杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学甲（1）		考试日期	2014年1月12日		成绩	
课程号	A0714011	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题号	一	二	三			四				五		六		七	八
			1	2	3	1	2	3	4	1	2	1	2		
得分															

得分	

一、选择题（本题共6小题，每小题3分，共18分）

1. $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值存在的（ D ）

(A)充分条件；(B)必要条件；(C)充分必要条件；(D) 既非充分也非必要条件．

2. 设函数 $y=(\sin x^4)^2$，则导数 $\frac{dy}{dx}=$（ C ）

(A) $4x^3\cos(2x^4)$ ；(B) $2x^3\cos(2x^4)$；(C) $4x^3\sin(2x^4)$；(D) $2x^3\sin(2x^4)$．

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$\Delta y=f(a+h)-f(a)$，则当 $h\to 0$ 时必有（ D ）

(A) dy 是 h 的等价无穷小量；(B) $\Delta y-dy$ 是 h 的同阶无穷小量；

(C) dy 是 h 的高阶无穷小量；(D) $\Delta y-dy$ 是 h 的高阶无穷小量．

4. 当 $x\to 3^-$ 时，下列函数中为无穷小量的是（ A ）

(A) $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$；(B) $f(x)=\ln(3-x)$；(C) $f(x)=\sin\frac{1}{x-3}$；(D) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$．

5. $x=0$ 是 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的（ D ）

(A) 连续点；(B) 可去间断点；(C) 跳跃间断点；(D) 第二类间断点．

6. 下列反常积分中收敛的是（ B ）

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$；(B) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$；(C) $\int_e^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$；(D) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$．

得分	

二、填空题（本题共4小题，每小题3分，共12分）

1. 设 $y=e^{x\sin x}$，则 y 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的微分等于 $e^{\frac{\pi}{2}}dx$．

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{2x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\ge 0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $-\frac{3}{2}$．

3. 不定积分 $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=$ $-\sin\frac{1}{x}+C$．

4. 微分方程 $y''+\frac{1}{x}y'-x=0$ 的通解为 $\frac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2$．

三、小型计算题（共3小题，每小题4分，共12分）

得分	

1. 求曲线 $y=2\ln x+x^2+3$ 平行于直线 $y=4x+1$ 的切线方程

解 $y'=\frac{2}{x}+2x$

$k_{切}=y'=\frac{2}{x}+2x=4$ $x=1$ 2'

切点 $M_0(1,4)$

切线方程 $y-4=4(x-1)$ …… 2'

即 $4x-y=0$

得分

2. 隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 确定，求 $y'(0)$.

解 在 $e^x-e^y=\sin(xy)$ (1) 两边同时对 x 求导

$e^x-e^y y'=\cos(xy)(y+xy')$ (1) 2'

又∵ $x=0$ $y=0$ (2) 1'

代入(1) 解 $y'(0)=1$ 1'

得分

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}}$ 1'

$=e^4$ 1'

四、计算题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

得分

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$.

解: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{-4(\pi-2x)}$ 2'

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2 x}{8}$ 2'

$=-\frac{1}{8}$ 1'

得分

2. $y=\cos\frac{x^2}{1+x}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ 的值.

解 $y'=-\sin\frac{x^2}{1+x}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x}\right)'$ 2'

$=-\sin\frac{x^2}{1+x}\cdot\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$ 2'

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{4}\sin\frac{1}{2}$ 1'

得分

3. 求曲线 $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$

$y''=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2x+1}{3x\sqrt[3]{x}}$ ---2'

令 $y''=0$. $x=-\frac{1}{2}$ $y''\big|_{x=0}$ 不存在

$x<-\frac{1}{2}$ $y''<0$ ∴ $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 为 y 凸区间 1'

$x>-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq0$ $y''>0$ $[-\frac{1}{2},+\infty)$ 为 y 凹区间 2 1

$M(-\frac{1}{2},\frac{9}{5}(-\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}})$ 为拐点 1

得分

4. 求定积分 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 令 $x=a\sin t$. $x=0.\ t=0$; $x=a.\ t=\frac{\pi}{2}$ 1'

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt$ - 2

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,d2t$ 1'

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,du$ 1'

$=\frac{a^4}{16}[u-\frac{1}{2}\sin u]_0^{\pi}$ 1

$=\frac{\pi a^4}{16}.$ 1'

五、计算题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)\, d(2+x)^{-1}$ ……1'

$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2+x}\, d\ln(1+x)\right]$ 2'

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right)dx$ ……1

$= -\frac{\ln 2}{3} + \ln(1+x)\Big|_0^1 - \ln(2+x)\Big|_0^1$ 1'

$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$ ……1'

得分	

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt = e^{2x}-2x-1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 ∵ $\int_0^x t f(x-t)dt \overset{x-t=u}{=\!=} \int_0^x (x-u)f(u)du$

$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$ …3'

∴ 原式可写为

$x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = e^{2x}-2x-1$ ……1'

$\int_0^x f(u)du = 2e^{2x}-2$ 1'

$f(x) = 4e^{2x}$ 1'

六、（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\ne0\\ a, & x=0\end{cases}$，问 a 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 ⟹ $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ …1'

$a=f(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(e^{4x^2}-1)\cdot2}{2x} = 0$ ·2'

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^3}$

$= \lim_{x\to0}\frac{(e^{4x^2}-1)\cdot2}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{4x^2\cdot2}{3x^2} = \frac{8}{3}$ 3'

得分	

2. 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ (1)

特征方程 $r^2-3r+2=0$ (2)

$r_1=+1,\ r_2=+2$

$Y=C_1e^{+x}+C_2e^{+2x}$ 为 (1) 通解 3'

∵ xe^{2x} 且为 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 形式且 $\lambda=2$ 为 r^2-3r+2 单根 ……1'

∴ 设 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$

将 $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入原方程 $a=\frac12$ $b=-1$ ·1'

$y^*=(\frac12x^2-x)e^{2x}$

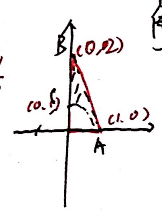
故 原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(\frac12x^2-x)e^{2x}$ 1'

得分	

七、应用题[本题 9 分]

已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 及其在点 $(1,0)$ 处的切线和 y 轴围成，试求（1）平面区域 D 的面积；

（2）平面区域 D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周生成的旋转体的体积.



$x=1-\frac{y}{2}$

$x=\sqrt{1-y}$

解 ①求 $y=1-x^2$ 在 $(1,0)$ 处切线方程 $y'=-2x|_{x=1}=-2$

$y-0=-2(x-1)$ 即 $y=-2x+2$

(1) D的面积，$S=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$ 3'

D绕x轴旋转一周生成的旋转体体积

$\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi$

$V_{x轴}=\int_0^1[\pi(-2x+2)^2-\pi(1-x^2)^2]dx$ 2'

$=\pi\int_0^1(-x^4+6x^2-8x+3)dx$ 3'

$=\pi[-\frac{1}{5}x^5+2x^3-4x^2+3x]_0^1$

$=\frac{4}{5}\pi$ 1'

$V_1=\frac{4}{3}\pi$

$V_2=\frac{8}{15}\pi$

$V_x=V_1-V_2=\frac{4}{5}\pi$

D绕y轴旋转一周生成的旋转体体积

$V_y=\pi\int_0^2(1-\frac{y}{2})^2dy-\pi\int_0^1(1-y)dy$

$=\pi(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{6}\pi$.

$V_y=\int_0^1 2\pi x(-2x+2-1+x^2)dx$ 2'

$=2\pi\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$ 3

$=2\pi[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2]_0^1$

$=\frac{\pi}{6}$. 1'

得分	

八、证明题 [本题 5 分]

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 具有连续的导函数 $f'(x)$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明不等式

$$4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2 \qquad (其中 M=\max_{a\le x\le b}|f'(x)|).$$

证明 任取 $x\in(a,b)$，对 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 应用Lagrange 1

$f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)$ 1

$f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$

$|f(x)|=|f'(\xi_1)||x-a|\le M(x-a)$ 1

$|f(x)|=|f'(\xi_2)||x-b|\le M(b-x)$

$\int_a^b|f(x)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx+\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx$ ……1

$\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx$

$=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\frac{M}{2}(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b$ 1

$=\frac{M(b-a)^2}{4}$

故 $4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2$. 1