（B）卷

考试课程	概率论与数理统计	考试日期	2010年6月 日	成 绩	
课程号	A0702140	教师号		任课教师姓名	

考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题3分，共18分）

1．对于任意两事件A,B，$P(A\cup B)$等于（　A　）

A．$P(A)+P(B)-P(AB)$　　　　B．$P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

C．$P(A)+P(B)$　　　　D．$1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

2．设随机变量$X\sim b(5,0.2)$，则下列结论中正确的是　（C　）

A．$P\{X=2\}=0.2^2\times0.8^3$　　　　B．$P\{X=2\}=0.8^2\times0.2^3$

C．$P\{X=2\}=C_5^2 0.2^2\times0.8^3$　　　　D．$P\{X=2\}=C_5^2 0.8^2\times0.2^3$

3．随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ $,x\in(-\infty,+\infty)$，则$Y=$（　B　）$\sim N(0,1)$

A．$\dfrac{X+3}{2}$　　　　B．$\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$

C．$\dfrac{X-3}{2}$　　　　D．$\dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$

4．设随机变量X和Y相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则随机变量

$Z=2X-3Y+1$的方差$D(Z)$等于　　　　（　D　）

A．$2\sigma_1^2-3\sigma_2^2$　　　　B．$4\sigma_1^2-9\sigma_2^2$

C．$4\sigma_1^2+9\sigma_2^2+1$　　　　D．$4\sigma_1^2+9\sigma_2^2$

5．设(X,Y)的联合分布律如下表所示：

X \ Y	0	1	2
-1	1/15	t	1/5
1	s	1/5	3/10

则(s,t)= (　C　)时，X 与Y 相互独立.

（A）(1/5,1/15)；　　　　(B) (1/15,1/5)；

（C）(1/10,2/15)；　　　　（D）(2/15,1/10).

6．设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X 的一个样本，则μ 的置信度为95%的置信区间为（　A　）.

A．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025})$；　　B．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025})$

C．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.05},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.05})$　　D．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05})$

二、填空题（每空格 2 分，共 12 分）

1．设事件A,B相互独立，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，则概率$P(A\cup B)=$__0.76__.

2．袋内装有 6 个白球，4 个黑球.从中任取三个，取出的三个球都是白球的概率__1/6__.

3．设$X \sim N(10,\sigma^2), P\{10<X<20\}=0.3$，则$P\{0<X<10\}$的值为__0.3__.

4. 设随机变量X 服从（0，2）上的均匀分布，则随机变量$Y=X^2$在（0，4）上概率密度$f_Y(y)=$

$\frac{1}{4\sqrt{y}}$

5．设随机变量X 服从二项分布$b(10,\ 0.3)$，随机变量Y 服从正态分布$N(2,4)$，且X，Y 相互独立，则$E(X-2Y)=$__-1__，$D(X-2Y)=$__18.1__.

三、（本题 6 分）将两信息分别编码为A和B传递出去，接收站收到时，A被误作B的概率为0.04，而B被误作A的概率为0.03，信息A与信息B传递的频繁程度为$2:1$，若接收站收到的信息是A，求原发信息是A的概率.

解：设事件A_1为发出信息A，事件A_2为收到信息A

所求概率为

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)}$$ —————————— 3 分

$$=\frac{\frac{2}{3}\times(1-0.04)}{\frac{2}{3}\times(1-0.04)+\frac{1}{3}\times 0.03}=\frac{64}{65}$$ —————————— 6 分

四．本题 10 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$，

（1）(3 分) 求常数 a；

(2) (3 分) 求 X 的分布函数 $F(x)$；

（3） (4 分) 方差 $D(X)$.

解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ ____________________1 分

所以 $\int_0^1 axdx=1$

得 $\frac{a}{2}=1$，即 $a=2$ ____________________ 3 分

（2） X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ____________________ 1 分

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$ ____________________ 3 分

（3） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{2}{3}$ ____________________ 1 分

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}$ ____________________ 3 分

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$ ____________________ 4 分

五.（本题 18 分）设随机变量 (X,Y) 的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0

求：（1）(8 分) X 的边缘分布律和 Y 的边缘分布律, 并问 X 与 Y 是否相互独立？

（2）(6 分) 相关系数 ρ_{XY}，并问 X 与 Y 是否相关？

（3）(4 分)条件概率 $P\{X \geq 1 | Y = 1\}$

解：（1）关于 X 的边缘分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.4	0.2

_______ 3 分

关于 Y 的边缘分布律为

Y	-1	1
P	0.6	0.4

_________ 3 分

因 $P(\{X = 0, Y = -1\} \neq P\{X = 0\} \cdot P\{Y = -1\}$

所以 X 与 Y 不相互独立. _________ 2 分

（2）$E(XY) = -2 \times 0.2 + (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = -0.2$

$E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 = 0.8$

$E(Y) = -1 \times 0.6 + 1 \times 0.4 = -0.2$

得 $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.04$ ____________ 4 分

又 $E(X^2) = 0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.2 = 1.2$

$E(Y^2) = (-1)^2 \times 0.6 + 1^2 \times 0.4 = 1$

得 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.56$

$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.96$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = -\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{21}}$$

所以 X 与 Y 相关 ___________ 6 分

（3）条件概率 $P\{X \geq 1 | Y = 1\} = \dfrac{P\{X \geq 1, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}}$ ___________ 2 分

$$= \frac{P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 1\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$ ______ 4 分

六.（本题 8 分）某单位有 150 架电话机,每架分机有 4%的时间要使用外线,假设每架分机是否使用外线是相互独立的,求该单位有 10 条外线时,至少有一架分机使用外线时需要等待的概率？

解：设 X 表示使用外线的电话分机台数，由于 $X \sim b(150, 0.04)$， _________ 3 分

则

$E(X)=6$，$D(X)=5.76$，由中心极限定理可知：

$$P\{X\geq 11\}=1-P\{X<11\}=1-P\{0<X<11\}$$

$$=1-P\{\frac{0-6}{2.4}<\frac{X-6}{2.4}<\frac{11-6}{2.4}\}=1-[\Phi(2.083)-\Phi(-2.5)]$$

$$=2-\Phi(2.083)+\Phi(2.5)$$ ________ 8 分

七.（每小题5分,共10分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0\leq x\leq 1\\ 0,else\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值，试求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计值.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$ ________ 3 分

所以令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$ ________ 4 分

解得参数 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ ________ 5 分

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$ ________ 2 分

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln(x_1x_2\cdots x_n)$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ________ 4 分

解得参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ ________ 5 分

八.（8 分）设某批电子元件的寿命X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均为未知，随机抽取１６只，测得 $\bar{x}=1509, s=32$（单位为小时）。求该批电子元件平均寿命 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间（$\alpha=0.05$, $t_{0.025}(15)=2.1315, Z_{0.025}=1.96$）。

解：置信区间为（$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(15)\frac{s}{\sqrt{16}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(15)\frac{s}{\sqrt{16}}$）________6 分

=（1491.948,1526.052）________8 分

九．（本题 6 分）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 。对显著性水平 α，求假设检验 $H_0:\sigma^2 \le {\sigma_0}^2$ 的拒绝域。

解:拒绝域为 $\dfrac{(n-1)\ s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ ____________________6 分

十．（本题 4 分）设随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)|0<x<2\,,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试证：随机变量 $Z=X\cdot Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z)\,,0<z<2\\ 0\,,\text{其它}\end{cases}$.

证： 由题意：(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,,0<x<2,0<y<1\\ 0\,,\text{其它}\end{cases}$,

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，

则 $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{xy\le z} f(x,y)dxdy$ ______________ 2 分

易知：当 $z\le 0$ 时 $F_Z(z)=0$；当 $z\ge 2$ 时 $F_Z(z)=1$；

当 $0<z<2$ 时， $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=1-P\{XY>z\}$

$$=1-\int_z^2 dx\int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(1+\ln 2-\ln z)z$$

求导：得 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z)\,,0<z<2\\ 0\,,\text{其它}\end{cases}$ ____________ 4 分