Instituto Superior Técnico

Fotónica

From EPR to the CHSH Game

Autores:	*Números:*
David Brito	97260
Francisco Freiria	97236
João Morais	83916
Jerry Cunha	79704

Professor: Carlos Paiva

Junho de 2020

Conteúdo

Capítulo 1: Introdução

Com a realização deste trabalho pretendemos estudar o entrelaçamento quântico, desde a percepção da existência deste fenómeno até á sua concepção. Para melhor compreendermos o entrelaçamento quântico começamos por compreender as ideias formuladas a partir de um paradoxo exposto por Einstein, Podolsky e Rosen até a um jogo CHSH. Este jogo CHSH ou desigualdade de CHSH, apesar de não apresentar um modelo consistente sobre o comportamento de partículas como os fotões, prova que não existem variáveis locais ocultas, apoiando a hipótese prevista anteriormente por John Bell. Para melhor compreendermos o jogo teremos a presença de Alice e Bob que terão uma exibição num teatro simulando serem um par de, por exemplo, fotões. Alice e Bob não terão nenhum tipo de contacto durante o jogo que consiste no seguinte: uma pessoa qualquer da audiência entregará a Bob e a Alice um cartão com um número (0 ou 1) impresso nele. Eles ganharão se um deles receber ”zero”do público e as suas respostas coincidirem ou se ambos receberem ”um”e as suas respostas forem diferentes (as respostas serão também 0 ou 1).

O objectivo deste trabalho será determinar a probabilidade de ganharem um jogo através de dois métodos distintos: o EPR (acrónimo de Einstein-Podolsky-Rosen), um método que permite uma percentagem de vitória de 75% para dois quantum bits; o método quântico que permitirá uma percentagem de vitória de aproximadamente 85%.

O método EPR, criado por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935, é descrito por um paradoxo em que, estes físicos, queriam mostrar que a teoria da mecânica quântica estava incompleta. De forma a compreender melhor este paradoxo assumimos que a Alice e o Bob, antes de subirem a palco, concordaram em dar uma dada resposta de acordo com o número marcado na carta, sendo esta a chamada Estratégia Local, permitindo uma percentagem de vitória de 75%. Esta formulação deve-se ao facto de segundo a teoria da relatividade, formulada por Einstein, nenhuma informação pode ser transmitida mais rapidamente que a velocidade da luz. Assim, para um par de fotões, eles tinham que ”concordar”no seu estado à priori para que ambos tomassem o mesmo estado quântico.

Para se perceber o método quântico é essencial ter em mente o que são qubits. Os qubits são um conjunto finito de objetos usados pelos computadores quânticos. Cada qubit possui dois conjuntos de estados separados, 0 e 1. Imaginando que os qubits são spins, podemos dizer que os dois estados existentes são spin para cima e spin para baixo. As 2n atribuições de estados individuais para cada qubit não completam todos os estados do sistema. Estes podem se relacionar como combinações lineares arbitrárias dos estados base, com amplitudes probabilísticas. Em suma, a probabilidade de ser 0 é o quadrado da probabilidade associada ao qubit 0 a probabilidade de ser 1 é o quadrado da probabilidade associada ao qubit 1. A estratégia associada a este método consiste em Alice e Bob medirem os seus respectivos qubits em diferentes bases dependendo do input, e computar posteriormente o seu output com base nos resultados dessas medições. Esta estratégia permite a Alice e a Bob uma percentagem de vitoria de cerca de 85%.

No desenvolvimento deste trabalho estudaremos o jogo em maior detalhe assim como as estratégias que permitirão chegar a estas percentagens de vitória.

Capítulo 2: Regras do Jogo

Para o jogo apresentado há duas formas de Bob e Alice ganharem o jogo. Eles ganharão se um deles receber ”zero”do público e as suas respostas coincidirem ou se ambos receberem um e as suas respostas forem diferentes. Consideraremos ”x”e ”y”os números dados pelo público a Alice e Bob , respectivamente, e ”a”e ”b”a resposta deles (Alice e Bob, respectivamente). Na tabela abaixo podemos observar como é possível ganhar neste jogo, a partir dos números dados pelo publico e das suas respectivas respostas.

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$a = b$	$a = b$
$y = 1$	$a = b$	$a \neq b$

A partir da seguinte função XOR:

$a \oplus b$	$a = 0$	$a = 1$
$b = 0$	0	1
$b = 1$	1	0

em que:

$$\Big[(a \oplus b = 0) \leftrightarrow (a = b)\Big] \tag{2.1}$$

$$\Big[(a \oplus b = 1) \leftrightarrow (a \neq b)\Big] \tag{2.2}$$

e tendo em conta a tabela acima e que:

$$\Big[(x \wedge y = 0) \leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)\Big] \tag{2.3}$$

$$\Big[(x \wedge y = 1) \leftrightarrow (x = 1) \vee (y = 1)\Big] \tag{2.4}$$

é possível concluir que o jogo rege-se basicamente por

$$\Big[(a \oplus b) \leftrightarrow (x \wedge y)\Big] \tag{2.5}$$

onde:

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$a \oplus b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$	$a \oplus b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
$y = 1$	$a \oplus b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$	$a \oplus b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq b$

Assim, se a equação 2.5 for respeitada, isto representa uma vitória no jogo. Por fim, e tendo em conta que

$$P\Big[(a = b)|(x, y)\Big] \tag{2.6}$$

representa a probabilidade de (a = b) se as respostas x e y já tiverem sido recebidas, e que

$$P\Big[(a \neq b)|(x, y)\Big] \tag{2.7}$$

representa a probabilidade de (a ≠ b) se as respostas x e y já tiverem sido recebidas, podemos considerar que o Score de vitória neste jogo (representado por S) é dado por

$$S = P\Big[(a = b)|(0, 0)\Big] + P\Big[(a = b)|(0, 1)\Big] + P\Big[(a = b)|(1, 0)\Big] + P\Big[(a \neq b)|(1, 1)\Big] \tag{2.8}$$

Capítulo 3: EPR CASE

A tese de EPR é um bocado céptica e não está convencida que exista mesmo telepatia entre Alice e Bob, mas sim que ambos combinaram, antes de entrarem em palco, uma resposta de acordo com o numero que recebessem. Existem assim quatro possibilidades de "combinação de resultados"tanto para Alice como para Bob:
Alice's PR Box

- P1- os resultados são sempre a = 0, independentemente da escolha x;
- P2 - os resultados são sempre a = 1, independentemente da escolha x;
- P3 - o resultado é idêntico à escolha, por exemplo, a = x;
- P4 - o resultado é diferente à escolha, por exemplo, a = 1-x;

Bob's PR Box

- Q1- os resultados são sempre b = 0, independentemente da escolha y;
- Q2 - os resultados são sempre b = 1, independentemente da escolha y;
- Q3 - o resultado é idêntico à escolha, por exemplo, b = y;
- Q4 - o resultado é diferente à escolha, por exemplo, b = 1-y;

Deste modo existem 16 combinações possíveis, 4 programas para a Alice e 4 programas para o Bob, nomeadamente:

(P1, Q1), (P1, Q2), (P1, Q3), (P1, Q4),
(P2, Q1), (P2, Q2), (P2, Q3), (P2, Q4),
(P3, Q1), (P3, Q2), (P3, Q3), (P3, Q4),
(P4, Q1), (P4, Q2), (P4, Q3), (P4, Q4).

O objectivo, de acordo com o programa EPR, é encontrar a pontuação máxima apenas recorrendo a uma explicação local, ou seja, usando variáveis ocultas, isto é, complementando a incompletude da mecânica quântica.
No entanto, com as equações desenvolvidas a seguir podemos provar claramente, que é impossível para as duas caixas de RP (uma para Alice e outra para Bob), usando estratégias locais (programas), poder obter uma pontuação $S > 3$.

A combinação do programa é dada pela equação 3.1.

$$\mathbf{i},\, \mathbf{j} \in 1,2,3,4 \mapsto (Pi, Qj) \tag{3.1}$$

$$\alpha \Leftrightarrow (Pi, Qj) \Leftrightarrow (i, j) \tag{3.2}$$

Deste modo, podemos concluir que $1 \leq \alpha \leq 16, \alpha \in \mathbb{N}$

A configuração de entrada pode ser dada pelas seguintes equações:

$$k = \begin{cases} 1, & (x,\ y) = (0,\ 0) \quad \leftrightarrow \quad r_1^{(\alpha)} \\ 2, & (x,\ y) = (0,\ 1) \quad \leftrightarrow \quad r_2^{(\alpha)} \\ 3, & (x,\ y) = (1,\ 0) \quad \leftrightarrow \quad r_3^{(\alpha)} \\ 4, & (x,\ y) = (1,\ 1) \quad \leftrightarrow \quad r_4^{(\alpha)} \end{cases}$$

$r_k^{(\alpha)}$ é obtido através de um sistema de equações.

$$r_k^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 \quad \leftrightarrow & ,\ a \oplus b = x \wedge y \\ 0 \quad \leftrightarrow & ,\ a \oplus b \neq x \wedge y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_\alpha = \sum_{k=1}^{4} r_k^{(\alpha)}}$$

Assumindo que, $\sigma = a \oplus b$ e $\pi = x \wedge y$, obtemos as seguintes afirmações 3.3, 3.4.

$$\sigma = 0 \Rightarrow a = b \tag{3.3}$$

$$\sigma = 1 \Rightarrow a \neq b \tag{3.4}$$

Para o Bell teste, caso $\sigma = \pi y$, obtemos os seguintes valores de $r_k^{(\alpha)}$.

$$r_k^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & \sigma = \pi \\ 0, & \sigma \neq \pi \end{cases}$$

E consequentemente os seguintes valores paras $K = i$;

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$(x,\ y) = (0,\ 0)$	$(x,\ y) = (0,\ 1)$	$(x,\ y) = (1,\ 0)$	$(x,\ y) = (1,\ 1)$
$\pi = xy = 0$	$\pi = xy = 0$	$\pi = xy = 0$	$\pi = xy = 1$
$r_1^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$	$r_2^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$	$r_3^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$	$r_4^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$

Assim obtemos os seguintes valores de estratégia local e correspondente pontuação.

$\boxed{\alpha}$		$[(x,\ y)=(0,\ 0)]\Rightarrow(a\oplus b=0)$	$[(x,\ y)=(0,\ 1)]\Rightarrow(a\oplus b=0)$	$[(x,\ y)=(1,\ 0)]\Rightarrow(a\oplus b=0)$	$[(x,\ y)=(1,\ 1)]\Rightarrow(a\oplus b=1)$	R_α
P1	**Q1**	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✗	3
P1	**Q2**	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✓	1
P1	**Q3**	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✓	3
P1	**Q4**	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✗	1
P2	**Q1**	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✓	1
P2	**Q2**	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✗	3
P2	**Q3**	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✗	1
P2	**Q4**	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✓	3
P3	**Q1**	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✓	3
P3	**Q2**	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✗	1
P3	**Q3**	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✗	1
P3	**Q4**	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✓	3
P4	**Q1**	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✗	1
P4	**Q2**	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✓	3
P4	**Q3**	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✓	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✓	3
P4	**Q4**	$(a,\ b)=(1,\ 1)$ ✓	$(a,\ b)=(1,\ 0)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 1)$ ✗	$(a,\ b)=(0,\ 0)$ ✗	1

Analisando os resultados obtidos na tabela de cima, podemos concluir que $S \leq 3$.
Pela desigualdade de Bell do tipo CHSH o S(score) pode ser obtido através da seguinte equação

$$S(score) = P\left[(a=b)|(0,0)\right] + P\left[(a=b)|(0,1)\right] + P\left[(a=b)|(1,0)\right] + P\left[(a=b)|(1,1)\right] \tag{3.5}$$

Cada tentativa corresponde a uma configuração aleatória (x, y), escolhidas entre m = 4 opções possíveis. Ou seja, sendo N o número total de tentativas obtemos a seguinte equação (3.6) para S.

$$S = \langle R_\alpha \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} R_\alpha \leq 3 \tag{3.6}$$

O número total de pares possíveis (x, y) de prompts (configurações de entrada) é dado por $m = 4$, ou seja:

$$\boxed{m=4} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{c}(x,\ y)=(0,\ 0)\\(x,\ y)=(0,\ 1)\\(x,\ y)=(1,\ 0)\\(x,\ y)=(1,\ 1)\end{array}}$$

Deste modo podemos dizer que a taxa de sucesso é igual a probabilidade de executar uma simulação bem-sucedida, concluindo pela equação 3.7.

$$P = \frac{S}{m} = \frac{S}{4} \leq \frac{3}{4} = 75\% \tag{3.7}$$

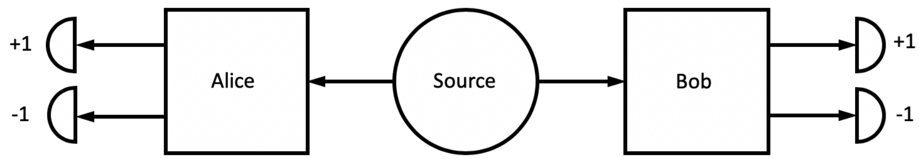
Alterando o Alfabeto de respostas, inicialmente tínhamos:

$$\boxed{\textbf{\textit{alphabet}}} \quad \mapsto \quad a, b \in \{0,\ 1\} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{output}\\\text{observables}\end{array}}$$

É conveniente alterar o alfabeto ao calcular os valores de expectativa. ”As respostas são iguais”ou ”as respostas são diferentes”significam o mesmo, qualquer que seja o alfabeto. Deste modo obtemos o novo alfabeto.

$$\boxed{\textbf{\textit{new alphabet}}} \mapsto A,\ B \in \{-1,\ +1\} \mapsto \boxed{\text{output observables}}$$

$$\boxed{a,\ b \in \{0,\ 1\}} \mapsto \boxed{\begin{array}{lcl} a = b & \Leftrightarrow & a \oplus b = 0 \\ a \neq b & \Leftrightarrow & a \oplus b = 1 \end{array}} \qquad \boxed{A, B \in \{-1,\ +1\}} \mapsto \boxed{\begin{array}{lcl} A = B & \Leftrightarrow & AB = +1 \\ A \neq B & \Leftrightarrow & AB = -1 \end{array}}$$



Alterando o alfabeto das respostas, temos a equação 3.10:

$$A, B \in -1, +1 \mapsto -1 \leq \langle AB \rangle \leq 1 \tag{3.8}$$

Com,

- $x = 0 \mapsto A_0$
- $x = 1 \mapsto A_1$
- $y = 0 \mapsto B_0$
- $y = 1 \mapsto B_1$

As probabilidades de Bob e Alice concordarem são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{gathered} P(-1,\ -1) = P[(A = -1)\&(B = -1)|(x, y)] \\ P(-1,\ 1) = P[(A = -1)\&(B = 1)|(x, y)] \\ P(1,\ -1) = P[(A = 1)\&(B = -1)|(x, y)] \\ P(1,\ 1) = P[(A = 1)\&(B = 1)|(x, y)] \end{gathered}$$

$$p = Concordar(AB = +1) = P(-1, 1) + P(1, 1) \tag{3.9}$$

$$q = Discordar(AB = -1) = P(-1, 1) + P(1, -1) \tag{3.10}$$

Onde, concluímos que p+q=1;

A correlação não-local é representada por $\langle AB \rangle$, e pode ser obtida através da equação 3.11.

$$\langle AB\rangle = P(-1,-1) - P(-1,1) - P(1,-1) + P(1,1) = p - q = 2p - 1 = 1 - 2q \tag{3.11}$$

onde, $p \in [0,1] \mapsto \langle AB\rangle = 2p - 1 \in [-1,1]$

Deste modo obtemos as seguintes expressões para p e q:

$$p = P[(A = B)|(x,\ y)] = \frac{1 + \langle AB\rangle}{2} = P(-1,\ -1) + P(1,\ 1)$$
$$q = P[(A \neq B)|(x,\ y)] = \frac{1 - \langle AB\rangle}{2} = P(-1,\ 1) + P(1,\ -1)$$

$$\left[\begin{array}{lll} (x,\ y) = (0,\ 0) & \Rightarrow & p_{00} = \frac{1}{2} + \frac{\langle A_0B_0\rangle}{2} \\ (x,\ y) = (0,\ 1) & \Rightarrow & p_{01} = \frac{1}{2} + \frac{\langle A_0B_1\rangle}{2} \\ (x,\ y) = (1,\ 0) & \Rightarrow & p_{10} = \frac{1}{2} + \frac{\langle A_1B_0\rangle}{2} \\ (x,\ y) = (1,\ 1) & \Rightarrow & q_{11} = \frac{1}{2} - \frac{\langle A_1B_1\rangle}{2} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbb{S} = p_{00} + p_{01} + p_{10} + q_{11} \\ = 2 + \frac{1}{2}\ [\langle A_0B_0\rangle + \langle A_0B_1\rangle + \langle A_1B_0\rangle - \langle A_1B_1\rangle] \end{array}\right.$$

O valor médio pode ser obtido pela equação 3.12.

$$B = \langle A_0B_0\rangle + \langle A_0B_1\rangle + \langle A_1B_0\rangle - \langle A_1B_1\rangle \tag{3.12}$$

Deste modo, o score pode ser obtido pela equação 3.13.

$$S = p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 2 + \frac{B}{2} \tag{3.13}$$

Assim, a probabilidade de executar uma simulação bem-sucedida é obtida através da equação 3.17

$$P = \frac{S}{m} = \frac{S}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{4}\right) \tag{3.14}$$

A Simulação com recursos locais (no sentido EPR) é estatisticamente condicionalmente independente, obtemos do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{l}\langle A_0B_0\rangle = \langle A_0\rangle\,\langle B_0\rangle \\ \langle A_0B_1\rangle = \langle A_0\rangle\,\langle B_1\rangle \\ \langle A_1B_0\rangle = \langle A_1\rangle\,\langle B_0\rangle \\ \langle A_1B_1\rangle = \langle A_1\rangle\,\langle B_1\rangle\end{array}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l}\mathbb{B}_L = \langle A_0B_0\rangle + \langle A_0B_1\rangle + \langle A_1B_0\rangle - \langle A_1B_1\rangle \\ = \langle A_0\rangle\,[\langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle] + \langle A_1\rangle\,[\langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle]\end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\beta_+ = \langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle \\ \beta_- = \langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\mathbb{B}_L = \beta_+\,\langle A_0\rangle + \beta_-\,\langle A_1\rangle}$$

Clauser - Horne - Shimony - Holt version of bell's theorem

$$\boxed{\langle A_0\rangle,\ \langle A_1\rangle,\ \langle B_0\rangle,\ \langle B_1\rangle \in [-1,\ 1]} \Rightarrow \left[\begin{array}{lll}\langle B_0\rangle = \langle B_1\rangle = 1 & \Rightarrow & \left[\begin{array}{l}\beta_+ = \langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle = 2 \\ \beta_- = \langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle = 0\end{array}\right. \\ \langle B_0\rangle = \langle B_1\rangle = -1 & \Rightarrow & \left[\begin{array}{l}\beta_+ = \langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle = -2 \\ \beta_- = \langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle = 0\end{array}\right. \\ \langle B_0\rangle = -\langle B_1\rangle = 1 & \Rightarrow & \left[\begin{array}{l}\beta_+ = \langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle = 0 \\ \beta_- = \langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle = 2\end{array}\right. \\ \langle B_0\rangle = -\langle B_1\rangle = -1 & \Rightarrow & \left[\begin{array}{l}\beta_+ = \langle B_0\rangle + \langle B_1\rangle = 0 \\ \beta_- = \langle B_0\rangle - \langle B_1\rangle = -2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Como era pedido concluímos, que $P_l = 75\%$ pela seguintes equações:

$$-2 \leq B_L \leq 2 \tag{3.15}$$

$$1 \leq S_L = 2 + \frac{B_L}{2} \leq 3 \tag{3.16}$$

$$P_l = \frac{S_L}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{B_L}{4}\right) \leq 75\% \tag{3.17}$$

Capítulo 4: QM CASE

Neste caso queremos definir a probabilidade de dois qubits estarem em no mesmo estado quântico. Isto é possível através dos estados de Bell, que são quatro estados quânticos específicos de dois qubits, maximamente entrelaçados. Podemos então definir um estado de entrelaçamento:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{4.1}$$

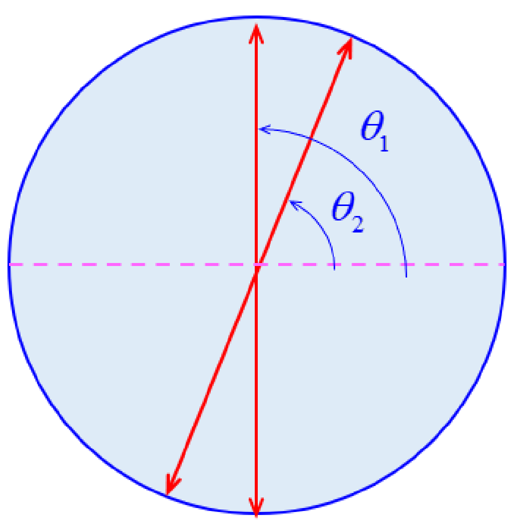
Porém, a mecânica quântica permite os qubits estarem em sobreposição quântica, isto é, cada qubit pode ser 0 e 1 ao mesmo tempo, que segundo a mecânica clássica é a combinação linear de dois estados, provocando assim o entrelaçamento de estados. É então possível apurar este entrelaçamento segundo:

$$(a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|00\rangle + |11\rangle)$$
$$(a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = a_1a_2|00\rangle + a_1b_2|01\rangle + b_1a_2|10\rangle + b_1b_2|11\rangle$$

$$(a_1b_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad (a_1a_2 = 0) \ \text{ or } \ (b_1b_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad \mathit{Contradição}$$
$$(b_1a_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad (a_1a_2 = 0) \ \text{ or } \ (b_1b_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad \mathit{Contradição} \tag{4.2}$$

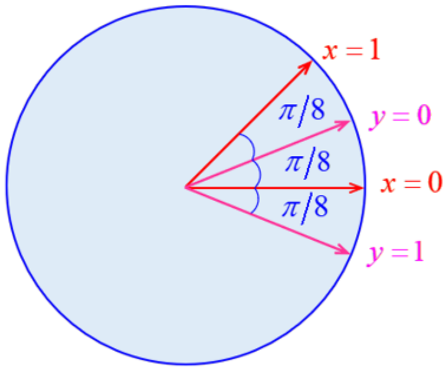
Podemos então definir a probabilidade de Alice e Bob receberem o mesmo número.

$$p = P[(a = b)|(x, y)] = cos(\theta)^2 \qquad q = P[(a \neq b)|(x, y)] = sin(\theta)^2 \qquad p + q = 1 \tag{4.3}$$



$$\boxed{\theta = \theta_1 - \theta_2}$$

Porém, Alice e Bob podem receberem números diferentes:



$$(x,y) = \left[\!\left[\begin{array}{lcl} (x=0,\ y=0) & \Rightarrow & \theta = \frac{\pi}{8} \\ (x=0,\ y=1) & \Rightarrow & \theta = \frac{\pi}{8} \\ (x=1,\ y=0) & \Rightarrow & \theta = \frac{\pi}{8} \\ (x=1,\ y=1) & \Rightarrow & \theta = \frac{3\pi}{8} \end{array} \right.\right.$$

Seguindo uma probabilidade para cada caso.

Caso 1 (Ambos recebem 0)

$$\left[\!\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$$

$$\begin{aligned} \langle A_0 B_0 \rangle &= P[(A=B)|(0,\ 0)] - P[(A \neq B)|(0,\ 0)] \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Caso 2 (Alice recebe 0 e Bob recebe 1)

$$\left[\!\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \right.\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$$

$$\begin{aligned} \langle A_0 B_1 \rangle &= P[(A=B)|(0,\ 1)] - P[(A \neq B)|(0,\ 1)] \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Caso 3 (Alice recebe 1 e Bob recebe 0)

$$\left[\!\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$$

$$\begin{aligned} \langle A_1 B_0 \rangle &= P[(A = B)|(1,\ 0)] - P[(A \neq B)|(1,\ 0)] \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Caso 4 (Alice recebe 1 e Bob recebe 1)

$$\left[\!\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{3\pi}{8}}$$

$$\begin{aligned} \langle A_1 B_1 \rangle &= P[(A = B)|(1,\ 1)] - P[(A \neq B)|(1,\ 1)] \\ &= \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Resumindo as probabilidades de sucesso a:

$$\begin{cases} (x,\ y) = (0,\ 0) & \Rightarrow & p_{00} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\langle A_0 B_0 \rangle}{2} \\ (x,\ y) = (0,\ 1) & \Rightarrow & p_{01} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\langle A_0 B_1 \rangle}{2} \\ (x,\ y) = (1,\ 0) & \Rightarrow & p_{10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\langle A_1 B_0 \rangle}{2} \\ (x,\ y) = (1,\ 1) & \Rightarrow & q_{11} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\langle A_1 B_1 \rangle}{2} \end{cases}$$

Podemos obter o valor médio através de:

$$\mathbb{B}_Q = \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,\sqrt{2}$$

Consequentemente o resultado:

$$\mathbb{S}_Q = p_{00} + p_{01} + p_{10} + q_{11} = 2 + \frac{\mathbb{B}_Q}{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142 > 3$$

E a probabilidade de executar uma simulação bem-sucedida é dada por:

$$\mathbb{P}_Q = \frac{\mathbb{S}_Q}{m} = \frac{\mathbb{S}_Q}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathbb{B}_Q}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 85.36\%$$

Capítulo 5: Conclusão

A conclusão que se pode tirar deste trabalho é que Alice e Bob não combinaram nada antes de entrarem em palco, mas, a concordância de respostas de ambos quando lhes é entregue o mesmo número não admite outra explicação que não seja a telepatia. Einstein chamou a esta telepatia "spooky action at distance"e esta viola um principio fundamental da ciência e da sua teoria da relatividade: a locality. Esta telepatia foi mais tarde apelidada de entrelaçamento quântico por John Stewart Bell, quando apresentou os seus estudos sobre a teoria de EPR. Estes estudos de Bell abriram portas a novas experiências em metafisica, levando ao nascimento da informação e da computação quântica.

É também importante reconhecer que nem o EPR nem o QM permitem uma percentagem de vitoria de 100%. Isto deve-se ao facto de no jogo, a melhor estratégia clássica de ganhar o jogo é se ambos os jogadores ignorarem as suas cartas e , por exemplo, ambos escolherem sempre zero, o que dá uma probabilidade de vitória de 75%, não havendo nenhuma forma de ultrapassar este valor(como visto no Capitulo 3).

De outro modo, se cada um tiver uma partícula de um par de partículas entrelaçadas e medi-las de maneira um bocado diferente, dependendo da carta escolhida, é possível aumentar a chance de vitória para cerca de 85%. Isto é possível porque o método usado pela primeira pessoa para medir a sua partícula alterou os resultados que a outra pessoa obteria a medir a sua partícula. A diferença nas duas chances de ganhar são conhecidas como "Bell's Inequality"e prova que há alguma estranheza quântica a acontecer aqui . Podemos considerar o caso em que Alice tem x=0 e mede $\langle 0 \rangle$. O output de Alice será a=0 e ambos ganharão o jogo se o output de Bob for b=0. Tendo em conta que Alice já mediu o seu qubit, o qubit do Bob colapsa para o estado $\langle 0 \rangle$. Suponhamos que y=0. Então Bob mede o seu estado $\langle 0 \rangle$ com uma rotação no sentido dos ponteiros do relógio de pi/8. O seu output será 0 se ele medir $\langle (pi/8)$. Assim, a probabilidade para que o output de Bob seja 0 é de $co\hat{s}2(pi/8) \approx 85\%$. Esta será a probabilidade de vitoria mais elevada de todas as possíveis, não sendo portanto possível garantir-se uma probabilidade de vitória de 100%.

É também essencial perceber que a física quântica ensina-nos a importância da contextualidade, isto é, o resultado que se observa numa medição depende de outras medidas que se estão tentando fazer. Ou seja, deve-se ter cuidado e evitar atribuir valores definidos antes desta medição.

Terminaremos então este trabalho com uma citação de Jeffrey Bub em "Quantum Mechanics for Primates"(2016) que traduz a natureza deste trabalho.

"The real remarkable thing about our quantum world is the existence of nonlocal correlations – correlations between events at separate locations – that can't be explained by either of the two sorts of explanation we are familiar with in classical physics or in everyday life: a direct causal connection in which information is transmitted from one event to the other by some physical system continuously at finite speed between the correlated events, or a common cause that is the source of the same information transmitted to the correlated events."

Capítulo 6: Bibliografia

[1] Prof. Carlos R. Paiva, 2020. Entanglement: From EPR to the CHSH Game

[2] Prof. Carlos R. Paiva, 2020. Quantum Nonlocality with PR Boxes

[3] N. David Mermin, Boojums All The Way Through. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990. Chapter 12: pp. 110 – 176.

[4] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010. Section 2.6: pp. 111 – 118.

[5] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak, Quantum Computing: A Gentle Introduction. Cambridge, MA: The MIT Press, 2014. Section 4.4: pp. 60 – 65.

[6] Jeffrey Bub, BANANAWORLD: Quantum Mechanics for Primates. Oxford, UK: Oxford University Press, 2016