

单元自测练习题 (1)

第一章 函数与极限

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\} = (\quad)$.

(A) 0; (B) 1; (C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$; (D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

2. 对于三个函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 和 $h(x) = \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$,

在区间 $(0,1)$ 内有界的函数有 (\quad) 个.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3

3. 下列说法正确的是 (\quad) .

(A) $\alpha = \beta + o(\beta)$ 是 α 和 β 为等价无穷小的充要条件;

(B) 无穷小是一个很小的数;

(C) 两个无穷小的商仍是无穷小;

(D) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 那么有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ 的结果是 (\quad) .

(A) 0; (B) $\frac{1}{2}$; (C) ∞ ; (D) 不存在

5. 函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的极限是 (\quad) .

(A) 0; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) $-\frac{\pi}{2}$; (D) 不存在

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 (\quad) .

(A) 无穷大;

(B) 无穷小;

(C) 无界, 但不是无穷大;

(D) 有界, 但不是无穷小

二、求极限 (每题 5 分, 共 25 分)

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{7x+6} - 3}{x-3}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{e^{\sin x} - 1}$$

三、求函数内的参数（每题 7 分，共 21 分）

12. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $(1 - \cos x)^2$ 是 x^n 的同阶无穷小，求 n .

13. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ ，求 a .

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{2 \sin x}, & x < 0 \\ a + e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a .

四、函数连续与间断判定（每题 8 分，共 16 分）

15. 设函数为 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续，若不连续，判断是哪一种类型的间断点.

16. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ($n \in N$) 的间断点，并确定其所属类型.

五、相关应用（每题 10 分，共 20 分）

17. 求曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的所有渐近线.

18. 已知函数 $f(x)$ 是区间 $[0, 2a]$ ($a > 0$) 上的连续函数，且 $f(0) = f(2a)$,

证明：方程 $f(x) = f(x+a)$ 在 $[0, a]$ 内至少有一个根.