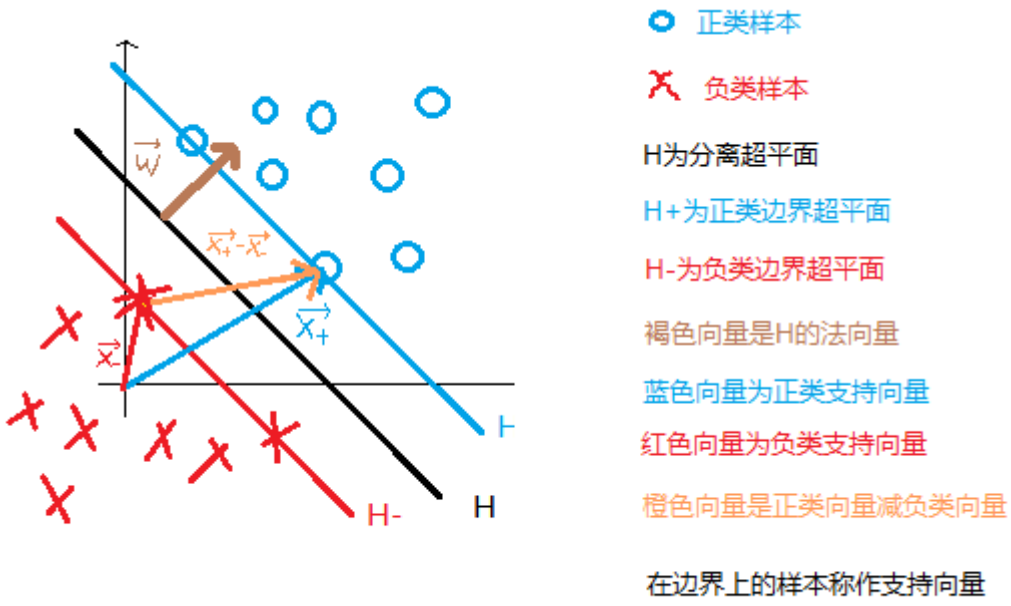
SVM

线性可分支持向量机及优化目标

SVM是一个二分类模型，寻找一个超平面，最大化正负类样本到该平面的最小间隔。



样本特征记为 $\vec{X}$， 正类样本的标记为 $+1$，负类样本的标记为 -1。

超平面

$$\vec{W} \cdot \vec{X} + \vec{b} = 0 \tag{1}$$

所以

对正类样本有

$$\vec{W} \cdot \vec{X}_+ + \vec{b} \geq 1 \tag{2}$$

对负类样本有

$$\vec{W} \cdot \vec{X}_- + \vec{b} \leq -1 \tag{3}$$

支持向量则有

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot \vec{X}_+ + \vec{b} &= 1 \\ \vec{W} \cdot \vec{X}_- + \vec{b} &= -1 \end{aligned} \tag{4}$$

正负边界之间的距离记为 $Width$

根据余弦定理可知

$$\begin{aligned} \frac{Width}{||\vec{X}_+ - \vec{X}_-||} &= \frac{\vec{W} \cdot (\vec{X}_+ - \vec{X}_-)}{||\vec{W}|| \times ||\vec{X}_+ - \vec{X}_-||} \\ Width &= \frac{\vec{W} \cdot (\vec{X}_+ - \vec{X}_-)}{||\vec{W}||} \\ Width &= \frac{(1-b) - (-1-b)}{||\vec{W}||} \\ Width &= \frac{2}{||\vec{W}||} \end{aligned}$$

所以优化目标为

$$\begin{aligned} & max_{w,b} \frac{2}{||\vec{W}||} \\ 等价于 \quad & min_{w,b} \frac{1}{2} ||\vec{W}||^2 \\ s.t. \quad & y_i * (\vec{W} \cdot \vec{X}_i + \vec{b}) \geq 1, \forall i \in 1, 2, 3.....N \end{aligned}$$

拉格朗日对偶

考虑优化如下问题

$$\begin{aligned} & min f_0(x) \\ s.t. \quad & f_i(x) <= 0, \forall i \in 1, 2, 3.....N \end{aligned}$$

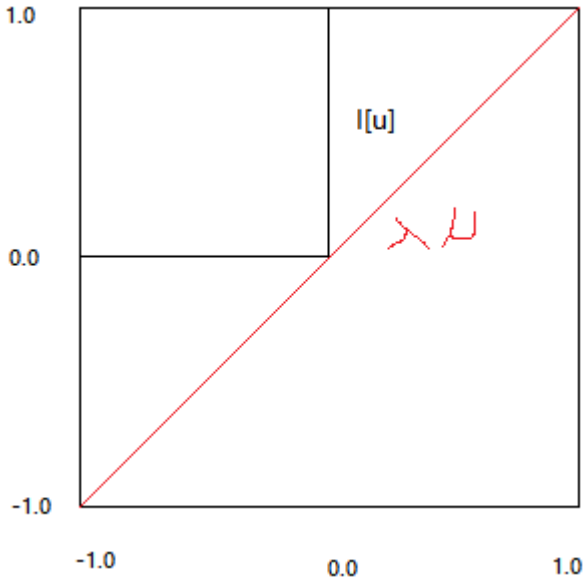
该问题可转化为

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{cases} f_0(x), f_i(x) \leq 0 \forall i \\ \infty, otherwise \end{cases} \\ &= f_0(x) + \sum_i I[f_i(x)] \end{aligned}$$

$$I[u] = \begin{cases} 0, & if \quad u \leq 0 \\ \infty, & otherwise \end{cases}$$

对违背约束条件的情况，有正无穷的惩罚。优化该问题依旧困难，所以考虑使用 $\lambda\mu$ 来处理，其中 $\lambda > 0$ 表示朝着 $+\infty$ 方向惩罚。（因为$\lambda\mu >= 0$ ）

$\lambda\mu$ 是 $I[u]$ 的下界，当 $\lambda \to +\infty$ 时，在 $\mu \geq 0$ 范围内， $\lambda\mu \to +\infty$ 。与 $I[u]$ 等价。见下图：



优化问题可以转为

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_i^N \lambda_i f_i(x). \quad \forall i \in 1,2,3...N, \lambda \geq 0 \tag{5}$$

这就是拉格朗日乘子法。

因为$\lambda\mu$ 是 $I[u]$ 的下界，且 $\lambda \to +\infty$时，$\lambda\mu \to +\infty$ 即$\lambda\mu = I[u]$

所以 $max_\lambda L(x,\lambda) = J(x)$。

我们的目标是$min_x J(x)$，所以问题可转化为$min_x max_\lambda L(x,\lambda)$

设 $max_\lambda min_x L(x,\lambda)$，且$g(\lambda) = min_x L(x,\lambda)$

$max_\lambda min_x L(x,\lambda) = max_\lambda g(\lambda)$

$L(x,\lambda)$是关于λ的仿射函数，又因为$\lambda >= 0$，所以$g(\lambda)$是凹的，所以$max_\lambda g(\lambda)$是一个凸优化问题。

下面说明$max_\lambda min_x L(x,\lambda)$与$min_x max_\lambda L(x,\lambda)$之间的关系，以及$g(\lambda)$是对偶问题。

$L(x,\lambda) \leq J(x) \quad \forall \lambda \geq 0$

$=> min_x L(x,\lambda) = g(\lambda) \leq min_x J(x) = p^*$

$=> d^* = max_\lambda g(\lambda) \leq p^*$

p^*为原问题的最优解。

d^*为$max_\lambda g(\lambda)$的最优解。

因为$\lambda \to +\infty$时，$\lambda\mu \to +\infty$，所以$max_\lambda g(\lambda) \to J(x)$

又因为$max_\lambda L(x,\lambda) = J(x)$

所以

$$max_\lambda min_x L(x,\lambda) \le min_x max_\lambda L(x,\lambda) \quad \lambda \ge 0 \tag{6}$$

KKT 条件

考虑如下问题

最优化

$$\begin{aligned} & f_0(x) \\ s.t. \quad & f_i(x) \le 0 \quad \forall i \in 1,2.....N \\ s.t. \quad & h_j(x) = 0 \quad \forall j \in 1,2.....M \end{aligned}$$

该问题的KKT条件是:

$$\begin{aligned} 1.\quad & 0 \in \partial f_0(x) + \sum_i^N \lambda_i \partial f_i(x) + \sum_j^M \mu_j \partial h_j(x) && \text{驻点} \\ 2.\quad & \lambda_i f_i(x) = 0 \quad \forall i \in 1,2.....N && \text{互补松弛条件} \\ 3.\quad & f_i(x) \le 0, h_j(x) = 0 \qquad \forall i \in 1,2.....N, \forall j \in 1,2.....M && \text{原始可行域} \\ 4.\quad & \lambda_i \ge 0 \qquad \forall i \in 1,2.....N && \text{对偶可行域} \end{aligned}$$

4是优化必须满足的条件，后面再详细说明。

KKT是最优解x^*的充要条件的证明，主要证明条件1，2.

先证明必要性：

假设x^*, λ^*, μ^*是原始问题和对偶问题在可行域的最优解，记对偶问题为$g(\lambda,\mu)$。

$$\begin{aligned} g(\lambda,\mu) &= min_x L(x,\lambda^*,\mu^*) && (1) \\ &= min_x f_0(x) + \sum_j^N \mu_j^* h_j(x) + \sum_i^M \lambda_i^* f_i(x) && (2) \\ &\le f_0(x^*) + \sum_j^N \mu_j^* h_j(x^*) + \sum_i^M \lambda_i^* f_i(x^*) && (3) \\ &\le f_0(x^*) && (4) \end{aligned}$$

(2)->(3)取等号的条件是 $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ 所以满足KKT条件2

(3)->(4)成立的原因是$\lambda_i \ge 0 \qquad \forall i \in 1,2.....N$

因为是最优解，所以在x^*处，一定有导数为0，所以KKT条件1成立。

条件3是原始问题约束，成立。

条件4成立。

再证明充分性：

如果x^*, λ^*, μ^*满足KKT条件，记对偶问题为$g(\lambda, \mu)$。

$$
\begin{aligned}
g &= g(\mu^*, \lambda^*) && (1)\\
&= min_x f_0(x) + \sum_j^N \mu_j h_j(x) + \sum_i^M \lambda_i f_i(x) && (2)\\
&= f_0(x^*) + \sum_j^N \mu_j h_j(x^*) + \sum_i^M \lambda_i f_i(x^*) && (3)\\
&= f_0(x^*) && (4)
\end{aligned}
$$

(1),(2)根据定义获得。

(2)->(3)是因为KKT条件1，所以在x^*出取得极值。

(3)->(4)是因为KKT条件2。

综上所以，KKT条件是目标函数在约束条件下取得极值的充分必要条件。

下面说明为什么KKT乘子$\lambda_i \geq 0 \qquad \forall i \in 1, 2.....N$

当取得极值时，$\nabla f_0(x) + \sum_j^N \mu_j \nabla h_j(x) + \sum_i^M \lambda_i \nabla f_i(x) = 0$

目标函数得梯度方向指向优化的方向，约束条件的梯度指向约束的方向。

假如$\nabla f_0(x)$与$\nabla f_i(x), \nabla h_j(x)$同向，那么$x$还可以沿着梯度的方向移动很小的一部分，并且既能够满足在可行域内，又能够朝着最优化的方向优化目标函数，所以此时的x并不是最优解。

所以只有在$\nabla f_0(x)$与$\nabla f_i(x), \nabla h_j(x)$异向时，才达到最优解，此时KKT乘子$\mu_j \geq 0 \qquad \forall j \in 1, 2.....N$

松弛变量

对于一些有噪点的数据，使用硬间隔不可分，或者分隔效果不好（正负类间隔不大，而最好的情况是间隔最大化）。此时引入松弛变量$0 \leq \xi \leq 1$，并修改约束条件为 $y * (\vec{W} \cdot \vec{X} + \vec{b}) \geq 1 - \xi$

优化目标调整为

$$
\begin{aligned}
& min_x \frac{1}{2}||w||^2 - C\sum_i^n \xi_i \\
s.t. \quad & y_i * (\vec{W} \cdot \vec{X}_i + \vec{b}) \geq 1 - \xi_i \qquad \forall i \in 1,2.....N \\
& 0 \leq \xi \leq 1
\end{aligned}
$$

其中$C > 0$，是超参数，作为惩罚因子，C越大，对于错误分类的惩罚越大。

通过拉格朗日乘子法，可得

$$
L(w,b,\alpha,\mu,\xi) = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_i^n \xi_i - \sum_i^n \alpha_i[y_i * (w \cdot x + \vec{b}) - 1 + \xi_i] - \sum_i^n \mu_i \xi_i \tag{7}
$$

由

$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial w} = 0, \frac{\partial L}{\partial b} = 0, \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0$

可得

$$
\begin{aligned}
& C - \alpha_i - \mu_i = 0, \\
& 又因为 \alpha_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \\
& \quad 所以 0 \leq \alpha_i \leq C
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
w = \sum_i^n \alpha_i y_i x_i \tag{9}
$$

$$
\sum_i^n \alpha_i y_i = 0 \tag{10}
$$

$1 - \xi_i - y_i * (\vec{W} \cdot \vec{X} + \vec{b}) = 0$ （KKT约束条件1满足该条件）此时该样本在间隔边界上

$\xi_i = 0$（KKT约束条件2满足该条件）此时该样本在间隔边界上

目标是

$$
max_\alpha min_{w,b,\xi} L(w,b,\alpha,\mu,\xi) = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_i^n \xi_i - \sum_i^n \alpha_i[y_i * (\vec{W} \cdot \vec{X} + \vec{b}) - 1 + \xi_i] - \sum_i^n \mu_i \xi_i \tag{11}
$$

先求对w, b, ξ的极小，再求对α的极大，将(8),(9),(10)带入(7)即得到对偶问题

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}||w||^2 + \sum_i^n \alpha_i - \sum_i^n \alpha_i y_i x_i w - \sum_i^n \alpha_i y_i b \\
=& \frac{1}{2}\sum_i^n \alpha_i y_i x_i \sum_j^n \alpha_j y_j x_j + \sum_i^n \alpha_i - \sum_i^n \alpha_i y_i x_i \sum_j^n \alpha_j y_j x_j \\
=& \sum_i^n \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j \\
s.t. \quad & \sum_i^n \alpha_i y_i = 0 \\
s.t. \quad & 0 \leq \alpha_i \leq C \qquad \forall i \in 1,2.....N
\end{aligned}
$$

核技巧

线性不可分时，使用线性支持向量机无法分离数据。此时寻找映射函数将数据进行转换或者升到高维空间，又变成线性可分数据。

前面的小节得到 $w = \sum_i^n \alpha_i y_i x_i$

所以对样本的预测可写为

$$y = \sum_i^n \alpha_i y_i x_i x + \vec{b} \tag{12}$$

同时，目标优化问题是

$$\sum_i^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j \tag{13}$$

可以看出无论是训练优化的过程还是预测过程，我们需要计算的是样本之间的向量内积。

假如将数据升维的函数为 $\phi(x)$，那么

(12)变为

$$y = \sum_i^n \alpha_i y_i \phi(x_i) \phi(x) + \vec{b} \tag{14}$$

(13)变为

$$\sum_i^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \phi(x_i) \phi(x_j) \tag{15}$$

此时可继续使用线性支持向量机寻找分离超平面。

但是寻找合适的转换或者升维函数并不容易，寻找映射函数的目的是为了使数据线性可分，具体的计算步骤是先映射，再求内积，就得到映射后的结果。可见最终的目标是求内积，假如有一个函数可直接得到这个内积，从而跳过映射函数，问题就很好解决了，这就是核技巧的作用。核函数可用来求解目标函数/预测函数中样本的向量内积，帮助我们省略映射函数的选择。

所以

(14)变为

$$y = \sum_i^n \alpha_i y_i K(x_i, x) + \vec{b} \tag{16}$$

(15)变为

$$\sum_i^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j) \tag{17}$$

常用的核函数有三种：

1.线性核函数 Linear Kernel

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_j \tag{18}$$

2.多项式核函数 Polynomial Kernel

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\gamma \vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_j + r)^p \qquad \gamma > 0 \tag{19}$$

3.高斯核函数 Radial Basis Function Kernel

$$K(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=e^{-\gamma||\vec{x}_i-\vec{x}_j||^2}\qquad \gamma>0 \tag{20}$$

RBF中的超参数 γ 越大，则核函数结果越小，样本差异凸显小；越大，则核函数结果越大，样本差异凸显大。

SMO

优化目标

$$\begin{aligned} &min_\alpha \frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j-\sum_i^n \alpha_i \\ s.t.\quad &\sum_i^n \alpha_i y_i=0 \\ s.t.\quad &0\le \alpha_i \le C \qquad \forall i\in 1,2.....N \end{aligned}$$

x,y已知， C是超参数，变量只有α，这是一个凸二次规划问题，但是变量有N个，随着样本量增加，变量个数增加，训练效率也低下。

SMO通过每次更新两个变量解决这个问题。

因为有约束条件(1)的存在，所以每次更新需要两个变量互为约束。

记每次选择的样本为 α_1,α_2

优化目标变为

$$\begin{aligned} &min_{\alpha_1,\alpha_2} \frac{1}{2}\alpha_1^2K_{11}+\frac{1}{2}\alpha_2^2K_{22}+y_1y_2K_{12}\alpha_1\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)+y_1\alpha_1\sum_{j=3}^n\alpha_jy_jK_{1j}+y_2\alpha_2\sum_{j=3}^n\alpha_jy_jK_{2j} \\ s.t.\quad &\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=-\sum_{i=3}^n y_i\alpha_i=\varsigma \\ &0\le\alpha_i\le C,i=1,2 \end{aligned}$$

α_1,α_2是线性关系，在$[0,C]$之间。假设α_2取值范围的两个端点为L,H

当$y_1=y_2$时

$$\begin{aligned} &\alpha_1+\alpha_2=\varsigma \\ &0\le\alpha_2\le C \\ &0\le\varsigma-\alpha_2\le C \end{aligned} \tag{21}$$

易得

$$\begin{aligned} L&=max(0,\alpha_1+\alpha_2-C) \\ H&=min(C,\alpha_1+\alpha_2) \end{aligned} \tag{22}$$

当$y_1\ne y_2$时

$$\begin{aligned} &\alpha_1-\alpha_2=\varsigma \\ &0\le\alpha_2\le C \\ &0\le\varsigma+\alpha_2\le C \end{aligned} \tag{23}$$

易得

$$
\begin{aligned}
L &= max(0, \alpha_2 - \alpha_1) \\
H &= min(C, C + \alpha_2 - \alpha_1)
\end{aligned} \tag{24}
$$

用α_2表示α_1，$\alpha_1 = (\varsigma - y_2\alpha_2)y_1$,带入优化目标式子，得到

$$
W(\alpha_2) = \frac{1}{2}K_{11}(\varsigma - \alpha_2 y_2)^2 + \frac{1}{2}K_{22}\alpha_2^2 + y_2K_{12}(\varsigma - \alpha_2 y_2)\alpha_2 - (\varsigma - \alpha_2 y_2)y_1 - \alpha_2 + v(\varsigma - \alpha_2 y_2) + y_2 v\alpha_2 \tag{25}
$$

其中

$$
v = \sum_{j=3}^{n} \alpha_j y_j K(x_i, x_j) \tag{26}
$$

对α_2求导并令其为0，再将$\varsigma = \alpha_1^{old}y_1 + \alpha_2^{old}y_2$代入，得到$\alpha_2$的更新公式

$$
\alpha_2^{new,unc} = \alpha_2^{old} + \frac{y_2(E_1 - E_2)}{\eta} \tag{27}
$$

其中

$$
\eta = K_{11} + K_{22} - 2K_{12} \tag{28}
$$

下面要分两种情况讨论

1.当$\eta > 0$时，是标准的二次优化问题，加上约束条件可知α_2的更新可表示为

$$
\begin{aligned}
\alpha_2^{new} &= \begin{cases} H, & \alpha_2^{new,unc} > H \\ \alpha_2^{new,unc}, & L < \alpha_2^{new,unc} < H \\ L, & \alpha_2^{new,unc} < L \end{cases} \\
\alpha_1^{new} &= \alpha_1^{old} + y_1y_2(\alpha_1^{old} - \alpha_2^{new})
\end{aligned}
$$

2.当$\eta \leq 0$时，需要将L, H分别带入(25)计算，谁的值越小（在一个很小的误差范围内，1e-8），谁就是α_2^{new}

前面KKT部分已经说明满足KKT条件是优化问题的充分必要条件，所以当所有的样本都满足KKT条件时，此时的α就是最优解。

如果满足KKT条件，那么对每一个 α 都满足如下要求：

在松弛变量一节讲到 α, μ的关系

$$
\begin{aligned}
0 \leq \alpha \leq C \\
0 \leq \mu \leq C \\
\alpha + \mu = C
\end{aligned} \tag{29}
$$

1.$\alpha_i = 0 \leftrightarrow y_i g(x_i) \geq 1$

如果$\alpha = 0$，那么样本不是支持向量，所以$y_i g(x_i) \geq 1$

2.$0 < \alpha_i < C \leftrightarrow y_i g(x_i) = 1$

如果$0 < \alpha < C$，那么 $\mu > 0$，所以 $\xi = 0$，所以样本在边界上，所以$y_i g(x_i) = 1$

3.$\alpha_i = C \leftrightarrow y_i g(x_i) \leq 1$

如果$\alpha = C$，那么 $\mu = 0$，所以 $\xi > 0$，所以样本在两个间隔边界之间，$g(x_i) < 1$，所以 $y_i g(x_i) \leq 1$

寻找两个变量的过程如下：

选择训练样本分为两层循环，外层寻找α_1，内层寻找α_2。

外层循环遍历所有$0 < \alpha < C$的样本点，寻找违反KKT条件的样本，计算误差范围在10^{-3}内，如果找不到，就遍历所有样本，寻找违反KKT条件的样本，如果找不到，则不需进行迭代，优化结束。

在找到第一个样本的前提下，寻找第二个样本，称为内层循环，α_2的优化依赖于$|E_1 - E_2|$，为了提高优化速度，要寻找的样本必须使$|E_1 - E_2|$最大，此时因为α_1已经确定，所以E_1也确定了，那么寻找E_2也很简单了，如果$E_1 > 0$，那么就找E最小的样本，如果$E_1 < 0$，就找E最大的样本。如果找到的样本不能使目标函数有足够的变化，就遍历所有样本，直到目标函数有足够变化，如果遍历完仍然没有找到合适的α_2，就跳过当前的α_1，重新外层循环。

α的优化也是在误差范围内的

$$\begin{aligned} &if \quad \alpha^{new} \leq 10^{-8} \quad then \quad \alpha^{new} = 0 \\ &if \quad \alpha^{new} \geq C - 10^{-8} \quad then \quad \alpha^{new} = C \end{aligned} \tag{30}$$

每次优化了α之后，就需要更新b和E。

当$0 < \alpha_1^{new} < C$时，由KKT约束可得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i K_{11} + b = y_1 \tag{31}$$

$$b_1^{new} = y_1 - \sum_{i=3}^{n} \alpha_i K_{i1} - \alpha_1^{new} y_1 K_{11} - \alpha_2^{new} y_2 K_{21} \tag{32}$$

又因为

$$E_1 = \sum_{i=3}^{n} \alpha_i y_i K_{i1} + \alpha_1^{old} y_1 K_{11} + \alpha_2^{old} y_2 K_{21} + b^{old} - y_1 \tag{33}$$

所以

$$b_1^{new} = -E_1 - y_1 K_{11}(\alpha_1^{new} - \alpha_1^{old}) - y_2 K_{21}(\alpha_2^{new} - \alpha_2^{old}) + b^{old} \tag{34}$$

同理

$$b_2^{new} = -E_2 - y_1 K_{12}(\alpha_1^{new} - \alpha_1^{old}) - y_2 K_{22}(\alpha_2^{new} - \alpha_2^{old}) + b^{old} \tag{35}$$

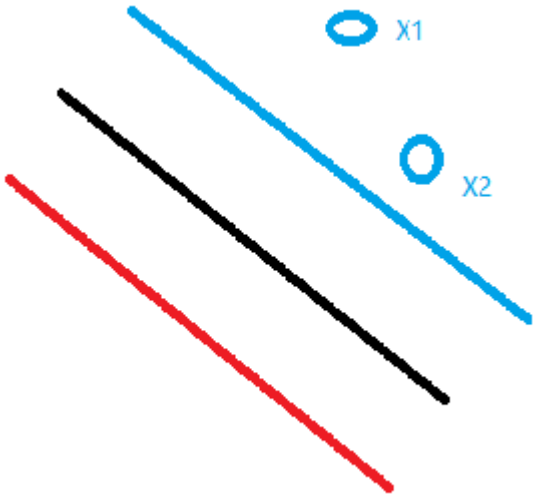
1.如果α_1, α_2 都在$(0, C)$之间，那么b^{new}取b_1^{new}或者b_2^{new}都可以。这一种情况对b的更新更加精确。

2.如果都等于0或者C,那么b_1^{new}, b_2^{new}以及之间的值都符合KKT条件，b^{new}取两者中点即可。

对于情况2，没有找到说明，我是这么理解的：

两个样本X_1, X_2，分别对应α_1, α_2

1.$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$



两者都不是支持向量，所以

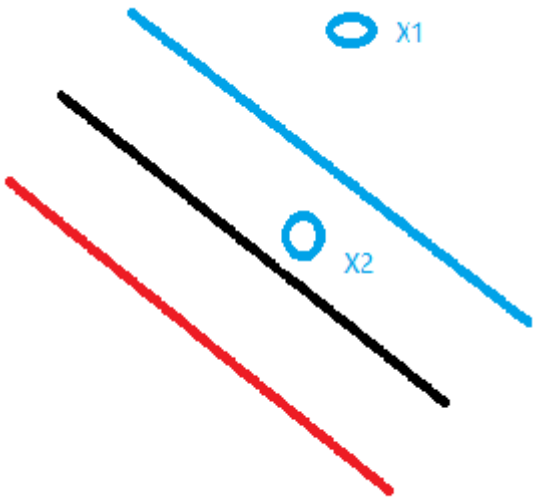
$y_1(g(x_1)+b_1)>1$，

$y_2(g(x_2)+b_2)>1$

X_1, X_2样本都在边界平面远离分离超平面的那一侧

假设X_1离分离超平面的距离大于X_2离分离超平面的距离，那么b_1比b_2大，即使b再小一点，只要不小于b_2都不影响X_1, X_2的分类，所以取中间的均值就可以了。

2.$\alpha_1>0, \alpha_2=C$



两者都不是支持向量，且有

$y_1(g(x_1)+b_1)>1$，X_1样本在边界平面远离分离超平面的一侧

$y_2(g(x_2)+b_2)<1$，X_2样本在边界平面靠近分离超平面的一侧

类似的，b比b_1小一点，不影响X_1的分类，比b_2大一点，不影响X_2的分类，所以b_1，b_2中间的值都满足条件

更新误差

$$E_i^{new} = \sum_{S} y_j \alpha_j K(x_i, x_j) + b^{new} - y_i \tag{36}$$

S为支持向量集合

因为非支持向量的α为0,对计算没有贡献，所以只需要计算支持向量的即可，每次迭代只有两个变量改变了，做全量更新有多余计算，所以只需要在上一次的基础上，增加本次α的变化量导致的变化即可。所以又可以写作

$$E_i^{new} = E_i^{old} + y_1(\alpha_1^{new} - \alpha_1^{old})K(x_1, x_i) + y_2(\alpha_2^{new} - \alpha_2^{old})K(x_2, x_i) + (b^{new} - b^{old}) \tag{37}$$

在SMO实现的代码中，只更新了支持向量样本的误差，非支持向量样本的误差没有更新，暂时没有找到解释，就做了这种理解：如果是非支持向量样本，$g(x) + b \geq y$，误差无法确定计算，但是支持向量样本的误差很好计算，所以更新误差时，只更新$0 < \alpha < C$的样本的误差。无论是训练还是预测，非支持向量的样本对计算没有贡献，因为根据KKT条件$\alpha = 0$。

参考资料

1.统计学习方法 李航

2.Sequential Minimal Optimization:A Fast Algorithm for Training Support Vector Machines John C. Platt