Instituto Superior Técnico

Fotónica

The Twin Paradox

Autores:	*Números:*
David Brito	97260
Francisco Freiria	97236
João Morais	83916

Professor: Carlos Paiva

Abril de 2020

Conteúdo

1 Introdução **2**

2 The Twins Paradox **3**

3 Conclusão **9**

4 Bibliografia **10**

Capítulo 1: Introdução

Foi em 1905 que Albert Einstein, um físico alemão e provavelmente o cientista mais conhecido de sempre, publicou pela primeira vez os seus estudos acerca da relatividade. Esta teoria está assente em dois postulados: as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; a velocidade da luz no vácuo não depende da velocidade da fonte. Mais de 110 anos se passaram e a sua teoria continua intocável por outros cientistas e é hoje o foco do trabalho desta cadeira de Fotónica, para que se consiga explicar concretamente o paradoxo dos gémeos.

Este paradoxo está assente na seguinte condição: dois irmãos gémeos (Bob e Alice, neste caso) têm a mesma idade quando Alice parte numa viagem pelo espaço com uma velocidade constante próxima da velocidade da luz e Bob fica na Terra. Ambos tem um relógio no pulso que mede o tempo de cada um e à medida que Bob vê a sua irmã a afastar-se, e devido à dilatação do tempo, ele prevê que o tempo passe mais devagar no relógio de Alice. No entanto, e como a velocidade é relativa e Alice tem aceleração 0, ela também vera o seu irmão afastando-se e assume que o tempo no relógio do seu irmão esta a passar mais rápido.

Apesar de ser intuitivo que o tempo passasse igual para ambos, o objetivo deste trabalho é chegar a conclusão que quando Alice regressa a Terra, o seu relógio andou mais devagar em relação ao de Bob, ou seja, Alice irá regressar à Terra com uma idade inferior à de Bob.

Modelos e teorias matemáticas serão usadas para provar este facto, como é exemplo o efeito de Doppler. Esta teoria foi descrita teoricamente pela primeira vez em 1842 por Johann Christian Doppler e é um fenómeno físico observado em ondas quando emitidas ou refletidas por um objeto que está em movimento, isto é, uma alteração da frequência percebida pelo observador em virtude do movimento relativo de aproximação ou afastamento entre a fonte e o observador. Neste caso concreto, os irmãos combinaram mandar um sinal eletromagnético um ao outro cada vez que um ano passasse nos seus relógios e tendo em conta que a irmã que parte na viagem vai inverter a marcha em algum ponto da sua viagem, este efeito será fundamental para perceber o porquê de os cada um dos irmãos não receber os sinais com o mesmo intervalo de tempo.

Outro dos modelos a ser estudado é a transformação de Lorentz. Esta transformação trata-se de uma teoria física que se baseia numa revisão revolucionaria do conceito de simultaneidade e pretende derivar a relação entre coordenadas (x, y) para o sistema de coordenadas (x', y'). Isto significa que, conhecendo as coordenadas de um certo evento e a partir desta transformada, é possível obter as coordenadas do mesmo evento noutro referencial. Pode ainda acrescentar-se uma outra influencia decisiva neste problema: a interpretação geométrica de Herman Minkowski, que corresponde ao diagrama do espaço-tempo correspondente com as transformações de Lorentz.

Será também importante ter em conta o conceito de dilatação do tempo e a contração do espaço. A dilatação do tempo traduz que os relogios em movimento atrasam-se em relação a um relógio estacionário. Já a contração do espaco diz-nos que uma régua que se encontra em movimento é maior em relação a uma régua que está em repouso. Todos estes conceitos serão aprofundados com o decorrer deste trabalho.

Capítulo 2: The Twins Paradox

O paradoxo dos gémeos (The twins paradox) consiste no seguinte: Alice e Bob são dois irmãos gémeos que irão realizar uma experiência que mostra aspectos muito importante da relatividade especial. É possível, com base em leis cientificas, nomeadamente as leis da relativadade, aferir que, tendo em conta estes dois gémeos e após um fazer uma viagem espacial, o facto de este chegar mais novo que o gémeo que ficou no planeta Terra. Ou seja, as leis da relatividade são uma ferramenta muito importante para ajudar a compreender como pode ser resolvido o paradoxo dos gémeos, ainda que "à primera vista" esta informação pareçe absurda.

As unidades usadas no projeto são unidades naturais (ou geométricas) onde a velocidade da luz em vácuo é adimensional e possui valor numérico. O tempo é medido em anos e o espaço em anos-luz.

$$c = 1 \tag{2.1}$$

$$L = 4anos - luz \tag{2.2}$$

Quando a experiência começa, ambos os gémeos (Alice e Bob) têm A = 30 anos. O objetivo principal, neste projeto, é mostrar que o gémeo que fica na terra envelhece mais do que o que faz a viagem a uma velocidade relativa. De facto, de acordo com Bob, o tempo da viagem total foi T. No entanto, segundo Alice, o tempo da viagem total foi T'. Portanto, os dois gêmeos concordam que no final desta experiência o Bob têm B = 30 + T anos, enquanto Alice, na verdade, C = 30 + T' anos, com:

$$T' < T \Rightarrow A < C \tag{2.3}$$

A velocidade relativa entre dois referenciais é designada por v em unidades SI e por β quando temos c=1. Ainda em unidades SI, o significado de β é de uma velocidade normalizada e adimensional, tal que β:

$$\beta = \frac{4}{5} \tag{2.4}$$

Na prespetiva do Bob, o evento ocorre a uma distância de:

$$L = \beta \frac{T}{2} \tag{2.5}$$

Assumimos que Bob fica em casa e a sua irmã Alice assume o papel de astronauta. Não é possível considerar Bob como o viajante e Alice como ficar em casa, porque não há simetria entre os dois. O evento de recuperação é decisivo. Durante isso, Alice muda de um quadro inercial para outro, enquanto nada acontece com Bob. Nesse evento de reviravolta, Alice experimenta uma enorme aceleração negativa e uma aceleração positiva. O Diagrama de Minkowski apresentado na figura 2.1 representa as linhas de universo de Bob (vertical) e Alice (duas linhas inclinadas que se encontram aquando da inversão de marcha). De acordo com Bob, a viagem de Alice durou um intervalo de tempo T . E, como Alice viajou até uma distância L , tem-se $T = 2L\beta$. No referencial de inércia $S_B \rightarrow (x, t)$, de Bob, a viagem de ida de Alice é descrita pela equação $x = \beta t$ enquanto que a viagem de volta é descrita pela equação $x = \beta(T - t)$. A linha de universo de Bob, correspondente à viagem, é dada pela sequência de acontecimentos A $\rightarrow C \rightarrow$ B. A linha de universo de Alice, por sua vez, é dada pela sequência de acontecimentos A $\rightarrow D \rightarrow$ B. A inversão de marcha de Alice ocorre no acontecimento D que, do ponto de vista de Bob, é simultâneo com o acontecimento C.

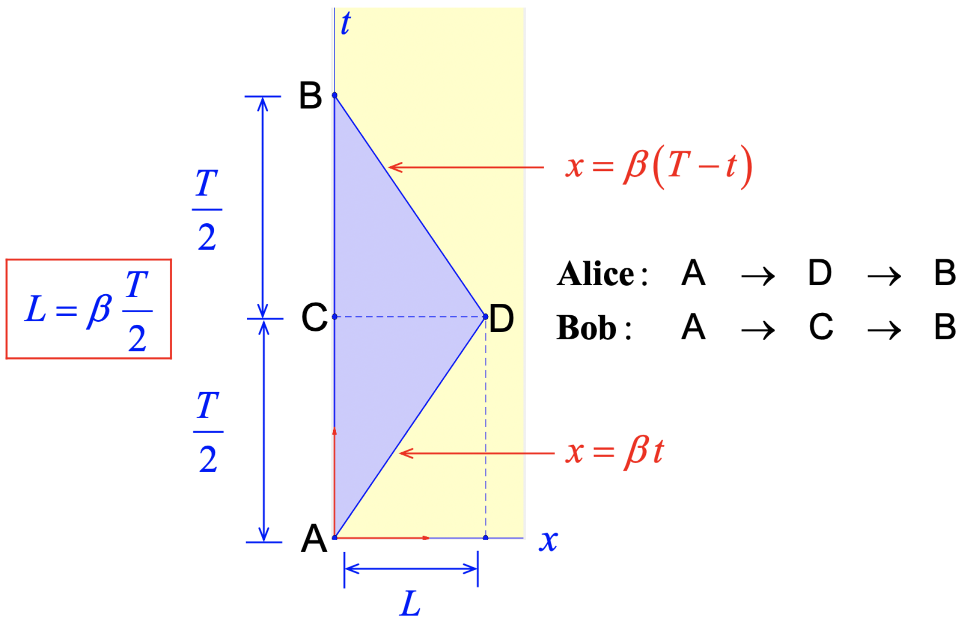

Figura 2.1: Gráfico 1

Para analisar todo o processo, irá ser usado o efeito Doppler. Tanto Bob com Alice enviam sinais de tempo igualmente espaçados para a outra.

As contagens acumuladas de sinais de tempo para toda a viagem são comparadas. Supondo que cada pessoa esteja transmitindo f pulsos por unidade de tempo (ano), à medida que Alice se afasta de Bob, cada observador recebe os sinais do outro a uma taxa reduzida. Porém, tendo em conta o efeito de Doppler, se os sinais são emitidos por cada um a uma certa frequência, esta nao será a mesma a que são recebidos pelo outro:

- Na viagem de ida de Alice, a frequência sofre um desvio para o vermelho $f \rightarrow f' = f/K < f$ dado que existe um afastamento mútuo;
- Na viagem de volta, porém, a frequência sofre um desvio para o azul $f \rightarrow f'' = fK > f$dado que os dois gémeos se estão a aproximar.

De facto, como se viu anteriormente, pelo efeito de Doppler tem-se:

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < f \tag{2.6}$$

$$f'' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > f \tag{2.7}$$

Resumidamente, como é que cada irmão sabe que passou um ano para o outro? Para a contagem dos anos, eles enviam sinais eletromagnéticos a cada ano que passa. Esses sinais eletromagnéticos são enviados a 45 graus da equitemp do referencial de origem. Olhando agora para a perspetiva de Bob, após os sinais serem enviados a cada ano, Alice não os recebe nesse instante. Como a Alice está separada do Bob por uma certa distância "x"existe um tempo de atraso até que a Alice receba o sinal de Bob. E como a Alice se está a afastar, este delay aumenta à medida que ela se de desloca na sua equilock, uma vez que a distância a Bob também aumenta. Alice recebe os sinais enviados por Bob, segundo o tempo de Bob, sempre a uma mesma proporção de tempo. Esta proporção é conhecida também como rácio fundamental ou fator de Bondi:

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3 \tag{2.8}$$

A a figura 2.2 representa os sinais enviados por Bob e recebidos por Alice à esquerda e à direita os sinais enviados por Alice e recebidos por Bob. Considera-se que cada um deles emite sinais com uma frequência $f = 1ano^{-1}$. Considerando os valores calculados em cima, ou seja, $\beta = 4/5$, $\gamma = 5/3$ $k = 3$, $f\prime = 1/3ano^{-1}$ e $f\prime\prime = 3ano^{-1}$.

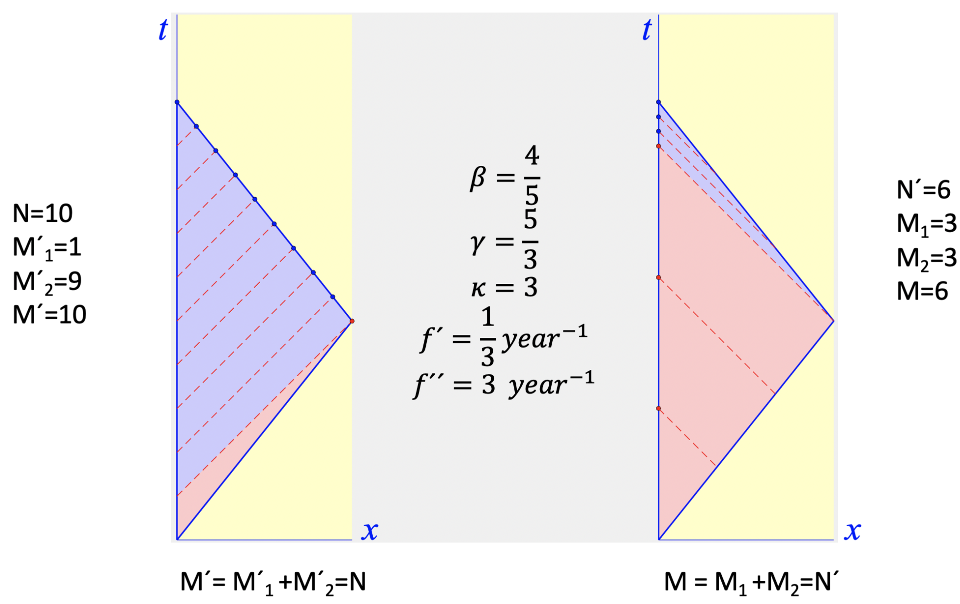

Figura 2.2: Gráfico 2

Considerando o efeito de Doppler relativístico e tendo em conta que Alice se move com uma velocidade relatívistica e na viagem de ida Alice está se afastar de Bob a uma velocidade β, os sinais enviados por Alice são recebidos a uma taxa de 1/3 do tempo de Bob. Ou seja, embora tenha passado 3 anos no tempo de Alice, para Bob já passaram 9 anos.

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{f}{k} = \frac{1}{3} \tag{2.9}$$

Na viagem de volta Alice está-se a aproximar de Bob, ou seja, os sinais enviados por Alice são recebidos a uma taxa de 3 do tempo de Bob. Embora já tenham passado 3 anos no relógio de Alice, no de Bob apenas passou 1 ano.

$$f'' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = fk = 3 \tag{2.10}$$

A duração da viagem, do ponto de vista de Bob, é $T = 2L/\beta$. Porém, do ponto de vista de Alice, essa duração foi $T\prime = T/\gamma$ em resultado da dilatação do tempo. O número total de sinais enviados por Bob foi $N = fT = 10$ enquanto o de Alice foi $N\prime = fT\prime = 6$. Vejamos, agora, o números de sinais recebidos. Na viagem de ida, Bob recebeu $M_1 = f\prime t_1 = (fL/\beta)(\sqrt{1.\beta^2}) = 3$ enquanto que Alice recebeu $M\prime_1 = f\prime t\prime_1 = (fL/\beta)(1-\beta) = 1$. Na viagem de volta da Alice, Bob recebeu $M_2 = f\prime t_2 = (fL/\beta)(\sqrt{1.\beta^2}) = 3$, enquanto que Alice recebeu $M\prime_2 = f\prime t\prime_2 = (fL/\beta)(1-\beta) = 9$. Deste modo podemos concluir que:

$$M = M_1 + M_2 = 6 \tag{2.11}$$

$$M\prime = M\prime_1 + M\prime_2 = 10 \tag{2.12}$$

Em que $M = N\prime$ e $M\prime = N$.

Mas porque é que os Anos de Alice são maiores à perpetiva do Bob? De outra forma podemos questionar-nos o porquê do Bob ver os anos de Alice a andar mais devagar. Isto deve-se ao facto da geometria relativistica não ser representada pela geometria Euclideana, mas sim pela geometria hiperbólica uma vez que a relação espaço-tempo é uma grandeza vetorial quadridimensional. O plano hiperbólico é uma representação reduzida bidimensional da relação espaço-tempo. Ou seja, na figura 2.3 está representado o diagrama de Minkowski no plano hiperbólico pois a representação em $\mathbb{R}^4$ torna a compreensão mais díficil. A representação em $\mathbb{R}^2$, é bastante mais apelativa e é suficiente para explicar os fenómenos de compressão e dilatação do espaço. O mais importante a retirar da figura 2.3 é que os vetores e_o, e_1, f_0, f_1 são vetores unitários. Um vetor unitário do tipo tempo como e_0, f_0 definem um conjunto de equilocs e os vetores do tipo espaço e_1, f_1 definem um conjunto de equitemps. Observando o gráfico de um ponto de vista Euclideano, os vectores não são unitários pois têm comprimentos diferentes. Mas se os observarmos de um ponto de vista hiperbólico, o vetor f_1 tem o mesmo comprimento que e_1, pois é quando ambos os vetores se intersetam $x^2 - t^2 = 1$, sendo $x^2 - t^2 = 1$ o lugar geométrico dos afixos dos vectores do tipo espaço, centrados na origem, com medida (lorentziana) unitária. O mesmo se passa para os vetores do tipo tempo. Os vetores e_0, f_0 marcam o vetor unitário quando interseptados pelo por $t^2 - x^2 = 1$, sendo $t^2 - x^2 = 1$ o lugar geométrico dos afixos dos vectores do tipo espaço, centrados na origem, com medida (lorentziana) unitária.

Resumidamente o boost ativo de Lorenzt ou coeficiente de compressão do tempo, é dado por :

$$\gamma = \frac{k^2+1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3} \tag{2.13}$$

que transforma os vetores e_o, e_1 em f_0, f_1. As unidades do refencial de Alice em relação ao referencial de Bob são dadas por:

$$f_0 = \gamma(e_0 + \beta e_1) \tag{2.14}$$

$$f_1 = \gamma(e_1 + \beta e_0) \tag{2.15}$$

Sendo que a equação “2.14”representa uma equiloc de Alice e a equação “2.15”representa a sua equitemp.

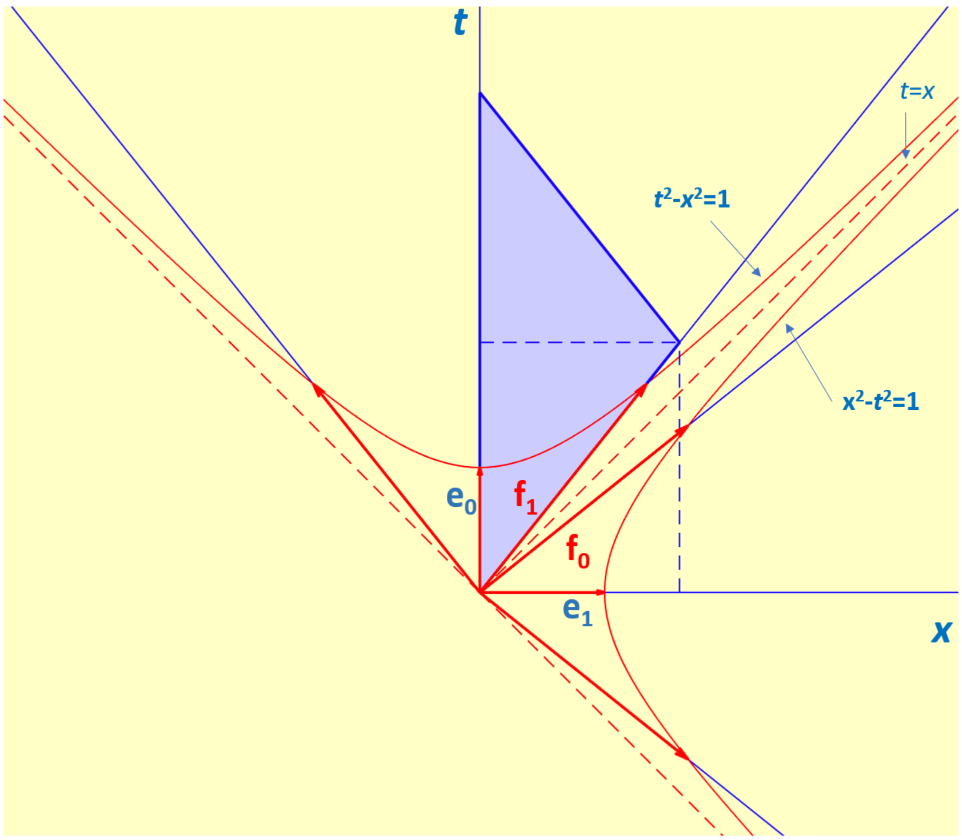

Figura 2.3: Gráfico 3

A figura 2.4 apresenta dois diagramas de Minkowski onde se faz uma análise comparativa dos pontos de vista de cada gémeo em relação aos sinais emitidos e recebidos por cada um. Assim, no diagrama da esquerda, está representada a equiloc e_0 e a equitemp e_1 de Bob. Mas os referenciais espaço-temporais de Alice não são tão lineares. No instante D, o seu sistema de coordenadas $S_1 \to (x', t') \to (f_0, f_1)$ muda para $S_2 \to (x', t') \to (g_0, g_1)$. Porém Bob, permanece inalterado $(S_B \to (x, t) \to (e_0, e_1))$. Em consequência da inversão de marcha instantânea de Alice, no ponto D, equitemp de Alice muda de f_1 para g_1.É neste ponto de viragem que algo estranho à perceção de Bob acontece. O instante imadiatamente antes de Alice fazer a viagem de volta, corresponde a $t_a = (a - \beta^2)(T/2)$ e o instante imediatamente a seguir corresponde a $t_B = (a - \beta^2)(T/2)$. No tempo de Bob entre o instante antes da inversão de marcha e o instante depois já passou bastante tempo e ao contrário do que acontece no tempo de Alice, ou seja, ao fazer a inversão de marcha, Alice perde do seu radar um intervalo de tempo $\Delta t = t_b - t_a = \beta^2 T$.

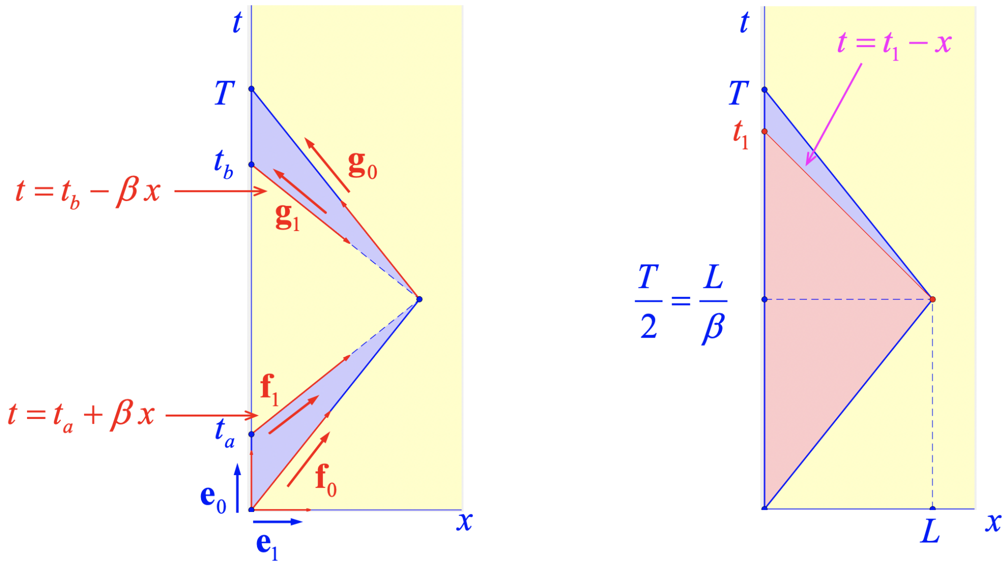

Figura 2.4: Gráfico 4

Isto deve-se ao facto dela estar sujeita a desacelarações e acelerações enormes no momento da inversão de marcha, trocando num simples instante as suas equitemps, perdendo assim parte do tempo de Bob, consequencia da dilatação do tempo. Por este motivo temos de considerar como referência o referêncial de Bob pois a partir do momento em que Alice sofre acelaração deixa de ser um referencial inercial, quebrando a simetria entre os gémeos.

Capítulo 3: Conclusão

Ao longo da realização deste trabalho foi também revisto o conceito de simultaneidade concluindo-se que esta é um conceito relativo uma vez que depende do referencial de inércia adotado. Isto implica também que o tempo não seja absoluto como era afirmado por grandes pensadores na física clássica (tal como Galileu), e assim uma grandeza relativa que depende da velocidade dos corpos, ou seja, que não flui de igual forma para referenciais distintos. Assim, uma dada sequencia temporal de acontecimentos podem ocorrer numa ordem diferente dependendo do referencial em que nos encontramos.

É também provada a existência de um absoluto na relatividade restrita, que é a invariância do intervalo de espaço-tempo. Assim o espaço-tempo de Minkowski possui uma geometria hiperbólica. No plano hiperbólico, o lugar geométrico dos acontecimentos que se encontram a uma "distância" (intervalo de espaço-tempo) fixa de um dado acontecimento é uma hipérbole.

É também possível constatar que tanto a dilatação do tempo como a contração do espaço são um efeito real e reciproco, estando de acordo com o primeiro postulado de Einstein.

Por fim, e tendo em conta o "paradoxo" dos gémeos, pode concluir-se que não é de facto um paradoxo uma vez que existe uma quebra de simetria no momento em que Alice inverte a sua marcha. Quando o irmão viajante regressar à Terra, este estará mais novo do que o irmão que ficou imóvel, uma consequência da dilatação do tempo.

Capítulo 4:   Bibliografia

[1] Prof. Carlos R. Paiva, 2016/2017. Introdução à Teoria da Relatividade Restrita

[2] Hermann Bondi, Relativity and Common Sense – A New Approach to Einstein. New York: Dover, 1980 (unabridged and corrected republication of the work originally published in 1964 by Doubleday Company).

[3] James B. Hartle, Gravity – An Introduction to Einstein's General Relativity. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.

[4] Anthony Philip French, Special Relativity (The M.I.T. Introductory Physics Series). New York: W. W. Norton Company, 1968.

[5] Telmo Ricardo Costa Luís, Uma introdução à relatividade restrita centrada na interpretação geométrica de Minkowski para o plano hiperbólico, Dissertação para obtenção do grau de Mestre, 2016.