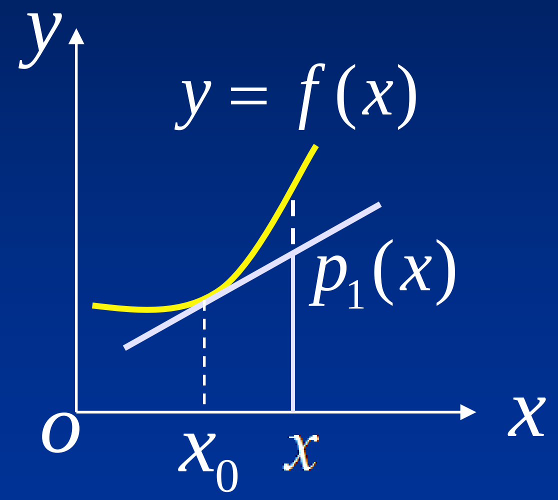
第三节　泰勒 (Taylor)公式

一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



以直代曲

特点：$p_1(x_0) = f(x_0)$

$p_1'(x_0) = f'(x_0)$

需要解决的问题 $\begin{cases} \text{提高精度？} \\ \text{估计误差？} \end{cases}$

1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$，要求:

$$\boxed{p_n(x_0)=f(x_0),\ p_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)}$$

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x)=\quad a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x)=\quad 2!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$p_n^{(n)}(x)=\quad n!a_n$

$a_0=p_n(x_0)=f(x_0),\qquad a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0),$

$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),\cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

故 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$
$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ **(称为余项)，则有**

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间})$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (\xi 在 x_0 与 x 之间)$$

$$\because\ p_n^{(n+1)}(x) = 0,\quad \therefore\ R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi 在 x_0 与 x 之间)$$

当在 x_0 的某邻域内 $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ 时

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$\therefore\ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

泰勒中值定理 2:

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项 .

注意到 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ ③

泰勒中值定理 1:

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有

直到 n 阶的导数，则当 $x \in (a,b)$ 时，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为n 阶泰勒公式的佩亚诺(Peano) 余项 .

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

(1) 当 $n = 0$ 时, 泰勒公式变

给出*Lagrange*中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n = 1$ 时, 泰勒公式为:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

可见 $f(x) \approx f(x_0) + \underline{f'(x_0)(x - x_0)}$ $\boxed{\mathrm{d}f}$

误差 $R_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在泰勒公式中若取 $x_0 = 0, \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1)$, 则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为麦克劳林（ ***Maclaurin*** ）公式 .

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$, 则有误差估计式

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left| x \right|^{n+1}$$

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=e^{x}$

$\because \quad f^{(k)}(x)=e^{x}, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)$$

其中 $R_{n}(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$

(2) $f(x) = \sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x) = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^{m-1}, & k = 2m-1 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x) = \dfrac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1)$

$$(3)\quad f(x)=\cos x$$

类似可得

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}\qquad(0<\theta<1)$$

$$(4)\quad f(x)=(1+x)^{\alpha}\qquad (x>-1)$$

$$\because\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

M 为 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

例1. 计算无理数 **e** 的近似值，使误差不超过10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

令 $x = 1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$，欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 **6** 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7\times 0.5\times 10^{-6}$,

总误差为 $7\times 0.5\times 10^{-6}+10^{-6}<5\times 10^{-6}$

这时得到的近似值不能保证误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位 .

2. 利用泰勒公式求极限

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则
不方便！

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例3. 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0).$

证: $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)(1 + \theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1 + \theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3 \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$$

小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0=0$ 时为麦克劳林公式 .

2. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理

$$f(a)=f(b)$$

拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=0$$

$$F(x)=x$$

$$f(a)=f(b)$$

$$F(x)=x$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$n=0$$

柯西中值定理

泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\cdots+\tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$
$$+\tfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

3. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

*4. 有关中值问题的解题方法

利用逆向思维，设辅助函数． 一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用罗尔定理，可用原函数法找辅助函数．

(2) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理．

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理．

(4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导数用中值定理．

(5) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

5. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x,\ \ln(1+x),\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^\alpha$$

6. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数，例如 $\sin x$

(3) 其他应用 ——— 求极限，证明不等式 等.

例*. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1})\quad (a\neq 0)$

解法1 利用中值定理求极限

$$原式 =\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})\qquad (\xi 在\ \frac{a}{n}\ 与\ \frac{a}{n+1}\ 之间)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$$

$$=a$$

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

解法3 利用罗必塔法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

令 $t = \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$