第二章

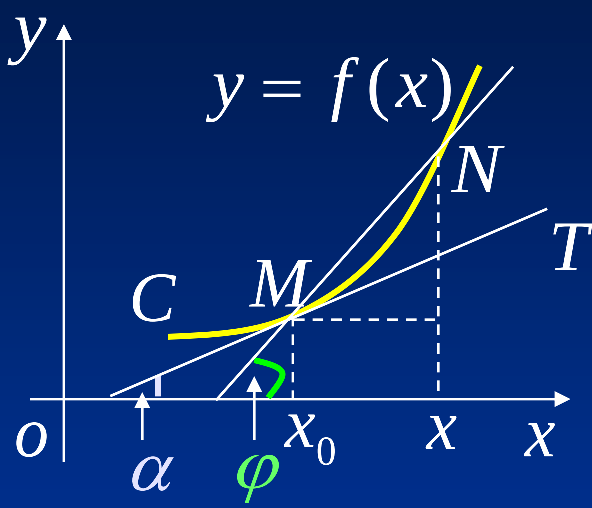
导数与微分

模型：1、曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT

(当$\varphi \to \alpha$时)



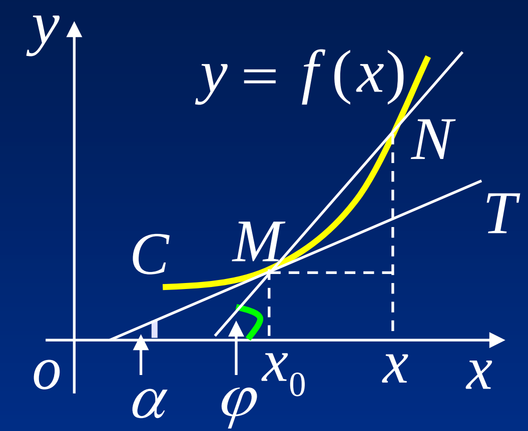
切线 MT 的斜率

$$k = \tan \alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} \tan \varphi$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2、瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

切线斜率 $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



两个问题的共性:

所求量: 函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

…………

变化率问题

一、导数的定义

定义 . 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\boxed{\begin{array}{c}\Delta y=f(x)-f(x_0)\\ \Delta x=x-x_0\end{array}}$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限为

$y=f(x)$ 在点 x_0 的导数. 记作:

$$y'\big|_{x=x_0};\quad f'(x_0);\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0};\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即 $$y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

运动质点的位置函数 $s = f(t)$

在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta y = f(x)-f(x_0) \\ \Delta x = x - x_0 \end{array}}$$

若上述极限不存在，就说函数 在点 x_0不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$，也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大 .

若函数在开区间 I 内每点都可导, 就称函数在 I 内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作: y'; $f'(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} \neq \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

例1. 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

证: $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在，即 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

例2. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)}\right]$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$$

2.求导的例

例3. 求函数 $f(x)=C$ (*C* 为常数) 的导数.

即 $\boxed{(C)'=0}$

例4. 求函数 $f(x)=x^n\ (n\in\mathrm{N}^+)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解: $\because\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})=na^{n-1}$$

$$\therefore\quad f'(a)=na^{n-1}$$

一般幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数) $\boxed{(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}}$

例如，$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = \frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

例5. $f(x)=\sin x$ 的导数.

解: 令 $h=\Delta x$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}\Big/h$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

$$f'(x)=\cos x$$

即 $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

类似可证得 $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$

例6. 求函数 $f(x)=\ln x$ 的导数.

解: $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

或

$$\boxed{=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{x}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

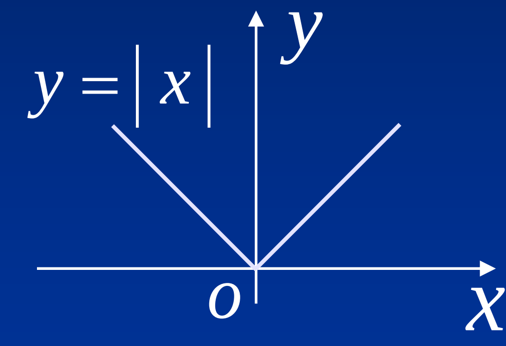
$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

$\therefore\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 即 $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

函数的可导性与连续性的关系

定理. $f(x)$ 在点 x 处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x 处连续

证明:



注意: 函数在点 x 连续未必可导.

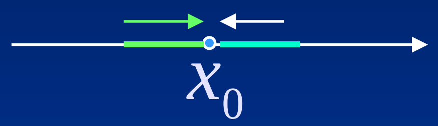
反例: $y=|x|$

在 $x = 0$ 处连续, 不可导.

单侧导数

定义. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右 **(左)** 邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ (\Delta x\to 0^-)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ (\Delta x\to 0^-)}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

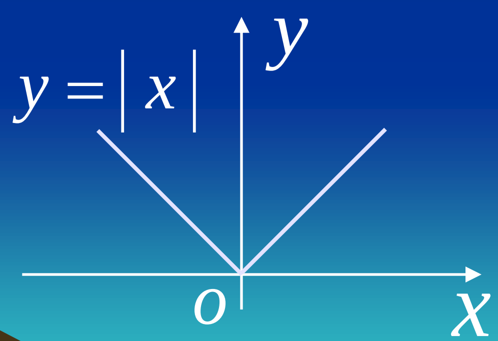


存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右 **(左)** 导数, 记作

$f'_+(x_0)$ $(f'_-(x_0))$

即 $$f'_\pm(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

例如, $f(x)=|x|$



定理. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

即：
$$\boxed{f'(x_0)\text{存在} \Longleftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}$$

定理. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右 (左) 导数存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必 右 (左) 连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

$$\boxed{f(x)\text{在闭区间 } [a,b] \text{ 上可导} \longrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{必 连续.}}$$

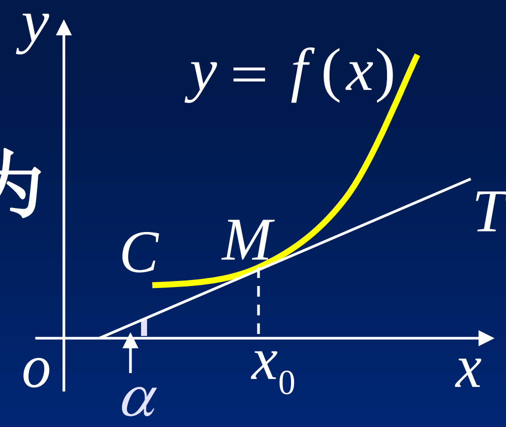
判断可导性：

1、不连续，一定不可导.

2、直接用导数定义;

3、看左、右导数是否存在且相等.

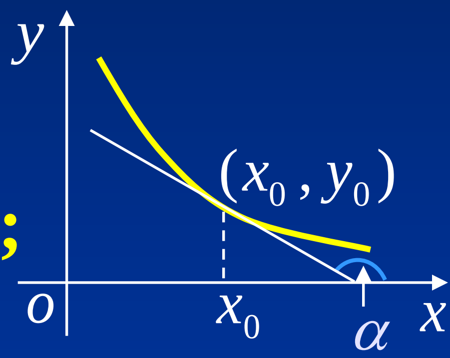
3、 导数的几何意义



曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线斜率为

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

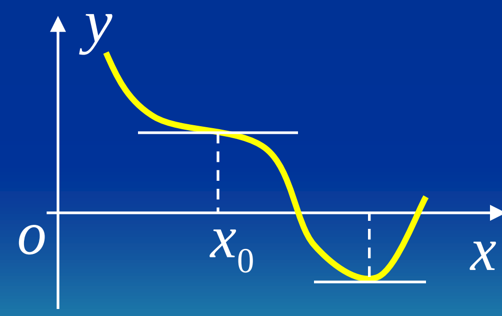
若 $f'(x_0) > 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 上升;



若 $f'(x_0) < 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 下降;

若 $f'(x_0) = 0$, 切线与 x 轴平行, x_0 称为**驻点**;

若 $f'(x_0) = \infty$, 切线与 x 轴垂直 .



$f'(x_0) \neq \infty$ 时, 曲线在点 (x_0, y_0) 处的

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $\quad (f'(x_0) \neq 0)$

例7. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有垂直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$，　$\therefore\ y'|_{x=0}=\infty$，

故在原点 (0 , 0) 有垂直切线 $x=0$

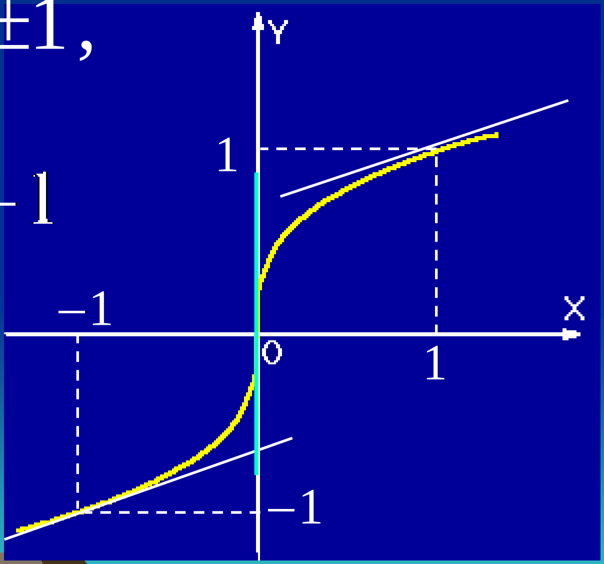
令 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$，得 $x=\pm1$，对应 $y=\pm1$，

则在点(1,1) , (–1,–1) 处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即　$x-3y\pm2=0$



注

函数 $f(x)$在某点x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别： $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值;

联系： $f'(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意： $f'(x_0) \cancel{=} [f(x_0)]'$