

# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



---

## ANTENAS

### COMPUTACIONAL WORK

*Autores:*

Francisco Freiria

João Morais

*Números:*

97236

83916

*Docente: Mário Silveirinha*

---

8 de Maio de 2020

# Conteúdo

1	Questão 1 e 2	2
2	Questão 3	8
3	Questão 4	9
4	Questão 5	12
5	Questão 6	13
6	Questão 7	14

# Capítulo 1: Questão 1 e 2

Apresentamos a representação gráfica da corrente, seja parte imaginária, real ou o valor absoluto, para uma antena dipolo de vários comprimentos. Considerámos que os terminais da antena estão em curto-circuito, resultando em  $\underline{Z}_L = 0$ , e ângulo de incidência foi de  $90^\circ$ . Sendo que o este método para calcular a corrente é um método iterativo d, a experiencia foi feita para N interações, com  $N = [21, 51, 71]$ . Os vários valores de comprimento da antena dipolo são  $L = [0.47, 1, 1.5] \lambda$ .

O método iterativo para o cálculo da corrente é dado por, onde C1 e C2 são constantes desconhecidas:

$$\sum_{n=1}^{N-2} Z_{mn} I_n + C_1 \cos(k_0 z_m) + C_2 \sin(k_0 z_m) - j I_{(N-1)/2} \frac{\underline{Z}_L}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_m|) = -\frac{j E_0}{\eta_0 k_0 \sin \theta} e^{j k_0 \cos \theta z_m}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

Figura 1.1: Equação 1.

As entradas da matriz  $Z_{mn}$  são dadas por:

$$Z_{mn} = \int_{z_n - \Delta/2}^{z_n + \Delta/2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-j k_0 \sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}}}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$

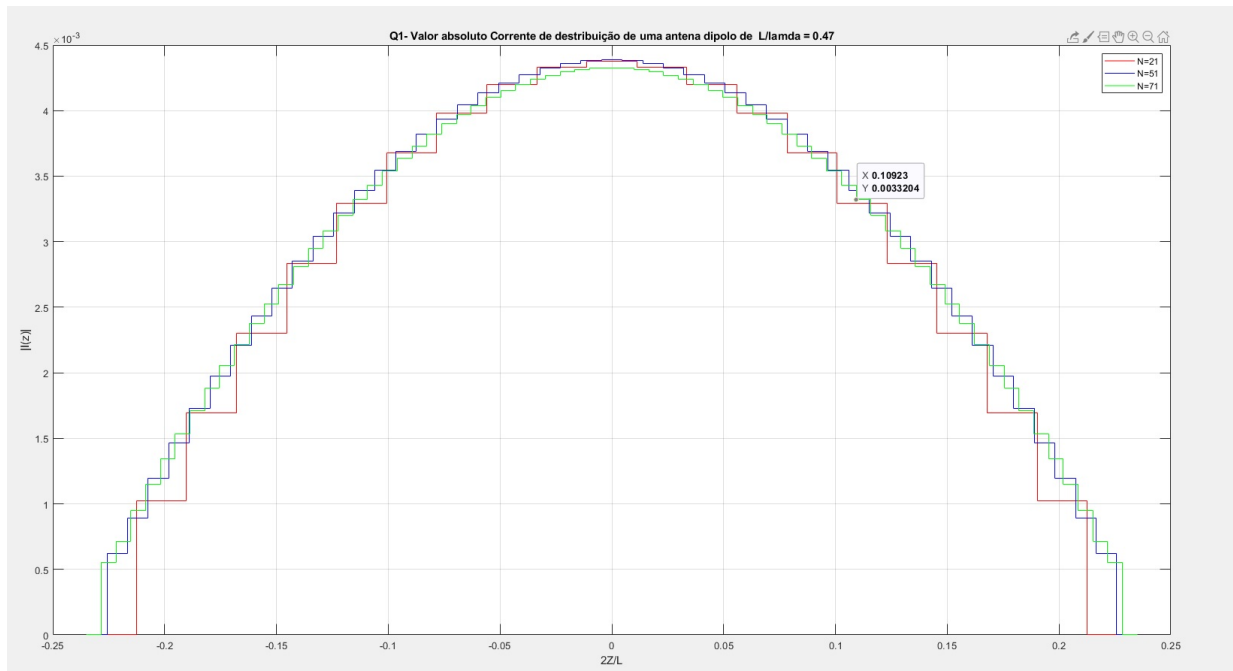
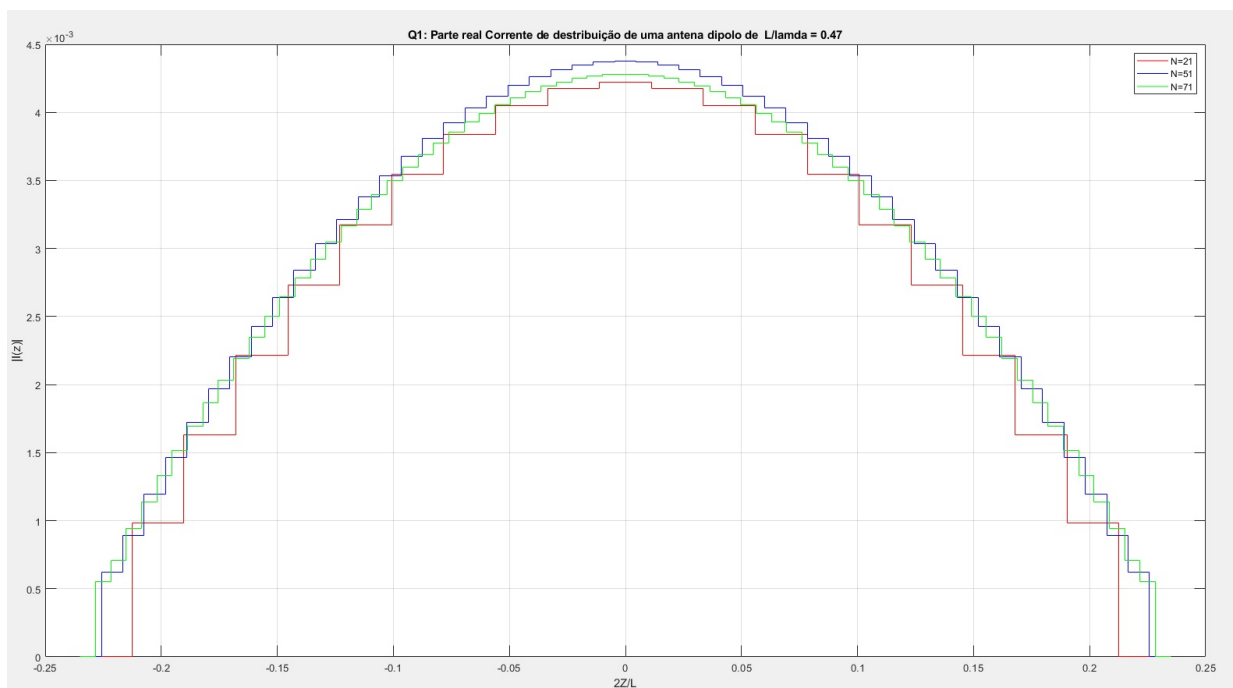
Figura 1.2: Equação 2: Calculo de  $Z_{mn}$

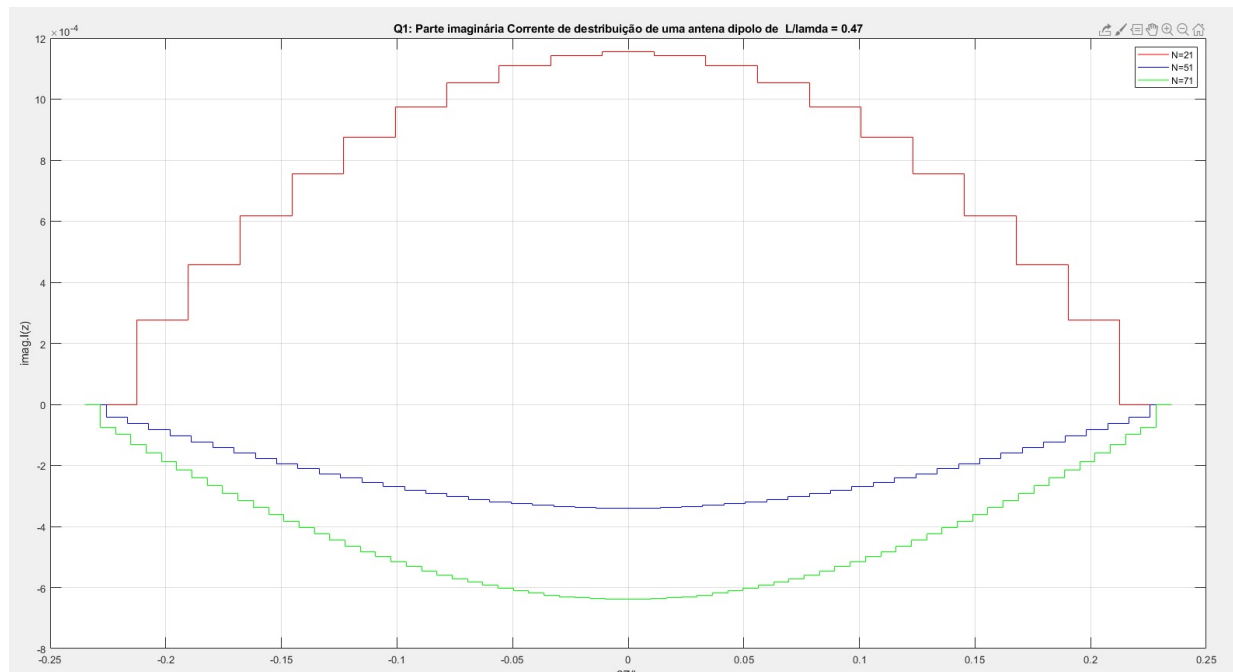
A Equação 1 pode ser escrita na forma matricial dada por:

$$\begin{pmatrix} Z_{01} & \dots & Z_{0,(N-1)/2} - j \frac{\underline{Z}_L}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_0|) & \dots & Z_{0,N-2} & \cos(k_0 z_0) & \sin(k_0 z_0) \\ Z_{11} & \dots & Z_{1,(N-1)/2} - j \frac{\underline{Z}_L}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_1|) & \dots & Z_{1,N-2} & \cos(k_0 z_1) & \sin(k_0 z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N-1,1} & \dots & \underbrace{Z_{N-1,(N-1)/2} - j \frac{\underline{Z}_L}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_{N-1}|)}_{\text{column } (N-1)/2} & \dots & Z_{N-1,N-2} & \cos(k_0 z_{N-1}) & \sin(k_0 z_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_{(N-1)/2} \\ \dots \\ I_{N-2} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = -\frac{j E_0}{\eta_0 k_0 \sin \theta} \begin{pmatrix} e^{j k_0 \cos \theta z_0} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ e^{j k_0 \cos \theta z_{N-1}} \end{pmatrix}$$

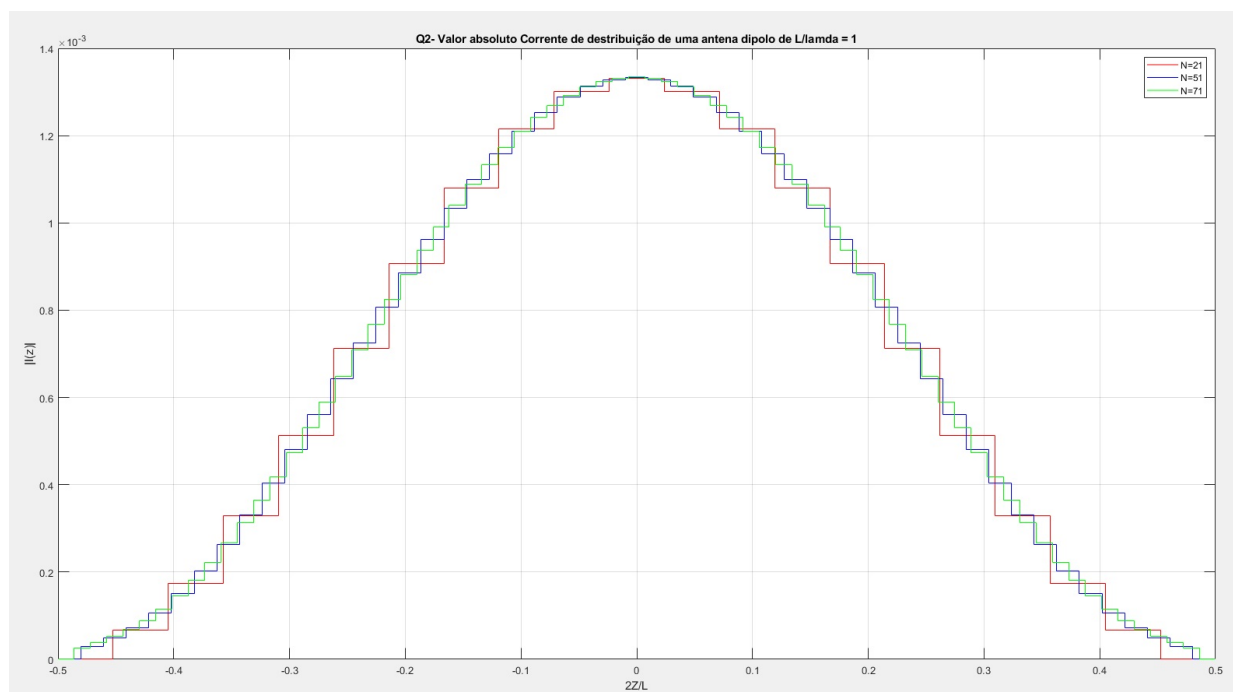
Figura 1.3: Matrix 1.

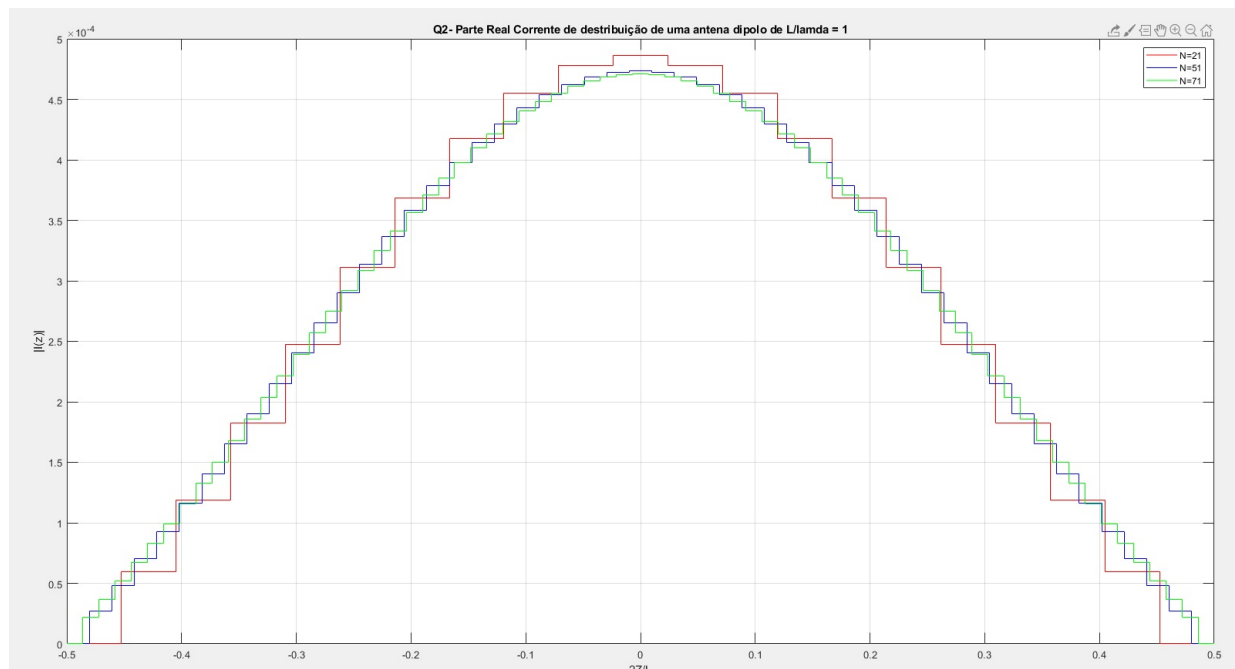
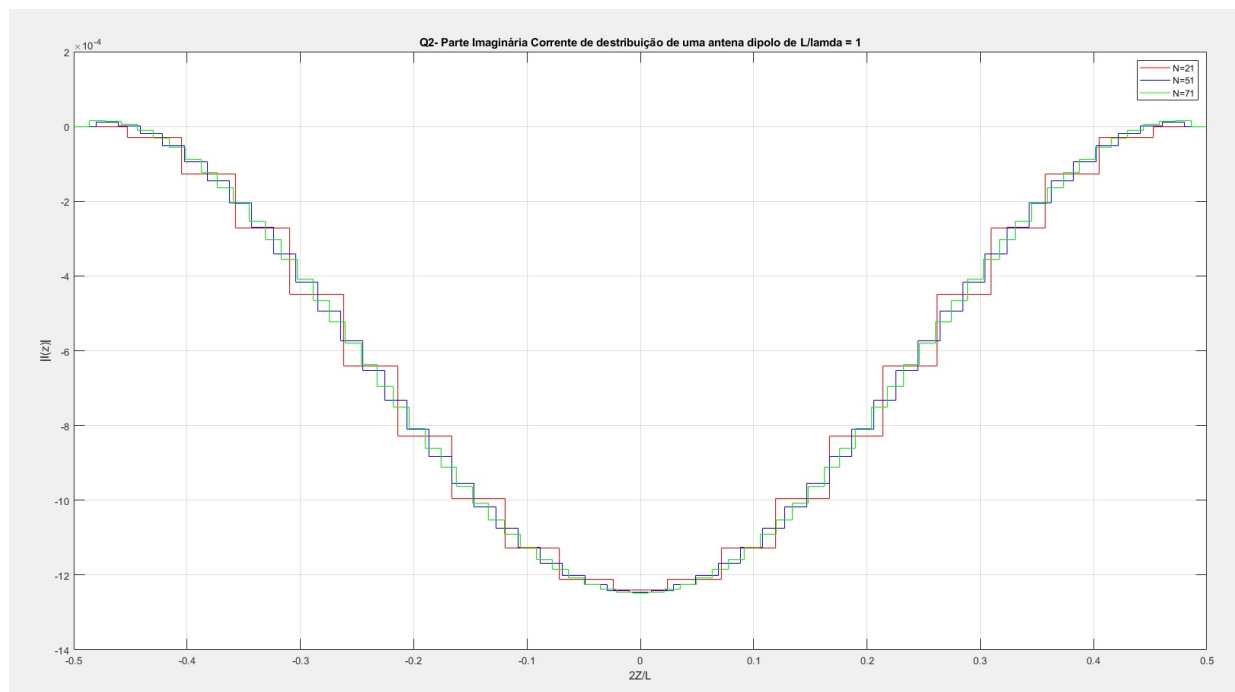
## RESULTADOS DA QUESTÃO 1:

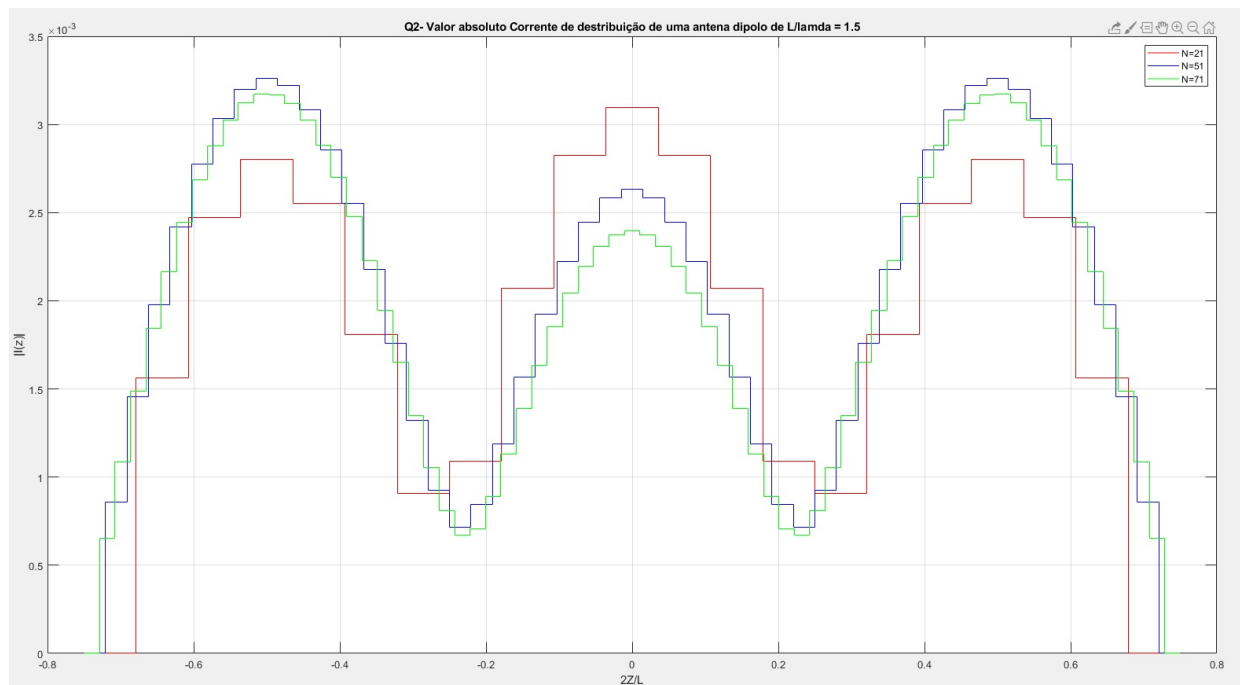
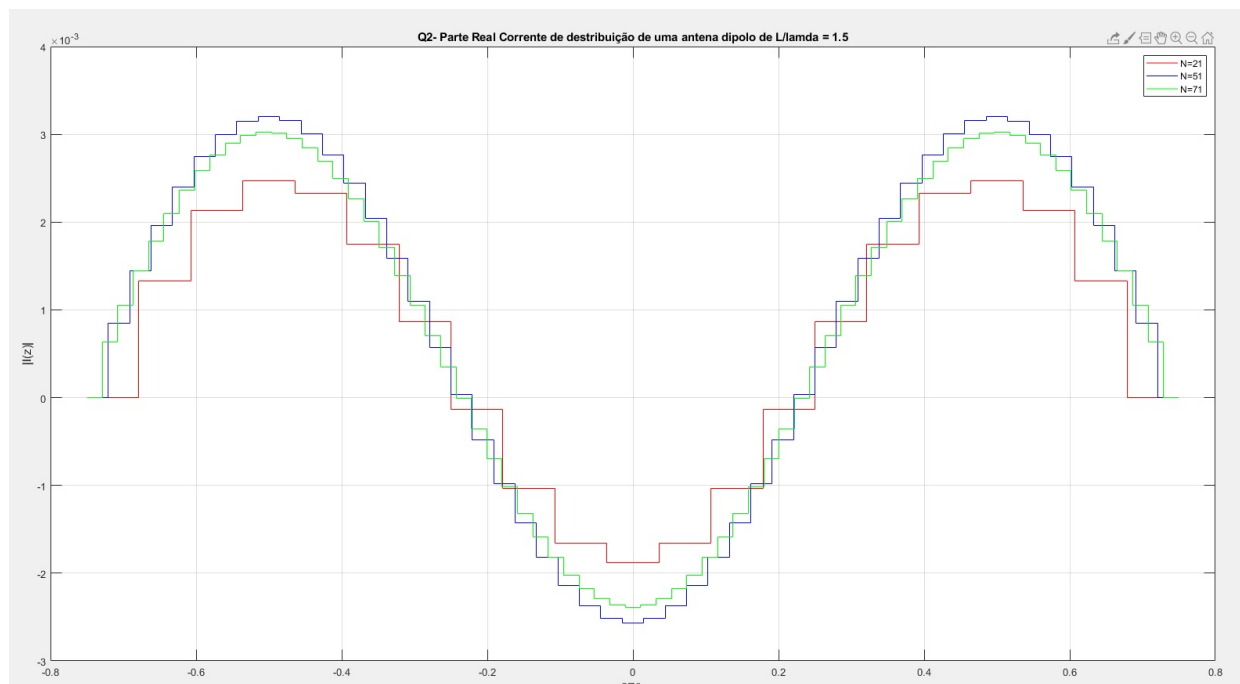
Figura 1.4: Valor absoluto da corrente para  $L = 0.47 \cdot \lambda$ Figura 1.5: Valor real da corrente para  $L = 0.47 \cdot \lambda$

Figura 1.6: Valor imaginário da corrente para  $L = 0.47 \cdot \lambda$ 

## RESULTADOS DA QUESTÃO 2:

Figura 1.7: Valor absoluto da corrente para  $L = 1 \cdot \lambda$

Figura 1.8: Valor absoluto da corrente para  $L = 1 \cdot \lambda$ Figura 1.9: Valor absoluto da corrente para  $L = 1 \cdot \lambda$

Figura 1.10: Valor absoluto da corrente para  $L = 1.5\lambda$ Figura 1.11: Valor absoluto da corrente para  $L = 1.5\lambda$

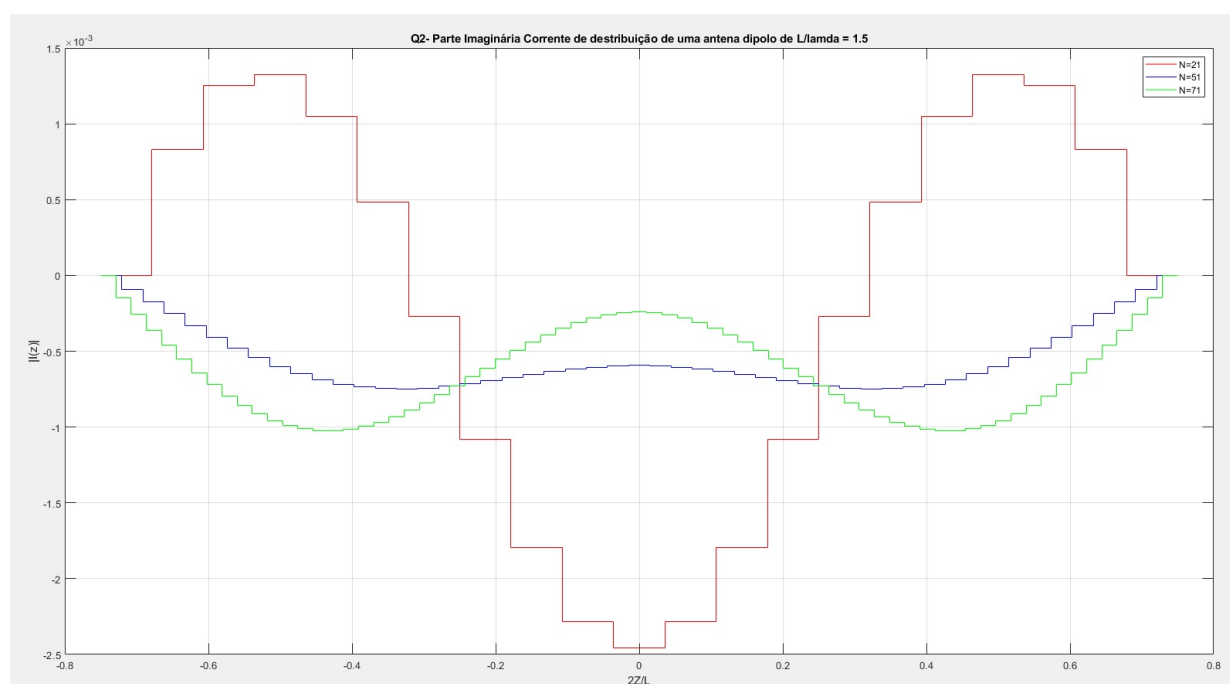


Figura 1.12: Valor absoluto da corrente para  $L = 1.5 \cdot \lambda$



## Capítulo 2: Questão 3

Para o calculo da tensão induzida ao terminais da antena,  $V_{oc}$  recorreu-se à seguinte expressão:

$$V_{oc} = Z_L I(0) \quad (2.1)$$

Uma vez que os terminais da antena estão em circuito aberto  $I(0)=0$  e  $Z_L = \infty$ .) e considerando que a corrente no ponto de alimentação é  $I(0)=I(N-1/2)$  através da Equação 3 podémos inferir a Matriz 2.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-2} Z_n(z) I_n + C_1 \cos(k_0 z) + C_2 \sin(k_0 z) - j I_{(N-1)/2} \frac{Z_L}{2\eta_0} \sin(k_0 |z|) \\ &= -\frac{j E_0}{\eta_0 k_0 \sin \theta} e^{j k_0 \cos \theta z} \end{aligned}$$

Figura 2.1: Equação 3.

$$\begin{pmatrix} Z_{01} & \dots & -j \frac{1}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_0|) & \dots & Z_{0,N-2} & \cos(k_0 z_0) & \sin(k_0 z_0) \\ Z_{11} & \dots & -j \frac{1}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_1|) & \dots & Z_{1,N-2} & \cos(k_0 z_1) & \sin(k_0 z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N-1,1} & \dots & -j \frac{1}{2\eta_0} \sin(k_0 |z_{N-1}|) & \dots & Z_{N-1,N-2} & \cos(k_0 z_{N-1}) & \sin(k_0 z_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ V_{oc} \\ \dots \\ I_{N-2} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = -\frac{j E_0}{\eta_0 k_0 \sin \theta} \begin{pmatrix} e^{j k_0 \cos \theta z_0} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ e^{j k_0 \cos \theta z_{N-1}} \end{pmatrix}$$

Figura 2.2: Matrix 2.

## Capítulo 3: Questão 4

Através dos cálculos realizados para a dedução de um método iterativo para o calculo de  $\underline{V}_{oc}$  foi possível nesta questão obter os gráficos polares da tensão  $\underline{V}_{oc}$  em função do ângulo de incidência  $\Theta$  também para vários comprimentos de dipolos, com  $L=[0.47, 0.75, 1.5] * \lambda$  com  $N = 51$  steps.

Para podermos comparar a veracidade dos resultados obtidos por este método iterativo, traçamos o gráfico para os valores de  $\underline{V}_{oc}$  teóricos, ou seja, através de uma aproximação da sinusoidal. O conjunto de equações que se seguem representam os cálculos necessários para obter um  $\underline{V}_{oc}$  teórico.

A tensão  $\underline{V}_{oc}$  induzida pela onda incidente nos terminais da antena quando estes estão em circuito aberto:

$$\underline{V}_{oc} = \mathbf{h}_e^r \cdot \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}}.$$

O campo elétrico total é a superposição da onda incidente e da onda dispersa:

$$E_z = E_z^{\text{inc}} + E_z^s,$$

$E_z^{\text{inc}}$  é o componente Z da onda plana incidente, dado por

$$E_z^{\text{inc}} = E_0 \sin \theta e^{jk_0 z \cos \theta}$$

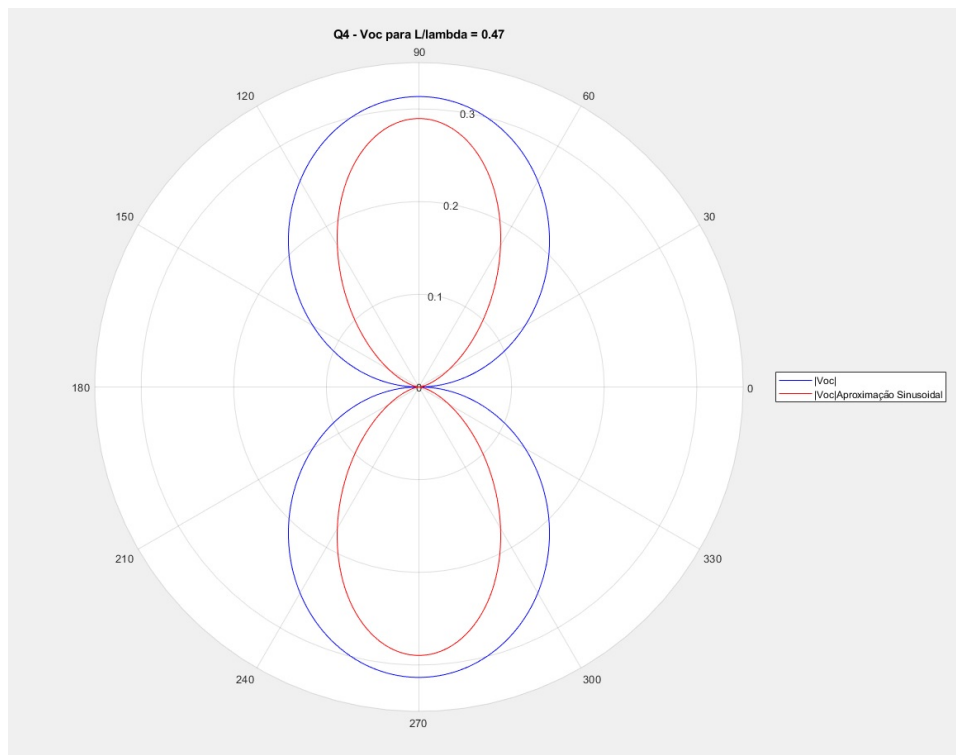
Sabendo que a aproximação da corrente sinusoidal pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\underline{I}(z') = \underline{I}_m \sin k_0 \left( \frac{L}{2} - |z'| \right)$$

Podemos inferir apartir da equação anterior assim a expressão do campo magnético:

$$h_e(\theta) = \frac{\sin \theta}{\underline{I}(0)} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \underline{I}_m \sin k_0 \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) e^{+jk_0 z' \cos \theta}.$$

## RESULTADOS DA QUESTÃO 4:

Figura 3.1:  $V_{oc}$  para  $L = 0.47 \cdot \lambda$

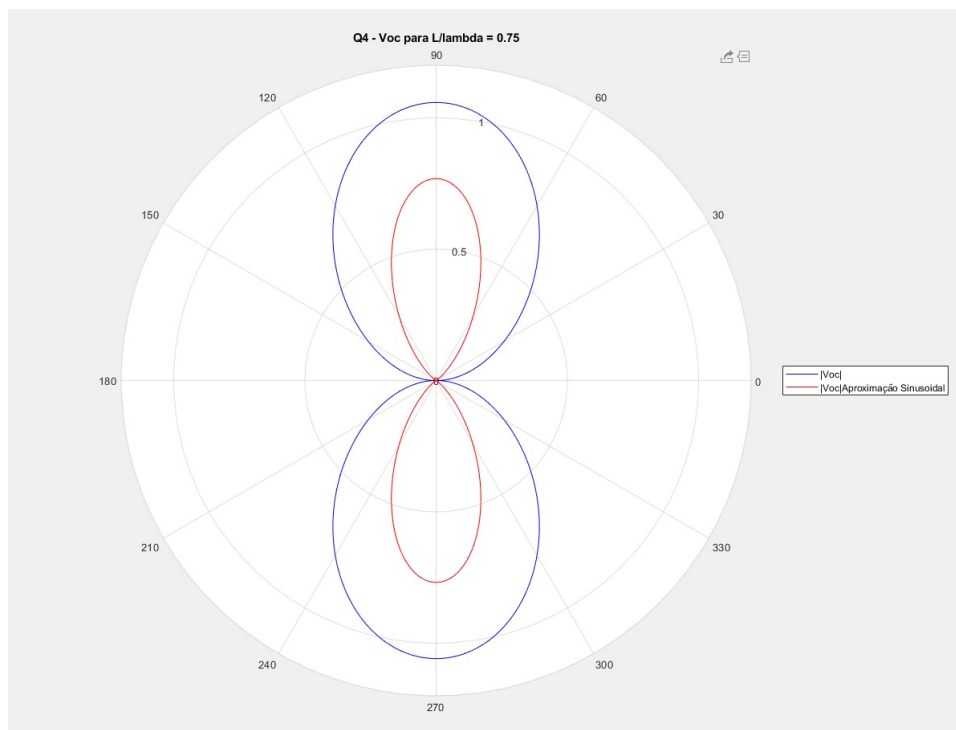


Figura 3.2:  $V_{oc}$  para  $L = 0.75 \cdot \lambda$

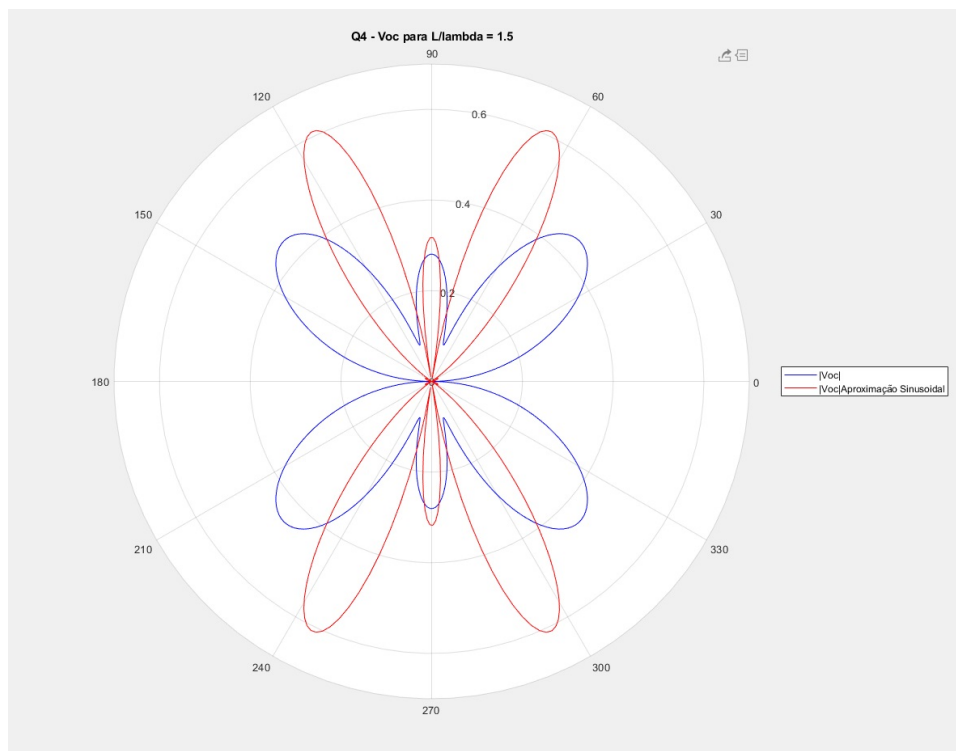


Figura 3.3:  $V_{oc}$  para  $L = 1.5 \cdot \lambda$

## Capítulo 4: Questão 5

Utilizando os calculos anteriormente realizados na Questão 1, é possível encontrar a corrente no ponto de alimentação da antena, quando seus terminais estão em curto-circuito obtendo assim um  $I_{sc}$ . E utilizando o procedimento de Q4, é possível encontrar a tensão  $\underline{V}_{oc}$  quando os terminais da antena estão em circuito aberto.

Conciderando o circuito equivalente da antena receptora, podemos obter a impedância da antena para um dipolo. Foi caulculada a impedancia recorrendo a:

$$Z_a = \frac{V_{oc}}{I_{(N-1/2)}} \quad (4.1)$$

Tabela 4.1: valores de L onde a antena é resonante

N	$\underline{Z}_a = R_a + jX_a$
21	61.9731 -24.4436i
51	71.1621 - 5.6087i
71	73.6653 - 2.9662i

## Capítulo 5: Questão 6

Nesta questão é nos pedido para calcular a impedância quando os terminais da antena estão em circuito aberto,  $\underline{Z}_a = R_a + jX_a$  (resistência e reatância) face aos diferentes comprimentos da antena  $L/\lambda$  no intervalo  $0 < L/\lambda < 1.3$ .

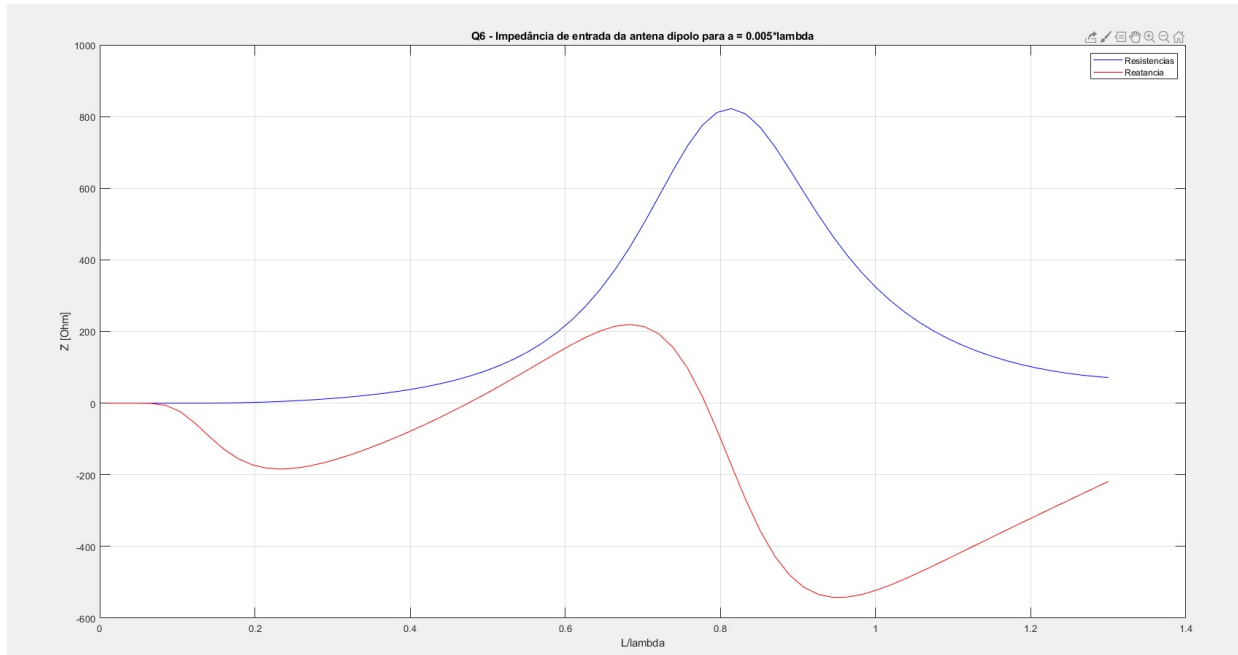


Figura 5.1:  $\underline{Z}_a = R_a + jX_a$

Tabela 5.1: valores de L onde a antena é ressonante

	L
1	0.4750
2	0.7807

## Capítulo 6: Questão 7

Na questão 7 calculamos a tensão  $|V|$  induzida nos terminais da antena (numéricamente com  $N = 51$ ) em função do ângulo  $\Theta$  para os valores de  $L=0,47\lambda$  e  $L=0,75\lambda$  com  $a=0,005\lambda$ . Foi utilizado assim um valor a impedância  $Z_L = 73\Omega$ . Represente no mesmo gráfico polar o resultado previsto pelo circuito equivalente da antena com os parâmetros  $V$  e  $Z$  a obtidos como nas perguntas anteriores. Calculamos ainda o valor da tensão  $|V|$  teorico.

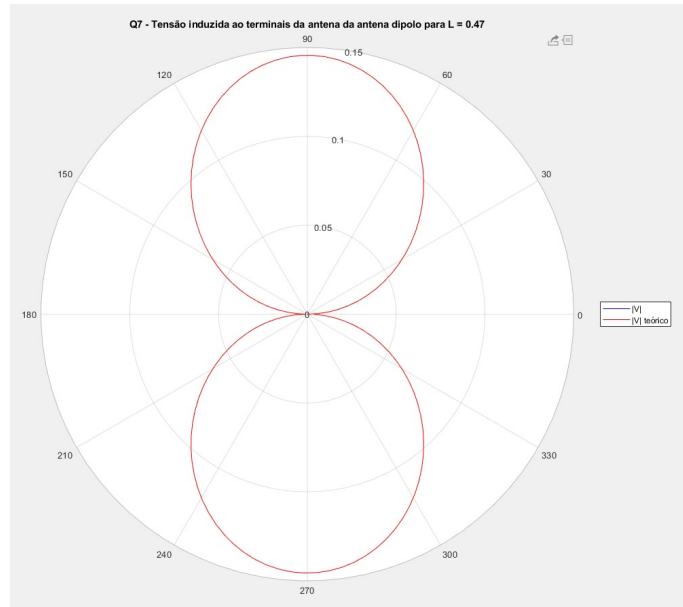


Figura 6.1: Valores de  $|V|$  para um  $\lambda = 0.47$

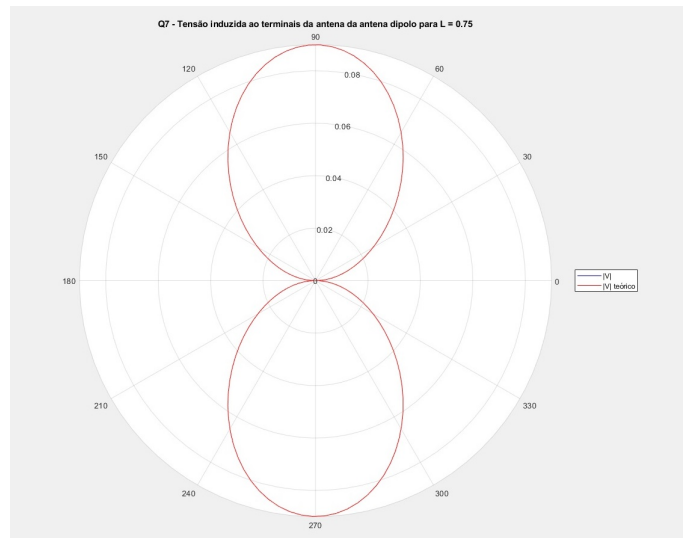


Figura 6.2: Valores de  $|V|$  para um  $\lambda = 0.75$

Como era previsto, o cálculo da tensão aos terminais da antena é igual à tensão do circuito equivalente da antena.

## Questão 8 - SCRIPTS

### Função principal:

```
% Antenas
% Computation Work
%
% Francisco Freiria - 97236
% Joao Morais - 83916

function [M, X, I, A] = Fun(L, N, a, theta, Zl, Voc_calc)

format short
%format longg

lambda=1;
delta = L/N;
k0 = (2*pi)/lambda;
E0=1;

%Sistemas de equações Ax=B
A = zeros(N, N);
B = zeros(N,1);
M = zeros (N+1,1);
X = zeros (N+1,1);

%Funções K(zm,z') e z(m) z'=x
K = @(x,zm) (1/(4*pi)*((exp(-1i*k0*sqrt(a.^2+(zm-x).^2)))/(sqrt(a.^2+(zm-x).^2))));
z = @(y) -L/2+(y+1/2)*delta;

%Loop da Matriz A e do vector B
for m =1:N
    for n = 1:N
        if(n ~= N-1 && n ~= N && n ~= (N-1)/2)
            A(m,n) = integral(@(x)K(x,z(m-1)), z(n)-delta/2, z(n)+delta/2,
'ArrayValued', true);
        elseif n == N-1
            A(m,n) = cos(k0*z(m-1));
        elseif n == N
            A(m,n) = sin(k0*z(m-1));
        elseif n == (N-1)/2
            if Voc_calc == 0
                t= 1j*(Zl/(240*pi))*(sin(k0 * abs(z(m-1))));
                A(m,n) = integral(@(x)K(x,z(m-1) - t), z(n)-delta/2,
z(n)+delta/2, 'ArrayValued', true);
            elseif Voc_calc == 1
                Zl=1;
                t= 1j*(Zl/(240*pi))*(sin(k0 * abs(z(m-1))));
                A(m,n) = -t;
            end
        end
    end
end
```



```

        end
        B(m) = -
        ((1i*E0)/(120*pi*k0*sin(theta)))*(exp(1i*k0*cos(theta)*z(m-1)));
    end

    I = pinv(A)*B;
    disp(A);
    disp(B);
    disp(I);

    for f =1:N
        if (f ~= (N-1) && f ~= N)
            M(f+1) = I(f);
        elseif (f==(N-1))
            M(N)=0;
        elseif (f==(N))
            M(N)=0;
        end
    end

    end

    for g =1:N+1
        X(g)= z(g-1.5);

    end

    end

```

-----

### Questões:

```

% Antenas
% Computation Work
%
% Francisco Freiria - 97236
% Joao Morais - 83916
%
Questao=1; %##### SELECIONAR A QUESTÃO [1,2,4,5,6,7]
#####

%-----Questão 1-----
----
if (Questao == 1)

    clc;
    clear all;

    lambda = 1;
    L = 0.47*lambda;
    a = 0.005*lambda;
    theta= pi/2;
    Zl=0;

    N = 21;
    [Z1,X1]= Fun(L, N, a,theta,Zl,0);
    N=51;
    [Z2,X2]= Fun(L, N, a,theta,Zl,0);

```

```

N=71;
[Z3,X3]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);

figure (1)
stairs(X1, imag(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, imag(Z2), 'blue');
stairs(X3, imag(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('imag.I(z)');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q1: Parte imaginária Corrente de distribuição de uma
antena dipolo de L/lambda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (2)
stairs(X1, real(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, real(Z2), 'blue');
stairs(X3, real(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q1: Parte real Corrente de distribuição de uma antenna
dipolo de L/lambda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (3)
stairs(X1, abs(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, abs(Z2), 'blue');
stairs(X3, abs(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q1- Valor absoluto Corrente de distribuição de uma antenna
dipolo de L/lambda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

%-----Questão 2-----
-----

%Fun(N, L, lambda, a)
elseif (Questao == 2)

    clc;
    clear all;

    lambda = 1;
    L = 1;
    a = 0.005;
    Z1=0;
    theta= pi/2;

    N = 21;
    [Z1,X1]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);
    N=51;

```

```

[Z2,X2]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);
N=71;
[Z3,X3]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);

figure (1)
stairs(X1, imag(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, imag(Z2), 'blue');
stairs(X3, imag(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Parte Imaginária Corrente de distribuição de uma
antena dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (2)
stairs(X1, real(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, real(Z2), 'blue');
stairs(X3, real(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Parte Real Corrente de distribuição de uma antena
dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (3)
stairs(X1, abs(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, abs(Z2), 'blue');
stairs(X3, abs(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Valor absoluto Corrente de distribuição de uma antena
dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

%-----

L = 1.5;
N = 21;
[Z1,X1,p,y]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);
N=51;
[Z2,X2]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);
N=71;
[Z3,X3]= Fun(L, N, a,theta,Z1,0);

figure (4)
stairs(X1, imag(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, imag(Z2), 'blue');
stairs(X3, imag(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');

```

```

ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Parte Imaginária Corrente de distribuição de uma
antena dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (5)
stairs(X1, real(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, real(Z2), 'blue');
stairs(X3, real(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Parte Real Corrente de distribuição de uma antenna
dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

figure (6)
stairs(X1, abs(Z1), 'red');
hold on
stairs(X2, abs(Z2), 'blue');
stairs(X3, abs(Z3), 'green');
grid on;
xlabel('2Z/L');
ylabel('|I(z)|');
legend({'N=21','N=51','N=71'});
title(['Q2- Valor absoluto Corrente de distribuição de uma antenna
dipolo de L/lamda = ',num2str(L/lambda)]);
hold off

```

```

%-----Questão 4-----
-----

```

```

elseif(Questao == 4)

    clc;
    clear all;

    lambda = 1;
    L = [0.47,0.75,1.5]*lambda;
    N=51;
    a = 0.005*lambda;
    theta= 0.001:0.02:2*pi;
    Z1=1;
    E0=1;
    k0 = (2*pi)/lambda;

    h = zeros(N, 1);
    s= zeros(N,1);
    Voc_Teorico = zeros (length(theta),1);
    Voc = zeros (length(theta),1);

    for c = 1:length(L)
        for b = 1:length(theta)
            [M, X, I]= Fun(L(c), N, a, theta(b),Z1,1);
            Voc(b) = I((N-1)/2);
        end
    end

```

```

        s= @(x) (sin(k0*(L(c)/2)-
abs(x)))*exp(2i*k0*x*cos(theta(b)));
        h(b)= E0 * ((sin(theta(b)).^2)/ sin((k0*L(c))/2));
        Voc_Teorico(b)= h(b) * integral(@(x) s(x), -L(c)/2,
L(c)/2,'ArrayValued', true);
        end

        figure(c)
        polarplot(theta, abs(Voc), 'blue');
        hold on;
        polarplot(theta, abs(Voc_Teorico), 'red');
        legend({'|Voc|', '|Voc|Aproximação Sinusoidal'});
        title(['Q4 - Voc para L/lambda = ', num2str(L(c)/lambda)]);
        hold off;

    end

%-----Questão 5-----
%-----

elseif(Questao == 5)

    clc;
    clear all;

    N=[21,51,71];
    lambda = 1;
    L = 0.47*lambda;
    a = 0.005*lambda;
    Zl=0;
    theta= pi/2;

    for c = 1:length(N)
        %I_zero = zeros(N(c),1)
        [M, X, I] = Fun(L, N(c), a, theta, Zl, 0);
        I_zero=I((N(c)-1)/2);

        [M, X, I]= Fun(L, N(c), a, theta, Zl, 1);
        Voc=I((N(c)-1)/2);

        Zin = Voc/I_zero;
        disp(Zin);
    end

%-----Questão 6-----
%-----

elseif(Questao == 6)

    clc;
    clear all;

    Steps = 70;
    lambda = 1;
    a = 0.005*lambda;
    N = 51;
    Z = zeros(1,Steps);
    Ll= linspace(0.01,1.3,Steps);
    theta= pi/2;

```

```

Zl=0;

I_zero = zeros (Steps,1);
Voc = zeros (Steps,1);
Zin = zeros (Steps,1);

for f = 1:Steps
    [M, X, I] = Fun(Ll(f), N, a, theta, Zl, 0);
    I_zero(f)=I((N-1)/2);

    [M, X, I]= Fun(Ll(f), N, a, theta, Zl, 1);
    Voc(f)=I((N-1)/2);

    Zin(f)=Voc(f)/I_zero(f);
end

figure(1);
plot(Ll, real(Zin), 'blue');
hold on;
plot(Ll, imag(Zin), 'red');
grid on
xlabel('L/lambda');
ylabel('Z [Ohm]');
legend({'Resistencias', 'Reatancia'});
title('Q6 - Impedância de entrada da antena dipolo para a =
0.005*lambda');

%-----Questão 7-----
-----
elseif(Questao == 7)

    clc;
    clear all;

    Zl=73;
    E0=1;
    lambda = 1;
    k0 = (2*pi)/lambda;
    L=[0.47, 0.75];
    a = 0.005*lambda;
    N = 51;
    theta= 0.001:0.05:2*pi;
    delta = L/N;
    Z = zeros(1,length(theta));

    I_zero = zeros (length(theta),1);
    Voc = zeros (length(theta),1);
    Za = zeros (length(theta),1);
    V = zeros (length(theta),1);
    V_teorico = zeros (length(theta),1);
    h = zeros(length(theta), 1);
    s= zeros(length(theta),1);
    Voc_teorico = zeros (length(theta),1);
    Za_teorico = zeros (length(theta),1);

    for c = 1:length(L)
        for b = 1:length(theta)

```

```

[M, X, I] = Fun(L(c), N, a, theta(b), Zl, 0);
I_zero(b) = I((N-1)/2);

[M, X, I] = Fun(L(c), N, a, theta(b), Zl, 1);
Voc(b) = I((N-1)/2);

Za(b) = Voc(b) / I_zero(b);

V(b) = (Zl / (Za(b) + Zl) * Voc(b));

%-----

s = @(x) (sin(k0 * (L(c)/2) -
abs(x))) * exp(2i * k0 * x * cos(theta(b)));
h(b) = E0 * ((sin(theta(b)).^2) / sin((k0 * L(c))/2));
Voc_teorico(b) = h(b) * integral(@(x) s(x), -L(c)/2,
L(c)/2, 'ArrayValued', true);

Za_teorico(b) = Voc_teorico(b) / I_zero(b);
V_teorico(b) = (Za_teorico(b) * I_zero(b)) + Voc_teorico(b);
end

figure(c);
polarplot(theta, abs(V), 'blue');
hold on;
polarplot(theta, abs(V_teorico), 'red');
legend({'|V|', '|V| teórico'});
title(['Q7 - Tensão induzida ao terminais da antena da antena
dipolo para L = ' num2str(L(c)/lambda)]);
hold off
end
end

```