高等数学上册

一元函数微分学

- 极限
  - 洛必达法则
  - 运算法则、等价无穷小（无穷小的比较）、两个重要极限（准则）
  - 分段函数分段点、特殊函数特殊点求极限
- 导数与微分
  - 复合函数、隐函数、参数方程 求导（二阶）
  - 求微分、可导与可微的关系
  - 连续与可导的关系、分段函数分段点的连续性、可导性（连续的定义（间断点）、导数的定义）
- 导数的应用
  - 函数的单调性、极值；曲线的凹凸性、拐点
  - 导数的几何意义，最值
  - 泰勒公式、麦克劳林展开式（间接展开法、几个常见函数的高阶导数和麦克劳林展开式）
  - 不等式的证明、方程根的证明、存在性的证明
    - 闭区间上连续函数的性质
    - 中值定理(罗尔,拉格朗日,泰勒）;积分中值定理
    - 函数极限的性质、单调（凹凸）性、最值

一元函数积分学

- 不定积分
  - 原函数、不定积分的定义
  - 求不定积分（两类换元法、分部积分法、典型例题、有理函数的积分）
- 定积分
  - 求定积分（换元法、分部积分法（分段函数、绝对值函数）对称区间奇偶函数，递推式）
  - 积分上限函数求导
  - 反常积分敛散性的判断
  - 定积分的性质、几何意义
- 定积分的应用
  - 平面图形的面积（直角坐标、极坐标）
  - 旋转体体积
  - 平面曲线弧长、（弧微分、曲率、曲率半径）
  - 已知平行截面面积的立体体积

微分方程

- 解微分方程（通解（可以隐式通解）、初值条件下的特解（唯一性））
- 线性微分方程
  - 解的结构
  - 一阶线性微分方程
  - 二阶线性微分方程（齐次、非齐次）
- 一阶微分方程 (可分离变量的微分方程、齐次方程)
- 二阶（可降阶）的微分方程

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}$ 的值是(D).

(A) 1； (B) -1； (C) 0； (D)不存在.

2. 当 $x\to1$ 时，与无穷小 $1-x$ 等价的是(B).

(A) $1-x^3$； (B) $\frac{1}{2}(1-x^2)$； (C) $(1-x)^2$； (D) $1+x$.

3. 设 $f'(a)=3$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{3x}=$(C).

(A) 3； (B) -3； (C) 1； (D) -1.

4. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$(C).

(A) $\frac{1}{x}$； (B) $x\ln x-x+c$； (C) $-\frac{1}{x^2}$； (D) e^{x^2}.

5. 已知曲线 $y=x^2+ax+1$ 与 $y=e^x$ 在 $x=0$ 处相切，则 $a=$（ A ）。

(A) 1； (B) -1； (C) $-\frac{1}{2}$； (D) $\frac{1}{2}$。

6. 下列反常积分中收敛的是（ C ）

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$； (B) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$； (C) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$； (D) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$。

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ___2___。

2. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$ ___2___。

3. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$ 的通解是 ___$e^y=e^x+C$___。

4. 函数 $f(x)=e^{2x}-2x$ 的单调增区间是 ___$[0,+\infty)$___。

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$ $(a\neq 0)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin ax}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\cos ax}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

2. 设 $y=xe^y+1$，求 $y'|_{x=0}$.

解：将上式两边求导

$y'=e^y+xe^y\cdot y'$

代入 $x=0$，$y(0)=1$

得 $y'|_{x=0}=e$

3. 设 $y=e^{x\sin x}$，求微分 dy。

解： $y' = e^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$

$dy = y'dx$

$= e^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)dx$

4. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：$\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$

$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$

5. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^{3/2} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt}$。

解：由洛必达法则

上面极限 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 \cdot 2x}{x(x - \sin x)} = 2\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$

$= 2\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = 6\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x}$

$= 12$

6. 求曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 的凹凸区间和拐点.

解: $y'=\frac{2x}{1+x^2}$

$y''=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$\therefore$ $[-1,1]$ 为凹区间, $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 为凸区间。

$(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$ 为拐点。

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

解：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

$= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

解: $\int_1^3 f(x-2)dx = \int_{-1}^1 f(u)\,du$

$= \int_{-1}^0 f(u)\,du + \int_0^1 f(u)\,du$

$= \int_{-1}^0 (1+x^2)\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= \left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^0 - e^{-x}\Big|_0^1$

$= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{e}+1$

$= \frac{7}{3}-\frac{1}{e}$

1. 求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 的通解.

解: 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$

得特征根 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$

对应齐次方程通解为 $Y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

设非齐次方程有形如 $y^*=Ae^{-x}$ 的特解,

代入方程得 $Ae^{-x}-2Ae^{-x}-3Ae^{-x}=e^{-x}$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$, $y^*=-\frac{1}{4}e^{-x}$

原方程通解为: $y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，证明：$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$.

证明：等式左边令 $x=\pi-t$，则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \int_\pi^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)]d(\pi-t)$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

六、应用题[本题9分]

得分	

设直线 $y=ax$ $(0<a<2)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=2$ 所围成图形的面积为 S_2。

(1) 求 a 的值，使得 $S=S_1+S_2$ 最小，并求 S 的最小值；

(2) 求 S 取最小值时所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

解：(1) 由方程 $y=ax$ 和 $y=x^2$ 联立，得 $x_1=0$，$x_2=a$.

由题意知 $S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx$

$+\int_a^2(x^2-ax)dx=[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3]_0^a+[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2]_a^2$

$=\frac{a^3}{3}-2a+\frac{8}{3}$

$S'(a)=a^2-2$，由一阶条件 $S'(a)=0 \Rightarrow$ $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=-\sqrt{2}$（舍去）

$S''(\sqrt{2})=2\sqrt{2}>0$，$a=\sqrt{2}$ 是 S 的最小值点，

$S_{min}=\frac{8}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(2) $V=\int_0^{\sqrt{2}}[\pi(\sqrt{2}x)^2-\pi x^4]dx+\int_{\sqrt{2}}^2[\pi x^4-\pi(\sqrt{2}x)^2]dx$

$=\pi(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\pi(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{\sqrt{2}}^2$

$=\frac{16}{15}(1+\sqrt{2})\pi$

七、证明题[本题 5 分]

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ 使得

$$\int_a^\xi [f(x)]^2 dx = \int_\xi^b [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx \text{。}$$

证明：$\int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0$

令 $F(x) = 2\int_a^x [f(u)]^2 du - \int_a^b [f(x)]^2 dx$

可知 $F(a) \leq 0$，$F(b) \geq 0$，$F(x)$ 连续，

由介值定理知 (a,b) 内存在一点 ξ 使得

$F(\xi) = 0$，

即 $\int_a^\xi [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$

$= \int_\xi^b [f(x)]^2 dx$