

一、单项选择题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设 $f(x) = \cos x(x + |\sin x|)$, 则在 $x = 0$ 处有().
(A) $f'(0) = 2$ (B) $f'(0) = 1$ (C) $f'(0) = 0$ (D) $f(x)$ 不可导.
2. 设 $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\beta(x) = 3 - 3\sqrt[3]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时 ().
(A) $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 但不是等价无穷小; (B) $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小;
(C) $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小; (D) $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小.
3. 若 $F(x) = \int_0^x (2t-x)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 在区间上 $(-1,1)$ 二阶可导且 $f'(x) > 0$, 则 ().
(A) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极大值;
(B) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极小值;
(C) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值, 但点 $(0, F(0))$ 为曲线 $y = F(x)$ 的拐点;
(D) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值, 点 $(0, F(0))$ 也不是曲线 $y = F(x)$ 的拐点.
4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x) = ()$.
(A) $\frac{x^2}{2}$ (B) $\frac{x^2}{2} + 2$ (C) $x-1$ (D) $x+2$.

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数 则 $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} (\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n-1}{n} \pi) = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (本大题有 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

9. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \sin(xy) = 1$ 确定, 求 $y'(x)$ 以及 $y'(0)$.
10. 求 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx$.
11. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{2x-x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 求 $\int_{-3}^1 f(x) dx$.

12. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解.

四、解答题 (本大题 10 分)

14. 已知上半平面内一曲线 $y = y(x)$ ($x \geq 0$), 过点 $(0,1)$, 且曲线上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴、 y 轴、直线 $x = x_0$ 所围成面积的 2 倍与该点纵坐标之和, 求此曲线方程.

五、解答题 (本大题 10 分)

15. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ; (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

六、证明题 (本大题有 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明对任意的 $q \in [0,1]$,

$$\int_0^q f(x) dx \geq q \int_0^1 f(x) dx.$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. (提

示: 设 $F(x) = \int_0^x f(x) dx$)

一、单项选择题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1、D 2、A 3、C 4、C

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. e^6 . 6. $\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{x})^2 + c$. 7. $\frac{\pi}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}$.

三、解答题 (本大题有 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

9. 解: 方程两边求导

$$e^{x+y} (1+y') + \cos(xy) (xy)' - y =$$

$$y'(x) = -\frac{e^{x+y} + y \cos(xy)}{e^{x+y} + x \cos(xy)}$$

$$x=0, y=0, y'(0) = -1$$

10. 解: $u = x^7 \quad 7x^6 dx = du$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{7} \int \frac{(1-u)}{u(1+u)} du = \frac{1}{7} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{7} (\ln|u| - 2\ln|u+1|) + c \\ &= \frac{1}{7} \ln|x^7| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C\end{aligned}$$

11. 解: $\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^0 x e^{-x} dx + \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$

$$\begin{aligned}&= \int_{-3}^0 x d(-e^{-x}) + \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \\ &= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_{-3}^0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{令 } x-1 = \sin \theta) \\ &= \frac{\pi}{4} - 2e^3 - 1\end{aligned}$$

12. 解: 由 $f(0)=0$, 知 $g(0)=0$ 。

$$g(x) = \int_0^1 f(xt) dt \stackrel{xt=u}{=} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}, \quad g'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续。}$$

13. 解: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \ln x$

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{2}{x} dx} \ln x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x + Cx^{-2}\end{aligned}$$

$$y(1) = -\frac{1}{9} C = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$$

四、解答题 (本大题 10 分)

14. 解: 由已知且 $y' = 2 \int_0^x y dx + y$,

将此方程关于 x 求导得 $y'' = 2y + y'$

特征方程: $r^2 - r - 2 = 0$ 解出特征根: $r_1 = -1, r_2 = 2$.

其通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

代入初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$, 得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{3}$

故所求曲线方程为: $y = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

五、解答题 (本大题 10 分)

15. 解: (1) 根据题意, 先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 切线方程: $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$

由于切线过原点, 解出 $x_0 = e$, 从而切线方程为: $y = \frac{1}{e}x$

则平面图形面积 $A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{1}{2}e - 1$

(2) 三角形绕直线 $x = e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1 , 则 $V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2$
曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的图形绕直线 $x = e$ 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2 = \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy$$

D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$

六、证明题 (本大题有 2 小题, 每小题 4 分, 共 12 分)

16. 证明: $\int_0^q f(x) dx - q \int_0^1 f(x) dx = \int_0^q f(x) dx - q(\int_0^q f(x) dx + \int_q^1 f(x) dx)$

$$= (1-q) \int_0^q f(x) dx - q \int_q^1 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \xi_1 \in [0, q], \xi_2 \in [q, 1] \\ = q(1-q)f(\xi_1) - q(1-q)f(\xi_2) \stackrel{f(\xi_1) \geq f(\xi_2)}{\geq} 0 \end{aligned}$$

故有:

$$\int_0^q f(x) dx \geq q \int_0^1 f(x) dx \quad \text{证毕。}$$

17.

证: 构造辅助函数: $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq \pi$ 。其满足在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 上可导。 $F'(x) = f(x)$, 且 $F(0) = F(\pi) = 0$

$$\text{由题设, 有 } 0 = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x) = F(x) \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin x \cdot F(x) dx,$$

有 $\int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = 0$, 由积分中值定理, 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $F(\xi) \sin \xi = 0$ 即 $F(\xi) = 0$

综上可知 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$, $\xi \in (0, \pi)$. 在区间 $[0, \xi]$, $[\xi, \pi]$ 上分别应用罗尔定理, 知存在

$\xi_1 \in (0, \xi)$ 和 $\xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使 $F'(\xi_1) = 0$ 及 $F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

高等数学 I 解答

一、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中)

(本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时 (D) 不一定是无穷小.

(A) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

(B) $\alpha^2(x) + \beta^2(x)$

(C) $\ln[1 + \alpha(x) \cdot \beta(x)]$

(D) $\frac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$ 的值是 (C) .

(A) 1 (B) e (C) $e^{\cot a}$ (D) $e^{\tan a}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + e^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ (D) .

(A) 1 (B) 0 (C) e (D) -1

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 那么 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-2h)}{h} =$ (A) .

(A) $3f'(a)$

(B) $2f'(a)$

(C) $f'(a)$

(D) $\frac{1}{3}f'(a)$

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+a) - \ln a}{x}$ ($a > 0$) 的值是 $\frac{1}{a}$.

6. 由 $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$ 确定函数 $y(x)$ ，则导函数 $y' =$

$$-\frac{2\sin 2x + \frac{y}{x} + ye^{xy}}{xe^{xy} + \ln x}.$$

7. 直线 l 过点 $M(1, 2, 3)$ 且与两平面 $x + 2y - z = 0, 2x - 3y + 5z = 6$ 都平行，则直

线 l 的方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$

8. 求函数 $y = 2x - \ln(4x)^2$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

三、解答题 (本大题有 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

9. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - 1}{x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{e}{2}$$

10. 已知: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 26, \vec{a} \cdot \vec{b} = 30$, 求 $|\vec{a} \times \vec{b}|.$

$$\text{解: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{13}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{12}{13}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 72$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt \quad x \in [a, b]$, 试求出 $F''(x).$

$$\text{解: } F(x) = x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

$$F'(x) = \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F''(x) = f(x)$$

12. 求 $\int x \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解: } \int x \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx &= -\frac{1}{2} \int x d \sin^{-2} x \\ &= -\frac{1}{2} x \sin^{-2} x + \frac{1}{2} \int \sin^{-2} x dx = -\frac{1}{2} x \sin^{-2} x - \frac{1}{2} \cot x + C \end{aligned}$$

四、解答题 (本大题有 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

$$13. \text{ 求 } \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{令 } \frac{1}{x} = t$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

14. 求函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的极值与拐点.

解: 函数的定义域 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \quad y'' = \frac{-4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

令 $y' = 0$ 得 $x_1 = 1, x_2 = -1$

$y''(1) < 0$ $x_1 = 1$ 是极大值点, $y''(-1) > 0$ $x_2 = -1$ 是极小值点

极大值 $y(1) = 1$, 极小值 $y(-1) = -1$

令 $y'' = 0$ 得 $x_3 = 0, x_4 = \sqrt{3}, x_5 = -\sqrt{3}$

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y''	—	+	—	+

故拐点 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

15. 求由曲线 $y = \frac{x^3}{4}$ 与 $y = 3x - x^2$ 所围成的平面图形的面积.

$$\text{解: } \frac{x^3}{4} = 3x - x^2, \quad x^3 - 12x + 4x^2 = 0,$$

$$x(x+6)(x-2) = 0, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

$$\begin{aligned}S &= \int_{-6}^0 \left(\frac{x^3}{4} - 3x + x^2\right) dx + \int_0^2 \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{16} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-6}^0 + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right) \Big|_0^2 \\ &= 45 + 2\frac{1}{3} = 47\frac{1}{3}\end{aligned}$$

16. 设抛物线 $y = 4 - x^2$ 上有两点 $A(-1, 3)$, $B(3, -5)$, 在弧 AB 上, 求一点 $P(x, y)$ 使 $\triangle ABP$ 的面积最大.

解:

$$AB \text{ 连线方程: } y + 2x - 1 = 0 \quad |AB| = 4\sqrt{5}$$

$$\text{点 } P \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{\sqrt{5}} \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

$\triangle ABP$ 的面积

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{-x^2 + 2x + 3}{\sqrt{5}} = 2(-x^2 + 2x + 3)$$

$$S'(x) = -4x + 4 \quad \text{当 } x = 1 \quad S'(x) = 0$$

$$S''(x) = -4 < 0$$

当 $x = 1$ 时 $S(x)$ 取得极大值也是最大值

此时 $y = 3$ 所求点为 $(1, 3)$

另解: 由于 $\triangle ABC$ 的底 AB 一定, 故只要高最大而过 C 点的抛物线的切线与 AB 平行时, 高可达到最大值, 问题转为求 $C(x_0, 4 - x_0^2)$, 使 $f'(x_0) = -2x_0 = \frac{-5-3}{3+1} = -2$, 解得 $x_0 = 1$, 所求 C 点为 $(1, 3)$

六、证明题 (本大题 4 分)

17. 设 $x > 0$, 试证 $e^{2x}(1-x) < 1+x$.

证明: 设 $f(x) = e^{2x}(1-x) - (1+x)$, $x > 0$

$$f'(x) = e^{2x}(1-2x) - 1, \quad f''(x) = -4xe^{2x},$$

$x > 0$, $f''(x) \leq 0$, 因此 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内递减。

在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内递减,

在 $(0, +\infty)$ 内, $f(x) < f(0)$, 即 $e^{2x}(1-x) - (1+x) < 0$

亦即当 $x > 0$ 时, $e^{2x}(1-x) < 1+x$ 。

高等数学 I A

一、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中)
(本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x-1}, & x > 1 \\ \tan \frac{\pi}{2}x, & 0 \leq x < 1 \\ x + \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

的全体连续点的集合是 ()

(A) $(-\infty, +\infty)$

(B) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(C) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(D) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

19. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 则常数 a, b 的值所组成的数组 (a, b) 为 ()

(A) $(1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 1)$ (D) $(1, -1)$

20. 设在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 二阶可导且 $f''(x) > 0$, 则 ()

(A) $f'(0) < f'(1) < f(1) - f(0)$

(B) $f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1)$

(C) $f'(1) < f'(0) < f(1) - f(0)$

(D) $f(1) - f(0) < f'(1) < f'(0)$

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^4 x}{1+x^2} dx, \quad N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, \quad P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$$

21.

则 ()

(A) $M < N < P$

(B) $P < N < M$

(C) $P < M < N$

(D) $N < M < P$

二 填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设 $x > 1$ $d(x^2 \arctan \sqrt{x-1}) =$ ()

2. 设 $\int f(x) dx = \sin x + c$, 则 $\int f^{(n)}(x) dx =$ ()

3. 直线方程 $\frac{x-4}{2-m} = \frac{y}{n} = \frac{z-5}{6+p}$, 与 xoy 平面, $yo z$ 平面都平行,

那么 m, n, p 的值各为 ()

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} =$ ()

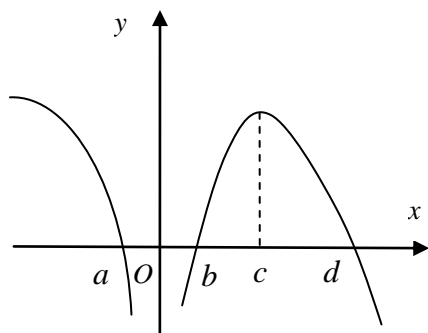
三 解答题 (本大题有 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 的可导性, 并在可导处求出 $f'(x)$

3. 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 在 $x \neq 0$ 时二阶可导, 且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示, 给出

$f(x)$ 的极大值点、极小值点以及曲线 $y = f(x)$ 的拐点。



四 解答题 (本大题有 4 小题, 每小题 9 分, 共 36 分)

1. 求不定积分 $\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}$

2. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

3. 已知直线 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$, 求过直线 l_1 且平行于直线 l_2 的平面方程。

4. 过原点的抛物线 $y = ax^2$ 及 $y=0, x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周的体积为 $\frac{81}{5}\pi$, 确定抛物线方程中的 a , 并求该抛物线绕 y 轴一周所成的旋转体体积。

五、综合题 (本大题有 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1. 设 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 其中 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上二阶可导且有 $f(2) = 0$, 试证明存在 ξ ($1 < \xi < 2$) 使得 $F''(\xi) = 0$ 。

2. $f(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt \quad (x \geq 0)$

- (1) 求 $f(x)$ 的最大值点;

(2) 证明: $f(x) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

一、单项选择题 B D B C.

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. $dy = \frac{x}{2} (\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 4 \arctan \sqrt{x-1}) dx$

6. $\int f^{(n)}(x) dx = \int \cos(x + \frac{n\pi}{2}) dx = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + c$

7. $m=2, p=-6, n \neq 0$

8. $\frac{1}{2}(e-1)$

三、解答题 (本大题有 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

9. (8 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \frac{x + \sin x}{x}$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

10. (8 分) 设 $f(x)$ 的导数, 试讨论 $f(x)$ 的可导性, 并在可导处求出 $f'(x)$.

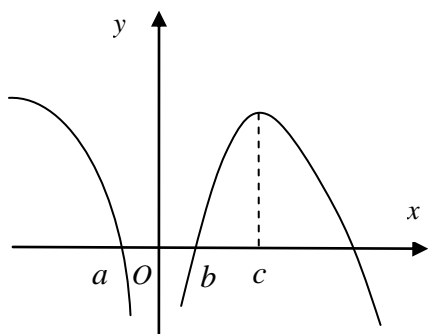
解: 当 $x > 0, f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$; 当 $x < 0, f'(x) = 1$

$$x=0 \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x^2 \cos \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0 \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

11. (8 分) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 在 $x \neq 0$ 时二阶可导, 且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图. 给出 $f(x)$ 的极大值点、极小值点以及曲线 $y=f(x)$ 的拐点.



解: 极大值点: $x=a$ 极小值点: $x=b$

拐点 $(0, f(0)), (c, f(c))$

四 解答题 (本大题有 4 小题, 每小题 9 分, 共 36 分)

12. (9 分) 求不定积分 $\int \frac{(x-2)^2}{x(x-1)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x-1} \right) dx \\ &= 4 \ln|x| - \frac{1}{x-1} - 3 \ln|x-1| + c \end{aligned}$$

13. (9 分) 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= \left[-(x \ln x - x) \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x \ln x - x \right]_1^e \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

14. (9 分) 已知直线 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$, $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$, 求过直线 l_1 且平行于直线 l_2 的平面方程.

$$\text{解: } \vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1, 2, 3) \times (2, 5, 4) = (-7, 2, 1)$$

取直线 l_1 上一点 $M_1(0,0,1)$ 于是所求平面方程为
 $-7x + 2y + (z - 1) =$

15. (9分) 过原点的抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$ 及 $y=0, x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周的体积为 $\frac{81}{5}\pi$. 求 a , 并求该抛物线绕 y 轴一周所成的旋转体体积.

解:
$$V = \int_0^1 \pi (ax^2)^2 dx = \pi a^2 \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi a^2}{5}$$

由已知得 $\frac{\pi a^2}{5} = \frac{81\pi}{5}$ 故 $a = 9$ 抛物线为: $y = 9x^2$

绕 y 轴一周所成的旋转体体积:
$$V = \int_0^1 2\pi x \cdot 9x^2 dx = 18\pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{9}{2}\pi$$

五 综合题 (每小题 4 分, 共 8 分)

16. (4分) 设 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 其中 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上二阶可导且有 $f(2)=0$.
 证明: 存在 ξ ($1 < \xi < 2$) 使得 $F''(\xi) = 0$.

证明: 由 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导, 故 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 二阶可导, 因 $f(2)=0$, 故 $F(1)=F(2)=0$

在 $[1, 2]$ 上用罗尔定理, 至少有一点 x_0 , ($1 < x_0 < 2$) 使 $F'(x_0) = 0$

$$F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x) \quad \text{得} \quad F'(1) = 0$$

在 $[1, x_0]$ 上对 $F'(x)$ 用罗尔定理, 至少有点 ξ ($1 < \xi < x_0 < 2$) $F''(\xi) = 0$

17. (4分).

解: (1) $x=1$ 为 $f(x)$ 的最大值点.

$f'(x) = (x-x^2)\sin^{2n} x$, 当 $0 < x < 1$, $f'(x) = (x-x^2)\sin^{2n} x > 0$; 当 $x > 1$,

$f'(x) = (x-x^2)\sin^{2n} x \leq 0$. $f(1)$ 为极大值, 也为最大值.

(2)
$$f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt \leq f(1)$$

$$f(1) = \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t dt \leq \int_0^1 (t-t^2)t^{2n} dt = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

高等数学上 B (07) 解答

一、填空题: (共 24 分, 每小题 4 分)

1. $y = \sin[\sin(x^2)]$, 则 $\frac{dy}{dx} = 2x \cos[\sin(x^2)] \cos x^2$.

2. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = \pi$, $a = \underline{1}$.

3. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = 2 - \frac{2}{e}$.

4. $y = e^x$ 过原点的切线方程为 $y = ex$.

5. 已知 $f(x) = e^x$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x + c$ 。

6. $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$

时, 点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点。

二、计算下列各题: (共 36 分, 每小题 6 分)

1. 求 $y = (\sin x)^{\cos x}$ 的导数。

解: $y' = (e^{\cos x \ln \sin x})' = e^{\cos x \ln \sin x} (-\sin x \ln \sin x + \cot x \cos x)$

2. 求 $\int \sin \ln x dx$ 。

解:
$$\begin{aligned} \int \sin \ln x dx &= x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx \\ &= x \sin \ln x - x \cos \ln x - \int \sin \ln x dx \\ &= \frac{1}{2} (x \sin \ln x - x \cos \ln x) + C \end{aligned}$$

3. 求 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}} dx$ 。

解:
$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{5}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \sqrt{x^2-1} + 5 \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C \end{aligned}$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x^k + 1, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导, 则 k 为何值?

解: $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^k}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{k-1}$

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} =$

$k=1$

5. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$ 。

解:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

6. 求过点 $(2, 2, 0)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面方程。

解：两直线的方向向量分别为 $s_1 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = (1, -2, -3)$, $s_2 = (2, -1, 1) \times (1, -1, 1) = (0, -1, -1)$, 平面的法向量 $n = (1, -2, -3) \times (0, -1, -1) = (-1, 1, -1)$ 。

平面方程为 $x - y + z = 0$ 。

三、解答下列各题：(共 28 分，每小题 7 分)

1. 设 $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

解： $\frac{dy}{dx} = -\cot t$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (-\cot t)'_t \frac{1}{-R \sin t} = -\frac{1}{R \sin^3 t}$$

2. 求 $F(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值。

解： $F'(x) = x(x-1) = 0, x=0, x=1$

$$F(0) = 0, F(1) = \int_0^1 t(t-1)dt = -\frac{1}{6},$$

$$F(-1) = \int_0^{-1} t(t-1)dt = -\frac{5}{6}, F(2) = \int_0^2 t(t-1)dt = \frac{2}{3}$$

最大值为 $\frac{2}{3}$, 最小值为 $-\frac{5}{6}$ 。

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x(1+y^2) - \ln(x^2+2y) = 0$ 确定, 求 $y'(0)$ 。

解：方程 $x(1+y^2) - \ln(x^2+2y) = 0$ 两边同时对 x 求导

$$(1+y^2) + 2xyy' - \frac{2x+2y'}{x^2+2y} = 0$$

将 $x=0, y=\frac{1}{2}$ 代入上式

$$y'(0) = \frac{5}{8}$$

4. 求由 $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积。

解： $V = \int_0^1 \pi(y - y^4)dy$

$$= \frac{3}{10} \pi$$

四、证明题：(共 12 分，每小题 6 分)

1. 证明过双曲线 $xy=1$ 任何一点之切线与 OX, OY 二个坐标轴所围成的三角形的面积为常数。

证明：双曲线 $xy=1$ 上任何一点 (x, y) 的切线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{x^2}(X - x)$$

切线与 x 轴、 y 轴的交点为 $(0, y + \frac{1}{x}), (2x, 0)$

故切线与 OX, OY 二个坐标轴所围成的三角形的面积为 $s = \frac{1}{2} \times (y + \frac{1}{x}) \times 2x = x(y + \frac{1}{x}) = x \cdot y + 1 = 2$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 证明: 至少存在一点 ξ 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

证明: 令 $F(x) = \int_x^b g(x) dx \int_a^x f(x) dx$

$F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

高等数学上解答 (07)

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 16 分)

1. $f(x) = x \cos x e^{-|\sin x|}$ ($-\infty < x < +\infty$) 是 A。

(A) 奇函数; (B) 周期函数; (C) 有界函数; (D) 单调函数

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = (1 - \cos x) \ln(1 + 2x^2)$ 与 B 是同阶无穷小量。

(A) x^3 ; (B) x^4 ; (C) x^5 ; (D) x^2

3. 直线 $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的位置关系是 C。

(A) 直线在平面内; (B) 平行; (C) 垂直; (D) 相交但不垂直。

4. 设有三非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 。若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{b} \cdot \vec{c} =$ A。

(A) 0; (B) -1; (C) 1; (D) 3

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

1. 曲线 $y = \ln x$ 上一点 P 的切线经过原点 $(0, 0)$, 点 P 的坐标为 $(e, 1)$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2(e^x - 1)} = \frac{1}{3}$ 。

3. 方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $y'(0) =$ 0。

4. 曲线 $y = x^2$ 、 $x = 1$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{5}$ 。

三、解下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 已知 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t - \sin^2 x}{t} \right)^t$, 求 $f'(x)$ 。

解: $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t - \sin^2 x}{t} \right)^t = e^{-\sin^2 x}$

$$f'(x) = -e^{-\sin^2 x} \sin 2x$$

2. 求不定积分 $\int [\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}] dx$ 。

解: $\int [\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}] dx = \int \ln(\ln x) dx + \int \frac{1}{\ln x} dx$

$$= x \ln(\ln x) - \int \frac{1}{\ln x} dx + \int \frac{1}{\ln x} dx$$

$$= x \ln(\ln x) + C$$

3. 计算定积分 $\int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{\sin x}{1+x^4} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$ 。

解: $\int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{\sin x}{1+x^4} + \sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_{-1}^1 (x^2 \sqrt{1-x^2}) dx + \int_{-1}^1 x^2 \frac{\sin x}{1+x^4} dx$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 \sqrt{1-x^2}) dx + 0$$

$$\stackrel{x=\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

4. 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$ 。

解: $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{1+\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2 \frac{x}{2} dx - \int \frac{d \cos x}{1+\cos x}$$

$$= \tan \frac{x}{2} - \ln |1+\cos x| + C$$

5. 已知 $f'(\ln x) = x$, 且 $f(1) = e+1$, 求 $f(x)$ 。

解: 令 $\ln x = t$, $f'(t) = e^t$

$$f(x) = e^x + C$$

$$f(1) = e+1, f(x) = e^x + 1$$

四、 (8分) 设 $f(x)$ 对任意 x 有 $f(x+1) = 2f(x)$, 且 $f'(0) = -\frac{1}{2}$ 。求 $f(x)$ 。

解: 由 $f(x+1) = 2f(x)$, $f(1) = 2f(0)$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\stackrel{x=t+1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+1) - f(1)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f(t) - 2f(0)}{t} \\
&= 2f'(0) = -1
\end{aligned}$$

五、(8分) 证明：当 $x > 1$ 时， $(x^2 - 1)\ln x > (x - 1)^2$ 。

证明：只需证明 $(x + 1)\ln x > x - 1$ 。

$$\text{令 } f(x) = (x + 1)\ln x - x + 1$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} > 0, \quad f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 单调递增。}$$

$$f(1) = 0, \quad \text{当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) > 0. \text{ 即 } (x^2 - 1)\ln x > (x - 1)^2.$$

六、(8分)

已知 $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f''(t)dt$ ， $f''(x)$ 连续，且当 $x \rightarrow 0$ 时， $F'(x)$ 与 x^2 为等价无穷小量。求 $f''(0)$ 。

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^2} = 1$$

$$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f''(t)dt = x^2 \int_0^x f''(t)dt - \int_0^x t^2 f''(t)dt$$

$$F'(x) = 2x \int_0^x f''(t)dt + x^2 f''(x) - x^2 f''(x) = 2x \int_0^x f''(t)dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f''(t)dt}{x^2} = 2f''(0)$$

$$f''(0) = \frac{1}{2}$$

七、(8分)

设有曲线 $y = 4x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 和直线 $y = c$ ($0 < c < 4$)。记它们与 y 轴所围图形的面积为 A_1 ，它们与直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 A_2 。问 c 为何值时，可使 $A = A_1 + A_2$ 最小？并求出 A 的最小值。

$$\text{解：} A = A_1 + A_2 = \int_0^c \frac{\sqrt{y}}{2} dy + \int_c^4 (1 - \frac{\sqrt{y}}{2}) dy$$

$$A'(c) = \sqrt{c} - 1$$

$$\text{令 } A'(c) = \sqrt{c} - 1 = 0, \text{ 得 } c = 1.$$

$$A''(1) = \frac{1}{2} > 0, \quad c = 1 \text{ 为最小值点。}$$

$$\min A = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} dy + \int_1^4 (1 - \frac{\sqrt{y}}{2}) dy = 1$$

八、设 $f(x)$ 在 (a, b) 内的点 x_0 处取得最大值，且 $|f''(x)| \leq K$ ($a \leq x \leq b$)。

证明： $|f'(a)| + |f'(b)| \leq K(b - a)$

证明： $f'(x_0) = 0$

在 $[a, x_0]$ 对 $f'(x)$ 应用拉格朗日定理

$$f'(x_0) - f'(a) = f''(\xi_1)(x_0 - a) \quad (a < \xi_1 < x_0)$$

$$f'(a) = f''(\xi_1)(a - x_0), \quad |f'(a)| \leq K(x_0 - a)$$

在 $[x_0, b]$ 对 $f'(x)$ 应用拉格朗日定理

$$f'(b) - f'(x_0) = f''(\xi_2)(b - x_0) \quad (x_0 < \xi_2 < b)$$

$$f'(b) = f''(\xi_2)(b - x_0), \quad |f'(b)| \leq K(b - x_0)$$

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
（本大题分 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1、

设 $I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$, 则 $I =$

(A) $\ln(e^x - 1) + c$ (B) $\ln(e^x + 1) + c$;

(C) $2\ln(e^x + 1) - x + c$;

(D) $x - 2\ln(e^x + 1) + c$.

答()

2、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^n} \cdot \frac{2}{e^n} \cdot \frac{n-1}{e^n} \cdot e} =$$

(A) 1 (B) \sqrt{e} (C) e (D) e^2

答 ()

3、

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ 的 n 阶麦克劳林展开式的拉格朗日型余项 $R_n(x) = ()$ (式中 $0 < \theta < 1$)

(A) $\frac{1}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}} x^{n+1}$ (B) $\frac{(-1)^n}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}} x^{n+1}$

(C) $\frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}} x^{n+1}$ (D) $\frac{(-1)^n}{(1-\theta x)^{n+2}} x^{n+1}$

答()

4、

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则点 $x=0$

(A) 是 $f(x)$ 的极大值点 (B) 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) 不是 $f(x)$ 的驻点 (D) 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点

答()

5、

曲线 $y = x^2 - 2x + 4$ 上点 $M_0(0, 4)$ 处的切线 M_0T 与曲线 $y^2 = 2(x-1)$ 所围成的平面图形的面积 $A =$

(A) $\frac{21}{4}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{13}{12}$

答()

二、填空题（将正确答案填在横线上）
（本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、
2、
设 $y = \ln \sqrt{1 + \tan(x + \frac{1}{x})}$, 则 $y' =$ _____

用切线法求方程 $x^3 - 2x^2 - 5x - 1 = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内的近似根时, 选 x_0 并相应求得下一个近似值 x_1 。则 x_0, x_1 分别为_____。

3、设空间两直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1 = y-1 = z$ 相交于一点, 则 $\lambda =$ _____。

4、
 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + e^{2ax} - 1}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \\ a, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____。

5、 $\int_0^b |x| dx =$ _____, 其中 b 是实数。

三、解答下列各题
（本大题 4 分）

设平面 π 与两个向量 $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ 和 $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ 平行, 证明: 向量 $\vec{c} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ 与平面 π 垂直。

四、解答下列各题
（本大题 8 分）

讨论积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 的敛散性。

五、解答下列各题
（本大题 11 分）

导出计算积分 $I_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 + 1}}$ 的递推公式, 其中 n 为自然数。

六、解答下列各题
（本大题 4 分）

求过 $P_0(4, 2, -3)$ 与平面 $\pi: x + y + z - 10 = 0$ 平行且与直线 $l_1: \begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0 \\ z - 10 = 0 \end{cases}$ 垂直的直线方程。

七、解答下列各题
（本大题 6 分）

计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos 2x}{x \tan x}$

八、解答下列各题
（本大题 7 分）

试求 $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ 的递推公式 (n 为自然数), 并计算积分 $\int_1^e (\ln x)^3 dx$

九、解答下列各题
（本大题 8 分）

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可微, 但无界, 试证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 内无界。

十、解答下列各题
（本大题 5 分）

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0)$ 。

十一、解答下列各题

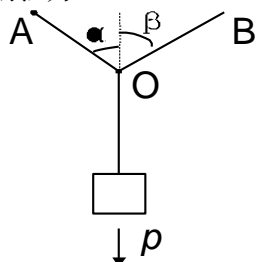
(本大题4分)

在半径为 R 的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高

十二、解答下列各题

(本大题5分)

重量为 P 的重物用绳索挂在 A, B 两个钉子上, 如图。设 $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \cos \beta = \frac{4}{5}$, 求 A, B 所受的拉力 f_1, f_2 。



十三、解答下列各题

(本大题6分)

一质点, 沿抛物线 $y = x(10 - x)$ 运动, 其横坐标随着时间 t 的变化规律为 $x = t\sqrt{t}$ (t 的单位是秒, x 的单位是米), 求该质点的纵坐标在点 $M(8, 6)$ 处的变化速率。

十四、解答下列各题

(本大题7分)

设曲线 $x = \sqrt{y}, x = \sqrt{2 - y^2}$ 及 $y = 0$, 围成一平面图形(1)求这个平面图形的面积 (2)求此平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积

、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中)

(本大题分5小题, 每小题2分, 共10分)

1、C

2、答: B

3、C

4、(B)

5、C

10分

二、填空题 (将正确答案填在横线上)

(本大题分5小题, 每小题3分, 共15分)

$$\frac{(1 - \frac{1}{x^2}) \sec^2(x + \frac{1}{x})}{2(1 + \tan(x + \frac{1}{x}))}$$

1、

10分

2、 $x_0 = 0$

5分

$x_1 = -\frac{1}{5}$

10分

$$3、\frac{5}{4}$$

$$4、-1$$

$$5、\begin{cases} -\frac{b^2}{2}, & b < 0 \\ 0, & b = 0 \\ \frac{b^2}{2}, & b > 0 \end{cases}$$

10 分

三、解答下列各题

(本 大 题 4 分)

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \{-4, 12, 2\}$$

平面法向量

$$\vec{n} = -2\vec{c}$$

\vec{n} 与 \vec{c} 平行

从而平面与 \vec{c} 垂直。

4 分

8 分

10 分

四、解答下列各题

(本 大 题 8 分)

当 $p \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{1-p} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5 分

当 $p = 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = +\infty$$

7 分

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ 当 } p < 1 \text{ 时收敛, 当 } p \geq 1 \text{ 时发散}$$

10 分

五、解答下列各题

(本 大 题 11 分)

解:〈法一〉

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{x^{n+1}} d\sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+2}} dx \end{aligned}$$

3 分

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{1+x^2}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}} dx \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{1}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}} dx + (n+1) \int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1)I_{n+2} + (n+1)I_n \\
\text{故 } I_{n+2} &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{(n+1)x^{n+1}} - \frac{n}{n+1}I_n
\end{aligned}$$

7 分

$$I_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right| + c$$

$$\therefore I_n = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{2-n}{n-1}I_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad I_0 = \ln|\sqrt{1+x^2}+x|+c$$

$$\langle \text{法二} \rangle \text{ 令 } x = \tan t \quad dx = \sec^2 t dt$$

10 分

$$\therefore I_n = \int \frac{\sec^2 t dt}{\tan^n t \sec t} = \int \frac{\sec t}{\tan^n t} dt$$

3 分

$$= \int \frac{d \sec t}{\tan^{n+1} t}$$

$$= \frac{\sec t}{\tan^{n+1} t} + \int (n+1) \frac{\sec^3 t}{\tan^{n+2} t} dt$$

$$= \frac{\sec t}{\tan^{n+1} t} + \int (n+1) \frac{\sec^3 t}{\tan^{n+2} t} dt + (n+1) \int \frac{\sec t}{\tan^n t} dt$$

5 分

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1)(I_{n+2} + I_n)$$

$$\therefore I_{n+2} = -\frac{n}{n+1}I_n - \frac{\sqrt{x^2+1}}{(n+1)x^{n+1}}$$

$$\therefore I_n = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{2-n}{n-1}I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

7 分

$$I_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right| + c$$

$$I_0 = \ln|\sqrt{1+x^2}+x|+c.$$

10 分

六、解答下列各题

(本 大 题 4 分)

π 的法向量为 $\vec{n} = \{1,1,1\}$

$$\vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{2, -1, 0\}$$

l_1 的方向向量为

3 分

所求直线方向向量为

$$\vec{S} = \vec{n} \times \vec{S}_1 = \{1, 2, -3\}$$

7 分

从而所求直线方程为

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

10 分

七、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos^2 2x}{x \tan x (\sqrt{1 + x \sin x} + \cos 2x)}$$

3 分

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{x \tan x} + \frac{\sin^2 2x}{x \tan x} \right)$$

7 分

$$= \frac{1}{2} (1 + 4) = \frac{5}{2}$$

10 分

八、解答下列各题

(本 大 题 7 分)

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

$$= x \ln^n x \Big|_1^e - n \int_1^e (\ln x)^{n-1} dx$$

$$= e - n I_{n-1}$$

4 分

$$\text{于是 } I_n = e - ne + n(n-1)e - \Lambda + (-1)^n n! \int_1^e dx$$

$$= e - ne + n(n-1)e - \Lambda + (-1)^{n-1} n(n-1) \Lambda 2e + (-1)^n n!(e-1)$$

7 分

$$\text{所以 } \int_1^e (\ln x)^3 dx = e - 3e + 6e - 6(e-1)$$

$$= 6 - 2e$$

10 分

九、解答下列各题

(本 大 题 8 分)

证明: 反证设 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 即 $\exists M > 0$ 则 $\forall x \in (a, b)$

$$\text{有 } |f'(x)| \leq M$$

2 分

取 $x_0 \in (a, b)$ 则对 $\forall x \in (a, b), x \neq x_0$ 在以 x_0 与 x 为端点的区间上 $f(x)$

满足拉格朗日中值定理的条件, 则至少存在 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 使

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

5 分

$$\text{即 } |f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)|(b-a)$$

$$= |f(x_0)| + M(b-a) \text{ 记为 } K$$

8 分

即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界与题意矛盾,故假设不正确,即 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无界.

10 分

十、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

$$\text{由 } \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$

使当 $|u - u_0| < \eta$ 时, 恒有 $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$

4 分

又 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 取 $\varepsilon_1 = \eta$, 存在 $\delta > 0$

使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\varphi(x) - u_0| < \eta$

8 分

故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有

$|f[\varphi(x)] - f(u_0)| < \varepsilon$ 成立

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0)$

10 分

十一、解答下列各题

(本 大 题 4 分)

设内接圆柱体的高为 h , 则圆柱体的底面半径 $r = \sqrt{R^2 - (\frac{h}{2})^2}$

其体积为 $V = \pi h(R^2 - \frac{h^2}{4}) \quad 0 < h < 2R$

4 分

$$V' = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2)$$

唯一驻点 $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

$$V'' = -\frac{3}{2}\pi h < 0$$

8 分

故 $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时, 圆柱体体积最大

10 分

十二、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

按点 O 受力平衡, 应有

$$\begin{cases} f_1 \cos \alpha + f_2 \cos \beta = p \\ f_1 \sin \alpha - f_2 \sin \beta = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{12}{13}f_1 + \frac{4}{5}f_2 = p \\ \frac{5}{13}f_1 - \frac{3}{5}f_2 = 0 \end{cases} \quad (4\text{分})$$

(8分)

$$\text{解得 } f_1 = \frac{39}{56}p, \quad f_2 = \frac{25}{56}p$$

(10 分)

十三、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

当 $x=8$ 时, $t=4$

2 分

$$\left. \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \right|_{t=4} = 3 \text{ (米 / 秒)}$$

4 分

$$\left. \frac{dy}{dt} = (10 - 2x) \cdot \frac{dx}{dt} \right|_{x=8} = -18 \text{ (米 / 秒)}$$

$$x(t) = 3$$

答：质点的纵坐标在 $M(8, 16)$ 处的变化率为 -18 (米 / 秒)

10 分

十四、解答下列各题 (本大题 7 分)

解: (1) $x = \sqrt{y}$ $x = \sqrt{2 - y^2}$ 交点 $(1, 1)$.

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{x}{2} \sqrt{2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

3 分

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6},$$

5 分

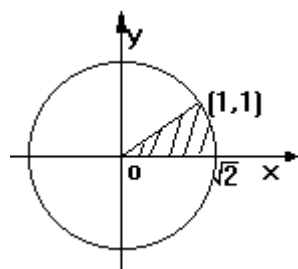
$$(2) V_x = \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx$$

8 分

$$= \frac{\pi}{5} + 2(\sqrt{2} - 1)\pi - \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{22}{15} \right) \pi.$$

10 分



一、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中) (本大题分 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1、

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \cos x)^{2 \sec x} = (\quad)$$

A. e^{-2} B. e^2 C. 4 D. $\frac{1}{4}$

答 ()

2、

设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导 $g'(x) \neq 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

则(I) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 与(II) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 关系是:

(A) (I)是(II)的充分但非必要条件

(B) (I)是(II)的必要但非充分条件

(C) (I)是(II)的充要条件

(D) (I)不是(II)的充分条件, 也不是必要条件

答 ()

3、

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $F(x) = \int_a^x f(t)dt (a \leq x \leq b)$, 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的

(A). 原函数一般表示式

(B). 一个原函数

(C). 在 $[a, b]$ 上的积分与一个常数之差

(D). 在 $[a, b]$ 上的定积分

答 ()

4、

若已知 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f''(t)dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小, 则 $f''(0) =$

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$

(C) -1 (D) $-\frac{1}{2}$

答 ()

二、填空题(将正确答案填在横线上)

(本大题分 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1、 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的铅直渐近线是_____

2、 $\int \tan^2 x dx =$ _____.

3

设 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续周期函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, a+T] (a \neq 0)$ 上的定积分与 $f(x)$ 在 $[0, T]$ 上的定积分的大小关系是_____

4、直线 $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+7}{5}$ 与平面 $3x+y-9z+17=0$ 的交点为_____。

三、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 12 分)

1、(本小题 6 分)

写出 $f(x) = \ln(1-x) (|x| < 1)$ 带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林展开式

2、(本小题 6 分)

指出锥面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = z^2$ 被平行于 zox 平面的平面所截得的曲线的名称。

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题, 总计 24 分)

1、(本小题 1 分)

求 $\int \sqrt{x} dx$.

2、(本小题 2 分)

计算 $\int_0^4 (x + \sqrt{x}) dx$

3、(本小题 5 分)

求 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

4、(本小题 5 分)

求 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

5、(本小题 11 分)

设 $y(x) = (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2}x}$, $(\frac{1}{2} < x < 1)$ 求 dy .

五、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 14 分)

1、(本小题 7 分)

试证: $F(t) = \int_0^\pi \ln(t^2 + 2t \cos x + 1) dx$ 为偶函数.

2、(本小题 7 分)

试证: 对角线向量是 $\vec{A} = \{3, -4, -1\}$, $\vec{B} = \{2, 3, -6\}$ 的平行四边形是菱形, 并计算其边长.

六、解答下列各题

(本大题共 3 小题, 总计 20 分)

1、(本小题 6 分)

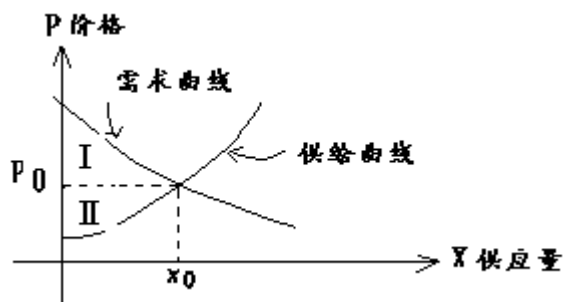
在抛物线 $y = x^2$ 找出到直线 $3xk - 4y = 2$ 的距离为最短的点

2、(本小题 6 分)

设曲线的方程为 $y = f(x)$. 已知在曲线的任意点 (x, y) 处满足 $y'' = 6x$, 且在曲线上的 $(0, -2)$ 点处的曲线的切线的方程为 $2x - 3y = 6$, 求此曲线的方程.

3、(本小题 8 分)

经济学上, 均衡价格 p_0 定义为供给曲线与需求曲线相交时的价格, 消费者剩余定义为需求曲线与直线 $p = p_0$ 间的面积(右图区域 I), 生产者剩余定义为供给曲线与直线 $p = p_0$ 间的面积(右图区域 II). 已知需求曲线方程 $p(x) = 1000 - 0.4x^2$, 供给曲线方程为 $p(x) = 42x$. 求均衡点及消费者剩余和生产者剩余.



七、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 6 分)

1、(本小题 1 分)

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续,

试判定 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 处的连续性.

2、(本小题 5 分)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 试判定 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 是否为无穷大?

一、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中)

(本大题分 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1、 D 10 分

2、 答 (B) 10 分

3、 B 10 分

4、 B 10 分

二、填空题 (将正确答案填在横线上)

(本大题分 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1、 $x = 0$

2、 $= \tan x - x + c.$

3、 $=$ 10 分

4、 (2,4,3)

三、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 12 分)

1、(本小题 6 分)

$$f(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \Lambda - \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad 7 \text{ 分}$$

$$R_n(x) = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} x^{n+1}, \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间} \quad 10 \text{ 分}$$

2、(本小题 6 分)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - z^2 = -\frac{y_0^2}{16} \\ y = y_0 \end{cases}$$

用 $y = y_0$ 所截得的曲线为 4 分

故 $y_0 = 0$ 时为一对相交直线

$y_0 \neq 0$ 时为双曲线 10 分

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题, 总计 24 分)

1、(本小题 1 分)

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c. \quad 10 \text{ 分}$$

2、(本小题 2 分)

$$\text{原式} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 \quad 7 \text{ 分}$$

$$= \frac{40}{3} \quad 10 \text{ 分}$$

3、(本小题 5 分)

$$\begin{aligned} & \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx \\ &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x) \quad 3 \text{ 分} \\ &= \int \sqrt{1+\ln x} d(1+\ln x) - \int \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} \quad 7 \text{ 分} \\ &= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\ln x} + c. \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

4、(本小题 5 分)

$$\begin{aligned} & \text{令 } \sqrt{x} = t \\ & \text{原式} = \int_1^2 \frac{2t}{t^2(1+t)} dt \quad 4 \text{ 分} \\ &= 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \quad 6 \text{ 分} \\ &= 2 [\ln t - \ln(t+1)]_1^2 \quad 8 \text{ 分} \\ &= 2 \ln \frac{4}{3} \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

5、(本小题 11 分)

$$\begin{aligned} & dy = y'(x) dx \quad 2 \text{ 分} \\ &= (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2} x} \left[\frac{\pi}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) - \frac{1}{2-x} \tan \frac{\pi x}{2} \right] dx \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

五、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 14 分)

1、(本小题 7 分)

$$\begin{aligned} & F(-t) = \int_0^\pi \ln(t^2 - 2t \cos x + 1) dx \quad 2 \text{ 分} \\ & \text{令 } x = \pi - u \\ & F(-t) = - \int_\pi^0 \ln(t^2 + 2t \cos u + 1) du \quad 6 \text{ 分} \\ &= \int_0^\pi \ln(t^2 + 2t \cos x + 1) dx \quad 8 \text{ 分} \\ &= F(t) \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

2、(本小题 7 分)

因为 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \times 2 + (-4) \times 3 + (-1) \times (-6) = 0$ ，故 $\vec{A} \perp \vec{B}$
因此这个平行四边形的对角线是垂直的，于是它是菱形。 (6 分)

$$\begin{aligned} & \text{边长} = \sqrt{(0.5 \times |\vec{A}|)^2 + (0.5 \times |\vec{B}|)^2} \\ &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} [3^2 + (-4)^2 + (-1)^2]^{1/2} \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} [2^2 + 3^2 + (-6)^2]^{1/2} \right\}^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

(10 分)

六、解答下列各题

(本大题共 3 小题, 总计 20 分)

1、(本小题 6 分)

设抛物线上任点 (x, x^2) , 到直线的距离为

$$d = \frac{|3x - 4x^2 - 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}(4x^2 - 3x + 2) \quad 4 \text{ 分}$$

$$d' = \frac{1}{5}(8x - 3)$$

$$\text{唯一驻点 } x = \frac{3}{8}$$

$$d'' = \frac{8}{5} > 0$$

$$\text{故当 } x = \frac{3}{8} \text{ 时, } d \text{ 最小} \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{即点 } \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{64}\right) \text{ 到直线 } 3x - 4y - 2 = 0 \text{ 的距离最短} \quad 10 \text{ 分}$$

(注如用切线平行于已知直线解也可以)

2、(本小题 6 分)

$$\ominus y' = \int y'' dx = 3x^2 + c \quad (1) \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{又由 } 2x - 3y = 6 \text{ 得 } y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\therefore y'|_{(0,-2)} = \frac{2}{3} \quad \text{代入(1)得}$$

$$y' = 3x^2 + \frac{2}{3} \quad 5 \text{ 分}$$

$$\therefore y = \int (3x^2 + \frac{2}{3}) dx = x^3 + \frac{2}{3}x + c$$

$$\text{再将 } (0, -2) \text{ 代入得 } c = -2, \therefore y = x^3 + \frac{2}{3}x - 2. \quad 10 \text{ 分}$$

3、(本小题 8 分)

$$\begin{cases} p = 1000 - 0.4x^2 \\ p = 42x, \end{cases}$$

解出 $x = 20$.

$$\text{均衡点 } p = 840. \quad 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{消费者剩余} &= \int_0^{20} [(1000 - 0.4x^2) - 840] dx \\ &= 2133.33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{生产者剩余} &= \int_0^{20} [840 - 42x] dx \\ &= 8400 \end{aligned} \quad \begin{matrix} 6 \text{ 分} \\ 10 \text{ 分} \end{matrix}$$

七、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 6 分)

1、(本小题 1 分)

$F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 处必不连续

4 分

若 $F(x)$ 在 x_0 处连续, 则

$g(x) = F(x) - f(x)$ 在 x_0 处也连续, 矛盾!

10 分

2、(本小题 5 分)

答: 不一定.

若 $A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$

4 分

但若 $A = 0$ 则等式可能不成立

6 分

例如 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

但 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)^2 = 0 \neq \infty$

10 分

1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{a})^{\frac{b}{x}}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) 的值为

(A) 1. (B) $\ln \frac{b}{a}$ (C) $e^{\frac{b}{a}}$. (D) $\frac{be}{a}$

答 ()

2、

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}} =$

A. e^3 B. 8 C. 1 D. ∞

答 ()

3、

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导记 (I) $f(a) = f(b)$

(II) 在 (a, b) 内 $f'(x) \equiv 0$ 则:

(A) (I) 是 (II) 的充分但非必要条件

(B) (I) 是 (II) 的必要, 但非充分条件

(C) (I) 是 (II) 的充要条件

(D) (I) 与 (II) 既非充分也非必要条件

答 ()

4、

若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y = f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点则()

- (A) $(x_0, f(x_0))$ 必为曲线的拐点
(B) $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点
(C) x_0 为 $f(x)$ 的极值点
(D) x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点

答()

5、

一长为 L cm的杆 OA 绕 O 点在水平面上作圆周运动.杆的线密度 $\rho = \frac{1}{r}$,

r 为杆上一点到 O 点的距离,角速度为 ω ,则总动能 $E =$

- (A) $\frac{1}{2}\omega^2 L^2$ (B) $\frac{1}{3}\omega^2 L^2$ (C) $\frac{1}{4}\omega^2 L^2$ (D) $\frac{1}{5}\omega^2 L^2$

答()

二、填空题(将正确答案填在横线上)

(本大题分3小题,每小题3分,共9分)

1、 $\int (3-x^2)^3 dx =$ _____.

2、设 $f(x) = \int_0^x t(t-1)dt$, 则 $f(x)$ 的单调减少的区间是_____

3、对于 β 的值, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\beta} - 1)$

(1) 当_____时, 级数收敛

(2) 当_____时, 级数发散

三、解答下列各题

(本大题共3小题, 总计13分)

1、(本小题4分)

验证 $f(x) = x^2$ 在 $[2,4]$ 上拉格朗日中值定理的正确性

2、(本小题4分)

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{10^n}$$

是否收敛, 是否绝对收敛?

3、(本小题5分)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = |x|$ 。又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的

以 2π 为周期的 Fourier 级数之和函数。试写出 $S(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 内的表达式。

四、解答下列各题

(本大题共5小题, 总计23分)

1、(本小题2分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$

2、(本小题2分)

求 $\int (e^x + 1)^3 e^x dx$.

3、(本小题4分)

求 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

4、(本小题 7 分)

求 $\int |x| dx$.

5、(本小题 8 分)

试将函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $x_0 \neq 0$ 处展开成泰勒级数。

五、解答下列各题

(本大题 5 分)

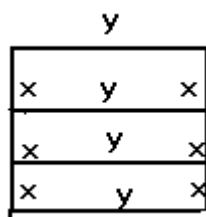
如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -2$ 处条件收敛, 那么该级数的收敛半径是多少? 试证之.

六、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 16 分)

1、(本小题 7 分)

如图要围成三间长都为 y , 宽都为 x 的长方形屋围, 其墙的总长度为 u , 问 x, y 各等于多少时, 所围成的总面积最大?(墙的厚度不计)



2、(本小题 9 分)

求由曲线 $y = e^{2x}$, x 轴及该曲线过原点的切线所围成的平面图形的面积

七、解答下列各题

(本大题 6 分)

设 $f(x) = \begin{cases} chx, & x \geq 0, \\ \ln(1-x), & x < 0 \end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 的可导性并在可导处求出 $f'(x)$

八、解答下列各题

(本大题 6 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (a^t - b^t) dt}{\int_0^{2x} \ln(1+t) dt}, (a > 0, b > 0).$

九、解答下列各题

(本大题 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数 ($a > 0$), 又设 $x = r \cos \theta, f(x) = r \sin \theta$.

试证明 $2 \int_a^b f(x) dx + \int_a^b r^2(\theta) d\theta = bf(b) - af(a)$,

其中 $\alpha = \arctan \frac{f(a)}{a}, \beta = \arctan \frac{f(b)}{b}$.

一、单项选择题 (在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题末的括号中)

(本大题分 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

1、答:C

2、B

10 分

3、答 (B)

10 分

4、(A)

10 分

5、

C

$$\begin{aligned}\text{因 } dE &= \frac{1}{2}(dm)v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} dr \cdot (\omega r)^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 r dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \int_0^L \frac{1}{2} \omega^2 r dr \\ &= \frac{1}{4} \omega^2 L^2\end{aligned}$$

二、填空题 (将正确答案填在横线上)

(本大题分 3 小题, 每小题 3 分, 共 9 分)

1、 $= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + c.$

10 分

2、(0, 1) (答[0, 1]不扣分)

10 分

3、 $\beta < -1$ 时收敛

$\beta \geq -1$ 时发散

三、解答下列各题

(本大题共 3 小题, 总计 13 分)

1、(本小题 4 分)

证明: $f(x) = x^2$ 在 $[2, 3]$ 上连续, 在 $(2, 3)$ 可导
即 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件

4 分

又 $f'(x) = 2x$

$$\text{令 } f'(\xi) = 2\xi = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = 6$$

得到 $(2, 3)$ 内有解 $\xi = 3$

8 分

$$\text{即存在 } \xi = 3, \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$$

这就验证了拉格朗日中值定理对函数 $f(x) = x^2$ 在 $[2, 3]$ 上的正确性

10 分

2、(本小题 4 分)

记
$$u_n = \left| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{10^n} \right| = \frac{n^{10}}{10^n}$$

$$\text{由于 } \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{10} \quad (n \rightarrow \infty)$$

.....6 分

故原级数绝对收敛，从而收敛

.....10 分

3、(本小题 5 分)

对 $f(x) = |x|$, $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}$ 作周期为 2π 的延拓, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 内的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛的充分条件。

(5 分)

故

$$S(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \pi, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ -x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

分)

注：只要写出 $S(x)$ 的表达式即可得 10 分。

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题，总计 23 分)

1、(本小题 2 分)

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{6x^2 - 18x + 12}$$

5 分

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x}{12x - 18}$$

8 分

$$= 2$$

10 分

2、(本小题 2 分)

$$\int (e^x + 1)^3 e^x dx$$

$$= \int (e^x + 1)^3 d(e^x + 1)$$

5 分

$$= \frac{1}{4} (e^x + 1)^4 + c.$$

10 分

3、(本小题 4 分)

$$\text{令 } x = \sec t$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt$$

4 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1) dt \quad 6 \text{ 分}$$

$$= (\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \quad 8 \text{ 分}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad 10 \text{ 分}$$

4、(本小题 7 分)

$$\int |x| dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1 & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + c_2 & x < 0. \end{cases} \quad 5 \text{ 分}$$

由原函数的连续性,得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{x^2}{2} + c_2 \right)$$

$$\therefore c_1 = c_2 \quad \text{令 } c_1 = c_2 = c$$

$$\therefore \int |x| dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + c, & x < 0 \end{cases} = \frac{|x| \cdot x}{2} + c. \quad 10 \text{ 分}$$

5、(本小题 8 分)

因为

$$\frac{1}{x^2} = - \left(\frac{1}{x} \right)'$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}}$$

.....3 分

$$\text{而 } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad x \in (-1, 1) \quad \text{.....5 分}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^n}{x_0^n} \quad x \in (0, 2x_0)$$

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(x - x_0)^{n-1}}{x_0^{n+1}} \quad x \in (0, 2x_0) \quad \text{.....10 分}$$

分

五、解答下列各题

(本大题 5 分)

由题意,知:

当 $|x| < 2$ 时, 级数绝对收敛;4 分

当 $|x| > 2$ 时, 级数不可能收敛.8 分

故收敛半径是 2.10 分

六、解答下列各题

(本大题共 2 小题, 总计 16 分)

1、(本小题 7 分)

如图 $4y + 6x = a$ $y = \frac{a}{4} - \frac{3}{2}x$

总面积为 $A = 3xy = 3x(\frac{a}{4} - \frac{3}{2}x)$ 3 分

$\frac{dA}{dx} = \frac{3a}{4} - 9x$ 当 $x = \frac{a}{12}$ 时, $\frac{dA}{dx} = 0$ $\frac{d^2A}{dx^2} = -9 < 0$ 6 分

故当 $x = \frac{a}{12}$ 时, A 取得唯一极大值也是最大值 8 分

此时 $y = \frac{a}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{a}{12} = \frac{a}{8}$

故当 $x = \frac{a}{12}$, $y = \frac{a}{8}$ 时, 所求总面积最大 10 分

2、(本小题 9 分)

解: $y' = 2e^{2x}$. 设切点 (t_0, e^{2t_0}) ,

\therefore 切线 $y = 2e^{2t_0}x$,

$\begin{cases} y = e^{2t_0}, \\ y = 2e^{2t_0}t_0 \end{cases} \quad t_0 = \frac{1}{2}$ 3 分

切线 $y = 2ex$, 切点 $(\frac{1}{2}, e)$ 6 分

$\therefore s = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e$ 8 分

$= \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-\infty}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} e = \frac{1}{4} e.$ 10 分

七、解答下列各题

(本大题 6 分)

$f(0) = 1, f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \ln(1-x) = 0$

$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \cosh x = 1$ 3 分

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 故不可导 5 分

$f'(x) = \begin{cases} \sinh x, & x > 0, \\ \frac{-1}{1-x}, & x < 0, \end{cases}$ 10 分

八、解答下列各题

(本大题 6 分)

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{2 \ln(1+2x)}$ 5 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{\frac{4}{1+2x}}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{a}{b}$$

10 分

九、解答下列各题

(本大题 12 分)

因为 $r^2 = x^2 + f^2(x)$, $\theta = \arctan \frac{f(x)}{x}$, $d\theta = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2 + f^2(x)} dx$

4 分

于是 $\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta = \int_a^b [xf'(x) - f(x)] dx$

6 分

$$= \int_a^b xf'(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

$$= xf(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

$$= bf(b) - af(a) - 2 \int_a^b f(x) dx$$

8 分

所以 $2 \int_a^b f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta = bf(b) - af(a)$

10 分

一、 一、 填空

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

1. 1. 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点。 当 $a=$ _____ 时,

解:

$$f(0) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x+2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

故 $a=1$ 时 $x=0$ 是连续点 $a \neq 1$ 时 $x=0$ 是间断点。

2. 设方程 $x - y + \arctan y = 0$ 确定了 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

解: $1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0 \quad y' = \frac{1+y^2}{y^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos 2x + b \cos 4x}{x^4} = A$, 则 $a=$ _____, $b=$ _____, $A=$ _____。

解: 要使极限存在, 分子与分母应是极限过程中的同阶无穷小或高阶无穷小, 于是有 $1+a+b=0$, 用一次罗必达法则分子仍为无穷小, 有 $a+4b=0$

解出: $a=-4/3 \quad b=1/3$ 代入求得极限 $A=8/3$

4. 函数 $y = x2^x$ 的极小值点为 _____。

解: $y' = 2^x(1 + x \ln 2)$ 驻点 $x = -\frac{1}{\ln 2}$, $y'' = 2^x(2 \ln 2 + x(\ln 2)^2)$ 在驻点处 $y'' > 0$, 故驻点为极小值点。

5. 设 $f(x) = x \ln x$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = 2$, 则 $f(x_0) =$ _____。

解: $f'(x) = \ln x + 1$, 由 $f'(x_0) = 2$ 知 $x_0 = e$, 于是有 $f(x_0) = e$ 。

6. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = -1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得 _____ (填极大值或极小值)。

解:

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = -1$, 由极限的保号性有 $\frac{f(x) - f(0)}{x^2} < 0$, 有 $f(x) - f(0) < 0$

即在 $x=0$ 的某邻域内有 $f(x) < f(0)$, 由极值定义知 $x=0$ 是极大值点。

二、

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 是否连续? 是否可导? 并求 $f(x)$ 的导函数。

解: 当 $x > 0$ 及 $x < 0$ 时, $f(x)$ 为初等函数, 连续。

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) \therefore f(x) \text{ 在 } (-\infty, \infty) \text{ 连续。}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x^{3/2}\sqrt{1+x}}, \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)} \rightarrow \infty$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 不可导, } f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x^{3/2}\sqrt{1+x}} & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

三、 三、 解下列各题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{2x} - 1}{x^2}$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{2x} \left(2 \ln(1+2x) + \frac{4x}{1+2x} \right)}{2x} = 2 + 2 = 4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}} - 2);$$

解: 原式 =

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}} - 2}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3}{2} \cdot \frac{3^{\frac{1}{x}} - 3^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln 3 (3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}) = (\ln 3)^2$$

3. 设曲线方程为 $\begin{cases} x = t + 2 + \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$, 求此曲线在 $x=2$ 的点处的切线方程, 及

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=2}.$$

$$x=2 \text{ 时 } y=1, t=0 \quad y' = \frac{1-\sin t}{1+\cos t} \quad y'|_{t=0} = \frac{1}{2} \quad \text{切线方程: } y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$\text{解: } y'' = \frac{\sin t - \cos t - 1}{(1+\cos t)^3} \quad y''|_{x=2} = \frac{\sin 0 - \cos 0 - 1}{(1+\cos 0)^3} = -\frac{1}{4}$$

四、 四、 试确定 a, b, c 的值, 使 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 在点 $(1, -1)$ 处有拐点, 且在 $x=0$ 处有极大值为 1, 并求此函数的极小值。

解:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b, y'(0) = 0 \Rightarrow b = 0, y(0) = 1, c = 1.$$

$$y'' = 6x + 2a, y''(1) = 6 + 2a = 0, a = -3.$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 1, y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ 时, 驻点: } x_1 = 0, x_2 = 2, y''(0) = 6 > 0. \therefore \text{极小值}(2) = -3.$$

五、 五、 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求有最大面积的直角三角形。

解: 设所给直角边为 x , 斜边与其之和为 L , 则

$$s = \frac{1}{2} x \sqrt{(L-x)^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{L^2 - 2Lx}$$

$$s' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{L^2 - 2Lx} - \frac{x}{\sqrt{L^2 - 2Lx}} \right] = \frac{L}{2} \frac{L-3x}{\sqrt{L^2 - 2Lx}}$$

$$\text{令 } s' = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{3} \text{ 这是唯一驻点, 且最值存在, 故}$$

$$s\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{L^2}{6\sqrt{3}} \text{ 为最大面积, 此时边与斜边夹角为 } \frac{\pi}{3}$$

六、 六、 证明不等式: $\alpha^\beta > \beta^\alpha, (e < \alpha < \beta).$

$$\text{证: 令 } f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ 则 } f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \quad (x > e)$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (a, +\infty) \text{ 上单调减, } f(\alpha) > f(\beta), \quad \text{即 } \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} > \frac{\ln(\beta)}{\beta}$$

$$\beta \ln(\alpha) > \alpha \ln(\beta) \Rightarrow \ln \alpha^\beta > \ln \beta^\alpha \Rightarrow \alpha^\beta > \beta^\alpha.$$

七、 七、 $y=f(x)$ 与 $y=\sin(x)$ 在原点相切, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}.$

$$\text{解: } f(0) = \sin(0) = 0, f'(0) = (\sin x)'_{x=0} = \cos 0 = 1,$$

\therefore 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 x 是等价无穷小,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2f(2/n)}{2/n}} = \sqrt{2}$$

八、 八、 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(1/2) = 1.$

证明: (1) 至少有一点 $\xi \in (1/2, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$

证: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 f 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 可导,

$$F(1/2) = f(1/2) - 1/2 > 0$$

$F(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 < 0$, \therefore 在 $(1/2, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$ 。

(2) 证:

$$\text{令 } G(x) = e^{-\lambda x} F(x), G(\xi) = 0, G(0) = 0$$

$$\exists \eta \in (0, \xi) \text{ 使得 } G'(\eta) = 0.$$

$$-\lambda e^{-\lambda \eta} F(\eta) + e^{-\lambda \eta} F'(\eta) = 0 \quad \text{得出 } F'(\eta) = \lambda F(\eta)$$

$$\text{即 } f'(\eta) - 1 = \lambda(f(\eta) - \eta)$$

$$\text{于是 } f'(\eta) - \lambda(f(\eta) - \eta) = 1$$

一、一、选择题 (每题 4 分, 共 16 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} =$ (D)。

A、 e ; B、 e^{-1} ; C、 $e+1$; D、 $e^{-1}+1$

2. 设 $f(x) = x \ln x$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = 2$, 则 $f(x_0) =$ (B)。

A、0; B、 e ; C、1; D、 e^2 。

3. 若 $\sin 2x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f(x) dx =$ (D)。

A、 $x \sin 2x + \cos 2x + C$; B、 $x \sin 2x - \cos 2x + C$;

C、 $x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$; D、 $x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$ 。

4. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 -2, 则 (B)。

A、 $a=-3, b=0$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点;

B、 $a=0, b=-3$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点;

C、 $a=-3, b=0$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点;

D、 $a=0, b=-3$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点。

二、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}$ 。

2. $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} + C$ 。

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{1+x^2} + \cos^3 x) dx = \frac{4}{3}$ 。

4. 设 $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ 为向量, k 为实数。若 $\|\alpha\|=1, \|\beta\|=1, \alpha \perp \beta$,

$$\gamma = 2\alpha + \beta, \delta = k\alpha + \beta, \gamma \perp \delta, \text{ 则 } k = -\frac{1}{2}。$$

三、计算下列各题 (每题 9 分, 共 45 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 。

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = 1$

2. 函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^x - e^y - xy = 0$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ 。
 $e^x - e^y - xy = 0 \Rightarrow e^x - e^y y' - y - xy' = 0$

解: $\Rightarrow e^x - e^y y'' - e^y y'^2 - y' - y' - xy'' = 0$

又 $x=0, y=0, y'=1$, 得 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = -2$ 。

3. 求定积分 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ 。

解

$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \stackrel{x=s}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1) dt = 1 - \frac{\pi}{4}$

4. 求过点 $(3, 1, 2)$ 且与平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程。

解: $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1)$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ 。

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 。

解: $x \leq 0$, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = 0$

$0 \leq x \leq \pi$, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x \sin t dt = \frac{1}{2} (1 - \cos x)$

$x > \pi$, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 0 dt = 1$

四、(7 分) 长为 l 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各为多长时, 正方形的面积与圆的面积之和最小?

解: 设正方形的边长为 x , 则正方形的面积与圆的面积之和为

$S(x) = x^2 + \frac{(l-4x)^2}{4\pi}$ 。

$S'(x) = 2x - 2 \frac{l-4x}{\pi} = 0$, $x = \frac{l}{4+\pi}$ 。所以两段铁丝分别为 $\frac{4l}{4+\pi}$, $l - \frac{4l}{4+\pi}$ 时, 正方形的面积与圆的面积之和最小。

五、解答下列各题 (每小题 4 分, 共 12 分)

1. 设曲线 $y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$), x 轴以及 y 轴所围区域被曲线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 分成

面积相等的两部分，求 a 。

解：由 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} (1-x^2-ax^2)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} ax^2dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}^1 (1-x^2)dx$, $a=3$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0 < f(x) < 1$ 。判断方程 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内有几个实根？并证明你的结论。

解： $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，
 $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t)dt < 1$, 所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点。又
 $F'(x) = f(x) > 0$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递增的，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$
 内有唯一零点，即 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$ ，求证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

解： $F(x) = xf(x)$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导。由 $f(1) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$ ，存在 $c \in [0, \frac{1}{2}]$ ，
 使得 $f(1) - 2cf(c) = 0$ ，即 $f(1) = 2cf(c)$ 。由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (c,1) \subset (0,1)$ ，使
 得 $F'(\xi) = 0$ ，即 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

高等数学第一学期半期试题解答 (05)

一. (共 20 分) 试解下列各题：

1. 设 $y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$, ($x > 1$) 求 dy 。

解： $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2$ $dy = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) dx$

2. 设方程 $x - y + \arctan y = 0$ 确定了 $y = y(x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解： $1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0$ $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x-1} = A$ 。则 $a = \underline{4}$, $A = \underline{-6}$

4. 函数 $y = x2^x$ 的极小值点 $-\frac{1}{\ln 2}$ 。

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ($a > 0$)

$$\text{解: } f(0) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x+2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

故 $a=1$ 时 $x=0$ 是连续点, $a \neq 1$ 时 $x=0$ 是间断点。

二. 二. (10 分) 若 $y=f(x)$ 是奇函数且 $x=0$ 在可导, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 是什么类型的间断点? 说明理由。

解: 由 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $x=0$ 可导, 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, $f(0) = -f(0)$ 故 $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{ 存在, 故为第一类间断点(可去).}$$

三. 三. (共 20 分) 求下列极限

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}} - 2) \quad ; \quad \text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}} - 2}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3}{2} \cdot \frac{3^{\frac{1}{x}} - 3^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln 3 (3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}) = (\ln 3)^2$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{2x} - 1}{x^2} \quad ; \quad \text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{2x} \left(2 \ln(1+2x) + \frac{4x}{1+2x} \right)}{2x} = 2 + 2 = 4$$

$$3. \quad \text{设曲线方程为} \begin{cases} x = t + 2 + \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}, \text{求此曲线在 } x=2 \text{ 的点处的切线方程, 及 } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$\text{解: } x=2 \text{ 时 } y=1, t=0 \quad y' = \frac{1 - \sin t}{1 + \cos t} \quad y'|_{t=0} = \frac{1}{2} \quad \text{切线方程: } y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$y'' = \frac{\sin t - \cos t - 1}{(1 + \cos t)^3}$$

四. 四. (10 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x-1)^2$ 。

$$\text{证明: 当 } x > 1 \text{ 时, 令 } f(x) = \ln x \text{ 在 } [1, x] \text{ 上用拉氏中值定理有 } \ln x = \frac{1}{\xi}(x-1) > \frac{1}{x+1}(x-1)$$

$$\text{其中 } 1 < \xi < x \text{ 即 } \ln x > \frac{1}{x+1}(x-1) \text{ 同乘以 } (x^2 - 1) \text{ 有 } (x^2 - 1) \ln x > (x-1)^2$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, 令 } f(x) = \ln x \text{ 在 } [x, 1] \text{ 上用拉氏中值定理有 } -\ln x = \frac{1}{\xi}(1-x) > \frac{1}{x+1}(1-x)$$

$$\text{其中 } x < \xi < 1 \text{ 即 } \ln x < \frac{1}{x+1}(x-1) \text{ 同乘以 } (x^2 - 1) \text{ 有 } (x^2 - 1) \ln x > (x-1)^2$$

当 $x=1$ 时等式成立。

五. 五. (10 分) 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且底边与 x 轴平行的等腰三角形之面积的最大值。

解:

设底边方程为: $y = t \quad -b < t \leq 0$,

$$\text{三角形面积} A = (b-t) \cdot 2a \sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}} = \frac{2a}{b} \sqrt{(b-t)^2 (b^2 - t^2)}$$

设 $z = (b-t)^2 (b^2 - t^2)$ z 的最大值点也是 A 的最大值点。

$$z' = -2(b-t)(b^2 - t^2) - 2t(b-t)^2 = -2(b-t)^2 (b+2t)$$

令 $z' = 0$ 得 $t = b$ (舍去) $t = -\frac{b}{2} \quad z''\left(-\frac{b}{2}\right) = -b^2 < 0$ 即 $t = -\frac{b}{2}$ 为唯一极大值点,

亦即为所求面积之最大值点。最大值为 $A = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab$

六. 六. (10分) 证明: 方程 $x^n + x^{n-1} + \Lambda x^2 + x = 1$ 在 $(0, 1)$ 上必有

唯一的实根 $x_n (n > 2)$, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

证:

设 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \Lambda x^2 + x - 1$ 其在 $[0, 1]$ 上连续。

$f(0) = -1, f(1) = n - 1$ 由 $n > 2$ 知函数在端点异号。

由闭区间上连续函数零点定理知至少有一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f(\xi) = 0$ 。

又 $f' = nx^{n-1} + \Lambda + 2x + 1 > 0$ 知函数 $f(x)$ 单调增加, 故在 $(0, 1)$ 上有唯一实根。

$$\text{由 } x_n^n + x_n^{n-1} + \Lambda + x_n^2 + x_n = 1$$

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \Lambda + x_{n+1}^2 + x_{n+1} = 1$$

知 $\{x_n\}$ 是单调下降数列, 而 $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 因此 $0 < x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ 故由极限存在准则知其有极限, 设极

$$\text{由方程有 } \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1 \text{ 两边 } n \rightarrow \infty \text{ 取极限 } \frac{x_0}{1-x_0} = 1 \text{ 解出 } x_0 = \frac{1}{2}$$

七. 七. (10分) 确定常数 a, b , 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos 2x + b \cos 4x}{x^4}$ 存在,

并求出其值。

解: 要使极限存在, 分子与分母应是极限过程中的同阶无穷小或高阶无穷小, 于是有 $1 + a + b = 0$, 用一次罗必达法则分子仍为无穷小, 有 $a + 4b = 0$

解出: $a = -4/3 \quad b = 1/3$ 代入求得极限为 $8/3$

八. 八. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$,

证明: 对 $\forall \lambda \in R, \exists c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \lambda f(c)$ 。

证明: 构造函数 $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$ 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微 $F(a) = F(b)$

$= 0$ 由罗尔定理 $\forall \lambda \in R, \exists c \in (a, b)$, 使得 $F'(c) = 0$, 而 $F'(x) = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x)$

即有 $\forall \lambda \in R, \exists c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \lambda f(c)$ 证毕。