单元自测练习题（3）

第三章　微分中值定理与导数的应用

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、设 $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值的（　　　　）.

A．充分条件　　　　　　B．必要条件

C．充分不必要条件　　　　D．即非充分又非必要条件

2、设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2$，则在 $x=1$ 处（　　　　）.

A． $f(x)$ 的导数不存在　　　　B． $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(1)\neq 0$

C． $f(x)$ 取得极大值　　　　D． $f(x)$ 取得极小值

3、设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$， $f'''(x_0)>0$，则（　　　　）.

A． $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　　　B． $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C． $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　　　D． $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

4、方程 $2^x-x^2=1$ 的实根个数是（　　　　）.

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

5、$x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-x$ 是关于 x 的（　　　　）阶无穷小.

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

6、下列极限求解正确的是（　　　　）.

A． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=2$

B． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

C． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$

D． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

6、曲线弧 $y=\ln(x+1)$ 在点 (x,y) 处的曲率半径 $R=$ ________________ .

7、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]=$ ____________________ .

8、曲线 $y=e^{\arctan x}$ 的拐点 _________________ .

9、$a=$ __________ 时方程 $\left(x-a\right)^{\frac{2}{3}}=2+a$ 有唯一解.

三、解答题(10 题 6 分；11-13 题，每题 10 分，共 36 分)

10、求函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

11、求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\tan x}$，　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\ln(1+x)}$.

12、求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值，并求此函数图像对应的凹凸区间以及曲线的拐点.

13、求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^6(x>0)$ 上哪一点处的法线在 Y 轴上的截距最小.

四、证明题（14-15 题，每题 8 分；16-17 题，每题 9 分，共 34 分）

14、设 $x>0$，证明 $(e+x)^e<e^{e+x}$.

15、证明恒等式 $\arcsin(2x-1)-2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=-\dfrac{\pi}{2}$，$0<x<1$.

16、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，在开区间 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f(1)=0$，

证明：存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f(\xi)+(1-\mathrm{e}^{-\xi})f'(\xi)=0$.

17、设函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)\le0$，证明：对于 $\left(a,b\right)$ 内的任意 x_1、x_2 及 $0\le\lambda\le1$，有

$$f\left[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right]\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2).$$