Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный технический университет»
Факультет электроники и вычислительной техники
Кафедра физики

Семестровая работа №2 по дисциплине «Электродинамика»

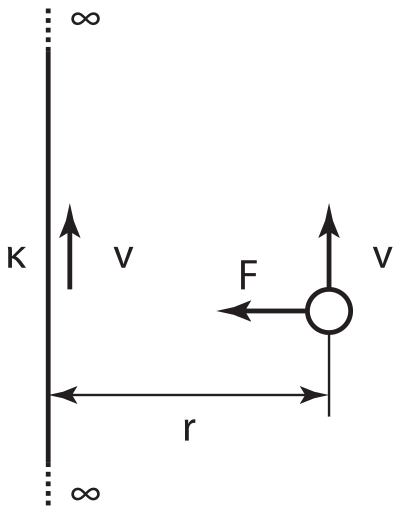
Выполнил:
студент группы Ф-369
Голубев А. В.

Проверил:
доцент Грецов М. В.

Оценка ___________

Волгоград, 2012

Задача №689: Бесконечно длинная равномерно заряженная прямая с линейной плотностью заряда $\varkappa$ в системе, где прямая покоится, перемещается вдоль своей длины равномерно со скоростью v. На расстоянии r от неё находится точечный заряд, движущийся параллельно прямой с той же скоростью. Найти электромагнитную силу F, действующую на заряд; скорость v произвольна.



Запишем уравнение движения заряда в электромагнитном поле:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

Стоящие справа выражение носит название *лоренцевой силы*. Первая её часть – сила, с которой действует электрическое поле на заряд, – не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля $\vec{E}$. Вторая часть – сила, оказываемая магнитным полем на заряд, – пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля $\vec{H}$.

В силу произвольности скорости движения, уравнение можно записать в виде:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

Или представляя $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, перепишем в следующем виде:

$$\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

Так как по условию задачи, заряд точечный, то он не будет вносить изменение в поле создаваемое движущийся прямой.

Перейдем в систему связанную с точечным зарядом. Магнитное поле не действует на наш заряд, тогда можно положить $\vec{H} = 0$, и перейти от векторов к скалярам.

$$F = eE\sqrt{1-\beta^2}$$

Рассмотрим поле, создаваемое бесконечной прямолинейной прямой с линейной плотностью $\varkappa$. Возьмём в качестве поверхности цилиндр с осью, совпадающий с прямой, радиусом r и высотой Δl. Тогда поток через поверхность по теореме Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\varkappa \Delta l}{\varepsilon_0}$$

В силу симметрии:

1) вектор напряженности поля направлен перпендикулярно прямой
2) модуль этого вектора в любой точке поверхности цилиндра одинаков

Тогда поток напряжённости через эту поверхность можно рассчитать следующим образом:

$$\Phi_E = \sum_i \Delta S_i E_i = E \sum_i \Delta S_i = ES = E 2\pi r \Delta l$$

Учитывая только площадь боковой поверхности цилиндра, так как поток через основания цилиндра равен нулю (в следствии направления E по касательным к ним). Приравнивая два полученных выражения для Φ_E, получаем:

$$\frac{\varkappa \Delta l}{\varepsilon_0} = E 2\pi r \Delta l$$

$$E = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Или в системе СГС:

$$E = \frac{2\varkappa}{r}$$

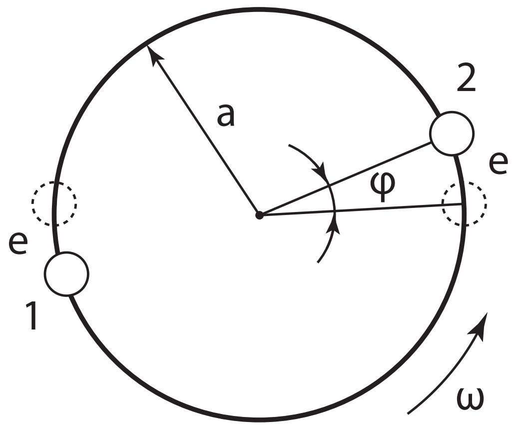
Подставляя полученную напряженность поля в уравнение для силы получаем:

$$F = \frac{2e\varkappa}{r}\sqrt{1-\beta^2}$$

Ответ:

$$F = \frac{2e\varkappa}{r}\sqrt{1-\beta^2}$$

Задача №733: Исследовать влияние интерференции на излучение электромагнитных волн системой зарядов в следующем примере: два одинаковых электрических заряда e движутся равномерно с нерелятивистской скоростью и с частотой ω по круговой орбите радиуса a, оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Найти поляризацию, угловое распределение $\overline{dI}/d\Omega$ и интенсивность $\overline{I}$ излучения. Как изменится интенсивность излучения, если убрать один из зарядов.



Решение:

Векторный потенциал произвольной системы зарядов с плотностью токов $\vec{j}(\vec{r},t)$ определяется выражением:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r'}, t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV'$$

Разложим потенциал в ряд по переменной $(\vec{r}\cdot\vec{r'})/cr$. В этом случае первые три члена разложения векторного потенциала имеют вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr} + \frac{\ddot{\vec{Q}}(t')}{2c^2 r} + \frac{\dot{\vec{\mu}}(t') \times \vec{n}}{cr}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный радиус вектор точки наблюдения, $t' = t - r/c$ – время запаздывания, $\vec{p}$ – дипольный момент системы зарядов, $\vec{\mu}$ – магнитный момент системы токов, а $\vec{Q}$ – квадрупольный момент, компоненты которого определены следующим соотношением:

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$$

Здесь $Q_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора квадрупольного момента системы, n_β – компоненты единичного радиус-вектора.

Компоненты тензора квадрупольного момента запишутся в виде:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} q_i \left\{ 3x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} - r^{(i)^2} \delta_{\alpha\beta} \right\}$$

Запишем компоненты тензора квадрупольного момента системы зарядов:

$$Q_{11} = e\left(3a^2\cos^2\varphi - a^2\right); \quad Q_{12} = e\left(3a^2\cos\varphi\sin\varphi\right)$$

$$Q_{13} = e\left(3a^2\cos\varphi\cdot 0\right) = 0; \quad Q_{21} = e\left(3a^2\cos\varphi\sin\varphi\right)$$

$$Q_{22} = e\left(3a^2\sin^2\varphi - a^2\right); \quad Q_{23} = Q_{31} = Q_{32} = 0;$$

$$Q_{33} = -ea^2$$

где $\varphi = \omega t$, a – расстояние до заряда.

Найдём квадрупольный момент:

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$Q = 2e\begin{pmatrix} 3a^2\cos^2\varphi - r^2 & 3a^2\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ 3a^2\cos\varphi\sin\varphi & 3a^2\sin^2\varphi - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$

Перемножая строку на столбец, получаем:

$$Q = 2e\Big\{ \left(3a^2\cos^2\varphi - a^2\right)\vec{e_1} + \left(3a^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3} +$$
$$\left(3a^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{e_1} + \left(3a^2\sin^2\varphi - a^2\right)\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} - a^2\vec{e_3}\Big\}$$

В задаче дипольный и магнитный моменты равны нулю, тогда выражение для векторного потенциала запишется в виде:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\ddot{\vec{Q}}(t')}{2c^2 r}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

Найдём первую и вторую производную квадрупольного момента и преобразовав выражения получим:

$$\dot{\vec{Q}} = 6ea^2\omega\Big\{ \left(-\sin 2\omega t' + \cos 2\omega t'\right) \vec{e_1} + \left(\cos 2\omega t' + \sin 2\omega t'\right) \vec{e_2}\Big\}$$

$$\ddot{\vec{Q}} = 12ea^2\omega^2\Big\{ \left(-\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right) \vec{e_1} + \left(-\sin 2\omega t' + \cos 2\omega t'\right) \vec{e_2}\Big\}$$

В результате векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{6ea^2\omega^2}{c^2 r}\Big\{ \left(-\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right) \vec{e_1} + \left(-\sin 2\omega t' + \cos 2\omega t'\right) \vec{e_2}\Big\}$$

Напряженности поля могут быть вычислены по формулам, через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \times \vec{n}; \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}$$

Найдём производную векторного потенциала:

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) = \frac{12ea^2\omega^3}{c^2 r}\Big\{ \left(\sin 2\omega t' - \cos 2\omega t'\right) \vec{e_1} + \left(-\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right) \vec{e_2}\Big\}$$

Найдём вектор $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{12ea^2\omega^3}{c^3 r}\begin{pmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \sin 2\omega t' - \cos 2\omega t' & -\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \frac{12ea^2\omega^3}{c^3 r}\Big\{ -\vec{e_1}\left(\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right) - \vec{e_2}\left(\sin 2\omega t' - \cos 2\omega t'\right)\Big\}$$

Теперь найдём вектор $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{12ea^2\omega^3}{c^3 r}\begin{pmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \left(\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right) & \left(\sin 2\omega t' - \cos 2\omega t'\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \frac{12ea^2\omega^3}{c^3 r}\Big\{\vec{e_1}\left(\sin 2\omega t' - \cos 2\omega t'\right) - \vec{e_2}\left(\cos 2\omega t' - \sin 2\omega t'\right)\Big\}$$

Найдём вектор Пойнтинга:

$$|\vec{\Pi}| = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}$$

Подставляя значения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получаем:

$$|\vec{\Pi}| = \frac{72e^2a^4\omega^6}{\pi c^5 r^2}$$

Средняя интенсивность излучения:

$$< I >=< \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} >=< |\vec{\Pi}|\pi r^2 >= \frac{72e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

Угловое распределение интенсивности:

$$< \frac{dI}{d\Omega} >=< |\vec{\Pi}|r^2 >= \frac{72e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}$$

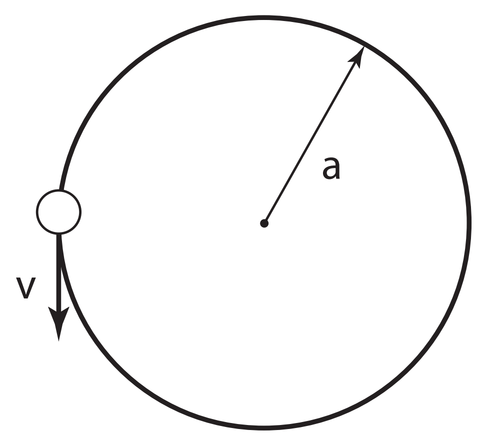
Если убрать один из зарядов, то интенсивность излучения возрастёт по порядку величины $(\lambda/a)^2$ раз, то есть значительно, так как выполняется условие $a/\lambda \ll 1$.

Ответ:

$$< I >= \frac{72e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

$$< \frac{dI}{d\Omega} >= \frac{72e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}$$

Задача №776: Заряд e движется по окружности радиуса a со скоростью $v = \beta c$. Найти спектральное разложение интенсивности излучения $dI_n/d\Omega$ в данном направлении.



$$\frac{dI}{d\Omega} = |\vec{\Pi}| \cdot r^2,$$

где $\vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга. Считая в волновой зоне участок фронта волны вблизи точки наблюдения плоским, можем записать, что

$$\Pi = \frac{c}{\mu_0} B^2.$$

Усреднив по времени, получим

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{\mu_0} \bar{B^2}.$$

Разложим индукцию магнитного поля в ряд Фурье по частоте обращения заряда $\omega = \beta c/a$:

$$B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\omega t}, \text{ где } B_n = \frac{1}{T} \int\limits_0^T B e^{-in\omega t}\, dt.$$

Отсюда

$$\bar{B^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n B_{-n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2.$$

Таким образом, для интенсивности имеем

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{2cr^2}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2,$$

а для отдельных гармоник

$$\frac{d\bar{I}_n}{d\Omega} = \frac{2cr^2}{\mu_0} |B_n|^2,$$

Индукцию B_n n-ой гармоники будем искать при помощи векторного потенциала $\vec{A}_n$:

$$\vec{B}_n = rot\vec{A}_n = i\vec{k} \times \vec{A}_n,$$

где $k = n\omega/c = n\beta/a$ и $\vec{k} \parallel \vec{r}$. Теперь определим разложение в ряд Фурье векторного потенциала. Сам потенциал для точечной частицы, имеющей заряд e и движущейся со скоростью $\vec{v}$ имеет вид

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\vec{v}(t - \frac{R}{c})}{R(t - \frac{R}{c})},$$

а коэффициенты его разложения в ряд Фурье определяются следующим образом:

$$\vec{A}_n = \frac{\mu_0 e}{4\pi T} \int_0^T \frac{\vec{v}(t - \frac{R}{c})}{R(t - \frac{R}{c})} e^{-in\omega t}\, dt.$$

Не допуская большой ошибки, можно считать, что в знаменателе $R = r$. Также учтём, что $\vec{v}(t - \frac{R}{c})\, dt = d\vec{r'}(t - \frac{R}{c})$:

$$\vec{A}_n = \frac{\mu_0 e}{4\pi r T} \oint e^{-in\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{R}}\, d\vec{r'} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r T} \oint e^{-in\omega t - i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r'})}\, d\vec{r'} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r T} e^{-ikr} \oint e^{-in\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r'}}\, d\vec{r'}.$$

Введём прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с началом в центре окружности, по которой вращается заряд, так, чтобы ось Oz была перпендикулярна плоскости кольца, а $\vec{r}$ лежал в плоскости Oyz. Обозначим угол между осью Oz и $\vec{r}$ ϑ, а угол между осью Ox и $\vec{r'}$ φ. Тогда

$$\vec{k} \cdot \vec{r'} = ka \sin\vartheta \sin\varphi = n\beta \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Найдём проекции $\vec{A}_n$ на эти оси. Очевидно, что $A_{nz} = 0$. Две другие проекции определяют следующим образом

$$A_{nx} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi r T} e^{-ikr} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in(\varphi - \beta \sin\vartheta \sin\varphi)} a \sin\varphi \, d\varphi = -i \frac{2\pi \mu_0 e a}{4\pi r T} e^{-ikr} J_n'(n\beta \sin\vartheta),$$

$$A_{ny} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi r T} e^{-ikr} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in(\varphi - \beta \sin\vartheta \sin\varphi)} a \cos\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi \mu_0 e a}{4\pi r T \beta \sin\vartheta} e^{-ikr} J_n(n\beta \sin\vartheta).$$

Вернёмся теперь к $|B_n|$:

$$|B_n|^2 = |\vec{k} \times \vec{A}_n|^2 = k^2 (A_{nx}^2 + A_{ny}^2 \cos^2\vartheta).$$

Подставляя последнее равенство в выражение для интенсивности, получим:

$$\frac{d\bar{I}_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 c^3 \beta^2}{8\pi^2 a^2} (\mathrm{ctg}^2 \vartheta J_n^2(n\beta \sin\vartheta) + \beta^2 {J_n'}^2(n\beta \sin\vartheta)).$$

Сделаем проверку размерности:

$$\left[\frac{d\bar{I}_n}{d\Omega}\right] = \frac{\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \text{Кл}^2 \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{с}^3}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Ответ:

$$\frac{d\bar{I}_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2 c^3 \beta^2}{8\pi^2 a^2} (\mathrm{ctg}^2 \vartheta J_n^2(n\beta \sin\vartheta) + \beta^2 {J_n'}^2(n\beta \sin\vartheta)).$$