

三、简单计算题（共 6 小题，每题 6 分，共 36 分）

得分 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

得分 3. 求函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4x}$ 的极值.

得分 2. 设 $y = \ln \sqrt{4 - x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$ 的值.

得分 4. 已知 $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.



得分

5. 求 $\int \arcsin x dx$.

得分

四、综合计算题 (共 10 分)

1. [4 分] 方程 $xy' + e^{y^2} - x = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程.

得分

6. 计算 $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.2. [6 分] 求微分方程 $y'' + 5y' - 6y = xe^{-2x}$ 的通解.

得分

五、应用题 (本题 7 分)

已知平面图形由直线 $y = x + 2$ 和曲线 $y = x^2$ 围成, 试求该平面图形的面积以及它绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

得分

六、证明题 (本题 5 分)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且满足:

(1) 当 $x \in [a, b]$ 时, $\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$;

(2) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

试证明: $\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$.

