一、单项选择题

1、设随机事件A和B互斥，则下列等式成立的是（　）。

（A）$P(\overline{A}\,\overline{B})=1$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A})P(\overline{B})=0$

2、设X_1和X_2为连续型随机变量，且概率密度函数分别为$f_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$和$f_2(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，分布函数分别记为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则可为某一随机变量的概率密度函数的是（　）。

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

3、已知随机变量X～$N(\mu,\sigma^2)$，且$E(X)=-1$，$D(X)=9$，则参数μ,σ的值分别为（　）。

（A）$\mu=-1,\ \sigma=9$　　(B) $\mu=-1,\ \sigma=-9$

(C) $\mu=-1,\ \sigma=3$　　(D) $\mu=1,\ \sigma=3$

4、检验正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的假设：$H_0:\mu\geq\mu_0$；$H_0:\mu<\mu_0$时（σ^2未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自该总体的随机样本，$\bar{X}$、S^2分别为样本平均值和样本方差，显著水平为α），采用的检验统计量为（　　）。

（A）$z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　(B)$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(C)$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　　(D) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

5、历史上不少数学家做过成千上万次抛硬币的实验，例如（　　）。

（A）德摩根　　(B)李雅普诺夫

(C) 辛钦　　(D) 柯尔莫哥洛夫

二、填空题

1、如果每次试验的成功率都是p，并且已知在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为$\frac{19}{27}$，则p=$\underline{\ \frac{1}{3}\ }$。

2、核酸检测法被用于新型冠状病毒诊断。假设新型冠状病毒感染者经核酸检测被误诊为非感染者的概率为 5%，而非新型冠状病毒感染者经核酸检测被误诊为感染者的概率为 1%，假设武汉人群新型冠状病毒感染率为 0.4%，现有一武汉人经诊断为新型冠状病毒感染者，则此人确实为感染者的概率为$\underline{\ 0.276\ }$。

3、已知随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} x/2+3/4, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

当a=$\underline{\ \frac{\sqrt{17}-3}{2}\ }$时，$P\{X>a\}=P\{X<a\}$。

4、设总体X的数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$,$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自总体X的随机样本,$\bar{X}$为样本平均值,$\widehat{\sigma^2}=C\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计,则$C=\underline{\ \frac{1}{n-1}\ }$。

5、设随机变量X的数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2>0$，利用切比雪夫不等式估计，则$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}\geq\underline{\ \frac{8}{9}\ }$。

三、

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中车险索赔户占 80%，以 η 表示在随机抽的 100 个索赔户中因车险向保险公司索赔的户数，利用中心极限定理估计车险索赔户数在 10～30 之间的概率。（结果用φ(·)表示）

解：设 $\eta \sim B(100, 0.8)$，$E(\eta)=80$，$D(\eta)=16$

$$P\{10\le\eta\le30\} = P\left\{\frac{10-80}{\sqrt{16}} \le \frac{\eta-80}{\sqrt{16}} \le \frac{30-80}{\sqrt{16}}\right\}$$

$$\approx \phi\left(-\frac{50}{4}\right) - \phi\left(-\frac{70}{4}\right) = \phi\left(\frac{70}{4}\right) - \phi\left(\frac{50}{4}\right)$$

四、

已知随机变量X的概率密度函数为$f(x) = \begin{cases} ax^b, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$ $(a > 0, b > 0)$，且$E(X) = 0.75$。求：(1) a 和b的值；（2）X的分布函数F(x)；(3)$P\{X > 0.3\}$。

(1). 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 ax^b dx = \frac{a}{b+1} = 1$

且 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 a x^{b+1} dx = \frac{a}{b+2} = 0.75$ $\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

(2). 由 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$

当 $0\le x<1$ 时，$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt = x^3$ $\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^3 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge1 \end{cases}$

当 $x\ge1$ 时，$F(x)=1$

(3). $P\{X>0.3\} = 1-F(0.3) = 0.973$

五、

设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}sinx\,siny，& 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\\ 0, & 其它\end{cases},$$

求：$E(X)$，$D(X)$，ρ_{XY}。（提示：利用分部积分计算$\int x^a\,sinx\,dx$ ）

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{1}{4}sinx\,dx\int_0^{\pi}siny\,dy$

$=\frac{\pi}{2}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dx\,dy=\int_0^{\pi}x^2\frac{1}{4}sinx\,dx\int_0^{\pi}siny\,dy$

$=\frac{\pi^2}{2}-2.$

$\therefore D(X)=\frac{\pi^2}{2}-2-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}-2$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\cdot\int_0^{\pi}y\sin y\,dy=\frac{\pi^2}{4}$

由$E(X)=E(Y)=\frac{\pi}{2}$. $\therefore Cov(X,Y)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}=0$

$\therefore \rho_{XY}=0$

六、

设总体X 的概率密度函数为$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}$, $-\infty<x<+\infty$，其中$\theta>0$为待估参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自总体的随机样本。求θ的最大似然估计量。

似然函数：$L(\theta)(x_1\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x_i|}{\theta}}\right)=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}}$

$\therefore \ln L(\theta)=-n\ln(2\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\Rightarrow\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

七、

已知离散型随机变量(X,Y)的分布律如右：

Y \ X	0	1	2
-1	1/10	1/20	7/20
2	3/10	1/10	1/10

试求：（1）关于X的边缘分布律；

（2）$P\{X \le 2 | Y = -1\}$；

（3）$Y^2 - X$的分布律；

（4）问X与Y是否相互独立？说明理由。

解：(1)

X	0	1	2
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$

(2). $P\{Y=-1\} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $P\{X\le 2, Y=-1\} = \frac{1}{2}$

$\therefore P\{X\le 2 | Y=-1\} = 1$

(3).

Y^2-X	-1	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

(4) $P\{X=0, Y=-1\} = \frac{1}{10} \neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=-1\} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ 不相互独立.

八、

设$X_1, X_2, \dots, X_5$为来自总体$N(0,\ \sigma^2)$的一个随机样本。

证明：当$k = \frac{3}{2}$时，$k\frac{(X_2+X_4)^2}{{X_1}^2+{X_3}^2+{X_5}^2} \sim F(1,3)$。

由 $X_2+X_4 \sim N(0, 2\sigma^2)$ 故 $\frac{X_2+X_4}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0,1)$

$\therefore \frac{(X_2+X_4)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，又由于 $\frac{X_i}{\sqrt{\sigma}} \sim N(0,1)$，可得 $\frac{X_1^2+X_3^2+X_5^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$

$\therefore \dfrac{\frac{(X_2+X_4)^2}{2\sigma^2}}{\frac{X_1^2+X_3^2+X_5^2}{3\sigma^2}} \sim F(1,3)$，即 $\frac{3}{2}\cdot\frac{(X_1+X_4)^2}{X_1^2+X_3^2+X_5^2} \sim F(1,3)$

九、

设超大牵伸纺机所纺的线的断裂强度服从$N(\mu_1, 4.2)$，普通纺机所纺的线的断裂强度服从$N(\mu_2, 1.9)$。现对前者抽取容量为 200 的样本，算得$\bar{x} = 5.32$（单位：kg），对后者抽取容量为 100 的样本，算得$\bar{y} = 5.76$（单位：kg）。试求$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为 0.95 的置信区间。($z_{0.025}$=1.96，$z_{0.05}$=1.65，数据保留两位小数)

解：$n_1=200$，$n_2=100$．$\bar{x}=5.32$．$\bar{y}=5.76$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$

统计量为：$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{4.2}{200}+\frac{1.9}{100}}} \sim N(0,1)$

则 $\mu_1-\mu_2$的 0.95 的置信区间：$(\bar{X}-\bar{Y}-\frac{1}{10}\sqrt{2.1+1.9}\times 1.96,\ \bar{X}-\bar{Y}+\frac{1}{10}\sqrt{2.1+1.9}\times 1.96)$

代入可得 $(-0.44-0.392, -0.44+0.392)$，即 $(-0.832, -0.048)$

十、

已知维尼纶纤度在正常情况下服从方差$\sigma_0^2 = 0.048^2$的正态分布，某日抽取 5 根纤维，测得其纤度为：1.32，1.55，1.36，1.40，1.44，并计算得$\bar{x} = 1.414$，$s^2 = 0.031$，问在显著性水平$\alpha = 0.1$下检验这一天纤度的分布的方差是否正常？（$\chi^2_{0.95}$（4）=0.71，$\chi^2_{0.05}$（4）=9.49，$\chi^2_{0.95}$（5）=1.15，$\chi^2_{0.05}$（5）=11.07，数据保留两位小数）

解：检验假设：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.048^2$　　$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 0.048^2$

$n=5$．$\sigma_0^2=0.048^2$　$\bar{x}=1.414$，$S^2=0.031$，$\alpha=0.1$

统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

则拒绝域：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

代入 $\dfrac{4\times 0.031}{0.048^2}=53.8 > \chi^2_{0.05}(4)=9.49$，故观察值在拒绝域

∴ 拒绝H_0，接受H_1，认为分布的方差不正常．