

Devoir 2 : Définitions inductives

Exercice 1 On souhaite travailler avec le codage binaire des entiers strictement positifs.

1. Donnez une définition inductive de BIN , ensemble des codages binaires des entiers strictement positifs. Vous utiliserez deux règles : une qui construit $2x$ à partir de x , et une qui construit $2x + 1$ à partir de x .
2. Donnez une fonction inductive $S_p : BIN \rightarrow BIN$ calculant le successeur d'un nombre de type BIN
3. Ecrivez la fonction inductive $f : x \mapsto 2x - 1$ sur le codage BIN et déduisez en une fonction Pp calculant le prédécesseur d'un BIN (avec la convention que le prédécesseur de 1 est 1).
4. Démontrez par induction que pour tout $x \in BIN$, $S_p(f(x)) = x0$.

Exercice 2 Le langage de Lukasiewicz L sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ est défini par :

$$\frac{}{b} \quad \frac{u \quad v}{a u v}$$

1. Enumérez les mots de L de hauteur d'induction inférieure ou égale à 2.
2. Montrez que tout mot $u \in L$ vérifie $|u|_b = |u|_a + 1$

Exercice 3 On définit un ensemble F de triplets d'entiers naturels de la façon suivante:

$$\frac{}{(0, 0, 0)} \quad \frac{(a, b, c)}{(a, b + 1, c + 1)} \quad \frac{(a, b, c)}{(a + 1, b + 1, c)}$$

1. Donner 5 éléments de F
2. Donner un élément de \mathbb{N}^3 qui n'est pas dans F
3. Caractériser les triplets de F . Prouvez votre réponse.