

2011 学年第一学期
《高等数学（2-1）》期末模拟试卷

专业班级 _____

姓 名 _____

学 号 _____

开课系室 _____ 高等数学

考试日期 _____ 2010 年 1 月 11 日

页 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							
阅卷人							

注 意 事 项

1. 请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2. 答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3. 本试卷共五道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废.

本页满分 36 分	
本 页 得 分	

一. 填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分)

- $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} =$ _____.
- $\int_{-1}^1 x(1+x^{2005})(e^x - e^{-x})dx =$ _____.
- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = x$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} =$ _____.
- 设 $f(x)$ 可导, 且 $\int_1^x tf(t)dt = f(x)$, $f(0) = 1$, 则 $f(x) =$ _____.
- 微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为 _____.

二. 选择题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 共计 16 分)

- 设常数 $k > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为 ().
(A) 3 个; (B) 2 个; (C) 1 个; (D) 0 个.
- 微分方程 $y'' + 4y = 3\cos 2x$ 的特解形式为 ().
(A) $y^* = A\cos 2x$; (B) $y^* = Ax\cos 2x$;
(C) $y^* = A\cos 2x + Bx\sin 2x$; (D) $y^* = A\sin 2x$.
- 下列结论不一定成立的是 ().
(A) 若 $[c, d] \subseteq [a, b]$, 则必有 $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$;
(B) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
(C) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则对任意常数 a 都有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$;
(D) 若可积函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x tf(t)dt$ 也为奇函数.
- 设 $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + 3e^{\frac{1}{x}}}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ().
(A) 连续点; (B) 可去间断点;
(C) 跳跃间断点; (D) 无穷间断点.

三. 计算题 (共 5 小题, 每小题 6 分, 共计 30 分)

本页满分 12 分	
本 页 得 分	

1. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$.

本页满分 12 分	
本 页 得 分	

3. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线的方程.

4. 设 $F(x) = \int_0^x \cos(x^2 - t) dt$, 求 $F'(x)$.

本页满分 15 分	
本 页 得 分	

5. 设 $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\Lambda (2n)}}{n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

四. 应用题（共 3 小题，每小题 9 分，共计 27 分）

1. 求由曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 与该曲线过坐标原点的切线及 x 轴所围图形的面积.

本页满分 18 分	
本 页 得 分	

2. 设平面图形 D 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 试求 D 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.

3. 设 $a > 1$, $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时 $t(a)$ 最小? 并求最小值.

本页满分 7 分	
本页得分	

五. 证明题 (7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导且

$$f(0)f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

试证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

一. 填空题 (每小题 4 分, 5 题共 20 分):

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$

2. $\int_{-1}^1 x(1+x^{2005})(e^x - e^{-x})dx = \frac{4}{e}.$

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = x$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = e - 1.$

4. 设 $f(x)$ 可导, 且 $\int_1^x tf(t)dt = f(x)$, $f(0)=1$, 则 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}.$

5. 微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}.$

二. 选择题 (每小题 4 分, 4 题共 16 分):

1. 设常数 $k > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为 (B).
(A) 3 个; (B) 2 个; (C) 1 个; (D) 0 个.

2. 微分方程 $y'' + 4y = 3\cos 2x$ 的特解形式为 (C)
(A) $y^* = A\cos 2x$; (B) $y^* = Ax\cos 2x$;
(C) $y^* = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$; (D) $y^* = A\sin 2x$

3. 下列结论不一定成立的是 (A)

(A) (A) 若 $[c, d] \subseteq [a, b]$, 则必有 $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$;

(B) (B) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

(C) (C) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则对任意常数 a 都有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx;$$

(D) (D) 若可积函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x tf(t)dt$ 也为奇函数.

- $$f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$
4. 设 $2 + 3e^{\frac{1}{x}}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (C) .
 (A) 连续点; (B) 可去间断点;
 (C) 跳跃间断点; (D) 无穷间断点.

三. 计算题 (每小题 6 分, 5 题共 30 分):

1. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$.

解: 设 $x^2 = t$, 则 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} t e^{-t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^2 t d e^{-t}$ -----2

$$= -\frac{1}{2} \left[t e^{-t} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt \right]$$
 -----2
$$= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-t} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2}$$
 -----2

2. 计算不定积分 $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$.

解: $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4} \int x d(\frac{1}{\cos^4 x}) = \frac{1}{4} \left[\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{dx}{\cos^4 x} \right]$ -----3

$$= \frac{x}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{4} \int (\tan^2 x + 1) d \tan x$$

$$= \frac{x}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{12} \tan^3 x - \frac{1}{4} \tan x + C$$
 -----3

3. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线的方程.

解: 切点为 $(a(\frac{\pi}{2} - 1), a)$ -----2

$$k = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a \cos t}{a(1 - \cos t)} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$
 -----2

切线方程为 $y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$ 即 $y = x + (2 - \frac{\pi}{2})a$. -----2

4. 设 $F(x) = \int_0^x \cos(x^2 - t) dt$, 则 $F'(x) = 2x \cos x^2 - (2x - 1) \cos(x^2 - x)$.

5. 设 $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}}{n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: $\ln x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i}{n})$ -----2

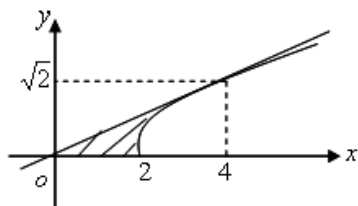
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i}{n}) \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx \quad \text{-----}2$$

$$= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x} dx = 2 \ln 2 - 1 \quad \text{-----}2$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$$

四. 应用题 (每小题 9 分, 3 题共 27 分)

1. 求由曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 与该曲线过坐标原点的切线及 x 轴所围图形的面积.



解:

设切点为 (x_0, y_0) , 则过原点的切线方程为 $y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}} x$,

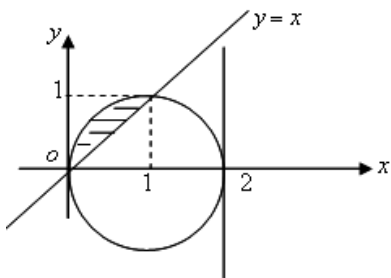
由于点 (x_0, y_0) 在切线上, 带入切线方程, 解得切点为 $x_0 = 4, y_0 = \sqrt{2}$. -----3

过原点和点 $(4, \sqrt{2})$ 的切线方程为 $y = \frac{x}{2\sqrt{2}}$ -----3

$$\text{面积 } s = \int_0^{\sqrt{2}} (y^2 + 2 - 2\sqrt{2}y) dy = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{-----}3$$

$$\text{或 } s = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{2}} x dx + \int_2^4 (\frac{1}{2\sqrt{2}} x - \sqrt{x-2}) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. 设平面图形 D 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 试求 D 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.



解: 法一: $V = V_1 - V_2$

$$= \int_0^1 \pi [2 - (1 - \sqrt{1-y^2})]^2 dy - \int_0^1 \pi (2-y)^2 dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} - (y-1)^2] dy \quad \text{-----}6$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(y-1)^3 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{-----} 3$$

法二: $V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$
 $= 2\pi \int_0^1 (2-x)\sqrt{2x-x^2}dx - 2\pi \int_0^1 (2x-x^2)dx \quad \text{-----} 5$

$$= \pi \int_0^1 \left[(2-2x)\sqrt{2x-x^2} + 2\sqrt{2x-x^2} \right] dx - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + 2 \times \frac{1}{4}\pi \times 1 - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi \quad \text{-----} 4$$

3. 设 $a > 1$, $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时 $t(a)$ 最小? 并求最小值.

解: 由 $f'(t) = a^t \ln a - a = 0$ 得 $t(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}$. ----- 3

又由 $t'(a) = \frac{\ln \ln a - 1}{a(\ln a)^2} = 0$ 得唯一驻点 $a = e^e$ ----- 3

当 $a > e^e$ 时, $t'(a) > 0$; 当 $a < e^e$ 时, $t'(a) < 0$, 于是 $a = e^e$ 为 $t(a)$ 的极小值点 ----- 2

故 $a = e^e$ 为 $t(a)$ 的最小值点, 最小值为 $t(e^e) = 1 - \frac{\ln e}{e} = 1 - \frac{1}{e}$. ----- 1

五. 证明题 (7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$,

试证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

证明: 设 $F(x) = f(x) - x$, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续在 $(0, 1)$ 可导, 因 $f(0) = f(1) = 0$,
 有 $F(0) = f(0) - 0 = 0, F(1) = f(1) - 1 = -1$, ----- 2

又由 $f(\frac{1}{2}) = 1$, 知 $F(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上 $F(x)$ 用零点定理,

根据 $F(1)F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$, ----- 2

可知在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内至少存在一点 η , 使得 $F(\eta) = 0, \eta \in (\frac{1}{2}, 1) \subset (0, 1)$,

$F(0) = F(\eta) = 0$ 由 ROLLE 中值定理得 至少存在一点 $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$ 使得
 $F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) - 1 = 0$, 证毕. ----- 3