杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学 B (1)	考试日期	2015 年 1 月 16 日	成 绩	
课程号	A0714211	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8 位）		年级	专业

题号	一	二	三			四				五		六		七	八
			1	2	3	1	2	3	4	1	2	1	2		
得分															

得分	

一、选择题 （本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处(B)

(A)必可导 ； (B)连续但不一定可导； (C)一定不可导； (D)不一定连续.

2. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$（ B ）

(A) $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$； (B) $x-\frac{1}{2}x^2+C$；

7

(C) $\sin x-\cos x+C$； (D) $\frac{1}{2}x^2-x+C$.

3. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 （ C ）

(A) 等价无穷小量 ； (B) 同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；
(C) 高阶无穷小量； (D) 低阶无穷小量.

4. 设 $I_1=\int_{-1}^{1} x\cos x dx$，$I_2=\int_{-1}^{1}(x+x^2)dx$，$I_3=\int_{-1}^{1}(x-x^2)dx$，则有（ C ）

(A) $I_1<I_3<I_2$； (B) $I_1>I_2<I_3$； (C) $I_3<I_1<I_2$； (D) $I_3>I_2<I_1$.

5. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)dt=$（ A ）

(A) $f(x)$； (B) $-f(x)$； (C) $2f(x)$； (D) $-2f(x)$.

6. 下列反常积分中收敛的是（ C ）

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$； (B) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$； (C) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$； (D) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 设直线 $y=3x+b$ 为曲线 $y=x^2+1$ 上某点的切线，则 $b=$ $-\frac{5}{4}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{2\sin x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\ge 0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $-\frac{3}{2}$.

3. 函数 $f(x)=e^{2x}-2x$ 的单调递增的区间是 $[0,+\infty)$.

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=x(y-3)$ 的通解是 $3+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$.

三、小型计算题（共 3 小题，每小题 4 分，共 12 分）

得分	

1. 设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 y 在 $x=1$ 处的微分.

解：$y'=2x\cdot\arctan x+1$ （2分）

$y'(1)=2\cdot\frac{\pi}{4}+1=\frac{\pi}{2}+1$ （1分）

$dy|_{x=1}=y'(1)\Delta x=(\frac{\pi}{2}+1)\Delta x$ （1分）

得分	

2. 隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln y = xe^{y}-1$ 确定，求 $y'(0)$.

解 $\frac{1}{y}y' = e^{y}+xe^{y}y'$ (1) $2'$

$x=0$ 代入原方程 $y(0)=\frac{1}{e}$ $1'$

$x=0$ $y(0)=\frac{1}{e}$ 代入(1) 解出

$y'(0) = e^{e-1}$ $1'$ 1

得分	

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$，求 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\frac{1}{2x})^{-2x}\right]^{-\frac{1}{2x}\cdot ax} = e^{-\frac{a}{2}}$ $2'$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$ $1'$

$e^{-\frac{a}{2}} = 2$

$a = -2\ln 2$ $1'$

四、计算题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

得分	

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^2(1-\cos x)}$ $1'$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}$ $1'$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{2\times 3}$ $1'$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$ 2

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$ $1'$

得分	

2. $\begin{cases}x=a(1-\cos t)\\ y=a\sin t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''\cdot x'-x''y'}{(x')^3}$$

解: $dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\cos t}{a\sin t} = \cot t$ （2分）

$d^2y/d^2x = \frac{d}{dt}(dy/dx)/ dx/dt = \frac{-\csc^2 t}{a\sin t}$ （2分）

$= -\frac{1}{a\sin^3 t}$ （1分）

$-2'$

得分	

3. 求曲线 $y=\ln(3+x^2)$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y'=\frac{2x}{3+x^2}$，$y''=\frac{6-2x^2}{(3+x^2)^2}$ $1'$

$y''>0$ $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 为 y 凹区间

$y''<0$ $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 和 $[\sqrt{3},+\infty)$ 为 y 凸区间 2

$x=\pm\sqrt{3}$ $y=\ln 6$

$\therefore (\pm\sqrt{3},\ln 6)$ 为 y 两个拐点 $1'$

得分	

4. 求定积分 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\ln x)$ $2'$

$= 2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2}$ $2'$

$=2(\sqrt{3}-1)$ $1'$

五、计算题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$x=\frac{1}{t}$

$x=\tan t$

$\int \frac{1}{\tan^2 t}dt$

3'

解：原式 $=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ 2分

$=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx$ 1分

$=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$ 2分

-1

得分	

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\ge 0\\ e^{-x} & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-4}^{-2}f(x+3)dx$.

解：$\int_{-4}^{-2}f(x+3)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt$ 1分

$\int_{-4}^{-3}e^{-(x+3)}$

$\int_{-3}^{-2}$

$=\int_0^1 f(t)dt+\int_{-1}^{0}f(t)dt$ 1分

$=\int_0^1(1+x^2)dx+\int_{-1}^{0}e^{-x}dx$ 2分

$=x+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_{-1}^{0}$ 1分

$=\frac{1}{3}+e$ 1分

六、（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 设 $y=\int_{x^2}^{0}x\cos t\,dt$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$y=x\int_{x^2}^{0}\cos t\,dt$ 2分

$\frac{dy}{dx}=\int_{x^2}^{0}\cos t\,dt+x\cdot[-2x\cos x^2]$ 2分

$=\sin t\Big|_{x^2}^{0}-2x^2\cos x^2$ 1分

$=-\sin x^2-2x^2\cos x^2$ 1分

得分	

2. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 的通解.

解：$y''-5y'+6y=0$ (1) 1分

$r^2-5r+6=0$ (2) 1分

$r_1=2$，$r_2=3$

$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 是 (1) 的通解. 1分

$a=0$

$b=-1$

设 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 有形如 $y^*=Axe^{2x}$ 的特解 ……1分

$y^*=x(ax+b)e^{2x}$

4'

解得 $A=-1$，$y^*=-xe^{2x}$ 1分

通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-xe^{2x}$ … 1分

得分	

七、应用题[本题 9 分]

已知抛物线 $y = ax^2$ $(a>0)$ 将两坐标轴和抛物线 $y = 4 - x^2$（$x \geq 0$）所围成的平面区域 D 分成面积相等的左右两部分区域 D_1, D_2（相对意义上），

（1）求 a 的值；

（2）分别求平面区域 D_1、D_2 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

解 (1) $S_{D_1} = S_{D_2}$ $\quad 2S_{D_1} = S_{D_1 \cup D_2}$

联立 $y = ax^2$ 和 $y = 4 - x^2$ 得 $x_0 = \frac{2}{\sqrt{a+1}}$ $\cdots 1'$

$2\int_0^{\frac{2}{\sqrt{a+1}}} (4 - x^2 - ax^2)\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$ $\cdots 1'$

经计算 $\frac{32}{3\sqrt{a+1}} = \frac{16}{3}$ $\quad a = 3$ $\cdots 2'$

(2) $a = 3$ 时 $x_0 = 1$

平面区域 D_1 绕 x 轴旋转生成旋转体体积.

$V_{D_1} = \int_0^1 \pi[(4-x^2)^2 - (3x^2)^2]\,dx = \frac{176}{15}\pi$ $\cdots 2'$

同理 $V_D = \int_0^2 \pi (4-x^2)^2\,dx = \frac{256}{15}\pi$ $\cdots 1'$

$V_{D_2} = V_D - V_{D_1} = \frac{16}{3}\pi$ $\cdots 2'$

得分	

八、证明题 [本题 5 分]

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续巨递增的函数，试证明：

$(a+b)\int_a^b f(x)dx \leq 2\int_a^b xf(x)dx$.

证明：~~令 $F(x) = 2\int_a^b xf$~~

令 $F(x) = 2\int_a^x t f(t)dt - (a+x)\int_a^x f(t)dt$ 1分

$F'(x) = 2xf(x) - \int_a^x f(t)dt - (a+x)f(x)$ 1分

$= (x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt$

$= \int_a^x [f(x) - f(t)]dt$ 1分

≥ 0 （当 $x \geq a$） 1分

$\therefore F(x)$ 单调增加，$F(b) \geq F(a) = 0$ 1分

$\therefore F(b) \geq 0$ 证毕.