

大一上学期高数期末考试

一、单项选择题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设 $f(x) = \cos x(x + |\sin x|)$, 则在 $x = 0$ 处有().
 (A) $f'(0) = 2$ (B) $f'(0) = 1$ (C) $f'(0) = 0$ (D) $f(x)$ 不可导.
2. 设 $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\beta(x) = 3 - 3\sqrt[3]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时 ().
 (A) $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 但不是等价无穷小; (B) $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小;
 (C) $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小; (D) $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小.
3. 若 $F(x) = \int_0^x (2t-x)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 在区间上 $(-1,1)$ 二阶可导且 $f'(x) > 0$, 则 ().
 (A) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极大值;
 (B) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极小值;
 (C) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值, 但点 $(0, F(0))$ 为曲线 $y = F(x)$ 的拐点;
 (D) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值, 点 $(0, F(0))$ 也不是曲线 $y = F(x)$ 的拐点.
4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x) = ()$.
 (A) $\frac{x^2}{2}$ (B) $\frac{x^2}{2} + 2$ (C) $x-1$ (D) $x+2$.

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数 则 $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} (\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n-1}{n} \pi) = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (本大题有 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

9. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \sin(xy) = 1$ 确定, 求 $y'(x)$ 以及 $y'(0)$.
10. 求 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx$.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{2x-x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 求 $\int_{-3}^1 f(x)dx$.

12. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解.

四、解答题 (本大题 10 分)

14. 已知上半平面内一曲线 $y = y(x)$ ($x \geq 0$), 过点 $(0,1)$, 且曲线上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴、 y 轴、直线 $x = x_0$ 所围成面积的 2 倍与该点纵坐标之和, 求此曲线方程.

五、解答题 (本大题 10 分)

15. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ; (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

六、证明题 (本大题有 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明对任意的 $q \in [0,1]$,

$$\int_0^q f(x) dx \geq q \int_0^1 f(x) dx.$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. (提

示: 设 $F(x) = \int_0^x f(x) dx$)

解答

一、单项选择题(本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1、D 2、A 3、C 4、C

二、填空题 (本大题有 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

5. e^6 6. $\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{x})^2 + c$ 7. $\frac{\pi}{2}$ 8. $\frac{\pi}{3}$

三、解答题 (本大题有 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

9. 解: 方程两边求导

$$e^{x+y}(1+y') + \cos(xy)(xy)' - y =$$

$$y'(x) = -\frac{e^{x+y} + y \cos(xy)}{e^{x+y} + x \cos(xy)}$$

$$x=0, y=0, \quad y'(0) = -1$$

10. 解: $u = x^7 \quad 7x^6 dx = du$

$$\text{原式} = \frac{1}{7} \int \frac{(1-u)}{u(1+u)} du = \frac{1}{7} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{7} (\ln|u| - 2\ln|u+1|) + c$$

$$= \frac{1}{7} \ln|x^7| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C$$

11. 解: $\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^0 x e^{-x} dx + \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$

$$= \int_{-3}^0 x d(-e^{-x}) + \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx$$

$$= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_{-3}^0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{令 } x-1 = \sin \theta)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2e^3 - 1$$

12. 解: 由 $f(0)=0$, 知 $g(0)=0$ 。

$$g(x) = \int_0^1 f(xt) dt \stackrel{xt=u}{=} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}, \quad g'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续。}$$

13. 解: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \ln x$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{2}{x} dx} \ln x dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x + Cx^{-2}$$

$$y(1) = -\frac{1}{9} C = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$$

四、 解答题 (本大题 10 分)

14. 解: 由已知且 $y' = 2 \int_0^x y dx + y$,

将此方程关于 x 求导得 $y'' = 2y + y'$

特征方程: $r^2 - r - 2 = 0$ 解出特征根: $r_1 = -1, r_2 = 2$.

其通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

代入初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$, 得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{3}$

故所求曲线方程为: $y = \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

五、解答题 (本大题 10 分)

15. 解: (1) 根据题意, 先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 切线方程: $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} (x - x_0)$

由于切线过原点, 解出 $x_0 = e$, 从而切线方程为: $y = \frac{1}{e} x$

则平面图形面积 $A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{1}{2} e - 1$

(2) 三角形绕直线 $x = e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1 , 则 $V_1 = \frac{1}{3} \pi e^2$
曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的图形绕直线 $x = e$ 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2 = \int_0^1 \pi (e - e^y)^2 dy$$

D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3)$

六、证明题 (本大题有 2 小题, 每小题 4 分, 共 12 分)

16. 证明: $\int_0^q f(x) dx - q \int_0^1 f(x) dx = \int_0^q f(x) dx - q \left(\int_0^q f(x) dx + \int_q^1 f(x) dx \right)$
 $= (1-q) \int_0^q f(x) dx - q \int_q^1 f(x) dx$
 $\xi_1 \in [0, q], \xi_2 \in [q, 1]$
 $= q(1-q)f(\xi_1) - q(1-q)f(\xi_2) \geq 0$ (因为 $f(\xi_1) \geq f(\xi_2)$)

故有:

$$\int_0^q f(x) dx \geq q \int_0^1 f(x) dx \quad \text{证毕。}$$

17.

证: 构造辅助函数: $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq \pi$. 其满足在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 上可导. $F'(x) = f(x)$, 且 $F(0) = F(\pi) = 0$

由题设, 有 $0 = \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) = F(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x \cdot F(x) dx$,

有 $\int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = 0$, 由积分中值定理, 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $F(\xi) \sin \xi = 0$ 即 $F(\xi) = 0$

综上可知 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$, $\xi \in (0, \pi)$. 在区间 $[0, \xi]$, $[\xi, \pi]$ 上分别应用罗尔定理, 知存在

$\xi_1 \in (0, \xi)$ 和 $\xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使 $F'(\xi_1) = 0$ 及 $F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.