

# 第一章 概率论的基本概念

§ 1.1 随机试验

§ 1.2 样本空间、随机事件

§ 1.3 频率与概率

§ 1.4 等可能概型(古典概型)

§ 1.5 条件概率

§ 1.6 独立性

# 第一章 概率论的基本概念

引言：概率论是研究什么的？



确定现象

研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科

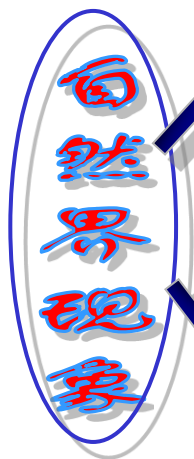
例：

向空中抛一物体必然落回地面；  
水加热到 $100^{\circ}\text{C}$ 必然沸腾；  
异性电荷相吸引；  
放射性元素发生蜕变；... ..

随机现象

在试验或观察前无法预知出现什么结果

例：抛一枚硬币，结果可能正(反)面朝上；  
向同一目标射击，各次弹着点都不相同；  
某地区的日平均气温；  
掷一颗骰子，可能出现的点数；... ..



经过长期实践人们发现：尽管随机现象出现的结果是随机的，无规律的，但当大量观察同类现象后，可以发现其确实存在某种规律性----随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科；或者说是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其规律的一门应用数学学科。





**实例** “用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况”。

**结果：“弹落点会各不相同”。**



**实例** “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”。

**结果有可能为:**



**“1”，“2”，“3”，  
“4”，“5”或“6”。**

**随机现象的特征**



**条件不能完全决定结果**



## § 1.1 随机试验

---

**1. 试验:** 在这里试验可指各种各样的科学试验, 也包括对事物特征的观察与检测等. 范围比较广泛.

**2. 随机试验:** 如果试验具有如下特点:

(1) **可重复性:** 在相同条件下可重复地进行;

(2) **可观察性:** 每次试验的结果不止一个, 但事先能明确试验的所有可能结果;

(3) **不确定性:** 进行一次试验之前, 不能确定哪一个结果会出现.

这种试验称为**随机试验**. 常用字母  $E$  表示.

**(注:后面所提到的试验都是指随机试验.)**

★我们是通过研究随机试验来研究随机现象的。

**例**  $E_1$ :抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

$E_2$ :将一枚硬币抛掷三次,观察正面H、反面T出现的情况.

$E_3$ :将一枚硬币抛掷三次,观察反面出现的次数.

$E_4$ :抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



$E_5$ :记录某城市120急救电话台(某固定)一昼夜内接到的呼叫次数.

$E_6$ :在一批灯泡中任意抽取一只,测试其寿命.



## § 1.2 样本空间、随机事件

### 一、样本空间

- 1. 样本空间：**随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合.  
称为 $E$ 的**样本空间**，记为 $S$  (或 $\Omega$ ).
- 2. 样本点：**样本空间的元素，即 $E$ 的每个可能结果，  
称为**样本点**.

**例** 写出 § 1.1节中所列的试验  $E_i$  的样本空间

**试验 $E_1$ ：**抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

$S_1=\{H, T\}$  (H表示出现正面, T表示出现反面)

**试验 $E_2$ ：**将一枚硬币抛掷三次,观察正面H、反面T出现的情况.

$S_2= \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

**试验E<sub>3</sub>**:将一枚硬币抛掷三次,观察反面出现的次数.

$$S_3=\{0,1,2,3\}$$

**试验E<sub>4</sub>**:抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$$



**试验E<sub>5</sub>**:记录电话台(某固定)一分钟内接到的呼叫次数.

$$S_5=\{0,1,2,\dots\}$$

**试验E<sub>6</sub>**:在一批灯泡中任意抽取一只,测试其寿命.

$$S_6=\{t \mid t \geq 0\} \quad (t \text{表示灯泡的寿命})$$



**[注]** 样本空间是相对于某个随机试验而言, 而其元素取决于试验的内容和目的.



## 二、随机事件

1. **随机事件**：试验 $E$ 的**样本空间 $S$ 的子集**. 简称**事件**.  
通常用字母 $A, B, C$ 表示.
2. **事件发生**：在每次试验中,当且仅当事件 $A$ 中的一个**样本点出现时**, 称这一**事件 $A$ 发生**.
3. **基本事件**：由一个样本点组成的单点集.
4. **必然事件**：**样本空间 $S$ 称为必然事件**. 在每次试验中它总是发生的.
5. **不可能事件**：**空集 $\emptyset$ 称为不可能事件**. 在每次试验中它都不发生.

**例1**  $E_2$ :抛硬币三次,观察正面H、反面T出现的情况.

事件 $A_1$ : “第一次出现的是T”, 即

$$A_1=\{THH, THT, TTH, TTT\}$$

事件 $A_2$ : “三次出现同一面”, 即

$$A_2=\{TTT, HHH\}$$

**例2** 试验E:“从4件产品中（2件正品，2件次品）任取两件，观察产品情况”。

事件  $A$ : “两件都是正品”

$B$ : “至少有一件次品”

# 三、事件间的关系与事件的运算

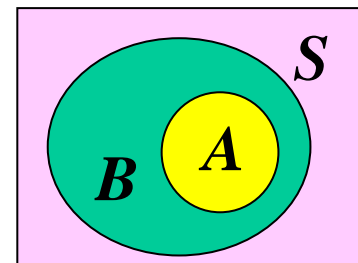
## (一) 事件间的关系

1. 事件的包含  $A \subset B$ : 称事件  $B$  包含事件  $A$ , 或  $A$  是  $B$  的子事件.

其含义是: 事件  $A$  发生必导致事件  $B$  发生.

显然, 对于任何事件  $A$  有  $\emptyset \subset A \subset S$ .

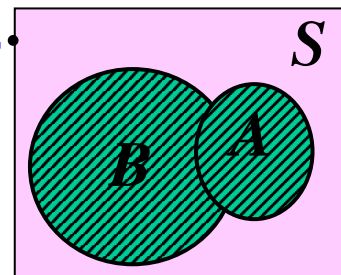
事件的相等  $A=B$ : 若  $A \subset B$  且  $B \subset A$ .



2. 和事件:  $A \cup B$  称为事件  $A$  与  $B$  的和事件. 其含义是: 当且仅当事件  $A, B$  中至少有一个发生时, 事件  $A \cup B$  发生.

类似地, (1)  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  ----- 事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的和事件;

(2)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  ----- 可列个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的和.



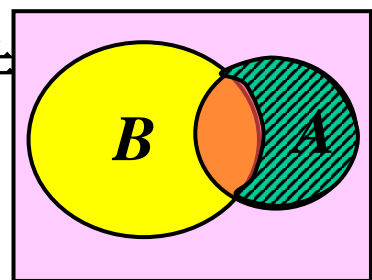
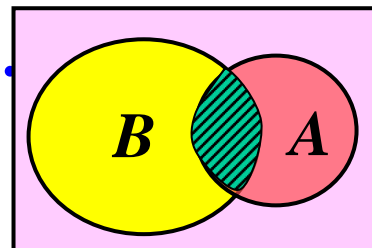
例如: 在掷骰子试验中, 记  $A$ : “点数为奇数”,  $B$ : “点数小于5”, 则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**3. 积事件：** $A \cap B$ 称为事件A与事件B的积事件. 或记作 $AB$ .

其含义是：当且仅当A, B同时发生时，事件 $AB$ 发生.

类似地, (1)  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  : 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 积事件;

(2)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  : 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 积事件



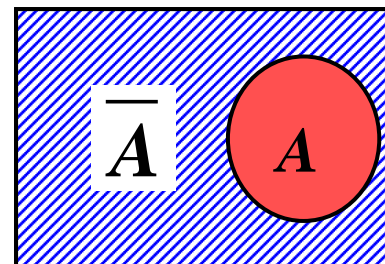
**4. 差事件：** $A - B$  称为事件A与事件B的差事件.

其含义是：当且仅当A发生、B不发生时，事件 $A - B$ 发生.

**5. 互不相容(互斥)的事件：**若 $A \cap B = \emptyset$ ，称事件A与B是互不相容事件，或互斥事件，指事件A与事件B不能同时发生.

**6. 对立事件(互逆事件)：**若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$ ，则称事件A与B为互逆事件. 又称A与B的互为对立事件.

A的对立事件记作 $\bar{A}$  .  $\bar{A} = S - A$



**[注]** (1) 事件之间的关系可用文氏图表示;

(2) 对于任意事件 $A$ , 显然

$$A\bar{A} = \Phi, A \cup \bar{A} = S,$$

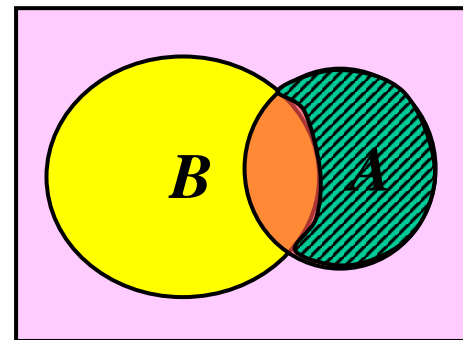
$$\bar{A} = S - A, \overline{\bar{A}} = A$$

(3) 基本事件都是互不相容的;

$A$ 与 $B-A$ 也是互不相容的.

(4)  $B - A = B\bar{A} = B - AB$

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$



## (二) 事件的运算法则

1. 交换律:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$  .

2. 结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C .$$

3. 分配律:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

4. 德. 摩根律 (对偶律) :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

5. 对必然事件的运算法则:  $A \cup S = S, A \cap S = A$

6. 对不可能事件的运算法则:  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$

**例3** 从大批产品中取产品检验,设事件 $A_k$ 表示“第 $k$ 次取到合格产品” ( $k=1,2,3$ ), 用 $A_k$  表示下列各事件:

- (1)  $A$ 表示“三次都取到合格产品”;
- (2)  $B$ 表示“三次中至少有一次取到合格产品”;
- (3)  $C$ 表示“三次中恰有两次取到合格产品”;
- (4)  $D$ 表示“三次中最多有一次取到合格产品”.

**解:** (1)  $A = A_1 A_2 A_3$

(2)  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  ( $B = \overline{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}}$ )

(3)  $C = \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3}$

(4)  $D = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$   
( $D = \overline{A_1} \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \overline{A_3} \cup \overline{A_2} \overline{A_3}$ )

## § 1.3 频率与概率

对于一个随机事件 $A$ ，在一次随机试验中，它是否会发生，事先不能确定。但我们会问，在一次试验中事件 $A$ 发生的可能性有多大？并希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小。为此，首先引入**频率**的概念，它是通过实验结果来说明事件发生的频繁程度，进而引出**度量事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率**。



# 一、频率

---

1. **定义**: 若在相同的条件进行  $n$  次试验, 其中随机事件  $A$  发生的次数为  $n_A$  ( $A$  发生的**频数**), 则称  $n_A/n$  为事件  $A$  发生的**频率**, 记作  $f_n(A)$ , 即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

## 2. 性质

(1)  $0 \leq f_n(A) \leq 1$

(2)  $f_n(S) = 1$

(3) 若  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是两两不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

由频率的定义可知，频率反映了一个随机事件在大量重复试验中发生的频繁程度.

例 “抛硬币” 试验，设A表示“抛掷一枚硬币，其结果出现正面”，将一枚硬币抛掷5次、50次、500次，各做4遍的结果如下：

实验序号	n=5		n=50		n=500	
	$n_A$	$f_n(A)$	$n_A$	$f_n(A)$	$n_A$	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512

大量实验证实：当试验次数 $n$ 逐渐增大时，事件A发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个确定的常数 $p$  ---频率的稳定性. 频率的稳定性的事实说明了刻画随机事件发生可能性大小的数——概率的客观存在性.

## 二、概率

1. 定义 (概率的公理化定义) 设 $E$  是随机试验, 其样本空间 $S$ . 对于 $E$ 的每一 事件 $A$  赋于一个实数, 记为 $P(A)$ , 称为事件 $A$ 的概率, 如果集合函数 $P(\bullet)$ 满足下列条件:

(1) **非负性**: 对于每一个事件 $A$ , 有  $P(A) \geq 0$  ;

(2) **完备性**: 对于必然事件 $S$  , 有  $P(S)=1$ ;

(3) **可列可加性**: 设 $A_1, A_2, \dots$  是两两互不相容的事件, 即对于  $i \neq j, A_i A_j = \Phi, i, j = 1, 2, \dots$ , 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

## 2. 概率的性质

(1)  $P(\emptyset)=0$ . **【注】 反之不然.**

(2) (有限可加性) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是 **两两互不相容** 的事件, 则  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

(3) 设  $A, B$  是两个事件, 若  $A \subset B$ , 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A); \Rightarrow P(B) \geq P(A).$$

**推论: (减法公式)** 对任意事件  $A, B$  有

$$P(B-A) = P(B) - P(AB).$$

(4) 对于任一事件  $A$ , 有  $P(A) \leq 1$ .

(5) (逆事件的概率) 对任一事件  $A$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(6) (加法公式) 对于任意两事件  $A, B$  有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**推论1:** 设 $A_1, A_2, A_3$ 为任意三个事件, 则有:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

**推论2:** 对于任意 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 则有:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

**例1** 小王参加“智力大冲浪”游戏,他能答出甲、乙二类问题的概率分别为 0.7和 0.2, 两类问题都能答出的概率为0.1. 求小王

- (1) 答出甲类而答不出乙类问题的概率;
- (2) 至少有一类问题能答出的概率;
- (3) 两类问题都答不出的概率.

**解** 事件 $A, B$ 分别表示“能答出甲,乙类问题”,由题设

$$P(A)=0.7, \quad P(B)=0.2, \quad P(AB)=0.1,$$

$$(1) \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.7 - 0.1 = 0.6$$

$$(2) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$$

$$(3) \quad P(\bar{A} \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.2$$

**例2** (1) 已知  $P(AB)=0$ , 求  $P(ABC)$ ;

(2) 已知  $P(A)=0.4$ ,  $P(B)=0.3$ ,  $P(A \cup B)=0.6$ ,  
求  $P(A\bar{B})$  ;

(3) 已知  $P(\bar{A}\bar{B})=P(AB)$ ,  $P(A)=p$ , 求  $P(B)$ .

**解:** (1) 因为  $ABC \subset AB$ , 由性质3知

$$0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0, \text{ 所以 } P(ABC) = 0$$

$$(2) \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = 0.3$$

$$(3) \quad P(AB) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$$



**练1** 设  $P(\bar{A}) = 0.5, P(\bar{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$ , 求  
(1) $P(AB)$ ; (2) $P(A - B)$ ; (3) $P(A \cup B)$ ; (4) $P(\bar{A}\bar{B})$

**练2** 设  $P(A) = 0.2, P(\bar{B}) = 0.6, P(A \cup B) = 0.5$   
求:  $P(AB) = ?$   $P(A\bar{B}) = ?$

**练3** 设 $A, B$ 为两个事件, 如果 $AB = \emptyset$ , 但 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$   
则一下哪个等式成立:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$ ;

✓(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ;

(3) $P(A - B) = P(A) - P(B)$ .



## § 1.4 等可能概型(古典概型)

**1. 定义:** 设 $E$ 是试验,  $S$ 是 $E$ 的样本空间, 若

- (1) 试验的样本空间的元素只有有限个;
- (2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

这种试验称为**等可能概型**或**古典概型**.

### 2. 古典概型中事件 $A$ 的概率的计算公式

设试验 $E$ 的样本空间  $S=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 且每个基本事件发生的可能性相同, 若 $A$ 包含 $k$ 个基本事件,

即  $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \dots \cup \{e_{i_k}\} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$

则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$$

**[注]** 要计算事件A的概率，必须清楚样本空间所包含的基本事件总数以及A所包含的基本事件数.

✓ **例1** 为了减少比赛场次，把20个球队分成两组，每组10个队进行比赛，求最强的两个队分在不同组内的概率.

**解：**把20个球队分为两组，每组10队，共有  $C_{20}^{10}$  种分法.

所以，基本事件总数为  $C_{20}^{10}$  .

设A=“最强的两个队分在不同组内”，

若事件A发生，即把最强的两队拿出，将其余18个队分成两组，再将两个强队分别分在两组内，故事件A所包含的基本事件数为  $C_2^1 \cdot C_{18}^9$  .

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_{18}^9}{C_{20}^{10}} = 0.526$$

✓例2 在一批 $n$ 个产品中，有 $m$ 个次品，从这批产品中任取 $k$ 个产品，求其恰有 $l$ 个( $l \leq m$ )次品的概率。

解：从 $n$ 个产品中任取 $k$ 个产品，共有 $C_n^k$ 种取法。

故基本事件总数为  $C_n^k$ 。

设  $A$  = “取出 $k$ 个产品中恰有 $l$ 个次品”

若事件 $A$ 发生，即从 $m$ 个次品中取 $l$ 个次品，从 $n-m$ 个正品中取 $k-l$ 个正品，故事件 $A$ 所包含的基本事件数为  $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$

所以 
$$P(A) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \quad \text{——超几何分布公式}$$

✓例3 一袋中有10只球, 其中4个红球, 6个白球, 从袋中取3次, 每次取一只. 按两种取法: (a)放回抽样; (b)不放回抽样取球, 求

(1)取到的3个球都是白球的概率;

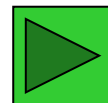
(2)取到的3个球中有2个红球, 1个白球的概率.

解 (a)放回抽样  $n = 10^3$

$$P(A) = \frac{6^3}{10^3} = 0.216 \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times 4^2 \times 6}{10^3} = 0.288$$

(b)不放回抽样  $n = 10 \times 9 \times 8$

$$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = 0.167 \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times 6 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8} = 0.3$$



**例4** 设袋中装有 $a$ 只白球,  $b$ 只红球,  $k$ 个人依次在袋中取一只球, (1)作放回抽样, (2)作不放回抽样, 求第 $i$  ( $i=1,2,\dots,k$ )个人取到白球的概率。  
( $k \leq a+b$ )

**解** (a)放回抽样  $P(A) = \frac{a}{a+b}$

(b)不放回抽样

$$P(A) = \frac{a \times A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}$$

✓ **例5** 设每人的生日在一年365天中的任一天是等可能的,任意选取 $n$ 个人( $n < 365$ ), 求至少有两人生日相同的概率.

**解** 每个人取365天中的一天作生日, 基本事件总数为  $365^n$ .

设  $A =$  “至少有两人生日相同”,  $\bar{A} =$  “ $n$ 个人的生日各不相同”

而 “ $n$ 个人的生日各不相同” 的种数为:  $A_{365}^n$

$$\text{所以 } P(\bar{A}) = \frac{A_{365}^n}{(365)^n} \quad \text{于是 } P(A) = 1 - \frac{A_{365}^n}{(365)^n}$$

**将  $n$  只球随机地放入  $N$  ( $N \geq n$ ) 个盒子中去, 试求每个盒子至多有一只球的概率。**

$$p = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

**例8** 在1~2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被6整除，又不能被8整除的概率是多少？

**解：**设A为事件“取到的数能被6整除”，B为事件“取到的数能被8整除”，则所求概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

由于  $333 < \frac{2000}{6} < 334$ ，故得  $P(A) = \frac{333}{2000}$

由于  $\frac{2000}{8} = 250$ ，故得  $P(B) = \frac{250}{2000}$

又由于一个数同时能被6与8整除，就相当于能被24整除，因此，

由  $83 < \frac{2000}{24} < 84$  得  $P(AB) = \frac{83}{2000}$

于是所求概率为  $P = 1 - \left\{ \frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000} \right\} = \frac{3}{4}$

✓ **例10** 某接待站在某一周曾接待过12次来访,已知所有这12次来访接待都是在周二和周五进行的,问是否可以推断接待时间是有规定的.

**解** 假设接待站的接待时间没有规定,而各来访者在一周内的任一天去接待站是等可能的,那么12次接待来访者都是在周二和周五进行的概率为  $P = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$ , 即千万分之三.

**人们在长期的实践中总结得到的经验是:“概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的”** -----  
**-----实际推断原理.**

按实际推断原理,可以推断接待时间是有规定的.



## 思考题: (传统型彩票)

**传统型 “10选6+1”**: 先从0~9号球中摇出6个基本号码, 每组摇出一个, 然后从0~4号球中摇出一个特别号, 构成中奖号码。投注者选出6个基本号码和一个特别号码, 构成一注, 基本号码和特别号码都正确获一等奖; 只有基本号码正确获二等奖。求获得一等奖、二等奖的概率。

## 思考题答案:

$$p_1 = 1/(5 \cdot 10^6), \quad p_2 = 5/(5 \cdot 10^6)$$



## § 1.5 条件概率

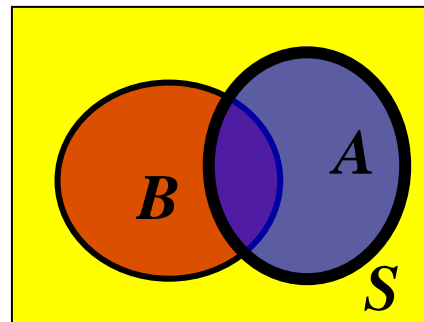
### 一、条件概率

**引例** 某班30名同学,其中男20名,女10名.身高1.70米以上者15名,其中男12名,女3名.任选一名学生,选出来后发现是个男生,问该学生的身高在1.70米以上的概率是多少?

**解:** 设事件A为“选出的是男生”,事件B为“选出的是身高1.70米以上”.显然,  $P(A)=20/30$ .

而我们要求的是在设事件A发生的条件下,事件B发生的概率,即 $P(B|A)$ .

$$\text{由题意, } P(B|A)=12/20 = \frac{12/30}{20/30} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$



**1. 定义:** 设 $A, B$  是两个随机事件, 且 $P(A) > 0$ , 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 $A$  发生的条件下事件 $B$  发生的**条件概率**.

**2. 性质:** 条件概率 $P(\cdot|A)$ 满足概率的三个基本属性:

(1) 对于任一事件 $B$ , 有 $P(B/A) \geq 0$

(2)  $P(S/A) = 1$

(3) 设 $B_1, B_2, \dots$  是两两不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

**由于条件概率符合概率定义的三个条件, 所以前面所证明的一些概率性质对于条件概率也同样适用.**

例如

对于任意事件 $B_1, B_2$ , 有:

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A)$$

对于任意事件 $B$ , 有:

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$$

**例1** 设某种动物由出生算起活到20岁以上的概率是0.8，活到25岁以上的概率为0.4,动物现在已经20岁，问它能活到25岁以上的概率是多少？

**解**  $A$  = “活到20岁以上”， $B$  = “活到25岁以上”，

由题意  $P(A) = 0.8$ ， $P(B) = 0.4$

因为  $B \subset A$ ，故  $AB = B$

所以  $P(AB) = P(B) = 0.4$ ，

因此 
$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

**例2** 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋中各取一球（不放回）。

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率。

**解** 记 $A_1$ ="第一次取出的是黑球"， $A_2$ ="第二次取出的是黑球"，

(1) 由题意直接可得  $P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$

或利用公式：  $P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}$        $P(A_1) = \frac{3}{10}$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

$$(2) \quad P(A_2) = P(A_1A_2 \cup \bar{A}_1A_2) = P(A_1A_2) + P(\bar{A}_1A_2) = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{3}{10}$$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

## 二、乘法定理

**定理(乘法定理)** 对于任意的事件 $A, B$ , 若 $P(A)>0$ ,

则  $P(AB)=P(A)P(B|A)$  -----乘法公式

或  $P(AB)=P(B)P(A|B)$  ( $P(B)>0$ )

**[注]** 乘法公式可以推广到多个事件的情形:

1° 设 $A, B, C$ 为事件, 且 $P(AB)>0$ , 则有

$$P(ABC)=P(A) P(B|A)P(C|BA)$$

2° 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$  为 $n$ 个事件, 且 $P(A_1A_2\dots A_{n-1})>0$ ,

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

**[注]**在某些问题中，条件概率是已知的或者是比较容易求得的，在这种情况下，就可以利用乘法公式来计算积事件的概率。

**例3** 今有3个布袋, 2个红袋, 1个绿袋. 在2个红袋中各装60个红球和40个绿球, 在绿袋中装了30红球和50个绿球, 现任取1袋, 从中任取1球, 问是红袋中红球的概率为多少?

**解** 设 $A$  = “取到红袋”,  $B$  = “取到红球”, 所求概率 $P(AB)$ .  
显然,  $P(A) = 2/3$ ,

$$P(B/A) = 60/100 = 3/5,$$

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = (2/3) \cdot (3/5) = 2/5 .$$



**例4** 设袋中装有 $r$ 只红球,  $t$ 只白球. 每次自袋中任取一只球, 观察其颜色然后放回, 并再放入 $a$ 只与所取出的那只球同色的球. 若在袋中连续取球四次, 试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

**解:** 记  $A_i$  = “第 $i$ 次取到红球” ,  $i=1,2,3,4$ , 则

$\bar{A}_i$  = “第 $i$ 次取到白球” ,  $i=1,2,3,4$ ,

所求概率为 $P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3) \\ &= \frac{r}{r+t} \cdot \frac{r+a}{r+t+a} \cdot \frac{t}{r+t+2a} \cdot \frac{t+a}{r+t+3a} \end{aligned}$$

**例6** 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 $1/2$ ，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 $7/10$ ，第三次落下打破的概率为 $9/10$ ，试求透镜落下三次而未打破的概率。

**解：** 设  $A_i$  = “透镜第 $i$ 次落下打破”， $i=1,2,3,4$ ，  
 $B$  = “透镜落下三次而未打破”。

因为  $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$

$$\begin{aligned}\text{故有 } P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) \\ &= \frac{3}{200}\end{aligned}$$



**例7** 已知 $P(A)=0.3$ ,  $P(B)=0.4$ ,  $P(A|B)=0.5$ ,

求  $P(B|A \cup B)$

**解:** 由乘法公式,

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.4 \times 0.5=0.2,$$

$$P(B|A \cup B) = \frac{P(B(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

$$= \frac{0.4}{0.3 + 0.4 - 0.2} = \frac{4}{5}$$

### 三、全概率公式和贝叶斯公式

#### 1. 全概率公式

**定义:** 设试验 $E$ , 样本空间 $S$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 $E$ 的一组事件.

若 (1)  $B_i B_j = \Phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ ;

(2)  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$ ,

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 $S$ 的一个划分(完备事件组)。

**定理** 设试验 $E$ 的样本空间为 $S$ ,  $A$ 为 $E$ 的事件,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 $S$ 的一个划分,  $P(B_i) > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

上式称为全概率公式. 特别地,  $n=2$

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

## 2. 贝叶斯公式

**定理** 设试验 $E$ 的样本空间为 $S$ ,  $A$ 为 $E$ 的事件,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 $S$ 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \dots, n$$

-----贝叶斯公式

**[注]** 全概率公式是概率论的一个基本公式. 直接计算 $P(A)$ 不易时, 可构造一完备事件组 $B_1, \dots, B_n$ , 利用这个公式来计算 $P(A)$ .

贝叶斯公式给出的是, 一事件已经发生, 要考察引发该事件发生的各种原因的可能性的的大小.

**例8** 设一仓库中有十箱同样规格的产品，已知其中有五箱、三箱、两箱依次为甲厂、乙厂、丙厂生产的.且甲厂、乙厂、丙厂生产的该种产品的次品率依次为 $1/10$ 、 $1/15$ 、 $1/20$ . 从这十箱中任取一箱，再从取得的这箱中任取一件产品，求

(1)取得正品的概率；

(2)已知取得正品，该正品是甲厂生产的概率是多少？

**解** 设 $A$ ="取得的是正品"，

$B_i$ ="该件产品是甲、乙、丙厂生产的"， $i=1,2,3$

显然， $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$ ，且 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 互斥

由已知得： $P(B_1)=5/10$ ， $P(B_2)=3/10$ ， $P(B_3)=2/10$ ，

$$P(A|B_1)=9/10, P(A|B_2)=14/15, P(A|B_3)=19/20$$

由全概公式 
$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{5}{10} \frac{9}{10} + \frac{3}{10} \frac{14}{15} + \frac{2}{10} \frac{19}{20} = 0.92$$

**例9** 甲胎免疫蛋白检测法(AFP)被普遍用于肝癌的早期诊断和普查. 已知肝癌患者经AFP诊断为肝癌的概率为95%，而未患肝癌通过AFP被诊断为肝癌的概率为2%，在人群中肝癌的发病率一般为0.4%，现有一人经诊断为患肝癌，求此人确实患肝癌的概率.

**解：** 设  $A$  = “此人患肝癌”，  $B$  = “经诊断为患肝癌”

前验概率

$$P(A) = 0.004, P(\bar{A}) = 0.996$$

$$P(B | A) = 0.95, P(B | \bar{A}) = 0.02$$

由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ \text{后验概率} \quad &= \frac{0.004 \times 0.95}{0.004 \times 0.95 + 0.996 \times 0.02} = 0.193 \end{aligned}$$



## § 1.6 独立性

一般来讲, 条件概率 $P(B/A)$ 与概率 $P(B)$ 是不等的, 即事件 $A, B$ 中某个事件发生对另一个事件发生是有影响的. 但在许多实际问题中常会遇到两个事件中任何一个发生都不会对另一个事件发生的概率产生影响, 此时 $P(B)=P(B/A)$ 。

**定义1** 设 $A, B$ 是两事件, 如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 $A, B$ 为**相互独立的**随机事件.

**[注]** 1° 当 $P(A), P(B)>0$ 时,  $A, B$ 相互独立

$$\longleftrightarrow P(B/A)=P(B), P(A/B)=P(A);$$

2° 两事件互不相容与相互独立是完全不同的两个概念.

若 $P(A)>0, P(B)>0$ , 则 $A$ 与 $B$ 相互独立和 $A$ 与 $B$ 互不相容不能同时成立.



**定理** 若四对事件 $A$ 与 $\bar{B}$ 、 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 、 $A$ 与 $\bar{B}$ 、 $A$ 与 $B$  中有一对独立，则另外三对也独立. (即这四对事件或者都独立，或者都不独立).

**证明** 仅证明 $A$ 与 $B$ 独立时有 $\bar{A}$ 与 $B$  独立，

$$\begin{aligned}\text{由于 } P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \quad (A \text{ 与 } B \text{ 独立}) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

上式说明 $A$ 与 $\bar{B}$  相互独立.

**在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义判断两事件是否独立,利用事件的独立性解决实际问题.**

**定义2** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n$ 个事件, 如果对于任意的 $1 \leq i, j \leq n$ , 有

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

则称这 $n$ 个事件**两两相互独立**.

**定义3** 如果对于任意的 $k$  ( $k \leq n$ ), 及任意的 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ,

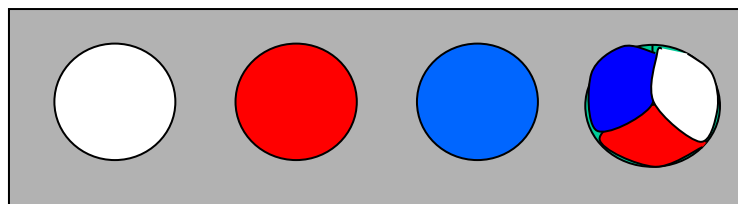
都有  $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

则称这 $n$ 个事件**相互独立**.

**[注]** 若 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则

- (1)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 反之不然;
- (2)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 $k$ 个事件相互独立;
- (3)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 $m$  ( $1 \leq m \leq n$ )个事件换成它们的对立事件, 所得的 $n$ 个事件仍相互独立.

**例1** 设袋中有4个乒乓球，1个涂有白色，1个涂有红色，1个涂有蓝色，1个涂有白、红、蓝三种颜色.今从袋中随机地取一个球，设事件A=“取出的球涂有白色”，B=“取出的球涂有红色”，C=“取出的球涂有蓝色”，试验证事件A、B、C两两相互独立，但不相互独立.



**证明** 事件A、B同时发生，只能是取到的球涂有白、红、蓝三种颜色的球，因而  $P(AB)=1/4$ ，同理  $P(BC)=1/4$ ， $P(AC)=1/4$ 。事件A发生，只能是取到的球涂有白色的球或涂三种颜色的球，因而  $P(A)=2/4=1/2$ ，同理  $P(B)=1/2$ ， $P(C)=1/2$ ，即  $P(A)P(B)=1/4=P(AB)$ ，故事件A、B相互独立。类似可证  $P(AC)=P(A)P(C)$ ， $P(BC)=P(B)P(C)$ 。因此A、B、C两两相互独立。但是  $P(ABC)=1/4$ ，而  $P(A)P(B)P(C)=1/8$ ，所以，事件A、B、C并不相互独立。

**例2** 设某类高射炮，每门炮发射一发炮弹击中飞机的概率为0.6，现若干门炮同时发射（每门炮发射一次，且各门炮工作是独立的），问欲以99%的把握击中来犯的一架敌机，至少需要几门炮？

**解：** 设需要 $n$ 门炮，

$A$  = “敌机被击中”， $A_i$  = “第 $i$ 门炮击中敌机”， $i = 1, 2, \dots, n$

显然  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

于是要求 $n$ ，使得  $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq 0.99$

由于 而 $A_1, A_2, \dots, A_n$  是相互独立的，

所以  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - (0.4)^n \geq 0.99$

得  $n \geq 5.026$ ， 因此至少需要6门大炮。

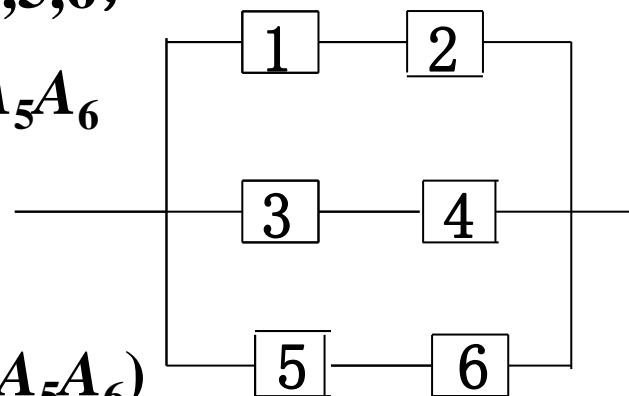
**例3** 一个元件能正常工作的概率称为此**元件的可靠性**，一个系统能正常工作的概率称为此**系统的可靠性**。现有6个元件如图连接，每个元件的可靠性为 $p$ ，如果各元件能否正常工作是相互独立的，求系统的可靠性。

**解：** 设 $A_i = \{\text{第}i\text{个元件正常工作}\}$ ， $i=1,2,3,4,5,6$ ，

$$A = \{\text{系统正常工作}\} = A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_5A_6$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4 \cup A_5A_6) \\ &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) + P(A_5A_6) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &\quad - P(A_1A_2A_5A_6) - P(A_3A_4A_5A_6) + P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) + P(A_5)P(A_6) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_5)P(A_6) - P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6) + \\ &\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6) = 3p^2 - 3p^4 + p^6 \end{aligned}$$



**例4** 要验收一批(100件)乐器验收方案如下：自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的)，如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯，则这批乐器就被拒绝接．设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95；而一件音色纯的乐器经测试误认为不纯的概率为0.01．如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的．试问这批乐器被接收的概率是多少？

**解：**设  $A_i$  = “随机取3件乐器,其中恰有*i* 件音色不纯” ,  $i=0,1,2,3$   
则  $A_0, A_1, A_2, A_3$  是的  $S$  的一个划分,  
 $A$  = “这批乐器被接收” , 本题是求  $P(A)$ .

$$P(A_0) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}, P(A_1) = \frac{C_4^1 C_{96}^2}{C_{100}^3}, P(A_2) = \frac{C_4^2 C_{96}^1}{C_{100}^3}, P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3}$$

$$P(A|A_0) = (0.99)^3, \quad P(A|A_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|A_2) = 0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|A_3) = (0.05)^3$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^3 P(A|A_i)P(A_i) = 0.8629$$

