Контрольная работа №2.

Последнее обновление:

Часть 1. Качественные задачи.

1.1. Как изменится полная волновая функция $\Psi(x,t)$, описывающая стационарные состояния, если изменить начало отсчёта потенциальной энергии на некоторую величину ΔU?

Ответ: Измениться лишь временной множитель полной волновой функции. А так как физический смысл имеет лишь квадрат модуля этой функции, то изменение временного множителя никак не проявится.

1.2. Объясните с позиции квантовой теории: почему невозможно состояние, в котором частица находилась бы в состоянии покоя?

Ответ:

1.3. Имеет ли смысл делить полную энергию на кинетическую и потенциальную с позиции квантовой теории?

Ответ: В квантовой механике теряет смысл деление полной энергии E на кинетическую и потенциальную, т.к. одна из этих величин зависит от импульса, а другая – от координаты. Следовательно, в силу соотношения неопределенностей, эти величины не могут иметь одновременно определённые значения.

1.4. Объясните, почему электрон не падает на ядро с позиции квантовой теории.

Ответ:

1.5. Поясните причину возникновения «туннельного эффекта».

Ответ: Волновая функция ψ есть величина вспомогательная: все реально наблюдаемые величины связаны с ней вероятностными соотношениями. Поскольку функция ψ всюду отлична от нуля, существует конечная вероятность обнаружения частицы как внутри барьера, так и за его пределами.

1.6. Объясните основные отличия между квантовым и классическим гармоническим осциллятором.

Ответ: Квантовый осциллятор имеет дискретный спектр, а классический – сплошной.

1.7. Может ли частица находится на дне потенциальной ямы? Определяется ли это формой ямы?

Ответ: Падение на дно потенциальной ямы связано с обращением в ноль импульса частицы. Тогда неопределенность координаты становится сколько угодно большой, что противоречит соотношению неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \hbar.$$

1.8. В чём состояла ценность опытов Штерна и Герлаха?

Ответ: Наличие у атомов магнитных моментов и их квантование было доказано прямыми опытами Штерна и Герлаха.

1.9. Дайте наглядное истолкование спин-орбитальному взаимодействию.

Ответ: Воспользуемся теорией Бора для атома водорода: электрон, вращающийся по орбите, обладает спином и тем самым обладает спиновым магнитным моментом. Электрическое поле ядра оказывает воздействие на спиновый магнитный момент, в этом легко убедится, если перейти в систему отсчёта, где электрон покоится, а ядро движется, создавая магнитное поле, которое будет взаимодействовать со спиновым магнитным моментом.

1.10. Почему расщепление дублетов резкой серии в спектрах щелочных металлов одинаково для всех линий, а главной серии – неодинаково?

Ответ: Тонкая структура уровней и спектральных щелочных металлов в основном обусловлена спин-орбитальным взаимодействием. Главная серия возникает в результате переходов на наиболее низкий уровень S с вышележащих P-уровней. Уровень S синглетный, а все P-уровни двойные, причём расстояние между компонентами этих уровней убывает с возрастанием главного квантового числа n. Поэтому и сами спектральные линии главной серии получаются дублетами, расстояния между отдельными линиями которых различны. Линии резкой серии возникают в результате переходов с S-уровней на двойной P-уровень. Поэтому расстояния между компонентами дублетов одни и те же для всей серии.

1.11. Почему количество линий, наблюдаемых при нормальном эффекте Зеемана различно при наблюдении вдоль и перпендикулярно магнитному полю?

Ответ: Эффект Зеемана – это расщепление энергетических уровней под действием магнитного поля. При наложении магнитного поля движение электрона становится сложным, а также будет сложным спектр его излучения. Его можно представить как совокупность трёх монохроматических волн разной частоты $(\nu_0 - \Delta\nu), \nu_0, (\nu_0 + \Delta\nu)$ в разных состояниях поляризации. При наблюдении в магнитном поле в направлении, перпендикулярном полно (поперечный эффект Зеемана) в спектрах излучения и поглощения обнаруживается триплет – три линейно поляризованные спектральные линии: несмещенная линия первоначальной частоты с электрическим вектором $\vec{E}$, направленным вдоль $\vec{B}$, и две смещенные линии с частотами $(\nu_0 - \Delta\nu)$ и $\nu_0 + \Delta\nu$ и электрическим вектором $\perp$ магнитному полю.

При наблюдении вдоль магнитного поля (продольный эффект Зеемана) в спектрах обнаруживается дублет – две симметрично смещенные спектральные линии с частотами $(\nu_0 - \Delta\nu)$ и $(\nu_0 + \Delta\nu)$. Обе линии оказываются поляризованными по кругу.

Линия с $(\nu_0 - \Delta\nu)$ поляризована по левому кругу, а $(\nu_0 + \Delta\nu)$ по правому. При продольном наблюдении несмещенная спектральная компонента отсутствует.

1.12. Как будет видоизменяться спектр поглощения рентгеновского излучения веществом при уменьшении энергии излучения?

Ответ: При высоких E возбуждены все серии, при уменьшении энергии происходит прекращение возбуждения K-серии. Появляется край полосы поглощения, при дальнейшем уменьшении энергии на кривой поглощения появляется L-край.

1.13. Почему L-край полосы поглощения рентгеновского излучения веществом состоит из трёх «зубчиков»?

Ответ: Появление зубчиков связано с тонкой структурой рентгеновских спектров.

1.14. Объясните, почему при комнатных температурах интенсивность красных спутников заметно выше, чем фиолетовых в явлении комбинационного рассеяния света.

Ответ: При обычных температурах, согласно распределению Больцмана, число молекул в возбужденном состоянии значительно меньше, чем в основном. Поэтому в основном будут происходить процессы поглощения энергии. Значит интенсивность красных спутников будет больше.

1.15. Можно ли наблюдать для молекулы водорода вращательный и колебательно-вращательный спектр?

Ответ: Нет, т.к. вращательный и колебательно-вращательный спектры наблюдаются на опыте только для несимметричных молекул.

1.16. Почему при электронных переходах в молекулах меняется колебательный и вращательный характер движения?

Ответ: При электронном переходе изменяется электронная конфигурация оболочки, следовательно, изменяются силы, действующие между ядрами. Следовательно, меняются и колебательный, и вращательный характер движения. Т.е. при электронном переходе меняются все три составляющие энергии.

1.17. Дайте наглядное истолкование принципу Франка-Кондона.

Ответ: Электронных переход, происходящий наиболее вероятно без изменения положения ядер в молекуле.

Часть 2.

2.1. Протон с длиной волны $\lambda = 1{,}7$ пм упруго рассеялся под углом 90° на первоначально покоившейся частице, масса которой в $n = 4,0$ раза больше массы протона. Определить длину волы рассеянного протона.

Решение: Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m_2u^2}{2}.$$

Т.к. $m_2 = nm$, то $v^2 = v'^2 + nu^2$.

По теореме Пифагора: $(mv)^2 + (mv')^2 = (m_2u)^2$, откуда $v^2 + v'^2 = (nu)^2$.

$$\begin{cases} v^2 + v'^2 = (nu)^2; \\ v^2 = v'^2 + (nu)^2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений получаем:

$$v' = v\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

С учётом соотношения

$$p = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = mv$$

получим

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

2.2. Нейтрон с кинетической энергией $T = 0{,}25$ эВ испытал упругое соударение с первоначально покоившимся ядром атома ^{4}He. Найти длину волн обеих частиц в их Ц-системе до и после соударения.

Решение:

2.3. Два атома, ^{1}H и ^{4}He, движутся в одном направлении, причём дебройлевская длина волны каждого атома $\lambda = 60$ пм. Найти длины волн обоих атомов в их Ц-системе.

Решение:

2.4. Найти кинетическую энергию электронов, падающих нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, если на экране, отстоящем от диафрагмы на $l = 75$ см, расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 7{,}5$. Расстояние между щелями $d = 25$ мкм.

Решение:

2.5. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения $\vartheta = 30°$ на грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла, $d = 0{,}20$ нм. При ускоряющем напряжении U_0 наблюдали максимум зеркального отражения. Найти U_0, если следующий максимум зеркально отражения возникал при увеличении ускоряющего напряжения в $\eta = 2{,}25$ раза.

Решение:

2.6. Узкий пучок электронов с кинетической энергией $K = 10$ кэВ проходит через поликристаллическую алюминиевую фольгу, образуя на экране систему дифракционных колец. Вычислить межплоскостное расстояние, соответствующее отражению третьего порядка от некоторой системы кристаллических плоскостей, если ему отвечает дифракционное кольцо диаметра $D = 3{,}20$ см. Расстояние между экраном и фольгой $l = 10{,}0$ см.

Решение:

$$\Delta = d\sin\varphi;$$

$$\Delta = n\lambda = \frac{2n\pi\hbar}{p} = \frac{2n\pi\hbar}{\sqrt{2mT}};$$

$$d\sin\varphi = \frac{2n\pi\hbar}{\sqrt{2mT}};$$

$$d = \frac{2n\pi\hbar}{\sqrt{2mT}\sin\varphi}.$$

2.7. Интерпретировать квантовые условия Бора на основе волновых представлений: показать, что электрон в атоме водорода может двигаться только по тем круговым орбитам, на которых укладывается целое число дебройлевских волн.

Решение:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad p = mv = \frac{h}{p\lambda}.$$
$$mv(2\pi R) = \frac{h}{p\lambda}(2\pi R);$$
$$mv(2\pi R) = hn.$$

Условие квантования: $pRmv = nh/(2\pi)$

$$\frac{h}{p\lambda}(2\pi R) = nh; \quad 2\pi R = n\lambda; \quad R = \frac{n\lambda}{2\pi}$$

2.8. Убедиться, что измерения координаты частицы с помощью микроскопа вносит неопределенность в её импульс Δp_x, такую, что $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h$. Иметь в виду, что разрешение микроскопа $d = \lambda / \sin\vartheta$, где λ – длина волны используемого света.

Решение: У фотона, рассеянного на микрочастице и прошедшего через объектив О, проекция импульса p_x не превышает, как видно из рисунка ☺, значение $p \sin\vartheta = \hbar k \sin\vartheta$, где $k = 2\pi/\lambda$. Эта величина характеризует и неопределенность Δp_x фотона. Но при рассеянии фотона на микрочастице последняя испытывает отдачу, в результате чего её импульс получит такую же неопределенность Δp_x, как и фотон: $\Delta p_x \approx \hbar k \sin\vartheta$.

Имея, кроме того, в виду, что неопределенность координаты x микрочастицы $\Delta x \approx d = \lambda / \sin\vartheta$ получим в результате:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \frac{\lambda}{\sin\vartheta} \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin\vartheta = 2\pi\hbar$$

в чём и следовало убедиться.

2.9. Плоский поток частиц падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, образуя на экране дифракционную картину. Показать, что попытка определить, через какую щель прошла та или иная частица (например, с помощью введения индикатора И), приводит к разрушению дифракционной картины. Для простоты считать углы дифракции малыми.

Решение:

2.10. Оценить минимально возможную энергию электронов в атоме He и соответствующее расстояние электронов от ядра.

Решение:

2.11. Оценить с помощью соотношения неопределенностей неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $l = 0{,}10$ нм. Сравнить полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите данного атома.

Решение:

2.12. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $l = 0{,}20$ нм.

Решение:

2.13. Электрон с кинетической энергией $T \approx 4$ эВ локализован в области размером $l \approx 1$ мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

Решение:

2.14. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы l. Оценить с помощью соотношения неопределенностей силу давления электрона на стенки этой ямы при минимально возможной его энергии.

Решение:

2.15. След пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки имеет диаметр $d \approx 0{,}5$ мм. Расстояние от электронной пушки до экрана $l \approx 20$ см, ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Оценить с помощью соотношения неопределенность координаты электрона на экране.

Решение:

2.16. Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле $U = \dfrac{\chi x^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию частицы в таком поле.

Решение:

2.17. Параллельный пучок атомов водорода со скоростью $\nu = 600$ м/с падает нормально на узкую щель, за которой на расстоянии $l = 1{,}0$ м расположен экран. Оценить с помощью соотношения неопределенностей ширину b щели, при которой ширина изображения её на экране будет минимальной.

Решение:

4.17: Вычислить энергию связи K – электрона ванадия, для которого длина волны L – края поглощения $\lambda_L = 2,4$ нм.

С помощью схемы :) можно записать, что искомая энергия связи:

$$E_K = \hbar\omega_L + \hbar\omega_{K\alpha}$$

где $\omega_L = 2\pi c/\lambda_L$ и $\omega_{K\alpha}$ – частота определяемая законом Мозли:

$$\omega_{K\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-\sigma)^2$$

В результате получаем:

$$E_K = \hbar\Big(\frac{2\pi c}{\lambda_L} + \frac{3}{4}R(Z-1)^2\Big)$$

5.1: Найти магнитный момент μ и возможные проекции μ_z атома в состоянии:
а) ^1F
б) $^2D_{3/2}$

Основные формулы:

$$\mu_L = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{L(L+1)}; \quad \mu_{LZ} = m_L\mu_{\text{Б}}; \quad m_L = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm L$$

$$\mu_S = -2\mu_{\text{Б}}\sqrt{S(S+1)}; \quad \mu_{SZ} = 2m_S\mu_{\text{Б}}; \quad m_S = -S, -S+1, ..., +S$$

$$\mu_J = -\mu_{\text{Б}}g\sqrt{J(J+1)}; \quad \mu_{JZ} = m_Jg\mu_{\text{Б}}; \quad m_J = -J, -J+1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а) $^1F : L = 3, S = 0, J = 3$

$$g = 0$$

$$\mu_L = -2\mu_{\text{Б}}\sqrt{3}$$

$$\mu_S = 0$$

$$\mu_J = 0$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2, \pm3$$

$$m_S = 0$$

$$m_J = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

б) $^2D_{3/2} : L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$

$$g = \frac{12}{5}$$

$$\mu_L = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{6}$$

$$\mu_S = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3}$$

$$\mu_J = -\frac{6}{5}\mu_{\text{Б}}\sqrt{15}$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2$$

$$m_S = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

5.2: Вычислить магнитный момент атома водорода в основном состоянии.

Используем формулы из предыдущей задачи.

$$S = \frac{1}{2} \text{ из условия } m_S = \frac{1}{2} \text{ и } S = \sum m_S = \frac{1}{2}$$

$$L = 0; \quad J = L + S \Rightarrow J = \frac{1}{2}$$

$$g = 2; \quad \mu_L = 0; \quad \mu_S = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3}; \quad \mu_J = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3};$$

5.3: Найти механические моменты атомов в состоянии ^5F и ^7H, если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.

Основные формулы:

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}; \quad M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}; \quad M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

а) ^5F

$$L=3,\quad S=2,\quad J=0$$

$$M_L=2\hbar\sqrt{3};\quad M_S=\hbar\sqrt{6};\quad M_J=0$$

б) ^7H

$$L=4,\quad S=3,\quad J=0$$

$$M_L=2\hbar\sqrt{5};\quad M_S=2\hbar\sqrt{3};\quad M_J=0$$

5.4: Механический момент атома в состоянии ^3F прецессирует в магнинтном поле $B=500$ Гс с угловой скоростью $\omega=5,5\cdot10^9$ рад/с. Определить механический и магнитный моменты атома.

$$\mu_{\text{Б}}=\frac{e\hbar}{2m}$$

$$^3F:S=1,L=3,J=L+S=4$$

$$\dot{\vec{M}}_J=\vec{N}=\vec{\mu_J}\times\vec{B}$$

$$M_J\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\sin\alpha=\mu_J\cdot B\cdot\sin\alpha$$

$$M_J\omega=\mu_J\cdot B$$

$$M_J=\frac{\mu_J B}{\omega}$$

$$g=1+\frac{S(S+1)+J(J+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{5}{4}$$

$$\mu_J=\mu_{\text{Б}}g\sqrt{J(J+1)}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\mu_{\text{Б}}$$

В результате получаем:

$$M_J=\frac{5\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\mu_{\text{Б}}B}{\omega}$$

5.5: Объяснить с помощью векторной модели, почему механический момент атома, находящегося в состоянии $^6F_{1/2}$ прецессирует в магнитном поле B с угловой скоростью ω, вектор которого направлен противоположно вектору $\vec{B}$.

5.6: Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна и Герлаха через резко неоднородное магнитное поле. Определить:
а) максимальные значения проекций магнитных моментов атомов в состояниях ^4F, ^6S и ^5D, если известно, что пучок расщепляется соответственно на 4, 6 и 9 компонент;
б) на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях $^3D_2$ и $^5F_1$?

а) Используемые формулы:

$$\mu_{LZ}=m_L\mu_{\text{Б}};\quad m_L=0,\pm1,\pm2,...,\pm L$$

$$\mu_{SZ}=2m_S\mu_{\text{Б}};\quad m_S=-S,-S+1,...,+S$$

$$\mu_{JZ}=m_Jg\mu_{\text{Б}};\quad m_J=-J,-J+1,...,+J$$

$$g=1+\frac{S(S+1)+J(J+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим каждое состояние атома в отдельности:

$$^4F : L = 3, S = \frac{3}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot 4}{3 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2, \pm3; \quad m_S = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leftarrow \text{расщепление на 4 компоненты}$$

$$\mu_{maxLZ} = 3\mu_\text{Б}; \quad \mu_{maxSZ} = 3\mu_\text{Б}; \quad \mu_{maxJZ} = \frac{6}{5}\mu_\text{Б};$$

$$^6S : L = 0, S = \frac{5}{2}, J = \frac{5}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{35}{4} + \frac{35}{4}}{\frac{35}{2}} = 2$$

$$m_L = 0; \quad m_S = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

$$m_J = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \leftarrow \text{расщепление на 6 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 0; \quad \mu_{maxSZ} = 5\mu_\text{Б}; \quad \mu_{maxJZ} = 10\mu_\text{Б}$$

$$^5D : L = 2, S = 2, J = 4$$

$$g = 1 + \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2; \quad m_S = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$m_J = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \leftarrow \text{расщепление на 9 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 2\mu_\text{Б}; \quad \mu_{maxSZ} = \mu_\text{Б}; \quad \mu_{maxJZ} = 3\mu_\text{Б}$$

б) Запишем для каждого терма значение m_J

$$^3D_2 : L = 2, S = 1, J = 2$$

$$m_J = -2, -1, 0, 1, 2 \leftarrow \text{расщепление на 5 компонент}$$

$$^5F_1 : L = 3, S = 2, J = 1$$

$$m_J = -1, 0, 1 \leftarrow \text{расщепление на 3 компоненты}$$

5.7: Атом находится в магнитном поле $B = 3,00$ кГс. Определить:
а) полное расщепление, см$^{-1}$, терма ^1D;
б) спектральный символ синглетного терма, полная ширина расщепления которого составляет 0,84 см$^{-1}$.

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$m_J = -J, -J+1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а)

$$^1D : L = 2, S = 0, J = 2; \quad m_J = -2, -1, 0, 1, 2; \quad g = 1$$

В предположении, что полное расщепление образуется в случае разности m_J и постоянства числа g, получаем:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(2+2) = 4\frac{\mu_Б B}{\hbar}$$

б)

5.8: Спектральная линия $\lambda = 0.612$ мкм обусловлена переходом между двумя синглетными термами атома. Определить интервал $\Delta\lambda$ между крайними компонентами этой линии в магнитном поле $B = 10,00$ кГс.

5.9: Построить схему возможных переходов между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии:
а) смещения зеемановских компонент в единицах $\mu_Б B/\hbar$;
б) интервал, см$^{-1}$, между крайними компонентами, если $B = 5,00$ кГс.

Используемые формул:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$m_J = -J, -J+1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Распишем значения двух термов:

$$^2P_{\frac{3}{2}} : L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}; \quad m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \quad g = \frac{1}{3}$$

$$^2S_{\frac{1}{2}} : L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}; \quad m_J = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \quad g = 2$$

а)

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\frac{\mu_Б B}{\hbar}$$

б)

5.10: Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещения (в единицах $\mu_Б B/\hbar$) зеемановских компонент спектральной линии:
а) $^2D_{3/2} \rightarrow ^2 P_{3/2}$;
б) $^2D_{5/2} \rightarrow ^2 P_{3/2}$.

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1) = \Delta\omega_0(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим пункт решение для пункта а:

$$^2D_{3/2} : L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$m_{J2} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_2 = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 3}{\frac{15}{2}} = \frac{24}{30}$$

$$^2P_{3/2} : L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$m_{J1} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_1 = 1 + \frac{\frac{18}{4} - 2}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3}$$

Правило отбора: $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

$$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} : \Delta\omega = \Delta\omega_0(-\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{30} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}) = -\frac{1}{5}\Delta\omega_0$$

Считаем $\Delta\omega$ для чисел:

$$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2};$$

И находим разность между двумя $\Delta\omega$.
Пункт б считается по аналогии.

5.11: Найти значения температуры, при которых средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул H_2 и N_2 равна их вращательной энергии в состоянии с квантовым числом $J = 1$.

Основная идея: записываем энергию вращательного движения молекулы ($E_J = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1)$), где I – момент инерции молекулы, J – вращательное квантовое число; приравниваем к значению $\frac{3}{2}kT$, где k – постоянная Больцмана ($1.38 \cdot 10^{-23}$Дж $\cdot$ К$^{-1}$), Т – температура; выражаем и находим значение для каждой из молекул.

5.12:

5.13:

5.14:

5.15: Для двухатомной молекулы известны интервалы между тремя последовательными вращательными уровнями $\Delta E_1 = 0,20$ МэВ

Используемая формула:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1)$$

Запишем формулы для вращательных уровней:

$$E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1)$$

$$E_{J2} = \frac{\hbar^2}{2I}(J+1)(J+2) = \frac{\hbar^2}{2I}n(n+1)$$

$$E_{J3} = \frac{\hbar^2}{2I}(J+2)(J+3)$$

Сделав обозначение $n = J+1$.
Распишем разность энергий через формулы для уровней:

$$\Delta E_1 = E_{J2} - E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I}((J+1)(J+2) - J(J+1)) = \frac{\hbar^2}{I}(J+1)$$

$$\Delta E_1 = E_{J2} - E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I}((J+2)(J+3) - (J+1)(J+2)) = \frac{\hbar^2}{I}(J+2)$$

Найдём значение J поделив ΔE_1 на ΔE_2:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{J+1}{J+2}$$

Сделав преобразования относительно J получим:

$$J = \frac{\Delta E_2 - 2\Delta E_1}{\Delta E_1 - \Delta E_2} = 1$$

Отсюда получаем значение для среднего уровня $n = J+1 = 2$.
Для определение момента запишем:

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = \frac{\hbar^2}{I}(J+2-J-1) \Rightarrow I = \frac{\hbar^2}{\Delta E_2 - \Delta E_1}$$

5.16: Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекул CO, момент инерции которых равен $I = 1,44 \cdot 10^{-39}$ г $\cdot$ см^2.

Возможно задача не допоставлена и нехватает $\omega = 4.1 \cdot 10^{14}$с$^{-1}$.

Решение:

Искомое число линий должно быть равно числу вращательный уровней между нулевым и первым возбужденным колебательными уровняит ($\nu = 0$ и $\nu = 1$), интервал между которыми согласно формуле:

$$E_\nu = (\nu + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

равен $\hbar\omega$. Задача, таким образом, сводиться к определению максимального вращательного квантового числа r уровня с энергией $\hbar\omega$. Учитывая формулу:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$$

запишем

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$$

откуда

$$r^2 + r - \frac{2I\omega}{\hbar} = 0$$

Решение этого уравнения даёт $r_{\text{макс}}$:

$$r_{\text{макс}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(2I\omega/\hbar}}{2} \approx \frac{2I\omega}{\hbar} = 33$$

Следовательно, чисто вращательных спектр данной молекулы содержит около 30 линий.

5.17: