杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	工 程 数 学		考试日期	2014 年 1 月 6 日		成 绩	
课程号	A0602850	教师号	04175		任课教师姓名		陈 云
考生姓名		学号（8 位）		年级	2012	专业	

题号	一（30 分）	二（12 分）	三（18 分）	四（32 分）	五（8 分）
得分					

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 复数 $z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$ 的实部为 $\mathrm{Re}(z)=$ <u>3/2</u>

2. 方程 $z^3-1=0$ 的解为 $\underline{1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$ （每个答案 1 分）

3. $\mathrm{Ln}\, i$ 的主值为 $\underline{\frac{\pi}{2}i}$

4. 当 n 为正整数时，等式 $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$ 是否成立？ <u>否</u> （请填"**是**"或者"**否**"）

5. 已知 $C_1:|z|=2,\ C_2:|z|=3,\ C=C_1+C_2^-$，求积分 $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=$ <u>0</u>

6. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=$ <u>∞</u>

7. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $z=4$ 处发散，则该级数在 $z=3+3i$ 处的敛散性为 <u>发散</u>

8. $z=0$ 为函数 $f(z)=\frac{2\sin z}{z^3}$ 的 <u>2</u> 级极点

9. 映射 $w=f(z)=z^2$ 在 $z_0=1+i$ 处的伸缩率为 $\underline{2\sqrt{2}}$

10. 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的Laplace变换为 <u>1</u>

二、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1. 求函数 $f(z)=\frac{3z+2}{z^2(z+2)}$ 在有限奇点处的留数

解：易知 z=0 和 z=2 分别是函数的二级极点和一级极点。

可利用留数计算法则求解

$$\mathrm{Res}[f(z),-2]=\lim_{z\to-2}(z+2)f(z)=\lim_{z\to-2}\frac{3z+2}{z^2}=-1$$ **3 分**

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{2}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2 f(z)]=\lim_{z\to0}\frac{4}{(z+2)^2}=1$$ **3 分**

2. 利用留数计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值

解：令 $z=e^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}, \sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$。

于是，

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{3}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z+\frac{i}{3})(z+3i)}$$ **3 分**

被积函数在单位圆内只有一个一级极点 $\boldsymbol{z}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}$，由留数计算规则，有

$$\mathrm{Res}[f(z),-\frac{1}{3}i]=\lim_{z\to-2}(z+\frac{1}{3}i)f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}i}\frac{2}{3}\frac{1}{z+3i}=-\frac{1}{4}i$$ **2 分**

因此所计算的积分等于 $2\pi i\cdot(-\frac{1}{4}i)=\frac{\pi}{2}$ **1 分**

三、计算题（本题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

1. 对任意满足 $|a|\neq 2$ 的复数 a，求积分 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z-a)^3}dz$

解：被积函数的奇点为 $z=a$。

1）当 $|a|<2$，a 在 $|z|=2$ 内部，由高阶导数公式可得

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-a)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(e^z)''\big|_{z=a}=\pi e^a i$$ 5 分

2）当 $|a|>2$，a 在 $|z|=2$ 外部，由柯西古萨基本定理，得

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-a)^3}dz=0$$ 4 分

本题也可利用留数方法计算

2. 已知 $y''+3y'+2y=e^{-3t}$ 及初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$，利用 Laplace 变换求 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$

解：对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值有

$$s^2Y(s)-1+3sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{s+3}$$ 3 分

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{-2}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}.$$ 2 分

求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$ 3 分

最后有

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$$ 1 分

四、计算题（本题共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. 已知 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，求满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)=u+iv$

解：由 C-R 条件，知

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-3y^2+3x^2$$

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int(-3y^2+3x^2)dy=-y^3+3x^2y+C(x)$$ 4 分

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+C'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$ 2 分

$$\therefore C'(x)=0, C(x)=C_1$$

因此，$v=3x^2y-y^3+C_1$

由 $f(0)=1$，得 $C_1=-i$，$v=3x^2y-y^3-i$

所以，$f(z)=u+iv=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3-i)=(x+iy)^3+1=z^3+1$。 2 分

2. 域 $0<\arg z<\pi/3$ 能否映射成为单位圆 $|w|<1$？若能，请求映射，并作图表示映射过程

解：$\xi=z^3$ 将所给的角形域 $0<\arg z<\pi/3$ 映射成上半平面。 2 分

映射 $w=\dfrac{\xi-i}{\xi+i}$ 则将上半平面映射成单位圆。 2 分

因此，所求的映射为：$w=\dfrac{z^3-i}{z^3+i}$ 2 分

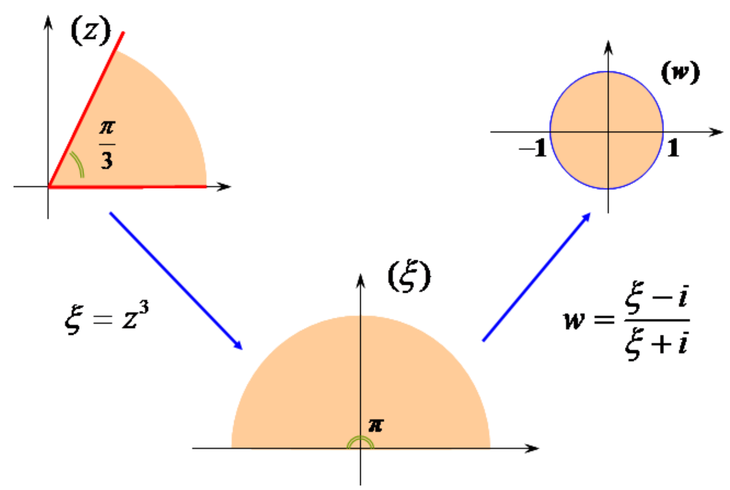


图 2 分

3. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数

解：在 $0<|z-1|<1$ 内，$f(z)=-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{1+(z-1)}$ 或 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}*\dfrac{1}{1+(z-1)}$ 3 分

由于 $|z-1|<1$，所以

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1+(z-1)}\\&=-\frac{1}{z-1}+[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots+(-1)^n(z-1)^n+\dots]\\&=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\end{aligned}$$ 5 分

或 $f(z)=-\dfrac{1}{z-1}\bullet\dfrac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

4. 1）求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ a\,\mathrm{e}^{-bt}, & t\ge 0\end{cases}$ 的 Fourier 变换，其中 $a>0, b>0$；

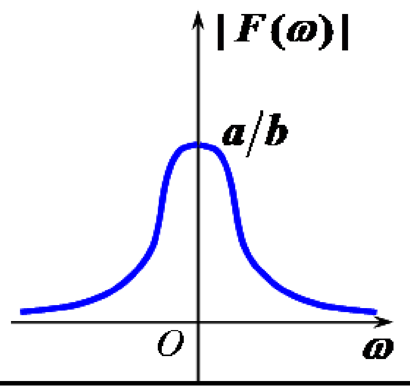
2）大致画出 $f(t)$ 的振幅频谱图，并说明非周期函数频谱与周期函数频谱的主要区别。

解：1）由 Fourier 变换的定义，

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}a\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=a\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(b+j\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{a\mathrm{e}^{-(b+j\omega)t}}{-(b+j\omega)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{a}{b+j\omega}=\frac{a(b-j\omega)}{b^2+\omega^2}\end{aligned}$$ 4 分

2）$f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{a}{\sqrt{b^2+\omega^2}}$，其频谱图如下。 图 2 分

该图说明非周期函数的频谱图是连续的，而周期函数的频谱是离散的，只能在基频的整数倍取值。 2 分



五．证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

1. 证明：当 $z\to 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}$ 的极限不存在

证明：令 $z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{4ixy}{x^2+y^2}$$

即 $u(x,y)=0, v(x,y)=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$ 1 分

注意到 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}u(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}v(x,y)$ 都存在 1 分

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}v(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在，因为沿着 $y=kx$ 趋于零易知其极限值随 k 而变化

因此，当 $z\to 0$ 时，函数 $f(z)$ 的极限不存在。 2 分

2. 如果函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内解析，请证明下述平均值公式成立：

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

证明：在圆上的任意一点 z 可表示为 $z=z_0+R\,\mathrm{e}^{i\theta}$，且 $z-z_0=R\,\mathrm{e}^{i\theta}$。 1 分

由柯西积分公式有

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\,\mathrm{e}^{i\theta})}{R\,\mathrm{e}^{i\theta}}R\,\mathrm{e}^{i\theta}\,i\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\,\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$ 3 分

也可以利用留数方法来证明。