第七节　　无穷小的比较

已知，两个无穷小的+、-、×仍旧是无穷小，
两个无穷小的商，却会呈现不同的情况.
例如，当$x\to 0$时，$\sin x$, $2x$, x^3都是无穷小，

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^3}=+\infty$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，
反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度.
当$x\to 0$时，$x^3\to 0$ 比$2x\to 0$ 要“快”，
或者说 $2x\to 0$ 比 $x^3\to 0$ 要“慢”，
而$\sin x\to 0$与$x\to 0$“快慢相仿”.

设α,β是在同一自变量的变化过程中的无穷小，

且$\alpha\neq0$, 记 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 是在这个变化过程中的极限，

定义如下：

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$, 称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小,记作$\beta=O(\alpha)$

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$, 称$\beta$是关于$\alpha$的$k$ 阶的无穷小;

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小,记作$\beta\sim\alpha$

注: 等价无穷小是同阶无穷小当$c=1$时的特例

根据以上定义，我们知道

当$x\to 0$时有　　$\sin x \sim x$,　　$x^3 = o(x)$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,

所以当$x\to 0$时，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小，

或者$1-\cos x = O(x^2)$.

当$x\to 0$时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

等价无穷小相关定理.

定理1　β与α是等价无穷小的

充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$

当$x\to 0$时，$\sin x=x+o(x)$，$\tan x=x+o(x)$，

$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x)$

定理2 若α～α′，β～β′，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，

则 $$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

证 $$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\quad.$$

说明，在求两个无穷小之比(即求“$\frac{0}{0}$”型)极限时，分子、分母均可用适当的等价无穷小代替，从而使计算简便快捷。

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

解：　$x\to 0$时，$\sin x \sim x$，

有：　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

注:定理2的等价代换只适应于乘、除形式的运算

不可用于加减运算（见下例）

例2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n(n+1)}=1$

但不能用 $\dfrac{1}{n}$ 的等价无穷小 $\dfrac{1}{n+1}$ 来代换 $\dfrac{1}{n}$.

事实上，若作代换，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}0=0$$

显然，这个结果是错误的.

注*：若当$x\to 0$时, $f(x)=O(x^{\alpha}), g(x)=O(x^{\beta}),$

$\alpha>\beta>0$

则 $f(x)\pm g(x)=O(x^{\beta}),$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=O(x^{\alpha-\beta}).$

$f(x)\cdot g(x)=O(x^{\alpha+\beta})$

事实上, 设当$x\to 0$时, $\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}}\to A\neq 0, \dfrac{g(x)}{x^{\beta}}\to B\neq 0.$

从而, $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x^{\alpha+\beta}}=\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}}\cdot\dfrac{g(x)}{x^{\beta}}\to A\cdot B\neq 0.$

***例** 当$x \to 0$时, $tgx - sinx$是x的几阶无穷小量?

解:

由于 $tgx - sinx = tgx(1 - cosx)$

因 $tgx \sim x$, 而 $1 - cosx = O(x^2)$.

故 $tgx - sinx = tgx(1 - cosx) = O(x^3)$.

注. 用符号“$\frac{0}{0}$”表示“无穷小/无穷小”的极限问题.

用符号“$\frac{\infty}{\infty}$”表示“无穷大/无穷大”的极限问题.

用符号“$0\ \infty$”表示“无穷小×无穷大”的极限问题.

三种类型的极限值不一定为无穷大、无穷小，甚至极限不一定存在，称为未定型。

三种类型可以互化.

比如，$$“0\cdot\infty” = “0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\infty}}” = “\frac{0}{\frac{1}{\infty}}” = “\frac{0}{0}”$$

作业

- **P52：1 (4,6), 2(2,3), 4(4)**
- **P55: 2, 3(2), 4(1,2)**
- ***补充：当x大于0且趋于0时，下列函数是x的几阶无穷小？**

(1) $1-\cos(x^2)$ **(2)** $x+x^2$

(3) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **(4)** $\sqrt{1+x^2}-1$