第六节 极限存在准则 两个重要极限

收敛数列的迫敛性 (夹逼准则)

准则1 (1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

特别,

若 $a \le y_n \le z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a.$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a.$

追敛性定理的意义:

(1) 给出判断数列 y_n 存在极限的方法;

(2) 给出了求 y_n 的极限的方法.

这一方法能解决很多较为困难的求极限问题.

例1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解：利用迫敛性定理，记 $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$，

将x_n适当放大和缩小，

$$0<x_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}$$

$$\le\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\text{均小于等于}1\right)$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (其中 a\geq 1).$

证: (1) 设 $a = 1$, 结论显然成立.

(2) 设 $a > 1$, 令 $\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1 \ (\alpha_n>0)$, 从而

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+C_n^1\alpha_n+C_n^2\alpha_n^2+\cdots+C_n^n\alpha_n^n$$

$$> 1+ n\alpha_n$$

得 $\alpha_n<\dfrac{a-1}{n}.$

$$0<\alpha_n<\frac{a-1}{n},$$

$$\because \lim_{n\to+\infty}\frac{a-1}{n}=0$$

由追敛性定理 $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

故 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(\text{其中}a>1).$

类似方法可证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

例3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用迫敛性定理，由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right) < \frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

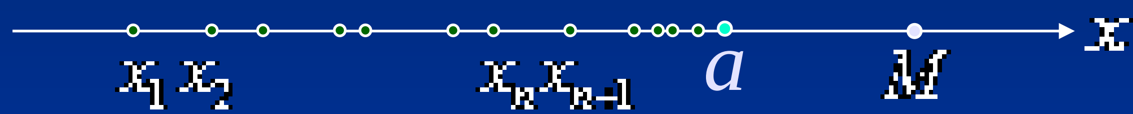
说明：无限个无穷小之和不一定是无穷小 ！

数列极限存在条件

准则2， 单调有界数列必有极限

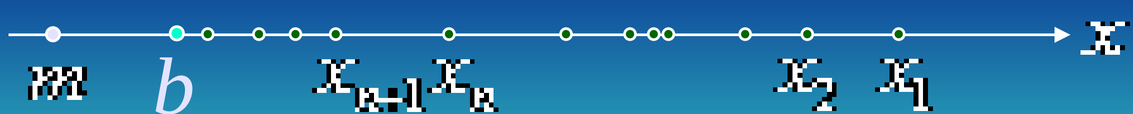
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ (\ge m)$$



例4. 重要极限

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$,

说明: 证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 有上界

得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在 .

记此极限为 e , 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

e 为无理数 , 其值为 $e=2.718281828459045\cdots$

例5：求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})^{2n}$

柯西准则(柯西审敛原理)

定理: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m > N$, $n > N$ 时,

有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$