概率论与数理统计课程内容总结

指导提纲

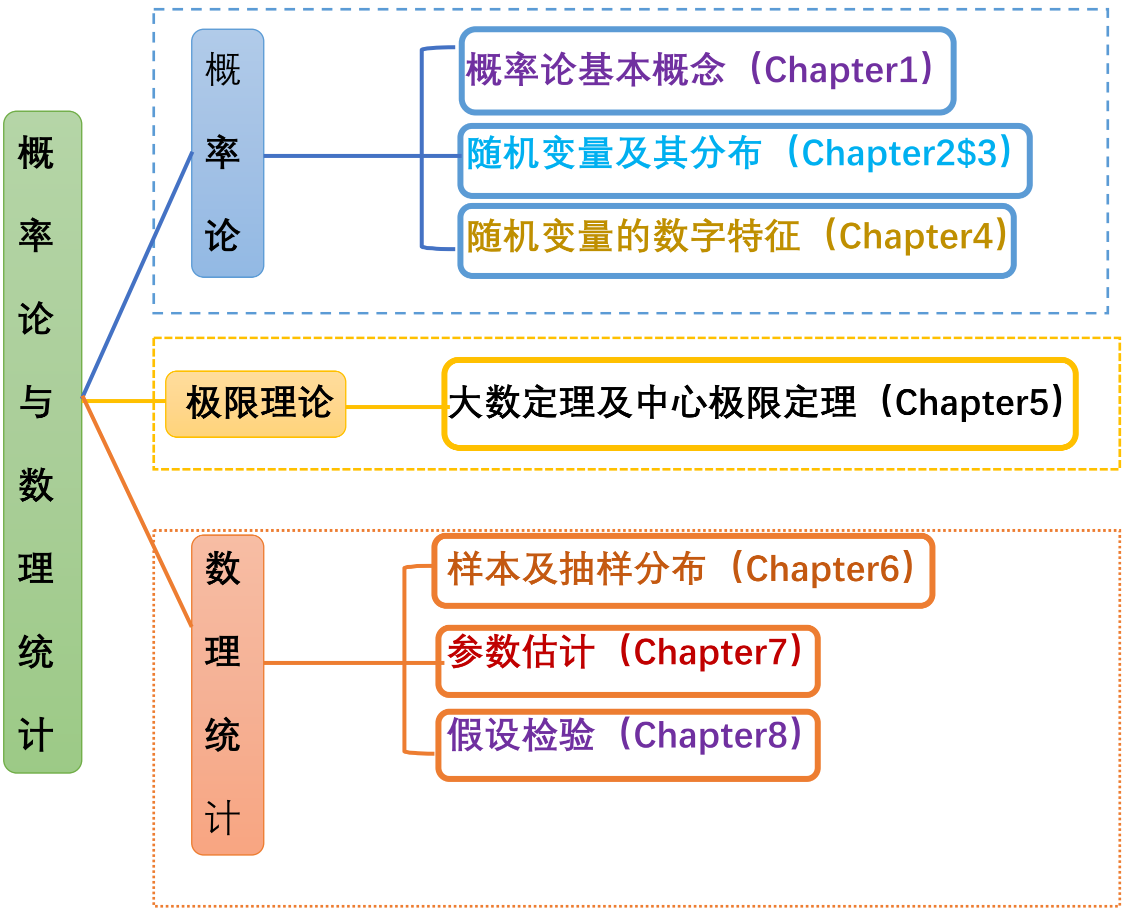
- ☞ 重要知识点回顾（重点 I，难点 D）

- ☞ 应试技巧和注意事项：**解题规范（简答题写“解”开始，证明写“证明”）** **考试一律不用计算器，带上有效证件**

:

重要知识点回顾（重点 I，难点 D）

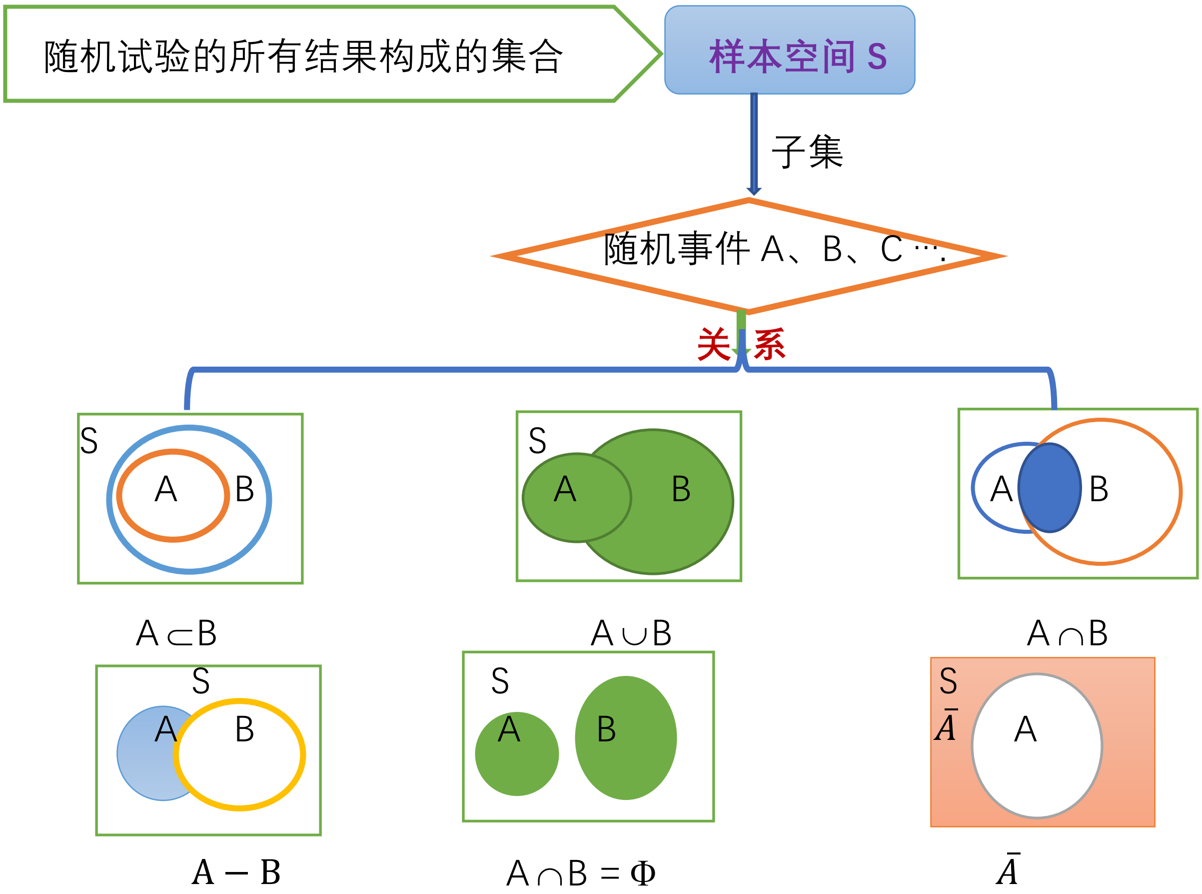
三大模块：



八章内容：

Chapter1 概率论基本概念

1 随机事件的关系和运算（I）



运算律

交换律： $A \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup A$；
$A \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap A$

结合律： $A \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (A \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$；
$A \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (A \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$

(easy)

分配律： $A \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (A \cup \mathbf{B}) \cap (A \cup \mathbf{C})$；
$A \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (A \cap \mathbf{B}) \cup (A \cap \mathbf{C})$

口诀：括号里面符号和括号外面的符号交换

德摩根律： $\overline{A \cap \mathbf{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$；$\overline{A \cup \mathbf{B}} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(D)

2 概率$P(A)$的 “3+6” 性质 (I)

3 条基本性质

非负性：$P(A)\geq 0$

规范性：$P(S)=1$

可列可加性：设$A_1,A_2,\ldots$两两互斥，

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

推出

6 条重要性质

不可能事件概率： $P(\emptyset)=0$

有限可加性： 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互斥，

$$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

差事件概率： 若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(B)\geq P(A)$$

概率不超过 1: $P(A)\leq 1$

逆事件概率：$P(\bar{A})=1-P(A)$

加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

多个事件加法公式推广

3 条件概率

定义： $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ (其中$P(A)>0$) (I)

3 大公式 (D)

乘法公式： $P(AB)=P(B\mid A)P(A),(P(A)>0)$

全概率公式：

设随机试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件

$B_1,B_2,\ldots,B_n$为 S 的一个划分，且$P(B_i)>0$，

则 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

贝叶斯公式：全概率公式条件+$P(A)>0$，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)=\boxed{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}}$$

4 独立性（I）

定义及等价性： $P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow$
$P(B \mid A) = P(B), P(A) > 0$

互推性： A与B, $\bar{A}$与B，A与$\bar{\mathrm{B}}$，$\bar{\mathrm{A}}$与$\bar{\mathrm{B}}$独立性可以相互推出

Chapter2（一维）随机变量及其分布

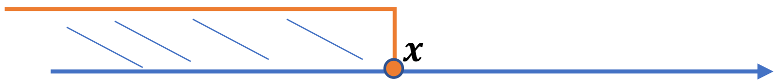
随机变量的分布

- 分布函数 $F(x)$
- 分布律（离散型）
- 密度函数（连续型）
- 随机变量函数的分布（离散型&连续型）

1 $F(x)$的定义和性质 （I）

定义域是整个实轴

$F(x)$的定义： $\forall x \in R$，$F(x) = P\{X \le x\}$ （I）



$F(x)$的性质：

- **单调性：** $F(x_2) \ge F(x_1)$, $x_2 > x_1$
- **概率性**：$0 \le F(x) \le 1, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ （I）
- **右连续性：** $F(x+0) = F(x)$

2 离散型随机变量的分布

分布律（离散型专属）（I）

$P(X = x_k) = p_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ 或

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

其中：$p_k \ge 0, \sum_k p_k = 1$

三种重要分布的分布率

（0-1）分布：

X	0	1
p_k	1-p	p

二项分布$\boldsymbol{b(n,p)}$:

$$P\{x=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\ldots,n$$

泊松分布：$\pi(\lambda)$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

注：分布律与分布函数的相互转换及分布函数的特点

3 连续型随机变量的分布 (I)

概率密度函数

定义：若 X 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,\text{其中}f(x)\geq 0$$

则称X为连续型随机变量。

概密度性质

$$f(x)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

$$P\{x_1<X<x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

$$F'(x)=f(x),(f(x)\text{在}x\text{处连续})$$

任意点处概率为 0

(I)

注：密度函数与分布函数的相互转换

例题：已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求：(1) k的值；(2) 分布函数$\mathrm{F}(x)$；(3) $P\{0<x<1\}$。

三种重要分 布的概率密度函数 (I)

均匀分布$\boldsymbol{U(a,b)}$：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

指数分布：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

正态分布$\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

$\mu=0,\sigma=1$ **标准正态分布$\boldsymbol{N(0,1)}$**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

正态分布密度函数图像的对称性：对称轴$\boldsymbol{x=\mu}$

4 随机变量函数$Y=g(X)$的分布

离散型随机变量的函数$Y=g(X)$的分布律

例题： 已知随机变量 X 的分布律如下：

X	-2	-1	0	2
P	0.1	0.2	0.2	0.5

求$Y=X^2-1$的分布律 **（easy）**

连续型随机变量的函数$Y=g(X)$的密度函数$f_Y(y)$

分布函数法（万能方法）： 先求分布函数，然后求导得密度函数

定理法：（注意条件处处可导，严格单调）

设随机变量X的密度函数$f_X(x),-\infty<x<+\infty$，函数$g(X)$处处可导且恒有$g'(X)>0(<0)$，则$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

其中，$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$h(y)=g^{-1}(x)$。

例 1： 设随机变量 X 服从（-1，1）上的均匀分布，求（1）$Y=X^2$；（2）$Z=|X|$的概率密度函数。**（注：不符合定理单调性条件）**

例 2： 设随机变量 X 服从参数为 1/2 的指数分布，证明$Y=1-e^{-2X}$在区间（0，1）上服从均匀分布。**（符合定理单调性条件）**

特别注意：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ **（I）**

Chapter3 多维随机变量及其分布

（注意与一维随机变量之间的联系与区别）

多维随机变量的分布

- 分布函数 $F(x,y)$
- 分布律（离散型）
- 密度函数（连续型）
- 边缘分布 （独立性）(I)
- 条件分布
- 随机变量函数的分布（离散型&连续型）

二维随机变量分布函数 $F(x,y)$

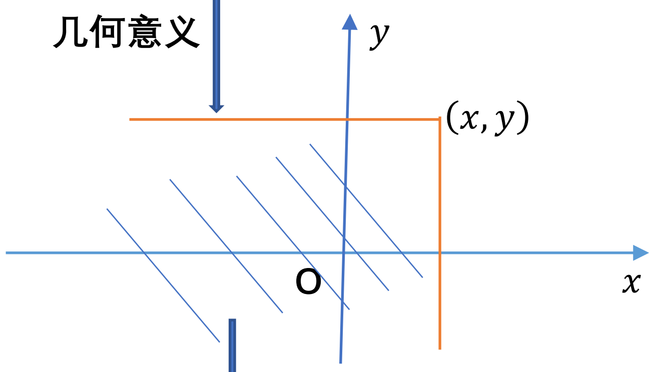
定义

设(X, Y)是二维随机变量,$\forall x,y\in R$,

$F(x,y)=\mathrm{P}\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\triangleq P\{X\le x,Y\le y\}$

称为**(X, Y)的分布函数**或称为**X和Y的联合分布函数**

几何意义



主要 性质

1. $F(x,y)$关于x和y的不减函数；

2. $0 \le F(x,y) \le 1$

$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$， x,y 固定

$F(\infty,\infty)=1$ ；

3. $F(x,y)$关于x右连续；关于y右连续；

二维离散型随机变量的分布律（I）

(X, Y)所有可能取的值：$(x_i,y_j), i,j=1,2,3,\dots,$

记$P\{X=x_i,Y=y_j\} \triangleq p_{ij},\ i,j=1,2,3,\dots,$ **(**)**

易知$p_{ij} \ge 0$， $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

称之为

(X, Y)的分布律或X和Y的联合分布律

分布律的 **表格法**

Y \ X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	… （从小到大排列）
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	….	p_{i1}	…
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	….	p_{i2}	…
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	….	p_{i3}	…
⋮						
y_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	…	p_{ij}	…
⋮	⋮					
（从小到大排列）						

二维连续型随机变量的密度函数及分布函数（D）

随机变量(X, Y)，如果$\forall x, y \in R$,有：

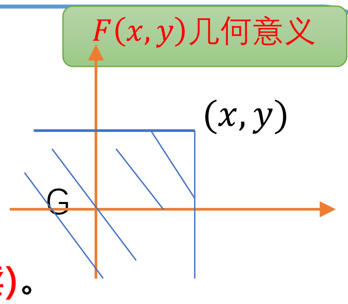
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy\ \text{，其中}\ f(x,y)\ge 0,$$

称(X, Y)为**二维连续型随机变量，称**$f(x,y)$为(X, Y)的密度函数或**X和Y的联合密度函数。**

注：二重积分及其几何意义——体积

$f(x,y)$的性质 **（比较$f(x)$的性质）**

1. $f(x,y)\ge 0$；
2. $F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy\ =1$;
3. $P\{(x,y)\in G\}=\iint_G\ f(x,y)\,dxdy$;
4. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$, **($f(x,y)$在$(x,y)$点连续)**。



例题：设(X, Y)的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-2x-3y}, x>0, y>0\\ \quad 0, \qquad else\end{cases}$$

求：（1）k的值；(2) $F(x,y)$;　(3)$P\{Y\ge X\}$; (4) $P\{3Y\ge 2X\}$

(提示：画出密度函数有效区域图)

边缘分布 &独立性（I）

Case1: (X, Y)——离散 （easy）

(X, Y)分布律的 **表格法**

Y \ X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	$P\{Y=y_j\}$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	....	p_{i1}	…	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	....	p_{i2}	…	$p_{\cdot 2}$
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	....	p_{i3}	…	$p_{\cdot 3}$
⋮							⋮
y_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	…	p_{ij}	…	$p_{\cdot j}$
⋮	⋮						⋮
$P\{X=x_i\}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$p_{3\cdot}$	....	$p_{i\cdot}$	…	1

关于 X 的分布律。　　　同理，关于 Y 的分布律。**(另列表格)**

Case2: (X, Y)——连续 （联合密度$f(x,y)$）

关于X 的（边缘）密度函数为： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

关于Y 的（边缘）密度函数为：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

例题 1：设(X, Y)的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & x>0, y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

求关于 X 和 Y 的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$。

(提示：画出密度函数有效区域图)

解得： $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, x>0, y>0\\ \quad 0, \qquad else\end{cases}$

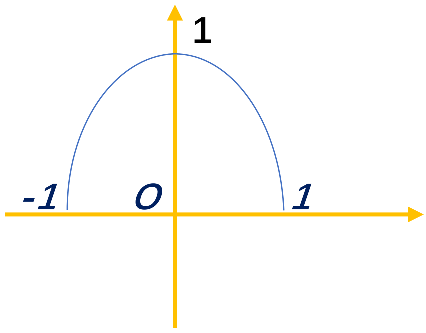
$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0,\\ 0, \qquad else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, y>0,\\ 0, \qquad else\end{cases}$$

易知： $f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$

例题 2：设(X,Y)在区域D：$\{(x,y)|0\le y\le 1-x^2\}$上服从**均匀分布**，

求关于 X 和 Y 的边缘密度函数$\boldsymbol{f_X(x)}$和$\boldsymbol{f_Y(y)}$。



解得：$f(x,y)=\begin{cases}3/4,\ 0\le y\le 1-x^2\\ \quad 0, \qquad else\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}3(1-x^2)/4 \quad -1<x<1,\\ \quad 0, \qquad else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{1-y}}{2}, 0<y<1,\\ \quad 0, \qquad else\end{cases}$$

易知： $f(x,y)\neq f_X(x)\times f_Y(y)$

注：观察两个例题的结果，有什么区别？

独立性（I）

相互独立

$If\,\forall x,y\in R,$ 事件$(X\le x)$与事件$(Y\le y)$独立，then:

$$F(x,y)=\mathrm{P}\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\triangleq P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\boldsymbol{P\{X\le x\}P\{Y\le y\}}$$ 即

$$=\boldsymbol{F_X(x)F_Y(y)}\Longrightarrow$$ 称X,Y 相互独立

Case1:离散型

$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$分布律的 **表格法**

X \ Y	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	$\mathrm{P}\{Y=y_j\}$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	….	p_{i1}	…	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	….	p_{i2}	…	$p_{\cdot 2}$
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	….	p_{i3}	…	$p_{\cdot 3}$
.							.
.							.
.							.
y_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	…	p_{ij}	…	$p_{\cdot j}$
.	.						.
.	.						.
.	.						.
$\mathrm{P}\{X=x_i\}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$p_{3\cdot}$	….	$p_{i\cdot}$	…	1

$\forall i,j,\ \mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_j\}=\mathrm{P}\{X=x_i\}\mathrm{P}\{Y=y_j\}$ （每一个满足）

Case2:连续型

$$f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$$ **(几乎处处成立)**

例题 1 相互独立，例题 2 不独立

条件分布

Case1: (X, Y)——离散型 (I)

直接根据条件概率$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ $(P(A)>0)$**做就可以了。**

(X, Y)的分布律：$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,3,\ldots,$ **即：**

Y \ X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	$P\{Y=y_j\}$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	….	p_{i1}	…	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	….	p_{i2}	…	$p_{\cdot 2}$
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	….	p_{i3}	…	$p_{\cdot 3}$
.	.						.
.	.						.
.	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	…	p_{ij}	…	.
y_j	.						$p_{\cdot j}$
.	.						.
.	.						.
.	.						.
$P\{X=x_i\}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$p_{3\cdot}$	….	$p_{i\cdot}$	…	1

如果 $P\{X=x_i\}>0$（i固定)

则：$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}$ $(j=1,2,3,\ldots)$

$=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ **（分布律）**

同理：$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $(i=1,2,3,\ldots,p_{\cdot j}>0)$. **（分布律）**

注：条件概率与条件分布律的区别。

例题：(X, Y)的分布律如下，

Y \ X	0	1	2	3
1	0	3/8	3/8	0
3	1/3	0	0	1/8

求：(1) $P\{X=2|Y=1\}$；(2) 当$Y=1$时，关于X的条件分布律。

Case2: (X, Y)——连续型. (D)

已知(X, Y)的密度函数$f(x,y)$，$x,y\epsilon R$

$$\boldsymbol{f_{Y|X}(y|x)} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\boldsymbol{f_{X|Y}(x|y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

随机变量函数的分布

Case1：离散型（easy）(I)

例 1：已知二维离散型随机变量（X,Y）的概率分布律如下：

Y \ X	-1	0	2
-1	1/4	1/8	1/4
1	1/12	1/8	1/6

求：X+Y，X-2Y，XY，X/Y，X^2+Y-1，max{X,Y}，min{X ,Y}

的分布律。

Case2: 连续型（D）

方法 1：公式法

设(X,Y)的概率密度函数为 $f(x,y)$, $x,y\in R$,

(1) $Z=X+Y$的概率密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

(2) $Z=Y/X$概率密度函数 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$

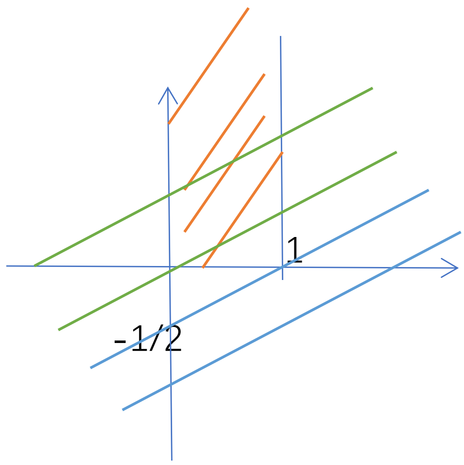
(3) $Z=XY$概率密度函数 $f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$

方法 2:分布函数法（万能方法）

例： 已知(X,Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0\le x\le 1, y>0\\ 0\quad, \quad 其他\end{cases}$$

求：Z=X-2Y 的概率密度。



没法用现成公式，只能利用分布函数法，解题思路：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-2Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{X-2Y\le z}f(x,y)dxdy \quad （讨论 z 的取值）$$

Chapter4 随机变量的数字特征（So easy）

数字特征
- **期望$E(X)$**
- **方差$D(X)$&标准差$\sqrt{D(X)}$**
- **协方差$Cov(X,Y)$**
- **相关系数ρ_{XY}**
- **（原点）矩μ_k**

期望$E(X)$（I）

6 个定义（了解）

Case1: X——离散型

定义 1:设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\ldots$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$**绝对收敛**，则级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$的和为随机变量X的**数学期望（或均值）**，记为$E(X)$。即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

Case2: X——连续型

定义 2: 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$

若积分$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$**绝对收敛(绝对可积)，则称**$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$的值为随机变量X的**期望（或均值）**，记为$E(X)$。即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx。$$

别忘了我哦！

Case3: $Y=g(\mathrm{X})\big(\mathrm{X}$ 离散，g连续$\big)$，$E(\mathrm{Y})=?$

定义 3(定理):设$Y=g(\mathrm{X})$, X为离散型随机变量且分布律为

$$\mathrm{P}\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\ldots$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$**绝对收敛**，则

$$E(Y)=E[g(\mathrm{X})]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k。$$

Case4: $Y=g(\mathrm{X})\big(\mathrm{X}$ 连续，g连续$\big)$，$E(\mathrm{Y})=?$

定义 4(定理):设$Y=g(\mathrm{X})$, X为连续型随机变量且概率密度为$f(x)$

若积分$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$**绝对收敛(绝对可积)，**则

$$E(\mathrm{Y})=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)dx。$$

Case5: $Z=g\big(\mathrm{X},\ Y\big)\big((\mathrm{X},\mathrm{Y})$离散，$g$连续$\big)$，$E(\mathrm{Z})=?$

定义 5(定理):设$Y=g(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, (X,Y)为离散型且分布律为

$$\mathrm{P}\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\ldots$$

若级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$**绝对收敛**，则

$$E(\mathrm{Z})=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}。$$

Case6: $Z=g\big(\mathrm{X},\ Y\big)\Big((\mathrm{X},\mathrm{Y})$连续，$g$连续$\Big)$，$E(\mathrm{Z})=?$

定义 6(定理):设$Y=g(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, (X,Y)为连续型且概率密度为$f(x,\mathrm{y})$

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,\mathrm{y})dxdy$**绝对收敛(绝对可积)，**则

$$E(\mathrm{Z})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,\mathrm{y})dxdy。$$

性质（I）：设X、Y为随机变量，C为常数，有：

1、$E(C)=C$

2、$E(CX)=CE(X)$

3、$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(aX+bY)$
$=aE(X)+bE(Y)$

4、当X、Y相互独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$ **（注意条件）**

例题 1：已知X为离散型随机变量且分布律如下，$\mathrm{Y}=X^2$，求$E(\mathrm{X})$，$E(\mathrm{Y})$。

X	-1	1	2	3
p	1/8	1/4	1/8	1/2

例题 2：已知X为连续型随机变量且概率密度如下，求$E(\mathrm{X})$。

$$f(x)=\begin{cases}1+x\,, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}\text{。}$$

例题 3：设(X, Y)的分布律如下，$\mathrm{Z}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$，求$E(\mathrm{X})$，$E(\mathrm{Z})$。

Y \ X	-1	0	1	2
0	0	2/8	3/8	0
1	1/8	1/8	0	1/8

不求Y的密度函数，直接公式计算

例题 4:设随机变量(X, Y)的密度函数如下，求$E(\mathrm{Y})$，$E(\frac{1}{XY})$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & else\end{cases}$$

方差$D(X)$&标准差$\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{X})}$

定义：设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为X的**方差**，记为D(X) 或 Var(X)，同时称$\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{X})}$为X的**标准差**或**均方差**，记成σ(X)。

即：$\mathrm{D}(\mathrm{X})=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-E^2(X)$

性质（I）：设X、Y为随机变量，C为常数，有：

1、$\mathrm{D}(C)=0$

2、$D(CX)=C^2D(X)$ ⟶ $\boxed{D(-X)=D(X)}$

3、$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

特殊地，当X、Y相互独立时，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

4、$\mathrm{D}(X)=0$的充要条件是X以概率为 1 取常数$E(X)$，即

$$\mathrm{P}\{X=E(X)\}=1$$

期望和方差的重要结果：（I）

对象	$b(1,p)$	$b(n,p)$	$\pi(\lambda)$	$U(a,b)$	指数分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$\chi^2(n)$	$\bar{X}$	S^2
$E(\cdot)$	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	θ	μ	n	μ	σ^2
$\mathrm{D}(\cdot)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{(a-b)^2}{12}$	θ^2	σ^2	$2n$	$\frac{\sigma^2}{n}$	/

协方差$Cov(X,Y)$（I）

定义：量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$Cov(X,Y)$的计算公式变形：

①$Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

我最简单、常用

② $Cov(X,Y) = E(XY) - E(Y)E(Y)]$

③$Cov\ (X,Y) = [D(X+Y) - D(X) - D(Y)]/2$

$Cov(X,Y)$的性质（线性性）：

0. $Cov(X,X) = D(X)$

1. $Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$

2. $Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$

相关系数ρ_{XY} （I）

定义： $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为随机变量X与Y的相关系数。

当 $\rho_{XY} = 0$时，称X和Y不相关。

ρ_{XY}的性质：

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$ （结果不要超出这个范围）

2. $|\rho_{XY}| = 1$的充要条件是存在常数a,b 使

$$P\{Y = aX + b\} = 1$$

不相关和独立的关系：

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D(X)}}\sqrt{\mathrm{D(Y)}}}$$

独立 $\longrightarrow$ $Cov(X,Y)=0$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\rho_{XY}=0}$ $\longrightarrow$ **不相关**

不相关 $\xrightarrow{?}$ **独立** （推不出，反例 P108 例 1）

例题：设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, 0\le y\le x\le 1\\ 0,\quad else\end{cases}$，

求$\boldsymbol{\rho_{XY}}$。**（包含了前面讲的所有的数字特征，课后自己练习）**

P108 例 1（离散型的）

（原点）矩$\boldsymbol{\mu_k}$ **（主要在第七章矩估计中使用）**

定义：设X和Y是随机变量，若$E(X^k), k=1,2,\ldots$存在，称之为X的$\boldsymbol{k}$**阶原点矩**（$\boldsymbol{k}$**阶矩**），记成$\boldsymbol{\mu_k}=E(X^k)$。

注：所有的数字特征本质就是计算期望。

Chapter5 大数定理及中心极限定理

(切比雪夫不等式挪到本章)

1 切比雪夫不等式：(I)

设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ε，不等式$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$成立。

即

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$ **（本质）**

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$ **（变形）**

特点：事件中的不等号与结论不等号反相时，第一反应切比雪夫不等式。

切比雪夫不等式作用：1.估算概率；2.证明大数定律

例题： 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，$P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ ____________（数学一考研题）

（不等号相反）

2 大数定律：了解本质即可：$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$，$f_n(A) \xrightarrow{P} \mu$

推广：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^k \to \mu_k = E(X^k), n \to \infty$（矩估计理论基础）

3 中心极限定理（定理 1 和 3）（用标准正态分布估算概率）(I)(D)

独立同分布中心极限定理：

设$X_1, X_2, \ldots$是相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k) = \mu$，$D(X_k) = \sigma^2 > 0\ (k = 1,2,\ldots)$，前$n$ 个随机变量之和

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad (n \to \infty)$$

或 $\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量 $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1) \quad (n \to \infty)$

或 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad (n \to \infty)$

或 $\bar{X}$的标准化变量 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad (n \to \infty)$

主要用于求关于和或者算数平均的概率

棣（dì）莫弗—拉普拉斯定理：

设随机变量$\eta_n \sim b(n,p)(0 < p < 1, n = 1.2, \ldots)$，则

$$\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(o,1),\ n \to \infty$$

独立同分布中心极限定理的特殊情况，主要功能是计数

例 1：一加法器同时收到 20 个噪声电压$X_i (i = 1,2, \ldots, 20)$，设它们相互独立的随机变量，且都在区间(0，10)上服从均匀分布。求$P\{\sum_{i=1}^{20} X_i > 105\}$的近似值（结果用$\Phi(\cdot)$表示）（求和问题）

相当于中心极限定理的标志性暗示

例 2：据调查某高校的大学生戴眼镜的概率为 0.2，利用中心极限定理估计 10000 个学生中戴眼镜的学生数少于 2100 概率。（结果用 $\Phi(\cdot)$表示）**（计数问题）**

中心极限定理使用注意：1、结果近似值；

2、数据不要改动；

3、看清是求和还是记数

Chapter6 样本及抽样分布（统计部分的根，特别重要）

重点：4 个统计量+3 大分布+2 个定理

4 个统计量（样本数字特征）

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是**来自**总体X的一个样本，

样本平均值 $\boldsymbol{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

样本方差 $\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2)}$

样本标准差 $\boldsymbol{S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2)}}$

样本k 阶 $\boldsymbol{A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^k, k = 1, 2, \ldots}$

注意：联系随机变量的数字特征，故也可称之为**样本数字特征。**

3 大统计量分布：

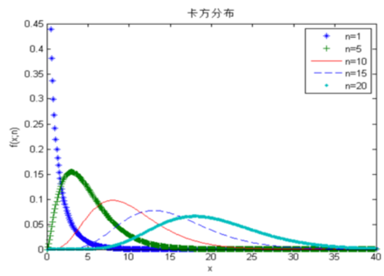
（一）χ^2分布 独立性

定义：设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是**来自总体$N(0,1)$**的样本，则统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

服从自由度为n的**χ^2分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.**

（密度函数代表曲线）



性质（可加性）：设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且$\chi_1^2$、$\chi_2^2$相互独立，

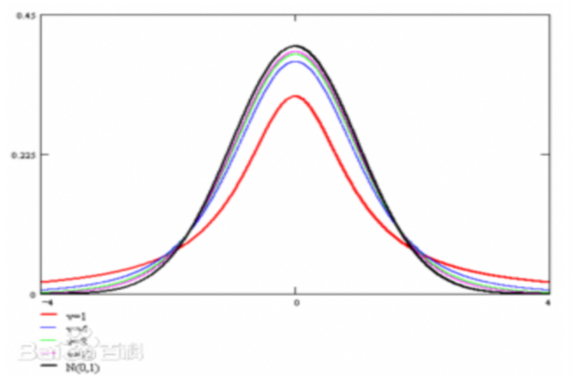
则：$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ （显而易见）

（二）t 分布(Student 分布)

定义： 设$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，**且X、Y相互独立**，则统计量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为n的t **分布**，**记成$t\sim t(n)$.**



$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\varphi(x)$$

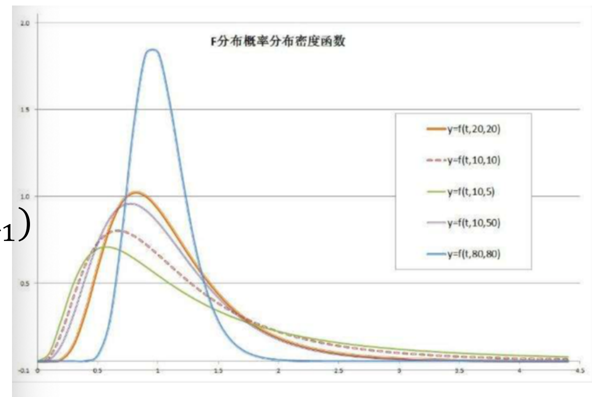
（三）F 分布

设$U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，**且 U、V相互独立，** 则统计量

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为(n_1,n_2)的F**分布**，**记成$F\sim F(n_1,n_2)$.**

密度函数图像如右图

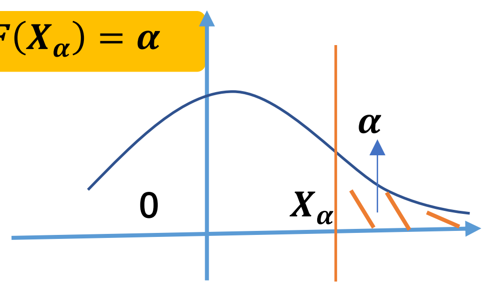


性质：若$F\sim F(n_1,n_2)$， 则$1/F\sim F(n_2,n_1)$

分位点： 设X的密度函数为$f(x)$，给定α（$0<\alpha<1$），称满足

$$P\{X>X_\alpha\}=\int_{X_\alpha}^{\infty} f(x)dx=1-F(X_\alpha)=\alpha$$

称X_α为该种分布的上α分位点



2 个定理：

正态分布的样本均值和样本方差的分布（I）

定理 1（一个正态总体）：设$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自正态总体 $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$的样本，$\bar{X}$，$S^2$分别表示样本均值和样本方差，则有：

(1) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；　　(2) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$；

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；　　(4) $\bar{X}$与S^2相互独立。

注意结论　对比联系

定理 1（二个正态总体）：设$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且这两个样本相互独立。$\bar{X}$，$\bar{Y}$，S_1^2，S_2^2分别表示两个样本均值和样本方差，则：

(1) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$；

(2)当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，

其中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$；

(3) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$。

Chapter7 参数估计

参数估计
- 点估计（矩估计&最大似然估计）
- 评选标准（无偏性&有效性）
- 区间估计（双侧&单侧置信区间）

1 点估计（矩估计&最大似然估计）

矩估计原理：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^k\approx\mu_k=E\left(X^k\right)$ （n充分大时）

方法：“三步曲”

根据参数个数建立方程（组）→解方程→戴帽子（加尖角符号）

注意：结果用样本表示，看清是量还是值

最大似然估计：似然函数（以一个参数为例）（I）（D）

若总体 X的概率密度函数为$f(x;\theta),x\in R$，则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

若总体 X的分布律为$P\{X=x_i\}=p(x_i;\theta)(i=1,2,\dots n)$，则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

方法（一般情况）：“三步曲”

构建似然函数或对数似然函数
↓
求驻点（导数=0 或偏导数=0）
↓
戴帽子（加尖角符号）

2 评选标准（无偏性&有效性）

无偏性：$E(\hat{\theta})=\theta$ (?)

有效性：无偏的前提下，$D(\hat{\theta})$越小越有效

3 区间估计（双侧、单侧）

重点：6 种情况的置信区间的结果（I）（D）

计算步骤：“三步曲”

Step1 说明条件&写出公式

↓

Step2 数据罗列公式中所用数据

↓

Step3 代入公式得出结果

例： 为了比较天能和超威两款电瓶车电瓶寿命情况（单位：h），分别抽取天能和超威两款电瓶 10 只和 8 只新电瓶进行测试，测得寿命的样本均方差分别为s_1^2=64，s_2^2=56。设两款电瓶的寿命分别服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2均未知，求两款电瓶的方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平为 95%的置信区间。

（$F_{0.025}(9,7)=4.20, F_{0.975}(9,7)=0.21$）**（结果保留两位小数）**

解：

Step1 因为μ_1，μ_2未知，所以关于σ_1^2/σ_2^2的置信水平为$1-\alpha=95\%$的置信区间为：$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

Step2 $S_1^2=64$，$S_2^2=56$，$n_1=10,n_2=8$，$F_{0.025}(9,7)=4.2F_{0.975}(9,7)=0.21$

Step3 代入得：$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)=(0.27，5.44)$

单侧一般求单侧上、下限

Chapter8 假设检验

重点：6 种情况的检验统计量，拒绝域，接受域与置信区间的关系（I）（D）

检验方法：拒绝域法、置信区间法（接受域法）

拒绝域法基本步骤:

Step1 根据题意提出假设 H_0，H_1

↓

Step2 根据条件选取合适检验统计量，列出拒绝域

↓

Step3 数据代入，判断是否落在拒绝域内

↓

Step4 作出决策，即回答问题

置信区间法基本步骤:

Step1 根据题意提出假设 H_0，H_1

↓

Step2 根据条件，确定置信区间

↓

Step3 数据代入算出置信区间，判断假设中的常数是否落在置信区间内

↓

Step4 作出决策，即回答问题

例 2 设某厂所生产的某种细纱每缕支数服从正态分布 $N(\mu, 1.2^2)$。现从该厂某日生产的一批产品中，随机抽 16 缕进行支数测量，求得样本标准差 s=2.1。问当天生产的细纱支数的方差有无显著变化？(已知 $\alpha = 0.05$，$\chi^2_{0.025}(15) = 27.5$，$\chi^2_{0.025}(16) = 28.8$，计算结果保留两位小数。)

解：

方法一（置信区间域法）

Step1: 根据题意，设 $H_0: \sigma^2 = 1.2^2 = \sigma_0{}^2$，$H_1: \sigma^2 \neq 1.2^2 = \sigma_0{}^2$

Step2: $\because \mu$ 未知，$\therefore$ 关于 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ =0.95 的双侧置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

Step3: 又 $n = 16, s = 2.1, \chi^2_{0.025}(15) = 27.5, \chi^2_{0.975}(15) = 6.3$

$$\therefore \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = (2.41,\quad 10.5)$$

$$\sigma_0^2 = 1.2^2 = 1.44 \notin (2.41, 10.5)$$

Step4: H_1 为真，即有明显变化（不能少）

方法二（拒绝域法）：

Step1: 根据题意，设 $H_0: \sigma^2 = 1.2^2 = \sigma_0{}^2$，$H_1: \sigma^2 \neq 1.2^2 = \sigma_0{}^2$

Step2: $\because \mu$ 未知，选取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}$，则拒绝域为：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

Step3: 又 $n=16, s=2.1, \sigma_0^2=1.2^2$， 得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}=45.94\geq$ $\chi^2_{0.025}(15)=27.5$， 落在拒绝域内。

Step4: ***H_1*为真，即有明显变化（不能少）**

	对象	条件	枢轴量及分布	置信区间	被择假设 H_0	检验统计量	拒绝域
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ~ N(0,1)	$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2})$	$\mu>\mu_0$（右） $\mu<\mu_0$（左） $\mu\neq\mu_0$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z\geq Z_\alpha$ $z\leq -Z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geq Z_{\alpha/2}$
	μ	σ^2 未知	$t=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$(\bar{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$	$\mu>\mu_0$（右） $\mu<\mu_0$（左） $\mu\neq\mu_0$	$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(\mathrm{n}-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$(\frac{(\mathrm{n}-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)},\frac{(\mathrm{n}-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)})$	$\sigma^2>\sigma_0^2$（右） $\sigma^2<\sigma_0^2$（左） $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(\mathrm{n}-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(\mathrm{n}-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(\mathrm{n}-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{\alpha/2}(\mathrm{n}-1)$或 $\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha/2}(\mathrm{n}-1)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2 已知	$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$((\bar{X}-\bar{Y})\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}Z_{\alpha/2})$	$\mu_1-\mu_2>\delta$（右） $\mu_1-\mu_2<\delta$（左） $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z\geq Z_\alpha$ $z\leq -Z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geq Z_{\alpha/2}$
	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2未知	$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\mu_1-\mu_2}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$((\bar{X}-\bar{Y})\pm S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}Z_{\alpha/2})$	$\mu_1-\mu_2>\delta$（右） $\mu_1-\mu_2<\delta$（左） $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)})$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$（右） $\sigma_1^2<\sigma_2^2$（左） $\sigma_1^2/\sigma_2^2\neq 1$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=S_1^2/S_2^2$	$F\geq F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或 $F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

备注：(I)（D)（使用前先与课本核对，是否有误）