单元测试参考答案

# 第四章 不定积分

一、D B C C

解析

1、逐个检验

2、 $f'(x)=\sin x$ ， $f(x)=-\cos x+C$，

则 $\int f(x)dx=\int(-\cos x+C)dx=-\sin x+Cx+C'$

3、 $\int f(ax^2+b)xdx=\frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)=\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$

4、 $\int 2(x-1)dx=2\int(x-1)d(x-1)=(x-1)^2+C_1$

$\int \ln xdx=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C_2$

因为 $F(x)$ 连续，当 $x\to 1$ 时，需要 $C_1=-1+C_2$

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

5、 $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C$

6、 $y=\ln|x|+1$

7、 $\frac{1}{2}x^2+x+1$

8、 $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

解析

5、 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}dx+\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C$$

杭电《高等数学》课程组

6、$y'=\frac{1}{x}$， $y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$，将$x=e^2,y=3$代入得$C=1$,故

$y=\ln|x|+1$

7、 $f'(\tan^2 x)=\tan^2 x+1$， $f'(t)=t+1$，

故 $f'(x)=x+1, f(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$，

代入 $f(0)=1$，得$C=1$，故 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$

8、对$\int xf(x)dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$两边同时关于$x$求导，则

$$xf(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

故 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$，

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{1/2}d(x^2+1)=\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$$

三、求不定积分(每题 6 分，共 48 分)

9、 原式$=\int\frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}dx=\int\frac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx=\int(\frac{1}{x}+x^{-5})dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C$

10、 原式$==\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$$=\int xd\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx+C$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+C$$

11、 原式$=\int\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}d(1+\sin^2 x)$，令$t=\sqrt{1+\sin^2 x}$,则$\sin^2 x=t^2-1$

$$原式=\int\frac{t}{1+t^2}d(t^2)=\int\frac{2t^2}{1+t^2}dt=2\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=2\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$=2(t-\arctan t)+C=2\sqrt{1+\sin^2 x}-2\arctan\sqrt{1+\sin^2 x}+C$$

杭电《高等数学》课程组

12、原式= $\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\arctan x dx = \int \arctan x dx - \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$

$$= x\arctan x - \int x d\arctan x - \int \arctan x d\arctan x$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

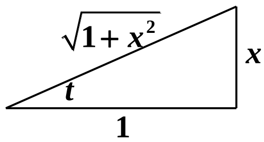
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

13、令 $x=\tan t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},\ dx=\sec^2 tdt$，

原式= $\int \frac{\sec^2 tdt}{(2\tan^2 t+1)\sec t} = \int \frac{\cos tdt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t)+C$

$$= \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$




14、原式= $\int \frac{\sin xdx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = \int \frac{-d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

令 $t=\cos x$，则

原式= $\int \frac{dt}{(t+2)(t^2-1)}$

令 $\frac{1}{(t+2)(t^2-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}$，则

$1 = A(t^2-1)+B(t+2)(t+1)+C(t+2)(t-1)$，比较系数得

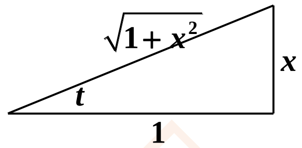
$$A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=-\frac{1}{2}$$

原式= $\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+2}dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+C$$

15、令 $t=\arctan x,\ \ x=\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，$dx=\sec^2 tdt$，




原式= $\int\frac{\tan t\, e^t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt=\int e^t\sin tdt$

而 $\int e^t\sin tdt=\int \sin tde^t=e^t\sin t-\int e^t\cos tdt=e^t\sin t-\int\cos tde^t$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin tdt$$

故原式= $\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}(e^t\sin t-e^t\cos t)+C=\frac{e^{\arctan x}}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$

16、令 $t=\sqrt{e^{2x}+1},\ \ x=\frac{1}{2}\ln(t^2-1)$

原式= $\int\frac{\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2-1}}{t}dt=\int\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}+1}\right|+C$

四、计算下列各题（每题 7 分，共 28 分）

17、令 $t=e^x$，则 $x=\ln t$，故 $f'(t)=a\sin\ln t+b\cos\ln t$，

即 $f'(x)=a\sin\ln x+b\cos\ln x$，于是 $f(x)=\int(a\sin\ln x+b\cos\ln x)dx$.

$\int\sin\ln xdx=x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx=x\sin\ln x-x\cos\ln x-\int\sin\ln xdx$

故 $\int\sin\ln xdx=\frac{1}{2}(x\sin\ln x-x\cos\ln x)+C_1$

$\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+\int\sin\ln xdx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx$

故 $\int\cos\ln xdx=\frac{1}{2}(x\sin\ln x+x\cos\ln x)+C_2$

于是 $f(x)=\int(a\sin\ln x+b\cos\ln x)dx=\frac{a+b}{2}x\sin\ln x+\frac{b-a}{2}x\cos\ln x+C$

18、由于$(\frac{f(x)}{xe^x})'=\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}$，则$\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx=\frac{f(x)}{xe^x}+C$.

19、已知$\int f(x)dx=\frac{\cos x}{x}+C$，$f(x)=(\frac{\cos x}{x})'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，

则$\int x^3f'(x)dx=\int x^3df(x)=x^3f(x)-3\int x^2f(x)dx$

$$=x^3\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-3\int x^2\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\int(x\sin x+\cos x)dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x-3\int xd\cos x+3\sin x$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x-3(x\cos x-\int\cos xdx)+3\sin x$$

$$=(6-x^2)\sin x-4x\cos x+C$$

20、$F'(x)=f(x)$，$F(x)F'(x)=\sin^2 2x$，两边同时求积分

$$\int F(x)F'(x)dx=\int\sin^2 2xdx$$

$$\int F(x)dF(x)==\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)+C$$

而$F(0)=1,F(x)\geq 0$，则$C=\frac{1}{2},F^2(x)=x-\frac{1}{4}\sin 4x+1$，

故$F(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}$，$f(x)=F'(x)=\frac{1-\cos 4x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$.

杭电——《高等数学》课程组