单元自测练习题（3）

第三章　微分中值定理与导数的应用

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、答：D

【析】极值点的可疑点是驻点和不可导的点，但可疑点不一定是极值点.

2、答：D

【析】$2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$，即 $f'(1)=0$.

另一方面，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2>0$，根据局部保号性，在 x 的去心邻域内 $f(x)-f(1)>0$，即 $f(x)>f(1)$，所以 $f(1)$ 是极小值.

3、答：D

【析】$f'''(x_0)>0\Rightarrow f''(x)$在$x_0$的邻域内递增，$\because f''(x_0)=0,\Rightarrow f''(x)$在$x_0$的左邻域为负，右邻域为正．$\Rightarrow f'(x)$在$x_0$左邻域递减，右邻域递增.

x	$(x_0-\delta,x_0)$	x_0	$(x_0,x_0+\delta)$
$f'''(x)$		$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$(+)$	0 极小值	$(+)$
$f(x)$	(凸)	不是极值、 取得拐点	(凹)

$\because f'(x_0)=0\Rightarrow f'(x)$在$x_0$的邻域内为正.

$\Rightarrow f(x)$在x_0的去心邻域内递增.

见左表格得

$f'(x_0)$是$f'(x)$的极小值，

$f(x_0)$不是$f(x)$的极值，

但$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

4、答：C

【析】令 $f(x)=2^x-x^2-1$，得 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有任意阶导数.

由观察易得 $f(x)$有两个零点 $x_1=0,\ x_2=1$．又因为$f(2)=-1<0$，x充分大时$f(x)>0$，所以存在第三个零点 $x_3>2$.

如果有第四个零点 x_4，则 $f'(x)=\ln2\cdot2^x-2x$至少有三个零点，从而 $f''(x)=\ln^2 2\cdot2^x-2$至少有两个零点，而 $f''(x)$是单调函数，最多只有一个零点．所以 $f(x)$有且只有三个零点.

5、答：B

【析】$\because \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\therefore \ln(1+x)-x=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

即 $\ln(1+x)-x$ 是关于 x 的 2 阶无穷小.

6、答：B

【析】A. $\because \lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在，所以 A 选项错；

C. $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在，所以 C 选项错；

D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}$ 中 $\tan x$ 不是因子，不能用等价无穷小替代，所以 D 选项错；B 正确.

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

6、$R=\dfrac{\left[(1+x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}{|1+x|}$.

【析】$y=\ln(x+1)\Rightarrow y'=\frac{1}{x+1}$，$y''=\frac{-1}{(x+1)^2}$，$\therefore R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left[(1+x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}{|1+x|}$

7、$\frac{1}{2}$.

【析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]\overset{令\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$.

8、$\left(\frac{1}{2},\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$.

【析】$y=e^{\arctan x}\Rightarrow y'=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$，$y''=\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}(1-2x)\begin{cases}>0\,,x<\frac{1}{2}\\ \leq 0\,,x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$.

9、$a=$ -2 .

【析】$f(x)=(x-a)^{\frac{2}{3}}-2-a\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-a}}\begin{cases}>0,\ x>a\\ <0,\ x<a\end{cases}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，所以 $f(a)=$ (即 $a=-2$ 时 $f(x)$ 有且只有一个零点.

三、解答题(10 题 6 分；11-13 题，每题 10 分，共 36 分)

10、【析】 $f(x)=\ln(2+x)=\ln 2+\ln(1+\frac{x}{2})$

$$=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+o(x^n)$$

$$=\ln 2+\frac{x}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}x^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n+o(x^n)$$

11、【析】（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\tan x\cdot\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln\sin x}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos x}}\overset{洛}{=}e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=e^0=1$.

（2）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$， $e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$，

$$\Rightarrow \cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

12、【析】

$$y=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},\ y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2(5x+1)}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$y'=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$，$x=0$ 时y'不存在； $y''=0\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$，$x=0$ 时y''不存在

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
y''	－	0	＋	不存在	＋		＋
y'	＋		＋	不存在	－	0	＋
y		$-\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}$		0 极大值		$-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$ 极小值	

单调递增区间：$(-\infty,0)$，$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$． 单调递减区间：$\left(0,\frac{2}{5}\right)$；

曲线的凹区间：$\left(-\frac{1}{5},0\right)$，$(0,+\infty)$． 曲线的凸区间：$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$；

函数的极大值为 $y(0)=0$，极小值为 $y(\frac{2}{5})=-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$，曲线拐点为$\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}\right)$.

13、【析】$y=\frac{1}{2}x^6 \Rightarrow y'=3x^5$，所以在$(x,y)$处法线斜率$k=-\frac{1}{3x^5}$，从而法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{3x^5}(X-x) \Rightarrow Y=-\frac{X}{3x^5}+\frac{1}{3x^4}+\frac{x^6}{2}$$

法线在 Y 轴上的截距$b(x)=\frac{1}{3x^4}+\frac{x^6}{2}$．令$b'(x)=\frac{-4}{3x^5}+3x^5=0$得$x=\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ $(\because x>0)$是唯一驻点，而最小截距肯定存在，所以曲线在点$\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}},\frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)$处的法线在 Y 轴上的截距最小.

四、证明题（14-15 题，每题 8 分；16-17 题，每题 9 分，共 34 分）

14、【析】$(e+x)^e<e^{e+x} \Leftrightarrow \ln(e+x)^e<\ln e^{e+x} \Leftrightarrow e\ln(e+x)<e+x$，$(x>0)$

令$f(x)=e\ln(e+x)-e-x \Rightarrow f'(x)=\frac{e}{e+x}-1<0$．又$f(x)$在$x=0$处右连续，

所以$x>0$时$f(x)<f(0)=0$，从而结论成立.

15、【析】令$f(x)=\arcsin(2x-1)-2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$，$(0<x<1)$，对函数求导，得

$f'(x)\equiv 0$，故当$0<x<1$时，有$f(x)=C$，又因为$f(\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{2}$，所以等式成立.

16、【析】$f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)-f'(\xi)=0$

令$F(x)=e^x f(x)-f(x)$，$F(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且$F(1)=F(0)=0$，

由罗尔定理得存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)-f'(\xi)=0$，

即$f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0$.

17、【析】记$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2=x_0$，将$f(x_1)$，$f(x_2)$在$x_0$处进行一阶泰勒展开：

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2\text{，}\xi_1\text{介于}x_1\text{与}x_0\text{之间}\quad(1)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\text{，}\xi_2\text{介于}x_2\text{与}x_0\text{之间}\quad(2)$$

取$(1)\times(1-\lambda)+(2)\times\lambda$，得

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(x_0)+\frac{1}{2}\left[\lambda f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+(1-\lambda)f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\right]\le f(x_0)$$

$$=f\left[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right].$$