第六节　函数图形的描绘

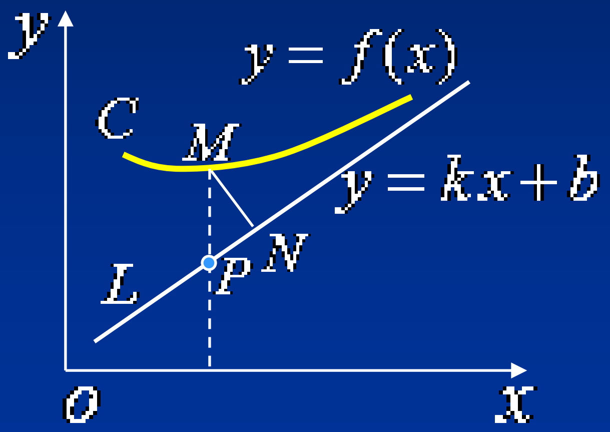
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

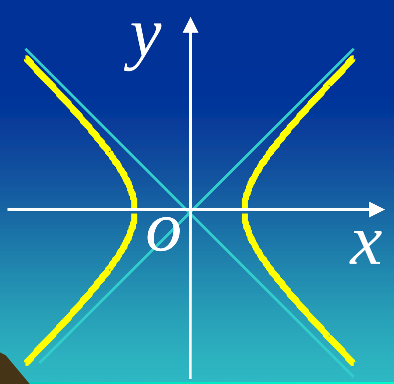
定义 . 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线 .

或为“纵坐标差”



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线 .

1. 水平与铅直渐近线

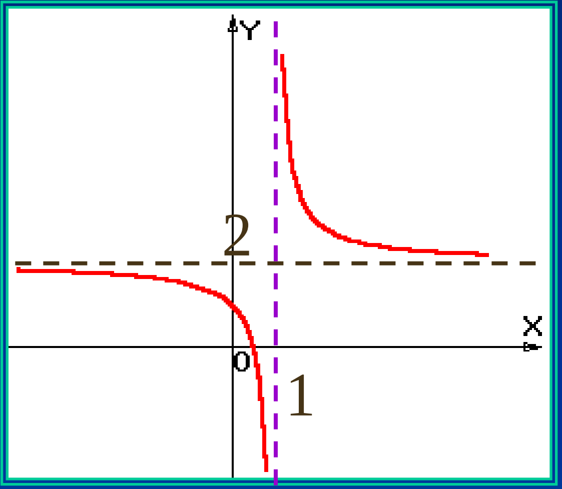
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 有**水平渐近线** $y=b$.

(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 有**垂直渐近线** $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$)

例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线.



解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore x=1$为垂直渐近线.

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有

$\boxed{\text{斜渐近线}\ y=kx+b.}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线 .

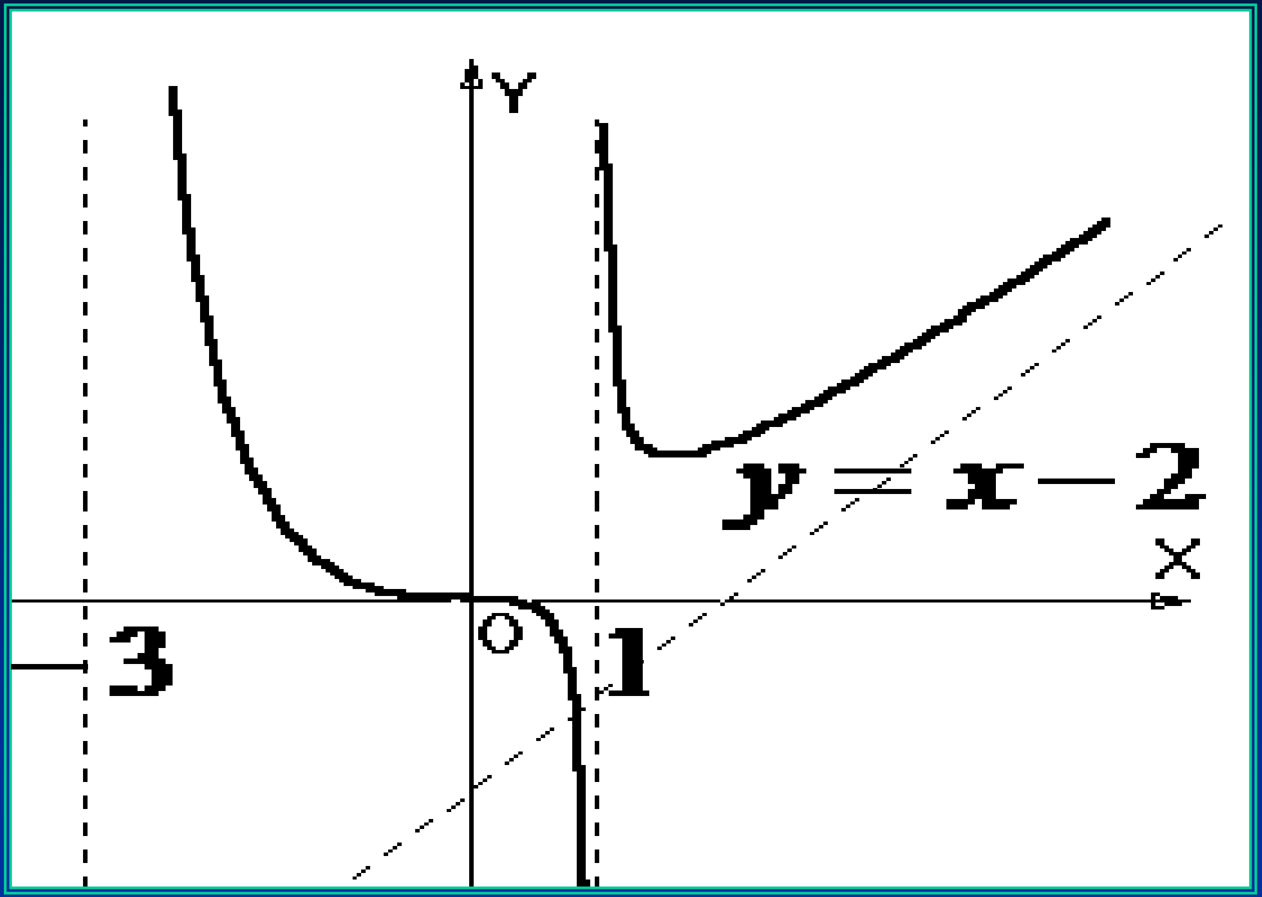
解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ (或 x\to 1)}} y=\infty$,

所以有铅直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\ y=x-2$ 为曲线的斜渐近线 .


Y
$y = x - 2$
X
O
1
-3

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，考察其奇偶性、周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及上下凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形.

例3. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

解: 1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为$(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点

$$\because\quad 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$$

$$\therefore\quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$\because\quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$$

$$\therefore\quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令$y'=0$得$x=-1,3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	无定义	$+$		$+$
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 1} y=\infty$, $\therefore x=1$ 为铅直渐近线

$$\boxed{y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}}$$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$, 即 $k=\dfrac{1}{4}$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$

6）绘图

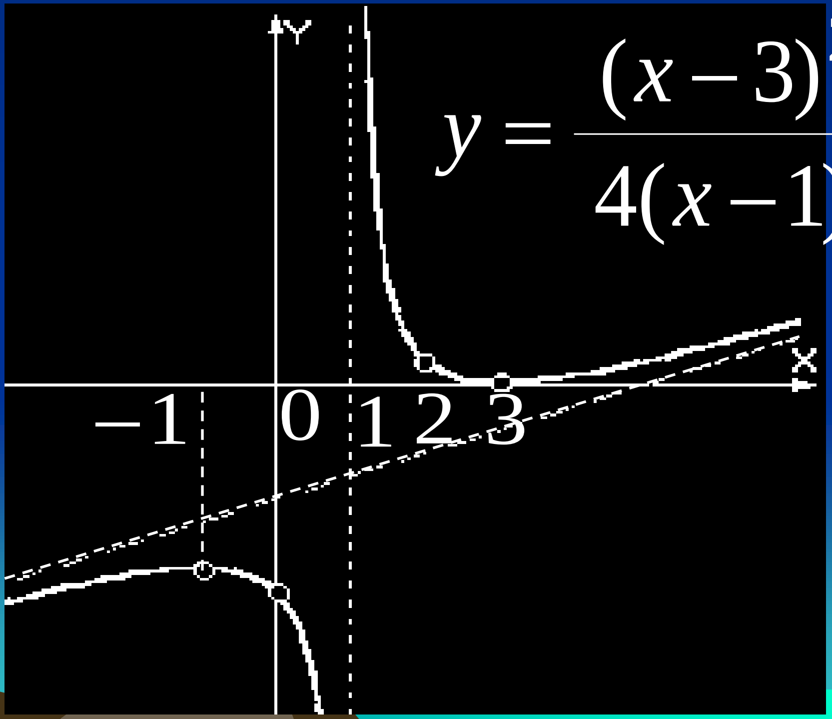
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	↗	-2 (极大)	↘	无定义	↘	0 (极小)	↗

铅直渐近线　$x=1$

斜渐近线　$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

绘图要点

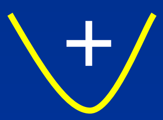
1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0, x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递增

$f'(x) < 0, x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递减

2.曲线上下凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凹



$f''(x) < 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸

拐点 — 连续曲线上有切线的上下凸分界点

3. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 垂直渐近线;

斜渐近线

4. 函数图形的描绘 —— 按作图步骤进行

1.求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明：$y'=\dfrac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{(-2-2x)(x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\quad (-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}),\quad (-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}})$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

2. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(*A*) 没有渐近线； **(*B*)** 仅有水平渐近线；

(*C*) 仅有铅直渐近线；

(*D*) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$