第四节　隐函数和参数方程求导

一、隐函数的导数

若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数，则称此函数为隐函数.

由 $y=f(x)$ 表示的函数，称为显函数.

例如，$x-y^3-1=0$　显函数　$y=\sqrt[3]{1-x}$

$y^5+2y-x-3x^7=0$ 可确定 y 是 x 的函数

(不能显化)

隐函数求导方法：$F(x,y)=0$

$\Downarrow$ 两边对 x 求导

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$ (含导数 y' 的方程)

例1. 求由方程$y^5+2y-x-3x^7=0$确定的隐函数

$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

答案: $\because$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$

因 $x=0$ 时 $y=0$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

例2. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解：椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即 $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

说明：

1) 幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 求导，用**对数求导法**：

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{u'v}{u}$$

$$y' = u^{v} \left(v' \ln u + \frac{u'v}{u} \right)$$

注意： $$y' = \underline{u^{v} \ln u \cdot v'} + \underline{v u^{v-1} \cdot u'}$$

按指数函数复合求导公式

按幂函数复合求导公式

例3. 求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数 .

答案

$$\therefore \qquad y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

2) 有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例如, $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b}\quad (a>0,\, b>0,\, \dfrac{a}{b}\neq 1)$

$\Downarrow$ 两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

$\Downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

又如，$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$$(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$$

$\Downarrow$ 两边取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$\Downarrow$ 对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

二、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数

关系, $\varphi(t), \psi(t)$ 可导, 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2 \neq 0$, 则

$\varphi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)

若上述参数方程中$\varphi(t),\psi(t)$二阶可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则由它确定的函数$y=f(x)$可求二阶导数.

利用新的参数方程
$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$$

可得
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

例4. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

注意： 已知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\cancel{=}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$

例5. 1、已知: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2 \\ y=1-t \end{cases}$, 求: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-1}{t}$; $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{t^2}\Big/ t=\dfrac{1}{t^3}$

2、设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=t f'(t)-f(t) \end{cases}$, 且 $f''(t)\neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t f''(t)}{f''(t)}=t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$

练习

1. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定，求 $y'(0)$, $y''(0)$.

解：方程两边对 x 求导，得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \qquad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \qquad ②$$

当 $x = 0$ 时，$y = 1$，故由 ① 得 $y'(0) = -\frac{1}{e}$

再代入 ② 得 $y''(0) = \frac{1}{e^2}$

2. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解： 方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$

补充：

设 $y=(\sin x)^{\tan x}+\dfrac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{(2+x)^2}}$，求 y'.