单元一 简谐振动

一 选择题

01. 对一个作简谐振动的物体，下面哪种说法是正确的？ 【 C 】

(A) 物体处在运动正方向的端点时，速度和加速度都达到最大值；

(B) 物体位于平衡位置且向负方向运动时，速度和加速度都为零；

(C) 物体位于平衡位置且向正方向运动时，速度最大，加速度为零；

(D) 物体处在负方向的端点时，速度最大，加速度为零。

☛ 对于简谐振动，质点位于平衡点时速度最大，加速度为零。正确答案(C)

02. 一沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，振动方程用余弦函数表示，如果该振子的初相为 $\frac{4}{3}\pi$，则 $t=0$ 时，质点的位置在： 【 D 】

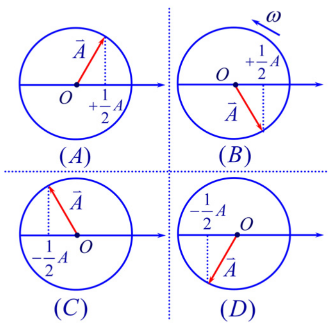
(A) 过 $x=\frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动； (B) 过 $x=\frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动；

(C) 过 $x=-\frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动； (D) 过 $x=-\frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动

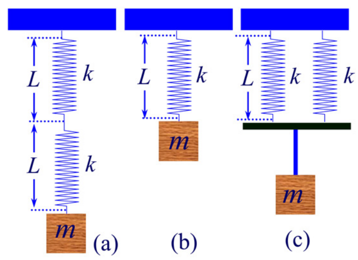
☛ 由题目给出初始的条件，简谐振动的初相是 $\frac{4}{3}\pi$

第三象限 —— 位移是负、速度为正，正确答案(D)

03. 一质点作简谐振动，振幅为 A，如图所示，在起始时刻质点的位移为 $A/2$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为 【 B 】



选择题_03 图示



选择题_04 图示

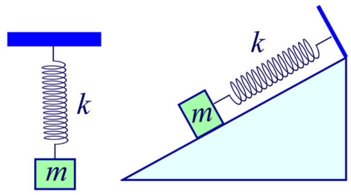
04. 如图所示，$(a),(b),(c)$ 为三个不同的谐振动系统，组成各系统的各弹簧的倔强系数及重物质量如图所示，$(a),(b),(c)$ 三个振动系统的 ω^2 值之比为： 【 B 】

(A) $2:1:1$； (B) $1:2:4$； (C) $4:2:1$； (D) $1:1:2$。

☛ 谐振子系统的固有圆频率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

对于 (a)：弹簧总的伸长量：$\delta=\frac{mg}{k}+\frac{mg}{k}=\frac{2mg}{k} \longrightarrow mg=\frac{1}{2}k\delta$

体系的倔强系数：$k' = \frac{1}{2}k \longrightarrow \underline{\omega_1^2 = \frac{k'}{m} = \frac{k}{2m}}$



选择题_05 图示

对于(b)：$\underline{\omega_2^2 = \frac{k}{m}}$

对于(c)：弹簧总的伸长量：$\delta = \frac{mg/2}{k} \longrightarrow mg = 2k\delta$

体系的倔强系数：$k' = 2k \longrightarrow \underline{\omega_3^2 = \frac{k'}{m} = \frac{2k}{m}}$

$\underline{\omega_1^2 : \omega_2^2 : \omega_3^2 = \frac{k}{2m} : \frac{k}{m} : \frac{2k}{m} = 1:2:4}$。正确答案(B)

05. 一弹簧振子，当把它水平放置时，它可以作简谐振动，若把它竖直放置或放在固定的光滑斜面上如图所示，试判断下面哪种情况是正确的： 【 C 】

(A) 竖直放置可作简谐振动，放在光滑斜面上不能作简谐振动；

(B) 竖直放置不能作简谐振动，放在光滑斜面上可作简谐振动；

(C) 两种情况都可作简谐振动；

(D) 两种情况都不能作简谐振动。

☛ 竖直方向一定是做简谐振动。对于光滑斜面上的情形，物体沿斜面方向受到弹簧力和重力分力 $f = mg\sin\alpha$ —— 该力是一个常数，物体还是做谐振振动。正确答案(C)

06. 一谐振子作振幅为 A 的谐振动，它的动能与势能相等时，它的相位和坐标分别为： 【 C 】

(A) $\pm\frac{\pi}{3},\ or \pm\frac{2}{3}\pi,\ \ \pm\frac{1}{2}A$； (B) $\pm\frac{\pi}{6},\ \pm\frac{5}{6}\pi,\ \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$；

(C) $\pm\frac{\pi}{4},\ or \pm\frac{3}{4}\pi,\ \ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$； (D) $\pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2}{3}\pi,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

☛ 振动动能：

$$E_k = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \text{ —— 其中 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

振动势能：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

根据问题要求 $E_k = E_p$

有：$\sin^2(\omega t+\varphi) = \cos^2(\omega t+\varphi)$

因此有：$\omega t + \varphi = \pm\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ —— 第一和第四象限

物体坐标：$x = A\cos(\pm\frac{\pi}{4}) = +\frac{1}{2}A$

$$\omega t+\varphi=\pi\pm\frac{\pi}{4}=\begin{cases}\frac{5\pi}{4} & (-\frac{3\pi}{4})\\ \frac{3\pi}{4}\end{cases} \quad —— 第二和第三象限$$

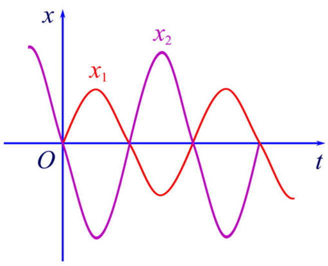
物体坐标：$x=A\cos(\pm\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{2}A$，正确答案(C)

07. 一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x=0.04\cos(2\pi t+\frac{1}{3}\pi)\ (SI)$，从 $t=0$ 时刻起，到质点位置在 $x=-0.02\ m$ 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为 【 D 】

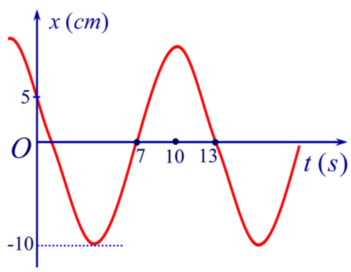
(A) $\frac{1}{8}s$； (B) $\frac{1}{6}s$； (C) $\frac{1}{4}s$； (D) $\frac{1}{2}s$。

08. 如图所画的是两个简谐振动的振动曲线，两个简谐振动叠加后合成的余弦振动的初相为【 C 】

(A) $\frac{3}{2}\pi$； (B) π； (C) $\frac{1}{2}\pi$； (D) 0。



选择题_08 图示



填空题_09 图示

二 填空题

09. 一简谐振动用余弦函数表示，振动曲线如图所示，则此简谐振动的三个特征量为：$A=10\ cm$，$\omega=\frac{\pi}{6}rad/s$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$

☛ 从振动曲线得到：$A=10\ cm,\ T=12\ s$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}rad/s$

$t=0$：位移为 $+\frac{1}{2}A$，速度为负 —— 第一象限：$\varphi=\frac{\pi}{3}$

10. 用 $40\ N$ 的力拉一轻弹簧，可使其伸长 $20\ cm$。此弹簧下应挂 $0.2\ kg$ 的物体，才能使弹簧振子作简谐振动的周期 $T=0.2\ s$。

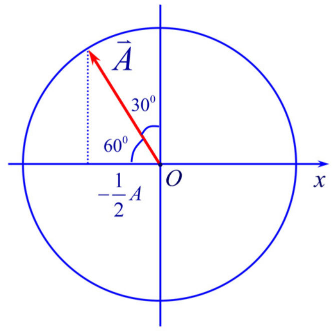
11. 一质点作简谐振动，周期为 T，质点由平衡位置到二分之一最大位移处所需要的时间为 $\frac{1}{12}T$；由最大位移到二分之一最大位移处所需要的时间为 $\frac{1}{6}T$。

☛ 如图所示，旋转矢量由平衡位置到二分之一最大位移处转过的角度：

$\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{6}\longrightarrow$ 所需时间 $t=\frac{1}{12}T$

同样旋转矢量由最大位移到二分之一最大位移处转过的角度：

$\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{3}\longrightarrow$ 所需时间 $t=\frac{1}{6}T$



填空题_11_01 图示

12. 两个弹簧振子的周期都是 $0.4\,s$，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 $0.5\,s$ 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为 π。

13. 两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：$\begin{cases} x_1=6\times10^{-2}\cos(5t+\frac{1}{2}\pi) \\ x_2=2\times10^{-2}\cos(\pi-5t) \end{cases}$ (SI)

它们的合振动的初相为 $0.60\,\pi$。

三 判断题

14. 物体做简谐振动时，其加速度的大小与物体相对平衡位置的位移成正比，方向始终与位移方向相反，总指向平衡位置。【 对 】

15. 简谐运动的动能和势能都随时间作周期性的变化，且变化频率与位移变化频率相同。【 错 】

16. 同方向同频率的两简谐振动合成后的合振动的振幅不随时间变化。【 对 】

四 计算题

17. 作简谐运动的小球，速度最大值为 $v_m=3\,cm/s$，振幅 $A=2\,cm$，若从速度为正的最大值的某时刻开始计算时间。

1) 求振动的周期；
2) 求加速度的最大值；
3) 写出振动表达式。

☛ 1) 振动表达式为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

振幅 $A=0.02\,m$，$v_m=\omega A=0.03\,m/s$

固有频率 $\omega=\frac{v_m}{A}=\frac{0.03}{0.02}=1.5\ rad/s\longrightarrow$ 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1.5}=4.19\,s$

2) 加速度的最大值：$a_m=\omega^2A=1.5^2\times0.02=0.045\ m/s^2$

3) 速度表达式：$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$

由旋转矢量图知，$\varphi+\frac{\pi}{2}=0$ —— 初相 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

振动表达式：$x=0.02\cos(1.5t-\frac{\pi}{2})\quad(SI)$

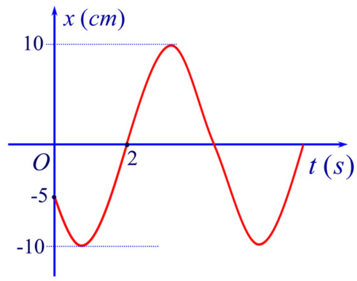
18. 已知某简谐振动的振动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。求此简谐振动的振动方程。

☛ 设振动方程为 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

由曲线可知：$A = 10\ cm$

当 $t=0$，$\begin{cases} x_0 = -5 = 10\cos\varphi \\ v_0 = -10\omega\sin\varphi < 0 \end{cases}$

初相 $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$



计算题_18 图示

由图可知质点由位移为 $\begin{cases} x_0 = -5\ cm \\ v_0 < 0 \end{cases}$ 的状态到 $\begin{cases} x = 0 \\ v > 0 \end{cases}$ 的状态所需时间 $t = 2\ s$

代入振动方程得：$0 = 10\cos(2\omega + \dfrac{2\pi}{3})$

则有：$2\omega + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{2} \longrightarrow \omega = \dfrac{5\pi}{12}$

所求振动方程为：$\underline{x = 0.1\cos(\dfrac{5\pi}{12}t + \dfrac{2\pi}{3})\quad (SI)}$

19. 如图所示，定滑轮半径为 R，转动惯量为 J，轻绳绕过滑轮，一端与固定的轻弹簧连接，弹簧的倔强系数为 k；另一端挂一质量为 m 的物体。现将 m 从平衡位置向下拉一微小距离后放手，试证物体作简谐振动，并求其振动周期。(设绳与滑轮间无滑动，轴的摩擦及空气阻力忽略不计)。

☛ 以物体的平衡位置为原点建立如图所示的坐标，规定顺时针为转动的正方向。

物体的运动方程：$mg - T_1 = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

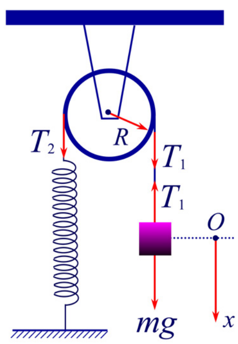
滑轮的转动方程：$(T_1 - T_2)R = J\dfrac{1}{R}\dfrac{d^2x}{dt^2}$

对于弹簧：$T_2 = k(x+x_0)$，$kx_0 = mg$

由四个方程得到：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{(\frac{J}{R^2}+m)}x = 0$$

令 $\omega^2 = \dfrac{k}{(\frac{J}{R^2}+m)}$



计算题_19 图示

物体的运动微分方程：$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ —— 物体作简谐振动

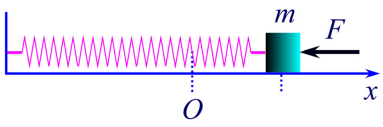
振动周期：$\underline{T = 2\pi\sqrt{(m+\frac{J}{R^2})/k}}$

20. 如图所示，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数$k=24\ N/m$，重物的质量$m=6\ kg$,重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力$F=10\ N$向左作用于物体(不计摩擦)，使之由平衡位置向左运动了$0.05\ m$时撤去力F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

☛ 设物体的运动方程为$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

恒外力所做的功即为弹簧振子的能量：$F\times 0.05=0.5\ J$

物体运动到左方最远位置时，最大弹性势能为$0.5\ J$



计算题_20 图示

即：$\frac{1}{2}kA^2=0.5\ J\longrightarrow A=0.204\ m$

$\omega^2=\frac{k}{m}=4\longrightarrow \omega=2\ rad/s$

按题目所述时刻计时，初相为$\varphi=\pi$

物体运动方程：$x=0.204\cos(2t+\pi)\ (SI)$