第二节 函数的求导法则

思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ （构造性定义）

$$\begin{cases}(C)'=0\\(\sin x)'=\cos x\\(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

求导法则

其它基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、四则运算求导法则

定理1. 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在 x 具有导数

$\Longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $\quad(v(x)\neq 0)$

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 证明

此法则可推广到任意有限项的情形.

(2) $(uv)'=u'v+uv'$

证：设 $f(x)=u(x)v(x)$，则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$ 故结论成立.

推论: 1) $(Cu)' = Cu'$ （C为常数）

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

推论: $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-Cv'}{v^2}$ （C 为常数）

例1. $y=\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)$, 求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}(3x^2+4\sin x)$$

$$y'|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

例2. 求证 $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

类似可证: $(\cot x)'=-\csc^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

二、反函数的求导法则

定理2 设 $y=f(x)$在x 的某邻域内严格单调,可导,

且 $f'(x)\neq 0 \Longrightarrow$ 其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可导, 且

$$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

证: 在y 处给增量 $\Delta y\neq 0$，由反函数的严格单调性知

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)\neq 0, \therefore \frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta y\to 0$, 必有$\Delta x\to 0$, 因此

$$(f^{-1}(y))'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

例3. 求反三角函数及指数函数的导数.

解: 1) 设 $y=\arcsin x$, 则 $x=\sin y$, $y\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$\therefore\ \cos y>0$, 则

$$\frac{dy}{dx}=(\arcsin x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

类似可求得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

2) 设 $y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$，则 $x=\log_a y,\ y\in(0,+\infty)$

$$\therefore\quad y'=(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a\cdot y}}=\ln a\cdot a^x$$

特别 $a=\mathrm{e}$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

小结:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\qquad (\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

三、复合函数求导法则

定理3. $u=g(x)$ 在点 x 可导, $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$

可导 $\Longrightarrow$ 复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导,

$$且\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=f'(u)g'(x)$$

证: $\because\ y=f(u)$ 在点 u 可导, 故 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

$\therefore\ \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ （当 $\Delta u\to 0$ 时 $\alpha\to 0$ ）

故有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ $\boxed{(\Delta x\neq 0)}$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x)$$

推广：此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如，$y = f(u)\,,u = \varphi(v)\,,v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{array}}$$

关键：搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

例4. 求下列导数: (1) $(x^{\mu})'$; (2) $(x^{x})'$;

解: (1) $(x^{\mu})' = (e^{\mu\ln x})' = e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)' = x^{\mu}\cdot\dfrac{\mu}{x}$

$= \mu\, x^{\mu-1}$

(2) $(x^{x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^{x}(\ln x + 1)$

说明: 类似可得 $(a^{x})' = a^{x}\ln a$. $(a^{x} = e^{x\ln a})$

例5. 设 $y=\ln\cos(e^x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot(-\sin(e^x))\cdot e^x$$

$$=-e^x\tan(e^x)$$

注: 若 $f'(u)$ 存在，求 $f(\ln\cos(e^x))$ 的导数?

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\underline{f'(\underline{\ln\cos(e^x)})}\cdot(\ln\cos(e^x))'=\cdots$$

这两个记号含义不同

$$f'(u)\Big|_{u=\ln\cos(e^x)}$$

例6. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y'.

解: $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (Cu)'=Cu' \quad (C\text{为常数})$$

$$(uv)'=u'v+uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \quad (v\neq 0)$$

3. 复合函数求导法则

$$y=f(u),\, u=\varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

4. 初等函数在定义区间内可导, 且导数仍为初等函数

例7. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, 求 y'.

解: $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例8. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$,求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}$

$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例8. $y = e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$, 求 y'.

解: $y' = (e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x) \arctan\sqrt{x^2-1}$

$$+ e^{\sin x^2} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)$$

$$= 2x\cos x^2 e^{\sin x^2} \arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} e^{\sin x^2}$$

注意:

1) $(uv)' \neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

讨论

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)' \cancel{=} \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}$ 对吗?

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

2. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确？

因 $f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$ ×

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)\quad y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b},\qquad (2)\quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

解: (1) $$y'=b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)=-\frac{a^b b}{x^{b+1}}$$

(2) $$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\ln\frac{a}{b}\cdot(-x)'=-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{a}{b}$$

或 $$y'=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{b}{a}$$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解：方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!$$

作业

- P94:　2(7,9), 3(2),　7(2,5,8)
  　　8(4,6,8,9), 10(2), 11(6,7)

P100:　1(5,11),　3(2), 9(3)