单元自测练习题（1）——参考答案

第一章　函数与极限

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

B C A D D C

解析：2. $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$ 在区间 $(0,1$ 内连续，而右极限 $g(0^+)=e^{-1}$，左极限 $g(1^-)=0$（$\because \lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$）故 $g(x)$ 有界，另外易得 $f(x)$ 无界，$h(x)$ 有界.

解析：3. 选项 A 是书本上的定理；选项 D 是错的，只有当 $f(x)\neq 0$ 时结论才成立，0 不能做分母，另外 0 是可以作为无穷小的唯一的常值函数.

解析：4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$，

当 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$，

当 $x\to-\infty$ 时（$\because x<0,\ \sqrt{x^2}=-x$），

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\infty$，极限不存在，**所以此题极限不存在.**

二、求极限（每题 5 分，共 25 分）

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解： 因为 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\frac{1}{2}，\quad 同样\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{2}，$$

运用夹逼准则得，原数列极限为 $\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\right)^{(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}=e$.

10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)^3-3^3}{(x-3)\left(\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)^2+\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)\bullet3+3^2\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)^2+\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)\bullet3+9}=\lim_{x\to3}\frac{7}{\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)^2+\left(\sqrt[3]{7x+6}\right)\bullet3+9}=\frac{7}{27}.$$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{e^{\sin x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\bullet\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}.$$

三、求函数内的参数（每题 7 分，共 21 分）

12. 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 x^n 的同阶无穷小，求 n.

解： 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\dfrac{1}{4}x^4$ 为等价无穷小，故 $n=4$.

13. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$，求 a.

解： 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{(-\frac{a}{2})}=e^{-\frac{a}{2}}$； $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$；

所以，$e^{-\frac{a}{2}}=2$，从而得 $a=-2\ln 2$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{2\sin x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\ge0\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.

解： $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\ln(1-x)}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}a+e^{2x}=a+1$，

由已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f(0^+)=f(0^+)=f(0)$，即

$-\dfrac{1}{2}=a+1$，所以解得 $a=-\dfrac{3}{2}$.

四、函数连续与间断判定（每题 8 分，共 16 分）

15. 设函数为 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续，若不连续，判断是哪种类型的间断点.

解： 因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} x\sin\frac{1}{x}=0$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2+1=1$，

所以，$f(0^+)\neq f(0^-)$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

16. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$（$n\in N$）的间断点，并确定其所属类型.

解： 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases} 1+x, & |x|<1, \\ 0, & |x|>1\text{或者}x=-1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$，

所以 $x=1\text{或者}-1$ 为分段函数的分段点.

由 $f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1)=0$，可得 $x=-1$ 为连续点；

因为 $f(1^-)=2$，$f(1^+)=0$，$f(1^-)\neq f(1^+)$，所以 $x=1$ 为间断点，属于第一类间断点，是跳跃间断点.

五、相关应用（每题 10 分，共 20 分）

17. 求曲线 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 的所有渐近线.

解： 因为 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\infty$，可知，曲线存在**铅直渐近线** $x=-1$，

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\infty$，曲线不存在**水平渐近线**，

下面考虑斜渐近线：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1$，

所以，曲线存在**斜渐近线** $y=x-1$.

18. 已知函数 $f(x)$ 是区间 $[0,2a]$（$a>0$）上的连续函数，且 $f(0)=f(2a)$，证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个根.

证： 设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由题设知 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且

$F(a)=f(a)-f(a+a)=f(a)-f(2a)$，而因为 $f(0)=f(2a)$，故

$$F(a)=f(a)-f(0),$$

又有

$$F(0)=f(0)-f(0+a)=f(0)-f(a),$$

当 $f(a)\neq f(0)$ 时，有 $F(a)F(0)<0$，由 $F(x)$ 是闭区间 $[0,a]$ 上的连续函数，根据零点定理可得，在开区间 $(0,a)$ 内至少有一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$，所以，方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个根.

当 $f(a)=f(0)$ 时，有 $f(0)=f(0+a)$，也因 $f(0)=f(2a)$，有 $f(a)=f(a+a)$，所以，这时 $x=0,\ a$ 是满足方程 $f(x)=f(x+a)$ 的两个根.

综上所述，方程 $f(x)=f(x+a)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上至少有一个根.