# 第十节、闭区间上连续函数的性质

## 一、 最值定理

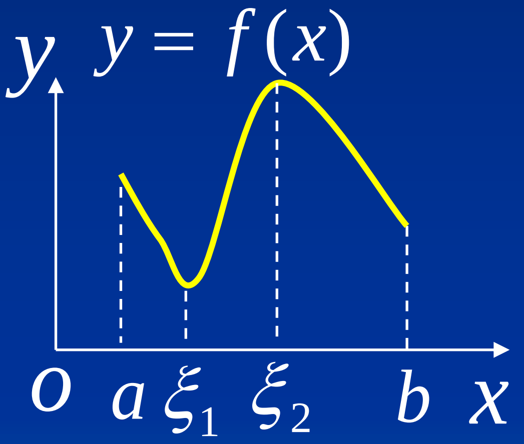
**定理1**　闭区间上连续的函数,在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x)$ 在闭区间上连续

则 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$,

使 $f(\xi_1) = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$

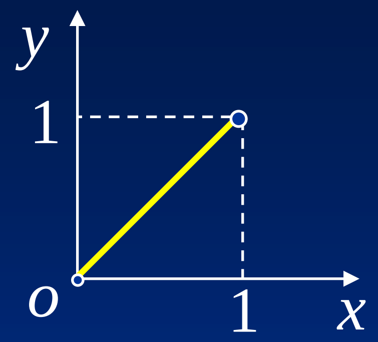
$f(\xi_2) = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$




注意：若函数在开区间上连续,或在闭区间内有间断点，结论不一定成立.

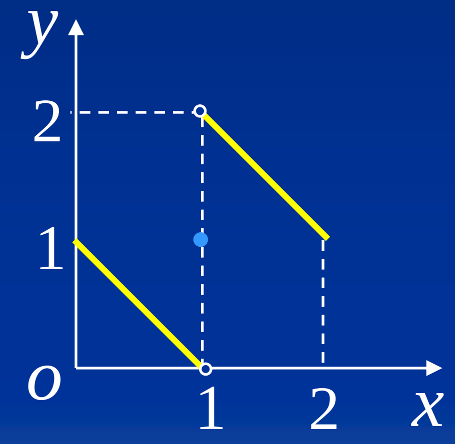
例如， $y = x\,,\, x \in (0,1)$

无最大值和最小值




又如，

$$f(x) = \begin{cases} -x+1\,, & 0 \le x < 1 \\ 1\,, & x = 1 \\ -x+3\,, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$




也无最大值和最小值

**推论(有界性定理).**

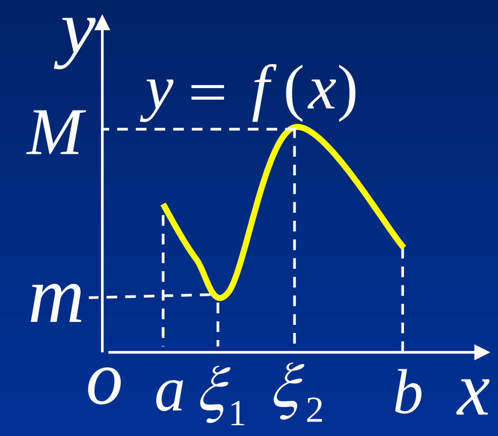
在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证：设 $f(x)$是$[a,b]$上连续函数，由定理1 可知有

$$M=\max_{x\in[a,b]} f(x),\ m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

故 $\forall x\in[a,b]$，有 $m\le f(x)\le M$，

因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

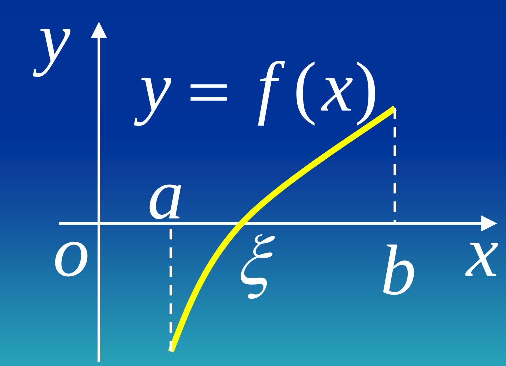



## 二、介值定理

**定理2 ( 零点定理 )**

设 $f(x)$是$[a,b]$上连续函数，

且 $f(a)f(b)<0 \Longrightarrow$ 至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

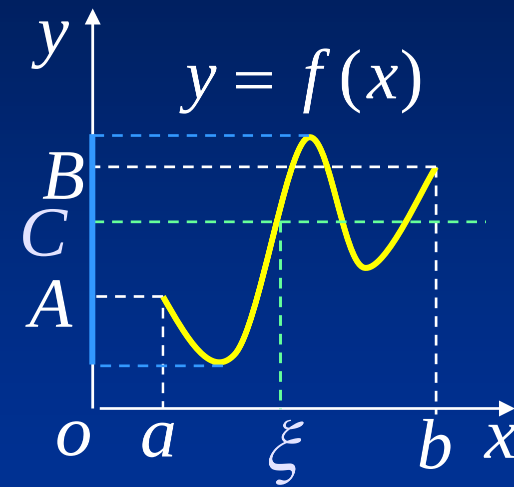


**定理3 (介值定理)** 设 $f(x)$是$[a, b]$上连续函数,

且 $f(a)=A,\ f(b)=B,\ A\neq B,$

则对 $A$ 与 $B$ 之间的任一数 $C$,

至少有 一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=C.$




证: 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-C$

则 $\varphi(x)$是$[a, b]$上连续函数,

且 $\varphi(a)\,\phi(b)=(A-C)(B-C)<0$

故由零点定理知, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$,

即 $f(\xi)=C.$

**推论1:** 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

**例1.** 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证：显然 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 是[ 0, 1]上连续函数，

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,

使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$$

**例2.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正， 证明:
对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$，必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$，
使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ .

证: 令 $F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)$ ，则 $F(x)$连续，

$$F(x_1)F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)[f(x_1) - f(x_2)]^2 \le 0$$

当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$，则有

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

当$f(x_1) \ne f(x_2)$时，$\because f(x) > 0$，$\therefore F(x_1)F(x_2) < 0$，

故由零点定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $F(\xi) = 0$，即

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

# 闭区间上连续函数的性质

- 1. **最大最小值定理：** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续
  则:至少存在两点$\xi,\eta\in[a,b]$,
  使当$x\in[a,b]$时,有$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$
- 2.**推论(有界性定理):** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续
  则: $f(x)$在$[a,b]$上有界
- 3.**介值定理:** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\neq f(b)$
  则: 对任何介于$f(a),f(b)$之间的实数$c$,
  存在$\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=c$

# 闭区间上连续函数的性质(续)

- 4.(介值定理的)推论1: $f(x)$在$[a,b]$上连续

  $M, m$是$f(x)$在$[a,b]$上的最大,最小值

则:对任何$c$, $m<c<M$, $\exists \xi \in [a,b]$, 使$f(\xi)=c$

- 5.推论2(根的存在定理):

  设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,

  则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)=0$

1\. 设 $f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$, 证明至少存在

一点$\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

提示: 令 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$,

则 $\varphi(x)\in C[0,a]$, 易证 $\varphi(0)\varphi(a)\le 0$

2.证明 $x=e^{x-3}+1$ 至少有一个不超过 4 的 正根 .

证： 令 $f(x)=x-e^{x-3}-1$

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,4]$ 上连续, 且

$$f(0)=-e^{-3}-1<0$$

$$f(4)=4-e^{4-3}-1=3-e>0$$

根据零点定理 , 在开区间 $(0,4)$ 内至少存在一点

$\xi\in(0,4)$, 使 $f(\xi)=0$, 原命题得证 .