全1为1

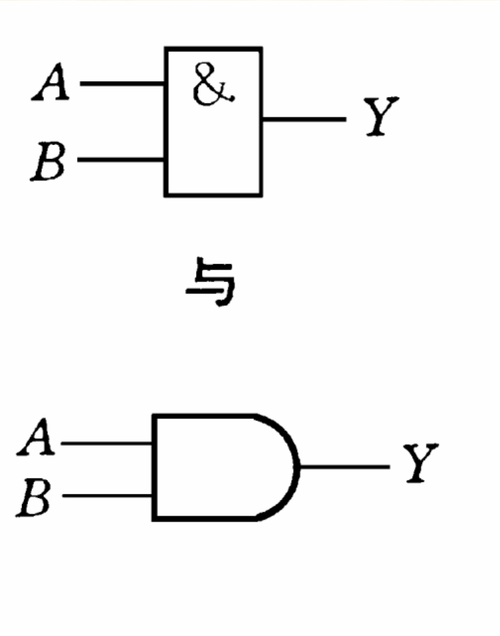
3. 表达式

逻辑代数中“与”逻辑关系用“与”运算描述。“与”运算又称逻辑乘，其运算符为“·”或“∧”。两变量的“与”运算可表示为：

$Y = A \cdot B$ 或者 $Y = A \wedge B$

简写为：$Y = AB$

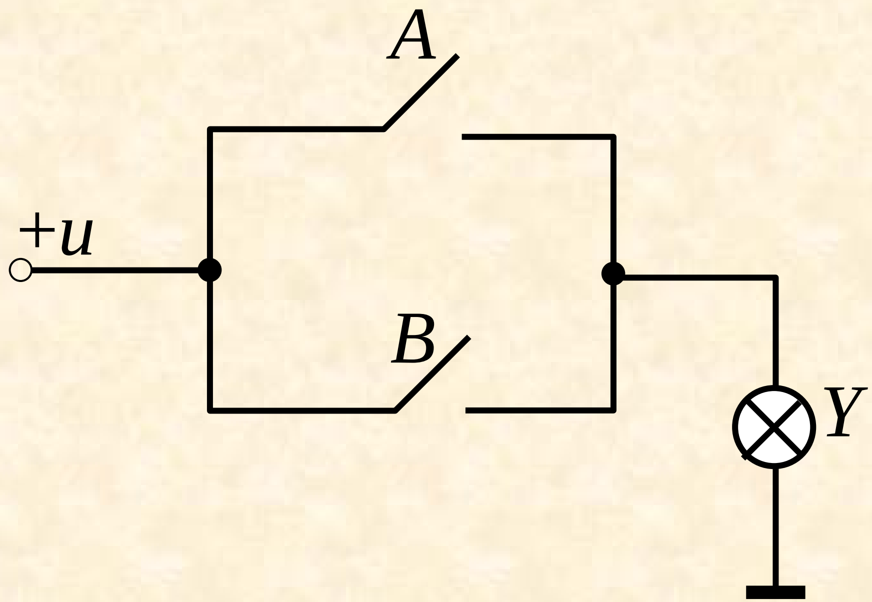
读作：Y等于A与B



二、“或”运算（逻辑加）

1. 定义：决定一个事情发生的多个条件中，有一个或以上的条件具备，事情就发生，这种逻辑关系叫“或”逻辑。

例： 打开有两个并联开关的灯。



2. 真值表

例：打开有两个并联开关的灯。设开关为**A**、**B**，合上为**1**，断开为**0**；灯为**Y**，灯亮为**1**，灭为**0**。

真值表

A	*B*	*Y*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由“或”运算的真值表可知“或”运算法则为：

$0+0=0 \quad 1+0=1$

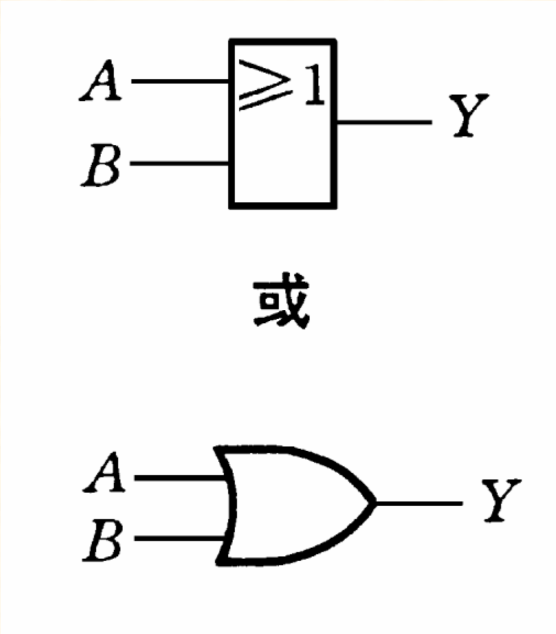
$0+1=1 \quad 1+1=1$

有1出1
全0为0

3. 表达式

逻辑代数中“或”逻辑关系用“或”运算描述。“或”运算又称逻辑加，其运算符为“+”或“∨”。两变量的“或”运算可表示为：$Y=A+B$ 或者 $Y=A \vee B$

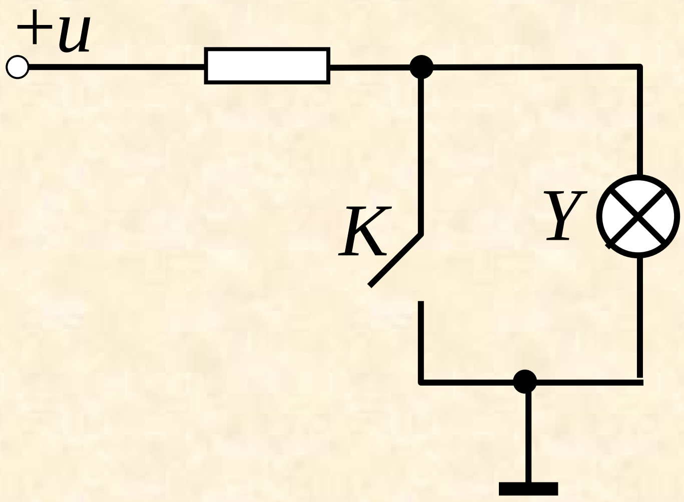
读作：*Y*等于 *A* 或 *B*



三、“非”运算（逻辑非）

1. 定义：某一事情的发生，取决于对另一事情的否定，这种逻辑关系叫“非”逻辑。

例： 如下电路中灯的亮灭。



2. 真值表

例： **打开上例电路中的灯。设开关为k，合上为1，断开为0；灯为Y，灯亮为1，灭为0**

真值表

K	Y
0	1
1	0

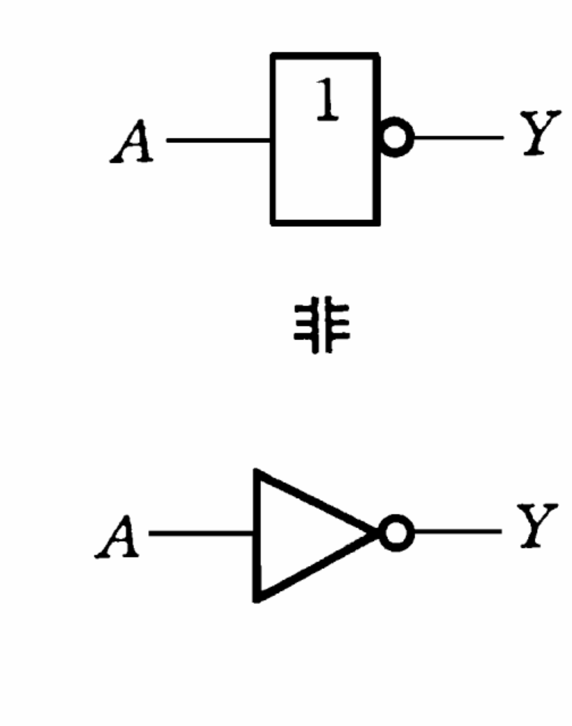
由“非”运算的真值表可知“非”运算法则为：

$$\overline{0}=1 \qquad \overline{1}=0$$

3. 表达式

“非”逻辑用“非”运算描述。“非”运算又称求反运算，运算符为“－”或“¬”，“非”运算可表示为：

$Y=\overline{A}$ 或 $Y=\neg A$ 或 $Y=A'$



读作 “Y等于A非” ，意思是若A＝0，则Y为1；反之，若A=1, 则Y为0。

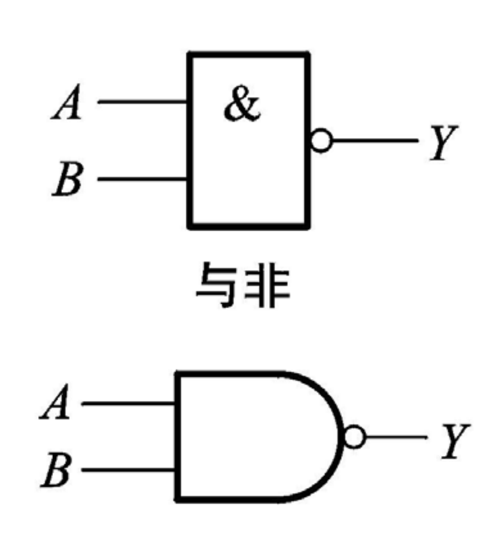
四、其他复合逻辑运算

1、与非运算：逻辑表达式为：

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真值表

$$Y = \overline{AB}$$

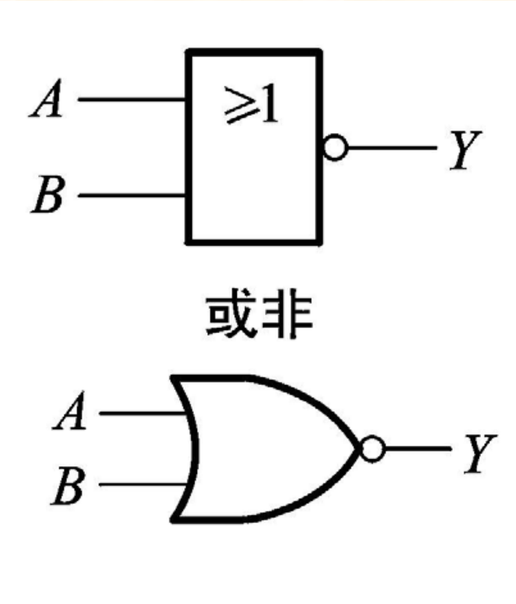


2、或非运算：逻辑表达式为：

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

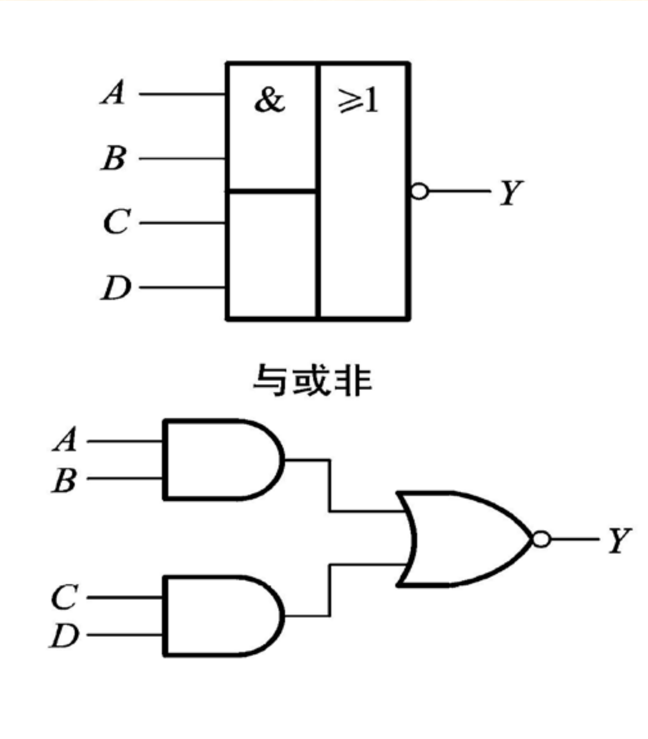
真值表

$$Y = \overline{A + B}$$



3、 与或非运算：逻辑表达式为：

$$Y = \overline{AB + CD}$$

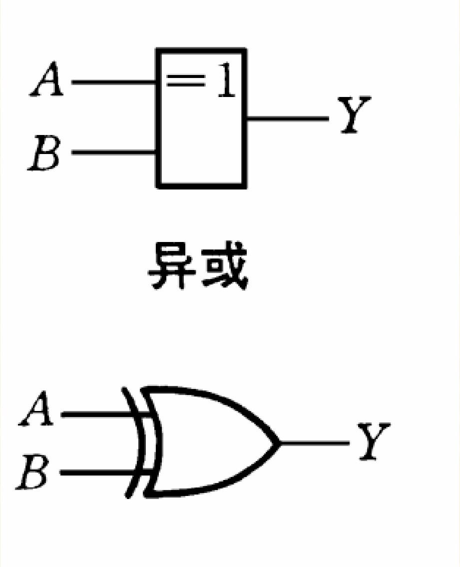


4、异或运算：逻辑表达式为：

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真 值 表

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$

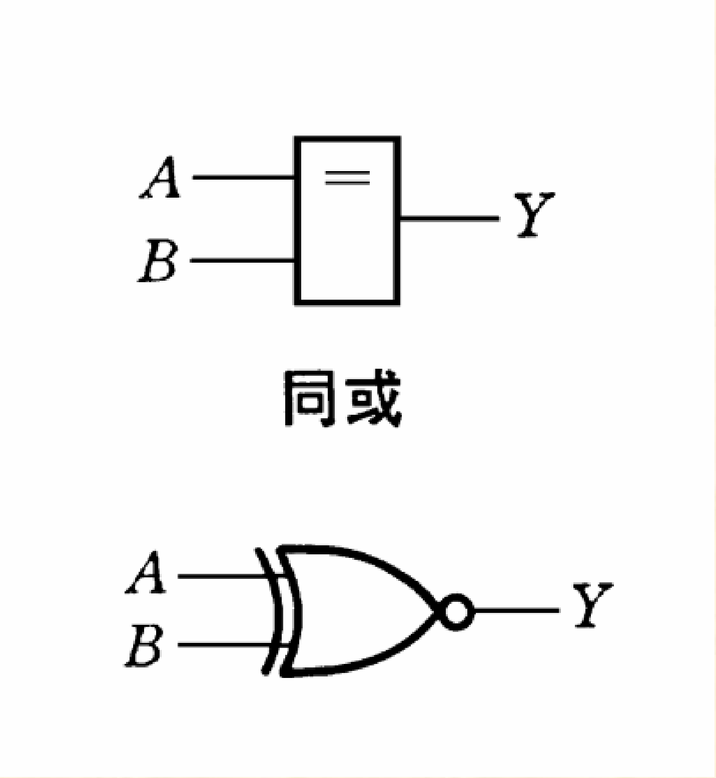


5、同或运算：逻辑表达式为：

$$Y = AB + \overline{A}\,\overline{B} = A \Theta B$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表



逻辑代数的基本定律

一、 逻辑函数的相等

设有两个逻辑函数：$F_1=f_1(A_1,A_2,\ldots,A_n)$

$F_2=f_2(A_1,A_2,\ldots,A_n)$

如果对于$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的任何一组取值（共2^n组），

F_1 和 F_2均相等，则称F_1和 F_2相等.

因此，如两个函数的真值表相等，则这两个函数一定相等.

二、基本公式

①0 - 1律　$A\cdot 0=0$;　$A+1=1$

②自等律　$A\cdot 1=A$;　$A+0=A$

③重迭律　$A\cdot A=A$;　$A+A=A$

④互补律　$A\cdot \overline{A}=0$;　$A+\overline{A}=1$

⑤交换律　$A\cdot B=B\cdot A$;　$A+B=B+A$

⑥结合律　$A(BC)=(AB)C$;　$A+(B+C)=(A+B)+C$

⑦分配律　$A(B+C)=AB+AC$;　$A+BC=(A+B)(A+C)$

⑧反演律　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

⑨还原律　$\overline{\overline{A}}=A$

反演律也称德・摩根定理,是一个非常有用的定理.

$$AB=AC \xrightarrow{?} B=C$$

$$A+B=A+C \xrightarrow{?} B=C$$

请注意与普通代数的区别！

三、基本定理

1. 代入定理

任何一个含有变量A的逻辑等式，如果将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数F，则等式仍然成立。

例如：根据 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

若用BC代替B，则该等式仍然成立，即：

$$\overline{A \cdot (B \cdot C)} = \overline{A} + \overline{B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

意义：扩大基本公式的应用范围。

2. 反演定理

如果将逻辑函数F中所有的“·”变成“+”；“+”变成“·”；“0”变成“1”；“1”变成“0”；原变量变成反变量；反变量变成原变量；所得到的新函数是原函数的反函数 $\overline{F}$。

即：“·”，“+”，“0”，“1”，“原变量”，“反变量”

⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓

“+”，“·”，“1”，“0”，“反变量”，“原变量”

例1：已知$F=\overline{A}B+C\overline{D}$，根据反演定理可得到：$\overline{F}=(A+\overline{B})\cdot(\overline{C}+D)$

注意： 使用反演定理时，应注意保持原函数式中运算符号的优先顺序不变。

例2：已知 $F = \overline{A} + \overline{B} \cdot (C + \overline{D}E)$，则

$$\overline{F} = A \cdot [B + \overline{C}(D + \overline{E})]$$

$$\overline{F} \neq A \cdot B + \overline{C} \cdot D + \overline{E}$$

与变或时要加括号

例3：已知 $F = AB + \overline{\overline{A}BC} + \overline{B}\,\overline{C}$ 则

$$\overline{F} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{(A + \overline{B} + \overline{C})} \cdot (B + C)$$

长非号不变

3. 对偶定理

对偶式的定义：如果将逻辑函数F中所有的“·”变成“+”；“+”变成“·”；“0”变成“1”；“1”变成“0”；则所得到的新逻辑函数是F的对偶式F'。

如果F'是F的对偶式，则F也是F'的对偶式，即F与F'互为对偶式。

即：“·”，“+”，“0”，“1”，“变量”

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

“+”，“·”，“1”，“0”，不变

例：$F=\overline{\overline{A}+\overline{B+\overline{C}\cdot 0}}$ $F'=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B\cdot(\overline{C}+1)}}$

求某一函数F的对偶式时，同样要注意保持原函数的运算顺序不变。

对偶定理：若两个逻辑函数F的G相等，则其对偶式F’ 和G’也相等。

例: 证明分配律： $A+B\cdot C=(A+B)(A+C)$

证: 已知 $\underline{A\cdot(B+C)}=\underline{A\cdot B+A\cdot C}$

等式两边求对偶: $\underline{A+B\cdot C}=\underline{(A+B)(A+C)}$

证毕

意义：扩大基本公式的应用范围，证明逻辑等式。

四、常用公式

（1）合并律 $AB+A\overline{B}=A$

证明：

$$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A\cdot 1=A \xrightarrow{\text{对偶关系}} (A+B)(A+\overline{B})=A$$

（2）吸收律 $A+AB=A$

证明：

$$A+AB=A(1+B)=A\cdot 1=A \xrightarrow{\text{对偶关系}} A(A+B)=A$$

（3）消去律 $A+\bar{A}B=A+B$

证明：

$$A+\bar{A}B=(A+\bar{A})(A+B)=1\bullet(A+B) \xrightarrow{\text{对偶关系}} A(\bar{A}+B)=AB$$

$$=A+B$$

（4）包含律 $AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$

证明：

$$
\begin{aligned}
&AB+\bar{A}C+BC\\
&=AB+\bar{A}C+(A+\bar{A})BC\\
&=AB+\bar{A}C+ABC+\bar{A}BC\\
&=AB(1+C)+\bar{A}C(1+B)\\
&=AB+\bar{A}C
\end{aligned}
\xrightarrow{\text{对偶关系}}
\begin{aligned}
&(A+B)(\bar{A}+C)(B+C)\\
&=(A+B)(\bar{A}+C)
\end{aligned}
$$

推广： $AB+\overline{A}C+BCD\ldots=AB+\overline{A}C$

五、关于异或和同或运算

对偶数个变量而言，

有 $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \overline{A_1 \odot A_2 \odot \ldots \odot A_n}$

对奇数个变量而言，

有 $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = A_1 \odot A_2 \odot \ldots \odot A_n$

异或和同或的其他性质:

$A \oplus 0 = A$

$A \oplus 1 = \overline{A}$

$A \oplus A = 0$

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

$A(B \oplus C) = AB \oplus AC$

$A \odot 1 = A$

$A \odot 0 = \overline{A}$

$A \odot A = 1$

$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

$A + (B \odot C) = (A+B) \odot (A+C)$

利用异或门可实现数字信号的极性控制.

同或功能由异或门实现.

逻辑函数的化简

逻辑函数的表示方法

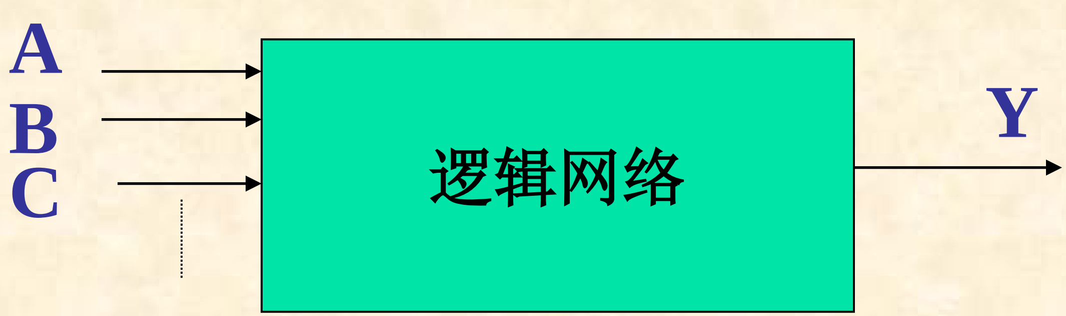
一、逻辑函数:

如果以逻辑变量作为输入,以运算结果作为输出,那么当输入变量的取值确定后,输出的取值便唯一 之间乃是一种函数关系,写作

输出逻辑变量

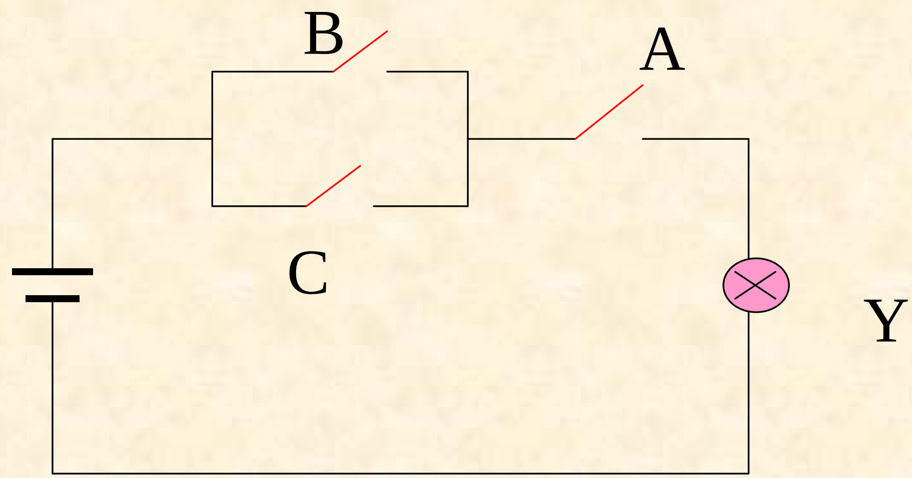
输入逻辑变量

$$Y=F(A,B,C,\cdots\cdots)$$



例如：如图所示是一举重裁判电路，试用逻辑函数描述逻辑功能。

A为主裁判，B、C为副裁判，Y为指示灯，只有主裁判和至少一名副裁判认为合格，试举才算成功，指示灯才亮



A、B、C：1 ——认为合格，开关闭合

0 ——不合格，开关断开

—试举成功，指示灯亮

0——试举不成功，指示灯灭

Y=F（A，B，C）

逻辑函数的表示方法：

有四种表示方法——

逻辑真值表、逻辑函数式、逻辑图和卡诺图。各种表示方法特点不同，之间可相互转换。

1、逻辑真值表：

输入逻辑变量所有可能的取值组合及其对应的输出函数值所构成的表格

A	B	C	Y
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

A、B、C： 1 ——认为合格，开关闭合

0 ——不合格，开关断开

Y ： 1——试举成功，指示灯亮

0——试举不成功，指示灯灭

注意：

（1）列表要完备；

（2）列表顺序按二进制数递增顺序排列。

特点：

（1）直观明了；

（2）便于逻辑抽象；

（3）运算困难。

2、逻辑函数式：

由与、或、非等运算符所构成的逻辑表达式.

$$Y=A(B+C)$$

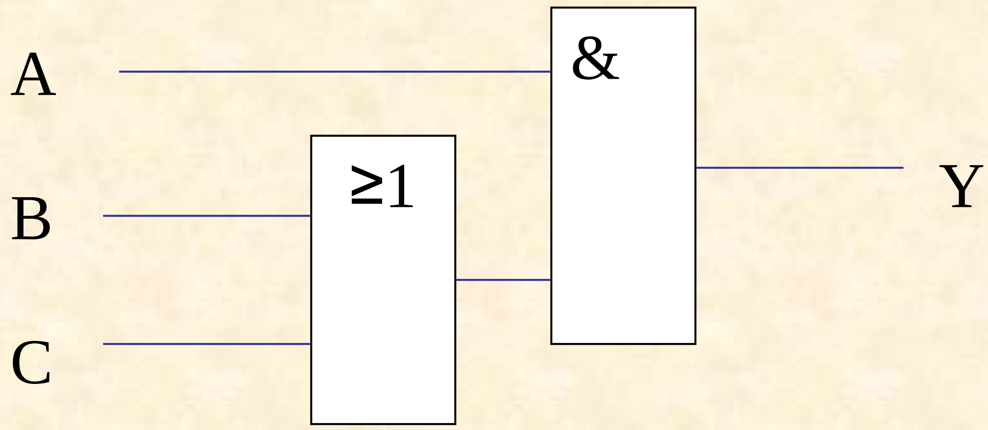
特点：

（1）便于运算；

（2）便于用逻辑图实现；

（3）缺乏直观。

3、逻辑图：由各种逻辑门符号所构成的电路图.



特点：　　接近工程实际。

4、不同表示方法之间的相互转换

(1)已知逻辑函数式求真值表：

把输入逻辑变量所有可能的取值组合代入对应函数式,算出其函数值。

例：$Y = A + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

（2）已知真值表写逻辑函数式

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\overline{A}\,\overline{B}C$

$\overline{A}B\overline{C}$

$A\overline{B}C$

ABC

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

方法：将真值表中Y为 1 的输入变量相与，取值为 1 用原变量表示，0 用反变量表示， 将这些与项相加，就得到逻辑表达式。这样得到的逻辑函数表达式是**标准与－或逻辑式**。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$A\overline{B}C$

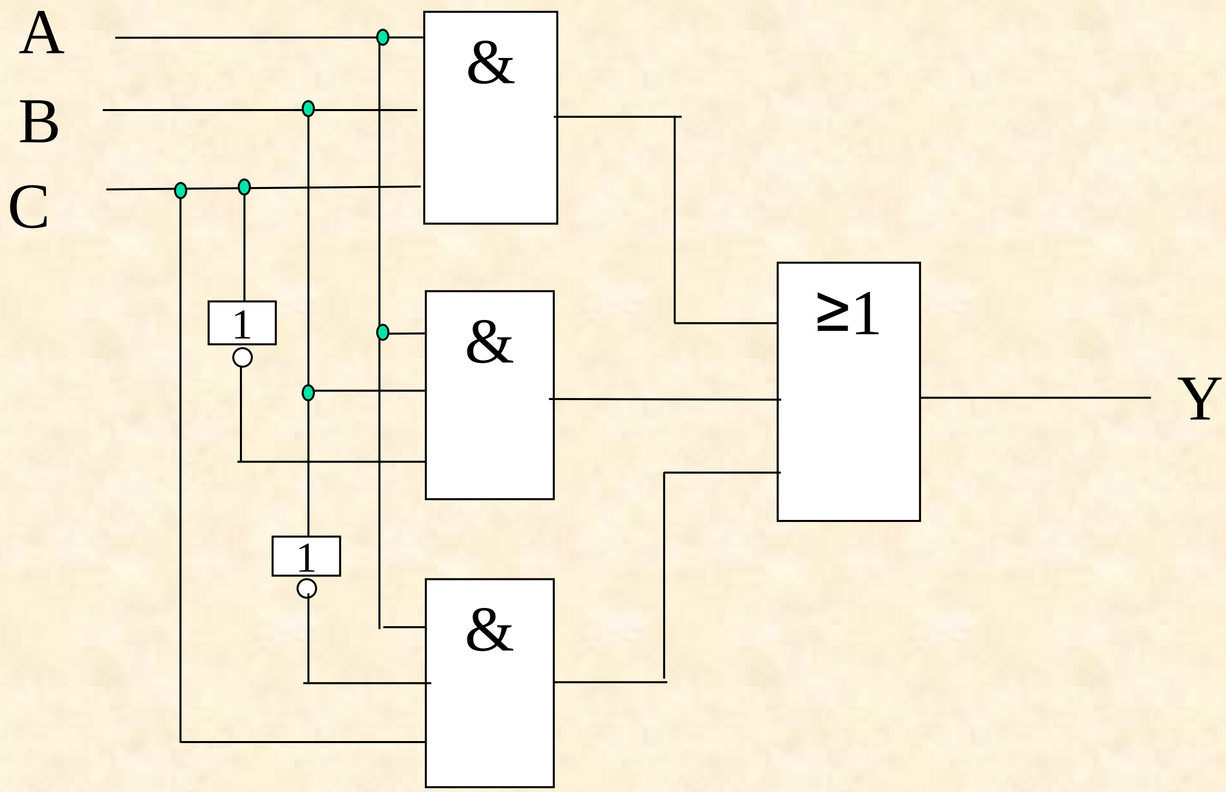
$AB\overline{C}$

ABC

$$Y = A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

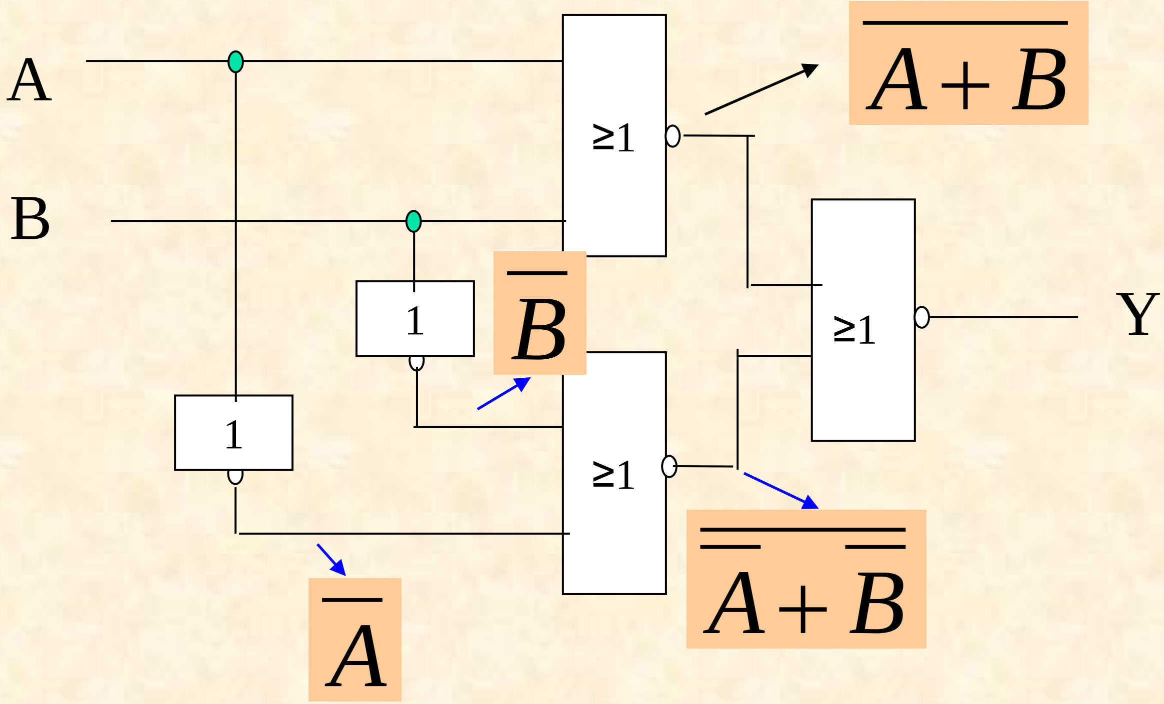
（3）已知逻辑函数式画逻辑图

$$Y = A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$



注意：同一函数对应的逻辑图并不唯一。

（4）已知逻辑图写逻辑函数式



$$Y=\overline{\overline{\overline{A}+\overline{B}}+\overline{A+B}}$$

$$=\overline{AB+\overline{A}\,\overline{B}}=A\oplus B$$

逻辑函数的两种标准形式

一、最小项和最大项的概念：

1、最小项：

最小项定义：在n变量逻辑函数中，若m为包含n个因子的乘积项，……量均以原变量或反变量的形式在m中出……次，……的最小项。

Y=F(A,B,C)

$m_0= \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$m_1= \bar{A}\bar{B}C$

$m_2= \bar{A}B\bar{C}$

$m_3= \bar{A}BC$

$m_4= A\bar{B}\bar{C}$

$m_5= A\bar{B}C$

$m_6= AB\bar{C}$

$m_7= ABC$

Y=F(A,B,C,D)

$m_{11}= A\bar{B}CD$

$m_9= A\bar{B}\bar{C}D$

Y=F（A，B，C，D，E）

$m_{19}= A\bar{B}\bar{C}DE$

性质：

①在输入变量的任何取值下必有一个最小项,而且仅有一个最小项的值为1；

②全体最小项之和为1；

③任意两个最小项的乘积为0；

④相邻两个最小项之和可合并为一项并消去一个不同的因子。

两个最小项只有一个因子不同

$$m_0+m_1=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C=\bar{A}\bar{B}$$

2、最大项：

最大项定义：在n变量逻辑函数中，若M为n个变量之和，而且这n个变量均以原变量或反变量的形式在M中出现一次且仅一次，则称M为该组变量的最大项。

Y=F(A,B,C)

$M_7=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

$M_6=\overline{A}+\overline{B}+C$

$M_5=\overline{A}+B+\overline{C}$

$M_4=\overline{A}+B+C$

$M_3=A+\overline{B}+\overline{C}$

$M_2=A+\overline{B}+C$

$M_1=A+B+\overline{C}$

$M_0=A+B+C$

性质：

①在输入变量的任何取值下必有一个最大项,而且仅有一个最大项的值为0；

②全体最大项之积为0；

③任意两个最大项的之和为1；

④相邻两个最大项之乘积等于各相同变量之和：

⑤ $M_i = \overline{m_i}$

$$\overline{m_5} = \overline{A\overline{B}C} = \overline{A} + B + \overline{C} = M_5$$

二、逻辑函数的标准与或式

结论： 任何逻辑函数均可展开为最小项之和的形式，且该形式唯一。

方法： 一般表达式 →除非号→去括号→补因子

$$例: F=\overline{(AB+\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B})\cdot\overline{AB}}$$

$$=\overline{AB+\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}}+AB=\overline{AB}\cdot C\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}}+AB$$

$$=(\overline{A}+\overline{B})\cdot C\cdot(A+B)+AB$$

除非号

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB$$

去括号

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB(C+\overline{C})$$

$$=\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}$$

补因子

$$=m_3+m_5+m_7+m_6=\sum m(3,5,6,7)$$

三、逻辑函数的标准或与式

结论： 任一逻辑函数都可以表示为最大项之积的形式，且该形式唯一。

方法1： 先求出反函数的标准与或式，再用反演定理求反。

方法2：

$$Y=\sum_i m_i=\prod_{k\neq i} M_k$$

$$Y=\sum m(2,3,4,7)$$

$$=\prod M(0,1,5,6)$$

逻辑函数的公式化简法

最简的概念

1. 化简的意义：①节省元器件，降低电路成本；

② 提高电路可靠性；

③ 减少连线，制作方便.

2.逻辑函数式的几种常见形式和变换。

一个逻辑函数的表达式可以有以下5种表示形式。

（1）与或表达式：$Y=\overline{A}B+AC$

（2）或与表达式：$\mathrm{Y}=(A+B)(\overline{A}+C)$

（3）与非-与非表达式：$\mathrm{Y}=\overline{\overline{\overline{A}B}\cdot\overline{AC}}$

（4）或非-或非表达式：$\mathrm{Y}=\overline{\overline{A+B}+\overline{\overline{A}+C}}$

（5）与或非表达式：$\mathrm{Y}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{C}}$

利用逻辑代数的基本公式和定律，可以实现上述五种逻辑函数式之间的变换。

3. 逻辑函数的最简与或式

条件：(1)与项个数最少；

(2)满足(1)时，每个与项中的变量个数也最少。

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}B\overline{E} + \overline{A}B + A\overline{C} + A\overline{C}E + B\overline{C} + B\overline{C}D \\
&= \overline{A}B + A\overline{C} + B\overline{C} \\
&= \overline{A}B + A\overline{C}
\end{aligned}
$$

最简与或表达式

逻辑函数的代数化简法(公式法)

逻辑函数的代数化简法就是运用逻辑代数的公式和定理，**特别是利用常用公式**来化简逻辑函数。

1、并项法

利用公式 $AB+A\overline{B}=A$，将两项合并为一项，并消去一个变量。

运用分配律

$$Y_1 = ABC + \overline{A}BC + B\overline{C} = (A+\overline{A})BC + B\overline{C}$$
$$= BC + B\overline{C} = B(C+\overline{C}) = B$$

运用分配律

$$Y_2 = ABC + A\overline{B} + A\overline{C} = ABC + A(\overline{B}+\overline{C})$$
$$= ABC + A\overline{BC} = A(BC+\overline{BC}) = A$$

运用摩根定律

若两个乘积项中分别包含同一个因子的原变量和反变量，而其他因子都相同时，则这两项可以合并成一项，并消去互为反变量的因子。

2、吸收法

利用公式A＋A B＝A，消去多余的项。

$$Y_1 = \bar{A}B + \bar{A}BCD(E+F) = \bar{A}B$$

运用摩根定律

$$Y_2 = A + \overline{\bar{B} + \overline{CD}} + \overline{\overline{AD}\,\bar{B}} = A + BCD + AD + B$$

$$= (A + AD) + (B + BCD) = A + B$$

如果乘积项是另外一个乘积项的因子，则这另外一个乘积项是多余的。

3、消去因子法

利用公式 $A+\overline{A}B=A+B$，消去多余的变量。

$$
\begin{aligned}
Y &= AB+\overline{A}C+\overline{B}C \\
&= AB+(\overline{A}+\overline{B})C \\
&= AB+\cancel{\overline{AB}}C \\
&= AB+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= A\overline{B}+C+\overline{A}\,\overline{C}D+B\overline{C}D \\
&= A\overline{B}+C+\overline{C}(\overline{A}+B)D \\
&= A\overline{B}+C+(\overline{A}+B)D \\
&= A\overline{B}+C+\cancel{\overline{A\overline{B}}}D \\
&= A\overline{B}+C+D
\end{aligned}
$$

如果一个乘积项的反是另一个乘积项的因子，则这个因子是多余的。

4、消去冗余项法

利用包含律 $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$，将冗余项 BC 消去。

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= A\overline{B}+AC+ADE+\overline{C}D \\
&= A\overline{B}+(AC+\overline{C}D+\cancel{ADE}) \\
&= A\overline{B}+AC+\overline{C}D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= AB+\overline{B}C+\cancel{AC(DE+FG)} \\
&= AB+\overline{B}C
\end{aligned}
$$

5、配项法

（１）利用公式$A = A(B + \overline{B})$，为某一项配上其所缺的变量，以便用其它方法进行化简。

$$
\begin{aligned}
Y &= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B \\
&= A\overline{B} + B\overline{C} + \underline{(A + \overline{A})}\overline{B}C + \overline{A}B\underline{(C + \overline{C})} \\
&= \underline{A\overline{B}} + \underline{B\overline{C}} + \underline{A\overline{B}C} + \underline{\overline{A}\overline{B}C} + \underline{\overline{A}BC} + \underline{\overline{A}B\overline{C}} \\
&= A\overline{B}(1 + C) + B\overline{C}(1 + \overline{A}) + \overline{A}C(\overline{B} + B) \\
&= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C
\end{aligned}
$$

（２）利用公式$A + A = A$，为某项配上其所能合并的项。

$$
\begin{aligned}
Y &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC \\
&= (ABC + AB\overline{C}) + (\underline{ABC} + A\overline{B}C) + (\underline{ABC} + \overline{A}BC) \\
&= AB + AC + BC
\end{aligned}
$$

注意：实际化简逻辑函数时，需要综合运用上述方法。

例：化□ $F = \underline{A\overline{C} + ABC} + \underline{AC\overline{D} + CD}$

解：

$$F = A(\overline{C} + BC) + C(A\overline{D} + D)$$

$$= A(\overline{C} + B) + C(A + D)$$

$$= \underline{A\overline{C}} + AB + \underline{AC} + CD$$

$$= \underline{A(\overline{C} + C) + AB} + CD$$

$$= A(1 + B) + CD = A + CD$$

$$\boxed{A + \overline{A}B = A + B}$$

例：化□ $F = AB + A\overline{C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D}$

$+ ADE(F+G)$

$\boxed{A + \overline{A}B = A + B}$

解： $F = A\overline{\overline{B}C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$

$= A + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$

$= A + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D}$

$= A + \overline{B}C(\overline{D} + D) + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D}(C + \overline{C})$

$= A + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}CD + B\overline{C} + \overline{B}D + BC\overline{D} + B\overline{C}\,\overline{D}$

$= A + C\overline{D} + \overline{B}D + B\overline{C}$

注意：配项法往往是最后才使用

例：$F=\overline{\overline{AB+\overline{A}\,\overline{B}}\bullet\overline{BC+\overline{B}\,\overline{C}}}$

$=(AB+\overline{A}\overline{B})+(BC+\overline{B}\overline{C})$ 反演

$=AB+\overline{A}\overline{B}(C+\overline{C})$ 配项

$+BC(A+\overline{A})+\overline{B}\overline{C}$

$=AB+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 被吸收

$+ABC+\overline{A}BC+\overline{B}\overline{C}$

被吸收

$=AB+\overline{A}C(\overline{B}+B)+\overline{B}\overline{C}$

$=AB+\overline{A}C+\overline{B}\overline{C}$

逻辑函数的卡诺图化简法

卡诺图的概念：

将n个输入变量的全部最小项用小方块阵列图表示，并且将逻辑相邻的最小项放在相邻的几何位置上，所得到的阵列图就是n变量的**卡诺图**。

卡诺图的每一个方块（最小项）代表一种输入组合，并且把对应的输入组合注明在阵列图的上方和左方。

1.变量卡诺图的结构

二变量卡诺图（A，B）

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

A \ B	$\overline{B}$ 0	B 1
$\overline{A}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$
A 1	$A\overline{B}$	AB

三变量卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_o	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

$AB \backslash C$	0	1
00	m_o	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

		$\bar{B}$		B	
	$A \backslash BC$	00	01	11	10
$\bar{A}$	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
A	1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$
		$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

四变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

	$AB \backslash CD$	00	01	11	10	
				C		
	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	
	01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$	B
A	11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$	
	10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$	
				D		

五变量卡诺图

对称轴

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

n≥5 变量的卡诺图，可由n－1变量卡诺图在需要增加变量的方向采用镜像变换而生成。

说明：

（1） 注意变量取值顺序：按循环码规则排列；

（2） 每个小方格对应一个最小项；

（3）具有逻辑相邻性的方格有：

相接——几何相邻的方格；

相对——上下两边、左右两边的方格；

相重——多变量卡诺图，以对称轴相折叠，重叠的方格。

逻辑相邻的最小项可以消去互补变量

三变量卡诺图逻辑相邻举例

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

相接

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

相对

四变量卡诺图逻辑相邻举例

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

相接

相对

相对

五变量卡诺图逻辑相邻举例

对称轴

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

相重

2.逻辑函数的卡诺图

用卡诺图法对逻辑函数进行化简时，首先要确定函数与卡诺图的关系，将函数用卡诺图的形式表现出来。

方法
- 真值表 →填卡诺图
- 表达式 →
  - 化成最小项表达式 →填卡诺图
  - 一般与或式 →填卡诺图

注意：真值表、表达式、卡诺图都可以表达一个逻辑函数。

由真值表填卡诺图

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

$AB \backslash C$	0	1
00	m_o	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

$AB \backslash C$	0	1
00	0	1
01	0	1
11	0	0
10	1	1

对应最小项填1

其余补0

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_o 0	m_1 1	m_3 1	m_2 0
1	m_4 1	m_5 1	m_7 0	m_6 0

例：$F=\bar{A}B\bar{C}+ABD+AC$

$$=\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+ABCD+AB\bar{C}D$$

$$+A\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}CD+ABC\bar{D}+ABCD$$

$$=m_5+m_4+m_{15}+m_{13}+m_{10}+m_{11}+m_{14}+m_{15}$$

$$=\sum m(4,5,10,11,13,14,15)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11		1	1	1
10			1	1

由一般与或式 填卡诺图示例:三变量

$$F = AB + \overline{A}C$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

示例:四变量

$$F = BD + \bar{B}\,\bar{D} + A\bar{B}CD + \bar{B}C\bar{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1 1
01		1	1	
11		1	1	
10	1		1	1 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1		1	1

函数的卡诺图化简

依据：相邻最小项 $\rightarrow$ 提出公因子 $\rightarrow$ 消去互补变量

例： 二变量 $AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$

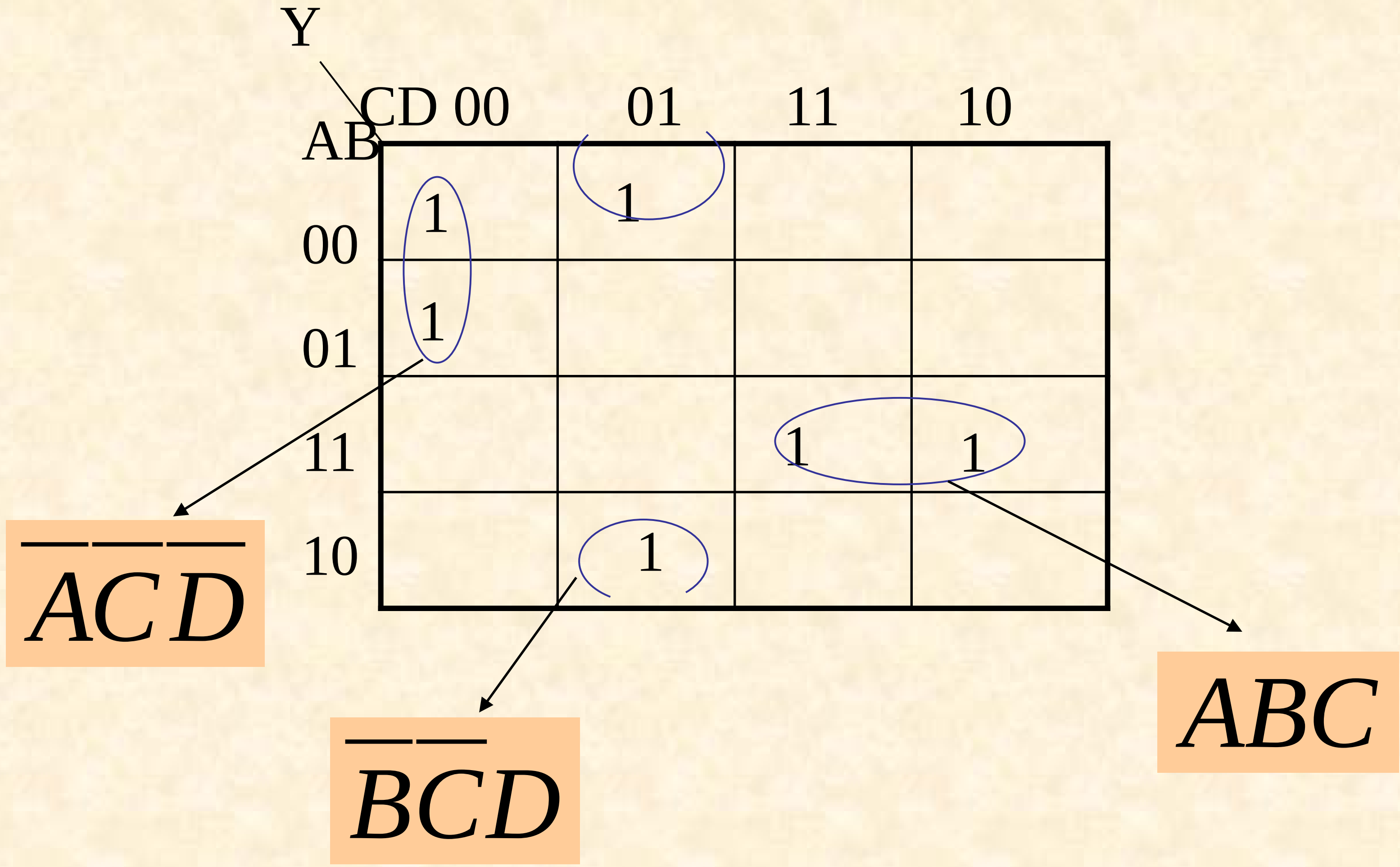
$\mathrm{m}_3 \quad \mathrm{m}_2$

三变量 $AB\mathrm{C} + A\overline{B}\mathrm{C} = A\mathrm{C}(B + \overline{B}) = A\mathrm{C}$

$\mathrm{m}_7 \quad \mathrm{m}_5$

一、卡诺图中最小项的合并规律

（1）若两个最小项相邻，可合并为一项消去一个不同因子。



（2）若四个最小项相邻，可合并为一项消去二个不同因子。

Y

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11				1
10	1			1

$\overline{B}\,\overline{D}$

$\overline{A}\,\overline{C}$

$C\overline{D}$

（3）若八个最小项相邻，可合并为一项消去三个不同因子。

Y

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$\overline{C}$

A

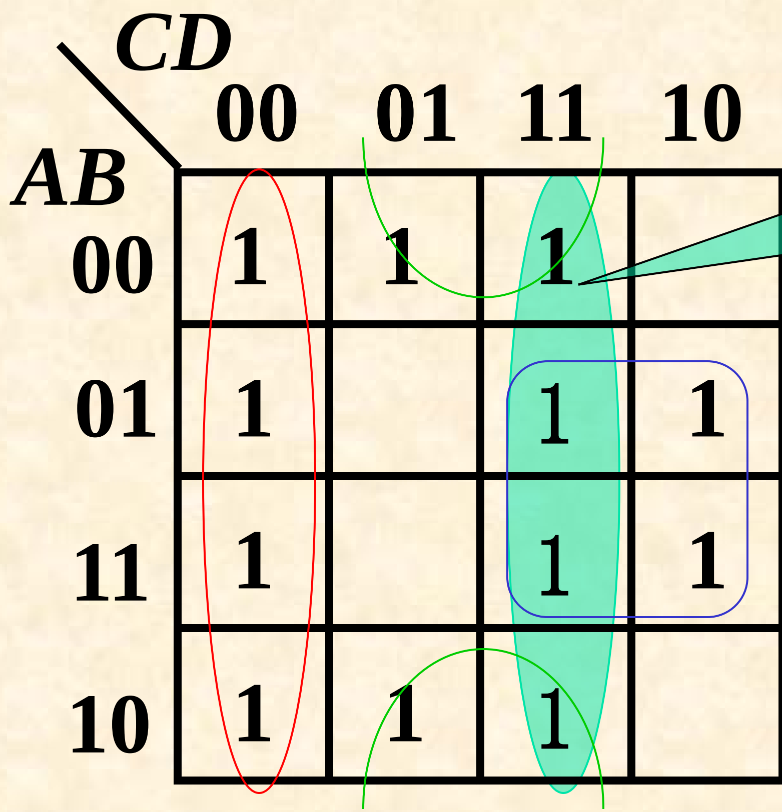
一般结论：卡诺图中2^n个相邻最小项可合并为一项，消去n个不同变量，结果为公因子。

无效圈示例1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

不是矩形

无效圈示例2



没有新变量.
无效圈.

二、卡诺图化简法步骤

步骤：（1）画函数卡诺图；

（2）合并相邻最小项，对邻项方格画卡诺圈（含2^n方格）；

（3）选择比较，消去互补变量，直接写出最简与或式。

画圈原则：

- 圈尽量大 →*消去的变量多*
- 圈尽量少 →*结果乘积项少*
- 圈要新→*要有新成份，无冗余项*
- 圈完→*包含全部“1”*

使用方法：

- 圈1 →*得到 F 原函数*
- 圈0 →*得到 F 反函数*

画的圈不同，结果的表达式形式可能不同，但肯定是最简的结果。

圈1个格→消0个变量

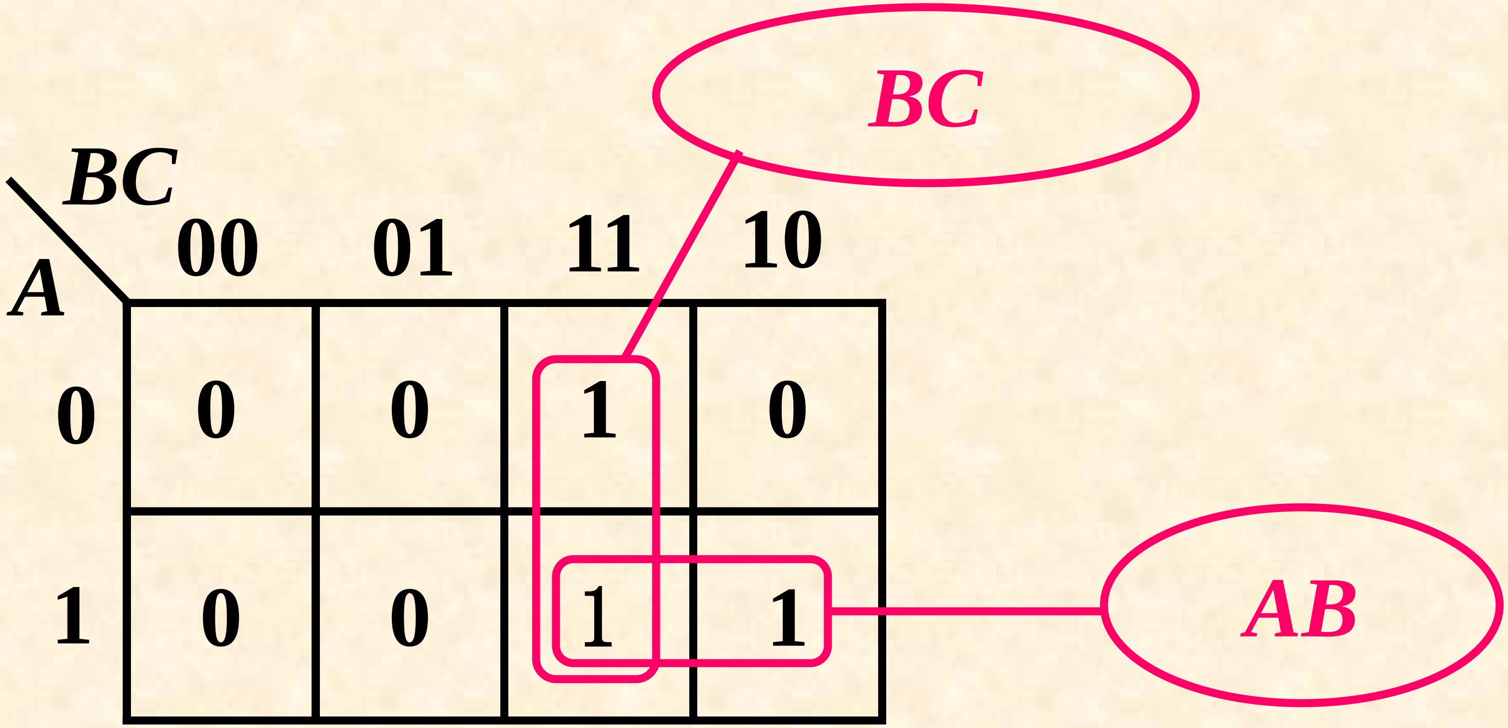
圈2 → 1

圈4 → 2

圈8 → 3

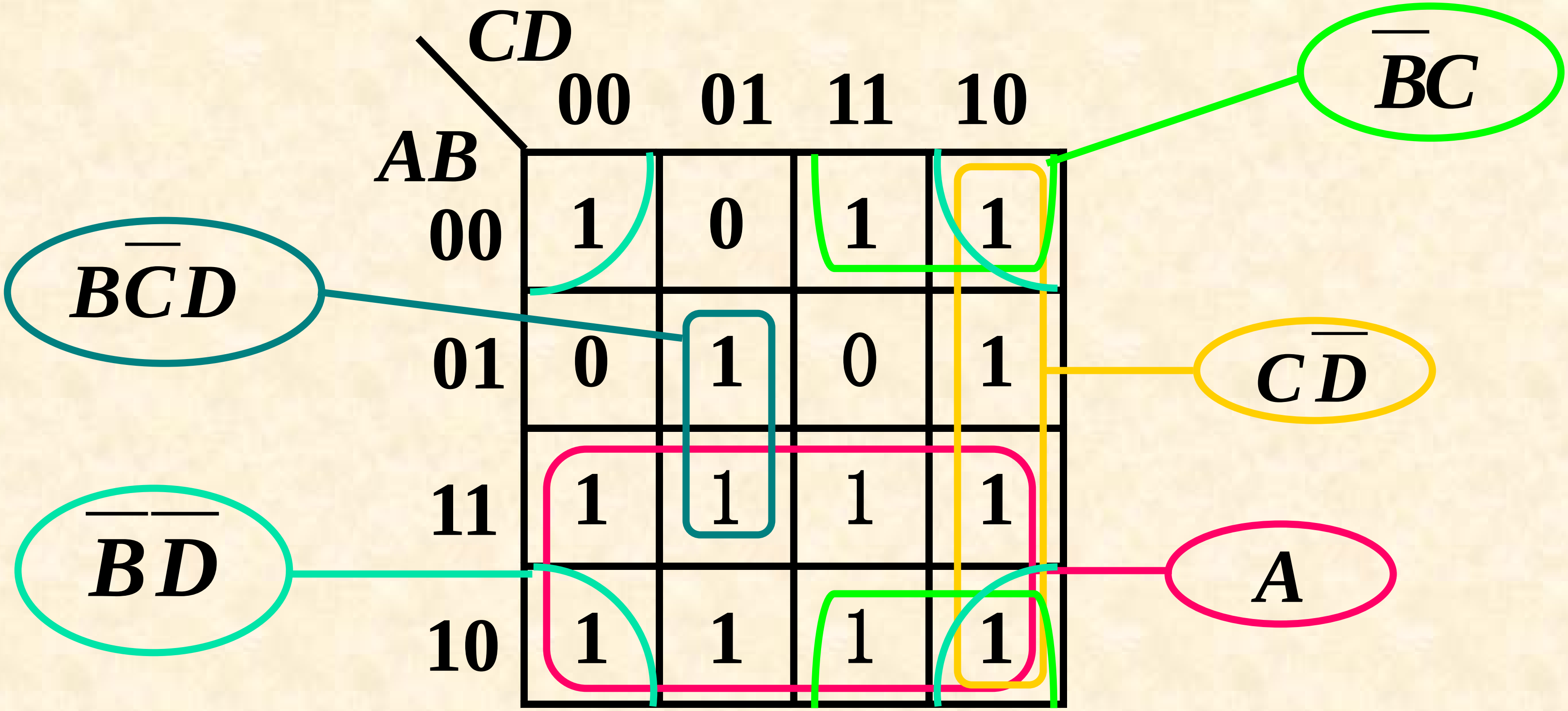
…………

例1：卡诺图化简



$F=AB+BC$

例2：化简 $F(A,B,C,D)=\Sigma(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$



$$F = A + C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D} + B\overline{C}D$$

例3：化简

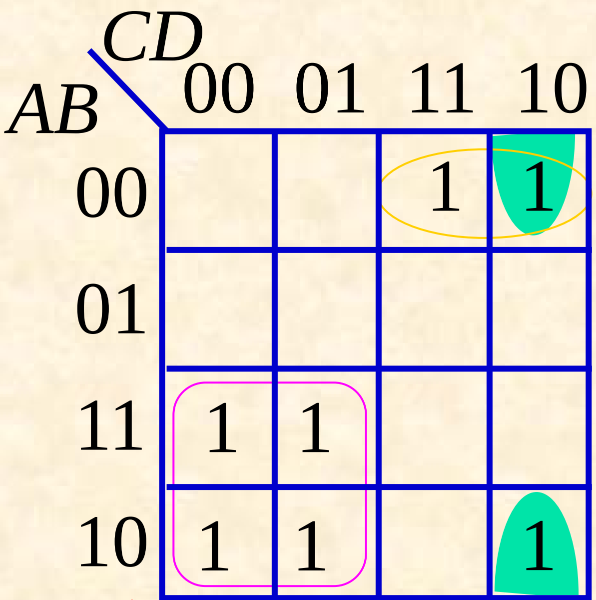
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

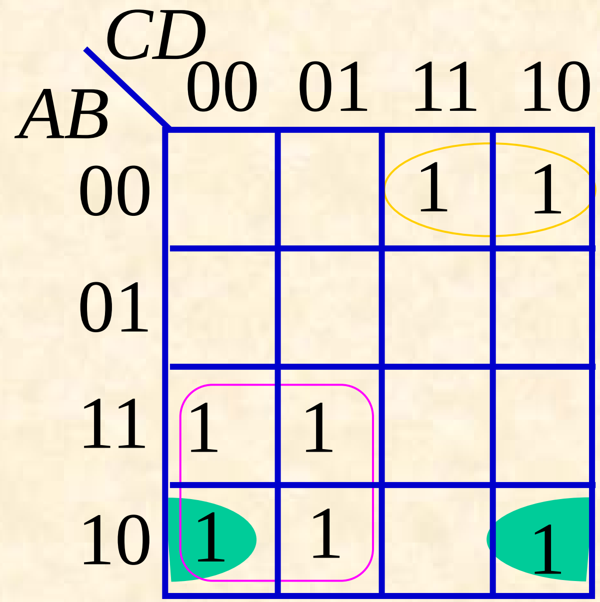
ABD

$$F=\overline{ABD}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{D}$$

例4：用卡诺图化简逻辑涵数

$F(A, B, C, D)=\Sigma m(2, 3, 8, 9, 10, 12, 13)$





$$F=(A,B,C,D)=A\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{B}C\overline{D}$$

或 $$F=(A,B,C,D)=A\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\overline{B}\,\overline{D}$$

注意：不同的圈法，得到不同的最简结果。

具有无关项的逻辑函数及其化简

无关项的概念：

1、约束项：输入逻辑变量的取值不是任意的，对取值有外加限制，这些取值对应的最小项。

2、任意项：在某些输入变量的取值下，函数值为1，还是为0皆不影响电路的功能，这些取值对应的最小项。

3、无关项：约束项、任意项统称无关项。

4、带无关项的逻辑函数及其表示

描述电机的状态:

可用A、B、C三个逻辑变量

A=1：表示电机正转，

A=0：表示电机不正转；

B=1：表示电机反转，

B=0：表示电机不反转；

C=1：表示电机停止，

C=0：表示电机转动；

A	B	C	Y
0	0	0	×
0	0	1	√
0	1	0	√
0	1	1	×
1	0	0	√
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×

$$\sum m(0,3,5,6,7) = 0$$

约束条件

带无关项的逻辑函数的化简

方法：一般采用图形法，画圈时可根据需要将“×”号视为1或0。

例1 $F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,5,7,9)$

$$\sum m(10,11,12,13)=0$$

Y

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	×	×	0	0
10	0	1	×	×

$\overline{A}D$

$\overline{B}D$

$$Y=\overline{A}D+\overline{B}D$$

例2：已知真值表如图，用卡诺图化简。

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，即是无所谓状态。

化简时可以将无所谓状态当作1或0，目的是得到最简结果。

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	ϕ	1	1

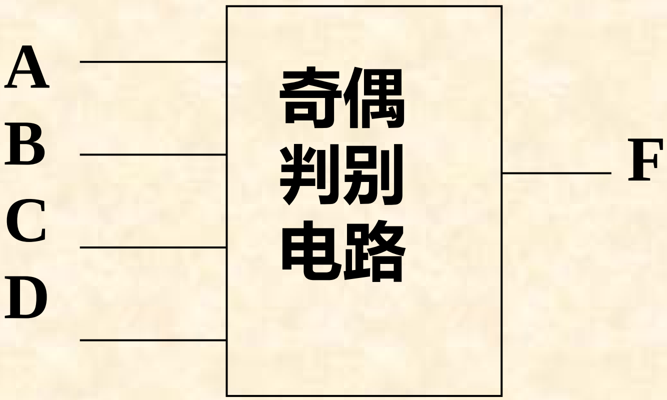
A

认为是1

$F=A$

例3：设计一个奇偶判别电路. 电路输入为8421**BCD**码, 当输入为偶数时, 输出为 0 ;当电路输入为奇数时, 输出为1 .

由于8421**BCD**码中无**1010~1111**这6个码, 电路禁止输入这6个码. 这6个码对应的最小项为无关项.



$$F(A,B,C,D)=\Sigma m(1,3,5,7,9)+\Sigma d(10\sim 15)$$

真值表

A	B	C	D	F	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	×
0	0	1	1	1	1	0	1	1	×
0	1	0	0	0	1	1	0	0	×
0	1	0	1	1	1	1	0	1	×
0	1	1	0	0	1	1	1	0	×
0	1	1	1	1	1	1	1	1	×

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	×

若将卡诺图中的×均作0处理, 则化简结果为:

$$F=\overline{A}D+\overline{B}\,\overline{C}D$$

若将卡诺图中的×任意处理(即按化简的需要, 将有些×当作0, 有些×当作1), 则化简结果为:

$$F=D$$

注意:在无特殊说明的情况下,为使逻辑函数化的更简单,均应按上述第二种方法处理最小项.

公式化简法与图形化简法的比较

1. 公式法适用面广，技巧性强，但缺乏直观性；
2. 图形法直观明了，规律性强，但只适用于n≤5的函数。

逻辑函数的变换与实现

一、用与非门实现逻辑函数：

1、将逻辑函数化为最简与或式；

2、对表达式二次取反；

3、化为与非--与非式；

4、画出逻辑图。

推论:用与非门、或非门、与或非门

可独立地实现逻辑函数。

例如：用与非门实现逻辑函数

$$Y = F(A, B, C, D) = AB\overline{D} + AC + A\overline{C}D + AD$$

Y

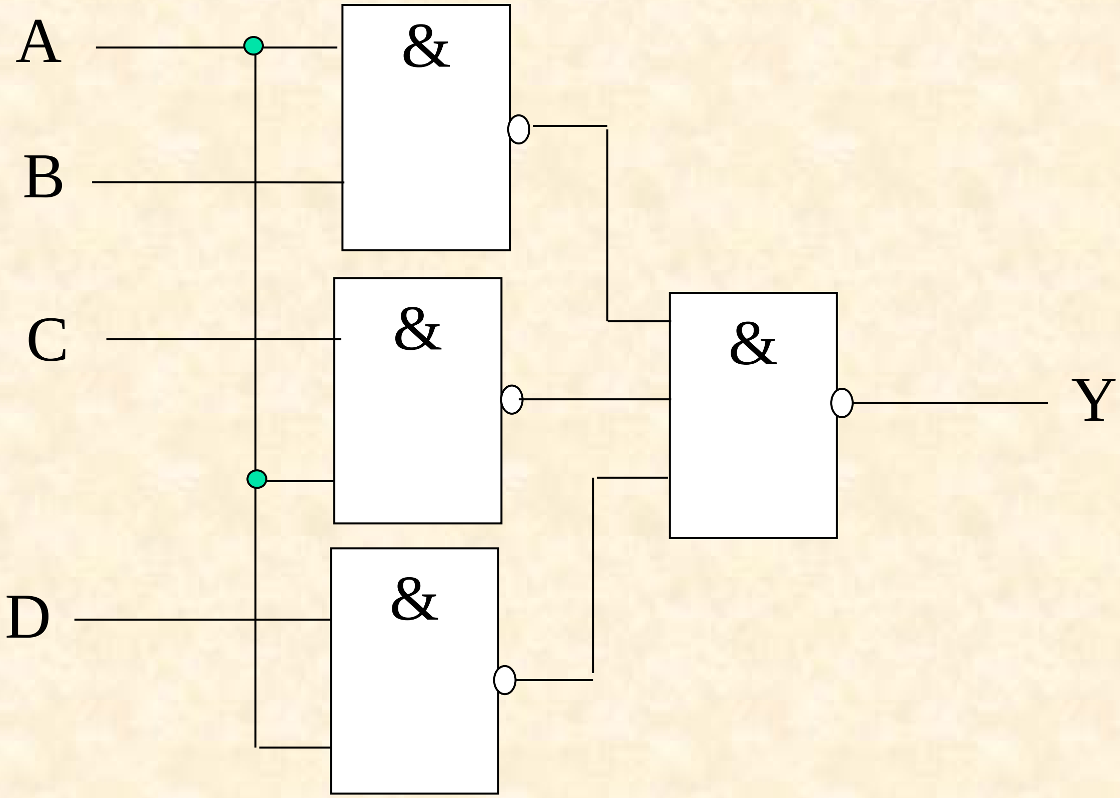
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Y=AB+AC+AD

$$Y = AB + AC + AD$$

$$= \overline{\overline{AB + AC + AD}}$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}$$



二、用或非门实现逻辑函数：

1、将逻辑函数的反函数化为最简与或式；

2、利用反演定理将逻辑函数变为或与式；

3、对或与式二次取反；

4、化为或非--或非式；

5、画出逻辑图。

例如：用或非门实现逻辑函数

$$Y = F(A,B,C,D) = \prod M(0,1,2,3,8,12) \cdot \prod d(4,5)$$

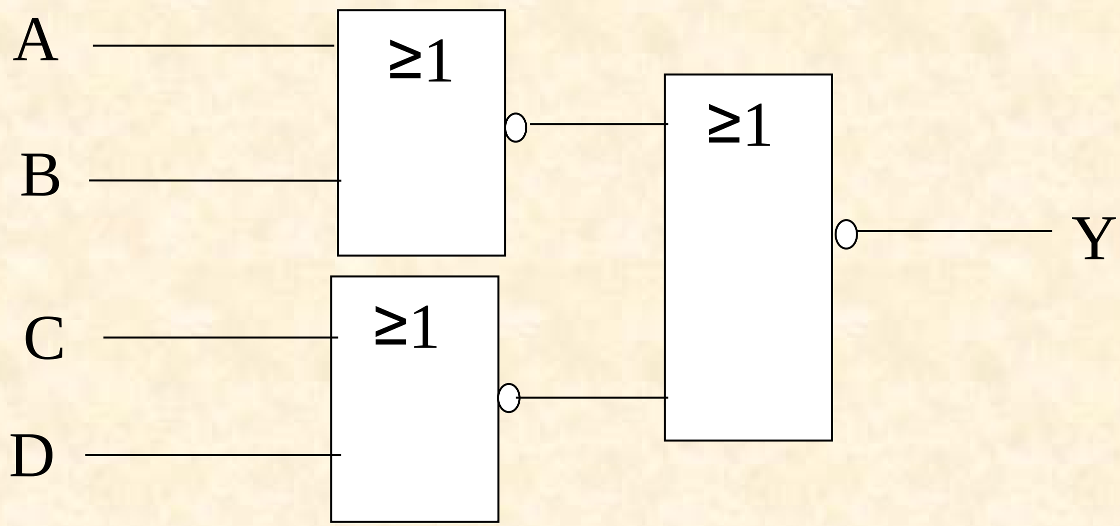
Y: AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	×	×	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

$$\overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$$

$$\overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$$

$$Y = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}\,\overline{D}}$$ **=（A+B）(C+D)**

$$= \overline{\overline{(A+B)(C+D)}} = \overline{\overline{A+B} + \overline{C+D}}$$



三、用与或非门实现逻辑函数：

1、将逻辑函数的反函数化为最简与或式（或将逻辑函数化为最简与或式）；

2、对与或式一次取反（对与或式二次取反）；

3、画出逻辑图。

例如：用与或非门实现逻辑函数

$$Y = F(A,B,C,D) = \prod M(0,1,2,3,8,12) \cdot \prod d(4,5)$$

Y

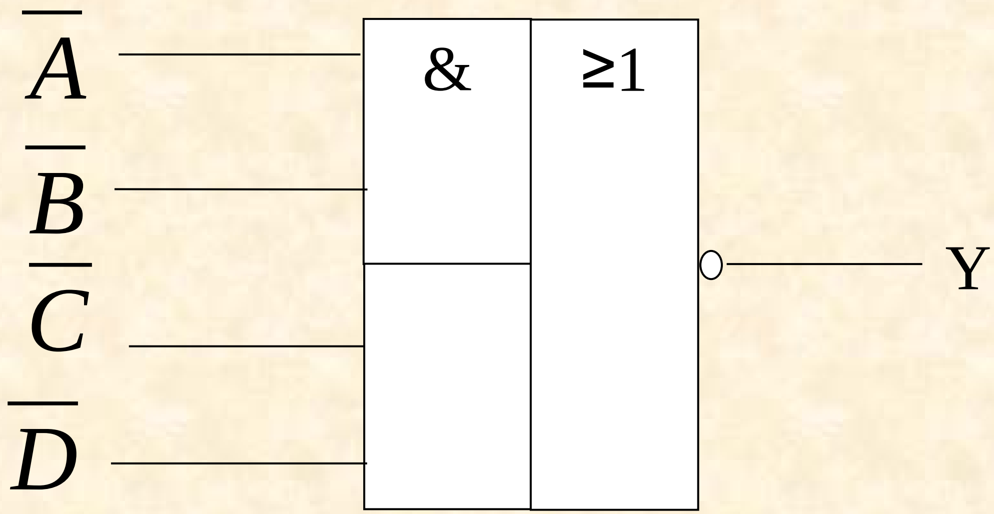
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	×	×	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

$$\overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$$

Y=AD+AC+BC

$$\overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$$

$$Y = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}}$$



Y=AD+AC+BC

$$= \overline{\overline{AD + AC + BC}}$$