

5. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\ln x}{x}$, 则 $\int x f'(x) dx = (\quad)$

- (A) $\frac{\ln x}{x} + C$; (B) $\frac{1 + \ln x}{x^2} + C$; (C) $\frac{1}{x} + C$; (D) $\frac{1 - 2 \ln x}{x} + C$.

6. 下列反常积分中发散的是 ()

- (A) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; (B) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; (C) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (D) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1. 函数 $y = x + 2 \cos x$ 在闭区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值是 $\frac{1}{4}$.

2. 函数 $y = \ln(4 - x^2)$ 的单调减少区间是 $[-2, 2]$.

3. 微分方程 $(x+1)y' - 2y = 0$ 的满足 $y(1) = \frac{1}{4}$ 的特解是 $y = \frac{1}{4(x+1)^2}$.

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + \cos x) \sin x dx = \frac{1}{2}$.

三、计算题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$.

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | | 四 | | 五 | | 六 | 七 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 1 | 2 | | |
| 得分 | | | | | | | | | | | | | | |

得分

一、单项选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线 ()

- (A) 与 x 轴相平行; (B) 与 x 轴相垂直;
(C) 与 y 轴相垂直; (D) 与 x 轴既不平行也不垂直.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan 3x$ 与 $\frac{ax}{\cos x}$ 是等阶无穷小, 则 $a = (\quad)$

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. $y = f(\sin x)$, 则 $dy = (\quad)$.

- (A) $f'(\sin x)(\sin x) dx$; (B) $f'(\sin x) dx$;
(C) $f'(\sin x) \sin x dx$; (D) $f'(\sin x) \cos x$.

4. 下列等式中正确的是 ()

- (A) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$; (B) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$;
(C) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$; (D) $\int f'(x) dx = f(x)$.



得分

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y = y \sin x + 1$ 所确定, 求 $y'(0)$.

得分

4. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 对应点处的切线方程.

得分

3. 求 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的极值.

得分

5. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解.

得分

6. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-k}{x} \right)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$, 求 k 的值.



四、(共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分).

得分

1. 求不定积分 $\int x(1 + \cos 2x)dx$.

五、(共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分).

得分

1. $f(x) = \begin{cases} \int_0^{\sin 2t} \frac{x}{a+e^t} dt & x > 0, \\ a & x = 0, \\ \int_0^{\sin 2t} \frac{x}{a+e^t} dt & x < 0 \end{cases}$ 当 a 取何值 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续? (2) $f(x)$

在 $x = 0$ 是否可导?

2. 计算 $I = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

得分

2. $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 连续, 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$, 并由此计算

积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ 的值.



| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

六、应用题[本题 9 分]

求由曲线 $xy = 1$ ，直线 $y = x, y = 2$ 所围成的平面图形的面积以及该平面图形绕 x 旋转一周生成的旋转体的体积。

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

七、证明题[本题 5 分]

设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$ 。试证明：存在两点 $\xi_1 \in (0, \pi)$ ， $\xi_2 \in (0, \pi)$ ， $\xi_1 \neq \xi_2$ ，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ 。

