杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学甲（1）		考试日期	2014年1 月 12 日	成 绩	
课程号	A0714011	教师号		任课教师姓名		
考生姓名		学号（8位）		年级	专业	

题号	一	二	三			四				五		六		七	八
			1	2	3	1	2	3	4	1	2	1	2		
得分															

得分	

一、选择题 （本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. $f'(x_0)=0$是$f(x)$在x_0处取得极值存在的（ D ）

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；　(C) 充分必要条件；　(D) 既非充分也非必要条件．

2. 设函数$y=(\sin x^4)^2$，则导数$\frac{dy}{dx}=$（ C ）

(A) $4x^3\cos(2x^4)$ ；(B) $2x^3\cos(2x^4)$；(C) $4x^3\sin(2x^4)$；(D) $2x^3\sin(2x^4)$．

3. 设函数$f(x)$在$x=a$处可导，$\Delta y=f(a+h)-f(a)$，则当$h\to 0$时必有（ D ）

(A) dy是h的等价无穷小量；　(B) $\Delta y-dy$是h的同阶无穷小量；

(C) dy是h的高阶无穷小量；　(D) $\Delta y-dy$是h的高阶无穷小量．

4. 当$x\to 3^-$时，下列函数中为无穷小量的是（ A ）

(A) $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$；(B) $f(x)=\ln(3-x)$；(C) $f(x)=\sin\frac{1}{x-3}$；(D) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$．

5. $x=0$是$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$的（ D ）

(A) 连续点；(B) 可去间断点；(C) 跳跃间断点；(D) 第二类间断点．

6. 下列反常积分中收敛的是（ B ）

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$；　(B) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$；(C) $\int_e^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$；　(D) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$．

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 设$y=e^{x\sin x}$，则y在$x=\frac{\pi}{2}$处的微分等于 $e^{\frac{\pi}{2}}dx$ ．

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{2x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\geq 0\end{cases}$，且$f(x)$在$x=0$处连续，则$a=$ $-\frac{3}{2}$ ．

3. 不定积分$\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=$ $-\sin\frac{1}{x}+C$ ．

4. 微分方程$y''+\frac{1}{x}y'-x=0$的通解为 $\frac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2$ ．

三、小型计算题（共 3 小题，每小题 4 分，共 12 分）

得分	

1. 求曲线$y=2\ln x+x^2+3$平行于直线$y=4x+1$的切线方程

解 $y'=\frac{2}{x}+2x$

$k_{切}=y'=\frac{2}{x}+2x=4$　$x=1$　　2'

切点 $M_0(1,4)$

切线方程 $y-4=4(x-1)$ ……2'

即 $4x-y=0$

得分	

2. 隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 确定，求 $y'(0)$.

解 在 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 两边同时求 x 导数

$e^x-e^y y'=\cos(xy)(y+xy')$ (1) 2'

又∵ $x=0$ $y=0$ (2) 1'

代入(1) 解得 $y'(0)=1$ 1'

得分	

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}}$ 1'

$=e^4$ 1'

四、计算题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

得分	

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}x}{-4(\pi-2x)}$ 2'

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2x}{8}$ 2'

$=-\frac{1}{8}$ 1'

得分	

2. $y=\cos\frac{x^2}{1+x}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ 的值.

解 $y'=-\sin\frac{x^2}{1+x}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x}\right)'$ 2'

$=-\sin\frac{x^2}{1+x}\cdot\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$ 2'

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{4}\sin\frac{1}{2}$ 1'

得分	

3. 求曲线 $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$

$y''=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2x+1}{3x\sqrt[3]{x}}$ ---2'

令 $y''=0$. $x=-\frac{1}{2}$ $y''\big|_{x=0}$ 不存在

$x<-\frac{1}{2}$ $y''<0$ ∴ $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 为 y 凸区间

$x>-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq0$ $y''>0$ $[-\frac{1}{2},+\infty)$ 为 y 凹区间 2'

$M(-\frac{1}{2},\frac{9}{5}(-\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}})$ 为拐点 1

得分	

4. 求定积分 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 令 $x=a\sin t$. $x=0$. $t=0$; $x=a$. $t=\frac{\pi}{2}$ 1'

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt$ 2'

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,d2t$ 1'

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2u\,du$ 1

$=\frac{a^4}{16}\left[u-\frac{1}{2}\sin u\right]_0^{\pi}$ 1

$=\frac{\pi a^4}{16}$. 1'

五、计算题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)\, d(2+x)^{-1}$ ……1'

$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2+x} d\ln(1+x)\right]$ 2'

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 (\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x})dx$ ……1'

$= -\frac{\ln 2}{3} + \ln(1+x)\Big|_0^1 - \ln(2+x)\Big|_0^1$ 1'

$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$ ……1'

得分	

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt = e^{2x}-2x-1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 ∵ $\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{x-t=u} \int_0^x (x-u)f(u)du$

$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$ …3'

∴ 原式可改写为

$x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = e^{2x}-2x-1$ ……1'

$\int_0^x f(u)du = 2e^{2x}-2$ 1'

$f(x) = 4e^{2x}$ 1'

六、（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，问 a 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ‥1'

$a = f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{4x^2}-1)\cdot 2}{2x} = 0$ ·2'

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{4x^2}-1)\cdot 2}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2\cdot 2}{3x^2} = \frac{8}{3}$ 3'

得分	

2. 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 对应齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ (1)

特征方程 $r^2-3r+2=0$ (2)

$r_1=+1,\ r_2=+2$

$Y = C_1e^{+x}+C_2e^{+2x}$ 为 (1) 通解 3'

∵ xe^{2x} 且有 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 形式且 $\lambda=2$ 为 r^2-3r+2 单根 ……1'

∴ 设 $y^* = x(ax+b)e^{2x}$

将 y^* $y^{*\prime}$ $y^{*\prime\prime}$ 代入原方程 $a=\frac{1}{2}$ $b=-1$ ‥1'

$y^* = (\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$

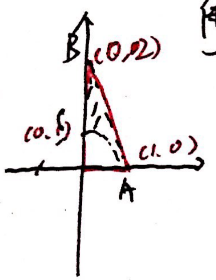
故 原方程通解为 $y = C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$ …1'

得分	

七、应用题[本题9分]

已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 及其在点 $(1,0)$ 处的切线和 y 轴围成，试求（1）平面区域 D 的面积；

（2）平面区域 D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周生成的旋转体的体积.



$x=1-\frac{y}{2}$

$x=\sqrt{1-y}$

解 易求 $y=1-x^2$ 在 $(1,0)$ 处切线方程 $y'=-2x|_{x=1}=-2$

$y-0=-2(x-1)$ 即 $y=-2x+2$ 3'

(1) D的面积，$S=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

D绕x轴旋转生成的旋转体体积

$\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi$

$$V_{x轴}=\int_0^1[\pi(-2x+2)^2-\pi(1-x^2)^2]dx \quad 2'$$

$$=\pi\int_0^1(-x^4+6x^2-8x+3)dx \quad 3'$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{5}x^5+2x^3-4x^2+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{5}\pi \quad 1'$$

$V_1=\frac{4}{3}\pi$

$V_2=\frac{8}{15}\pi$

$V_x=V_1-V_2=\frac{4}{5}\pi$

D绕y轴旋转生成的旋转体体积

$$V_y=\int_0^1 2\pi x(-2x+2-1+x^2)dx \quad 2'$$

$$=2\pi\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx \quad 3$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}. \quad 1'$$

$V_y=\pi\int_0^2(1-\frac{y}{2})^2dy-\pi\int_0^1(1-y)dy$

$=\pi(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{6}\pi.$

得分	

八、证明题 [本题5分]

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 具有连续的导函数 $f'(x)$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明不等式 $4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2$ （其中 $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$）.

证明 任取 $x\in(a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$

应用Lagrange

$f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)$ 1'

$f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$

$|f(x)|=|f'(\xi_1)||x-a|\le M(x-a)$ 1'

$|f(x)|=|f'(\xi_2)||x-b|\le M(b-x)$

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx+\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx \quad \cdots 1'$$

$$\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx$$

$$=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\frac{M}{2}(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \quad 1$$

$$=\frac{M(b-a)^2}{4}$$

故 $4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2.$ 1