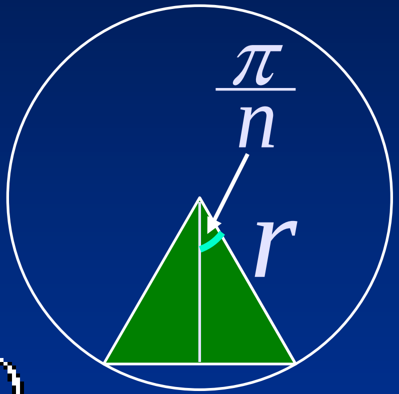
第二节　数列的极限

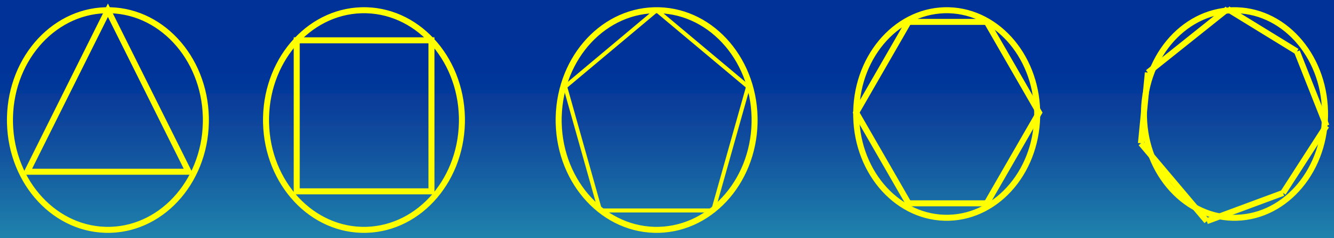
模型　(刘徽割圆术)　设圆半径r，



圆内接正 n 边形的面积

$$A_n = n\,r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

当 n 无限增大时，A_n 无限逼近圆面积 S .



数学描述:

一、 数列极限的定义

1，数列定义:

定义：自变量取正整数（或自然数）的函数称为数列，记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$.

$\{x_n\}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

x_n 称为通项(一般项)

2. 数列极限:

若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系：

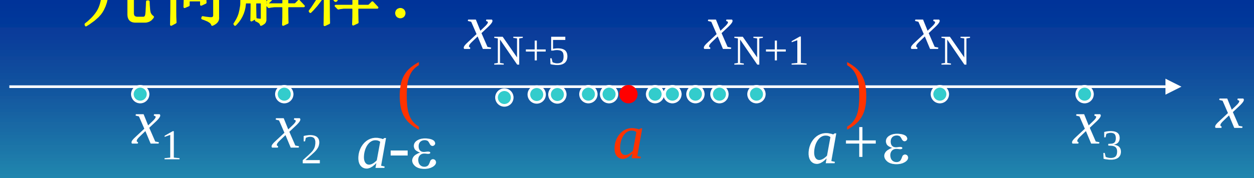
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$正数 N, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$

则称该数列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 a , 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n \to \infty)$$

此时也称数列**收敛**, 否则称数列**发散** .

几何解释:



例1, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

$$x_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

$$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

收敛

$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

$$x_n = 2^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

$$x_n = (-1)^{n+1}$$ 趋势不定

发散

例2. 设 $|q|<1$,

等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$

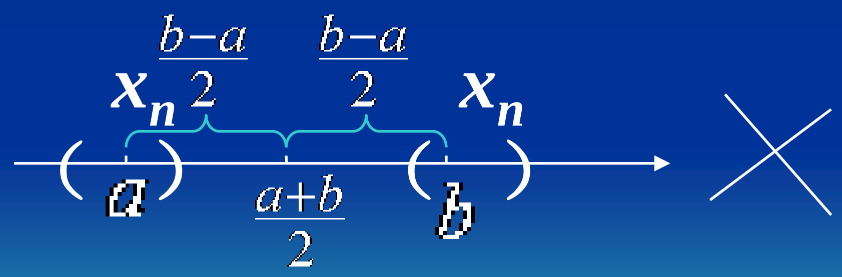
的极限为 0 .

二、收敛数列的性质

1, 唯一性

定理1 收敛数列的极限唯一.

反证：$a \neq b$时



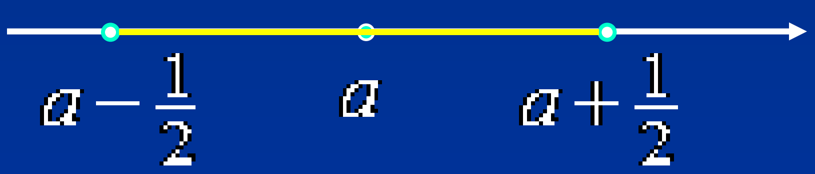
例3. 证明数列 $x_n = (-1)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 是发散的.

证*: 用反证法.

假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则有唯一极限 a 存在 .

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,则存在 N , 使当 $n > N$ 时 , 有

$$a - \frac{1}{2} < x_n < a + \frac{1}{2}$$



但因 x_n 交替取值 1 与 -1，而此二数不可能同时落在长度为 1 的开区间$(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$内, 因此该数列发散 .

数列的有界性.

定义: 设数列x_n，若∃$M>0$,

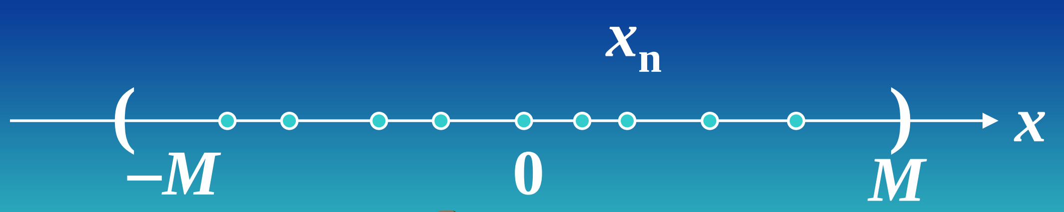
使得 $|x_n| \le M$, $n=1, 2, \ldots$.

则 称数列 x_n**有界**, 否则, 称x_n无界

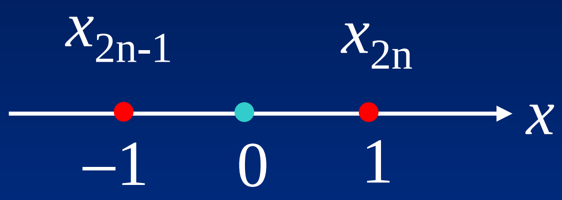
几何意义: $|x_n| \le M \Leftrightarrow -M \le x_n \le M$

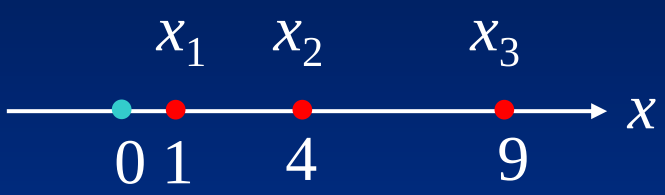
$\Leftrightarrow x_n \in [-M, M]$.

x_n有界:即x_n要全部落在某个对称区间$[-M, M]$内



例4, $x_n=(-1)^n$**有界,而**$x_n=n^2$**无界.**





2.收敛数列的有界性

定理2　　收敛数列一定有界.

说明：此性质反过来不一定成立.

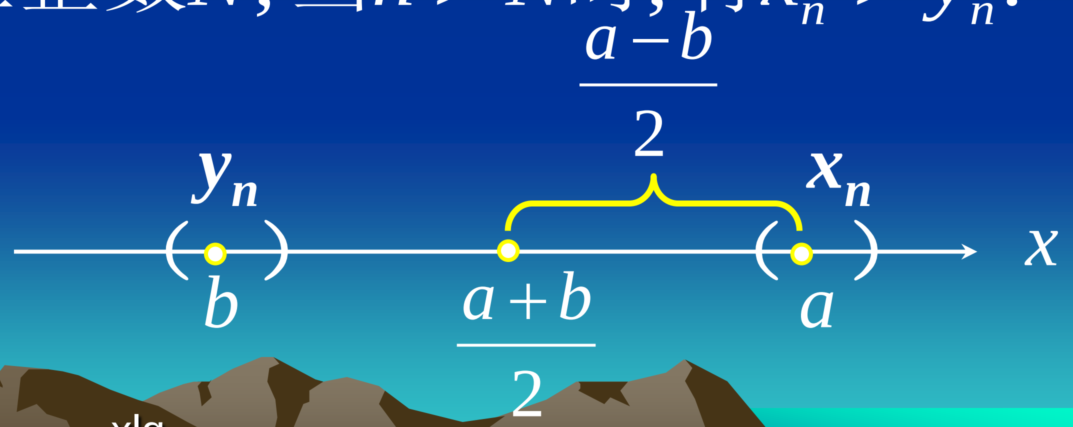
例如，　数列 $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ 虽有界但不收敛.

3. 收敛数列的保号性.

定理 3　　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b,$ 且 $a > b,$

则∃正整数 $N,$ 当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n.$

说明：如图



推论1.（保号性定理）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，而$a>0$ $(a<0)$

则∃正整数N, 当$n>N$时, 有$x_n>0$ $(x_n<0)$

推论2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, 且若∃正整数$N$,

当$n > N$时, 有$x_n \geq y_n$, 则必有$a \geq b$.

推论3：设有数列$\{x_n\}$, 若∃N(正整数),

当 $n>N$ 时，有 $x_n\geq 0$ $(x_n\leq 0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

则：$a\geq 0$ $(a\leq 0)$ 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0)$

注：在推论3中，即使$x_n>0$，也只能推出 $a \geq 0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$

内容小结

1. 数列极限的 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性 ;有界性 ;保号性