不定式极限

- 记号 $\lim f(x)$:

当$x\to x_0$(或$x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$)时函数$f(x)$的极限值

- 不定式极限:按x的同一变化趋势,

$f(x)\to 0, g(x)\to 0$ 称 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限

$f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ 称 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限

- 不定式极限的类别:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

第二节 洛必达(L'Hospital)法则

微分中值定理 $\left\{\begin{array}{l}\text{函数的性态} \\ \quad\downarrow\uparrow \\ \text{导数的性态}\end{array}\right.$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)

转化 $\Big\downarrow$ $\boxed{\text{洛必达法则}}$

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理1 （洛必达法则）

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导, 且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导, 且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

证:** 无妨假设 $f(a) = F(a) = 0$, 在给定的邻域内任取 $x \neq a$, 则 $f(x), F(x)$在以 **x, a** 为端点的区间上由Cauchy***定理得:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{在 } x, a \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \overset{3)}{=\!=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$

推论1. 定理1中 $x\to a$ 可为

$$x\to a^+,\ x\to a^-,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理仍然成立.

推论 2. 若 $\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x)$, $F'(x)$ 满足定理条件, 则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

> **注意**：不是未定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 (洛必达法则)

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \lim\limits_{x\to a}|F(x)| = \infty$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

例2解二．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$．

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$

$$=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^t}{e^{\lambda x}}\ (t>0\ ,\lambda>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: (1) $t=n$为正整数的情形.

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^t}{e^{\lambda x}}\ (t>0\,,\lambda>0)$.

(2) t **不为正整数的情形.**

存在正整数 k, 使当 $x>1$ 时,

$$x^k < x^t < x^{k+1}$$

从而

$$\frac{x^k}{e^{\lambda x}} < \frac{x^t}{e^{\lambda x}} < \frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^t}{e^{\lambda x}} = 0$$

注意:

1) 例3 , 例4 表明 $x \to +\infty$ 时,

$\ln x,\ \ x^n\ (n>0),\ \ e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下,洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时，

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \overset{?}{=} \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

由洛必达法则

例如，$\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$

极限不存在

$$\| $$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

三、其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

解决方法:

$\boxed{0^0, 1^\infty, \infty^0\ 型}$

令 $y = f^g$

取对数

$\boxed{0\cdot\infty\ 型}$

部分

取倒数

$\boxed{\dfrac{0}{0}\ 型}$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\ 型}$

通分

$\boxed{\infty-\infty\ 型}$

$$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{f}}$$

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$$

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow{\text{通分}} \boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \xleftarrow{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow{\text{取对数}} \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0}$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \quad (n>0)$.

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{x^n}{n}\right) = 0$

$$\boxed{\infty-\infty}\xrightarrow{\text{通分}}\begin{Bmatrix}\boxed{\dfrac{0}{0}}\\[2ex]\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}\end{Bmatrix}\xleftarrow{\text{取倒数}}\boxed{0\cdot\infty}\xleftarrow{\text{取对数}}\begin{Bmatrix}\boxed{0^0}\\\boxed{1^\infty}\\\boxed{\infty^0}\end{Bmatrix}$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

$\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow{\text{通分}} \boxed{\dfrac{0}{0}},\ \boxed{\dfrac{\infty}{\infty}} \xleftarrow{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow{\text{取对数}} \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0}$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

$\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$= e^0 = 1$

例8. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{3}$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$. $\boxed{\infty\cdot 0\text{型}}$

法1 用洛必达法则

分析：为用洛必达法则，**必须改求** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

但对本题用此法计算很繁！

法2 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ $\qquad \sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\to 1$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{e^u-1\sim u}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$$

例(综合计算): $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

例. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

练习题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ (令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$ (用洛必达法则)

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$ (继续用洛必达法则)

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

解: 原式 $$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$