

单元自测练习题 (5)

第五章 定积分

1. 若 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t-x) dt$, 则 $f(x) =$ _____.
2. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt =$ _____.
3. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$, 则常数 $a =$ _____.
4. 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大最小值;
5. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ().
A. 等价无穷小; B. 同阶, 但非等价无穷小;
C. 高阶无穷小; D. 低阶无穷小
6. 求 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} (x^2 - t)f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.
7. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt =$ _____.
8. 下列反常积分发散的是 ().
A. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; B. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; C. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; D. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续且递增的函数, 证明:
$$(a+b) \int_a^b f(x) dx \leq 2 \int_a^b xf(x) dx.$$
10. 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$
11. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} \sqrt{1+\cos x} \arcsin x dx =$ _____.
12. 已知 $f(x) = e^x + x \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$, 求 $f(x)$.

13. 利用定积分的定义计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$.

14. 设 $y = f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则曲线 $y = f(x), x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形面积为 ().

A. $\int_a^b f(x) dx$; B. $|\int_a^b f(x) dx|$; C. $\int_a^b |f(x)| dx$; D. 不能表示出来

15. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

16. 计算 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

17. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明 $\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt$.

18. 计算 $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.