

WARNING: я не даю гарантию, что задачи решены на 100% верно!!!

5.1: Найти магнитный момент μ и возможные проекции μ_z атома в состоянии:

а) 1F

б) $^2D_{3/2}$

Основные формулы:

$$\mu_L = -\mu_B \sqrt{L(L+1)}; \quad \mu_{LZ} = m_L \mu_B; \quad m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$$

$$\mu_S = -2\mu_B \sqrt{S(S+1)}; \quad \mu_{SZ} = 2m_S \mu_B; \quad m_S = -S, -S+1, \dots, +S$$

$$\mu_J = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)}; \quad \mu_{JZ} = m_J g \mu_B; \quad m_J = -J, -J+1, \dots, +J$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а) $^1F : L = 3, S = 0, J = 3$

$$g = 0$$

$$\mu_L = -2\mu_B \sqrt{3}$$

$$\mu_S = 0$$

$$\mu_J = 0$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$$m_S = 0$$

$$m_J = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

б) $^2D_{3/2} : L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$

$$g = \frac{12}{5}$$

$$\mu_L = -\mu_B \sqrt{6}$$

$$\mu_S = -\mu_B \sqrt{3}$$

$$\mu_J = -\frac{6}{5}\mu_B \sqrt{15}$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$m_S = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

5.2: Вычислить магнитный момент атома водорода в основном состоянии. Используем формулы из предыдущей задачи.

$$S = \frac{1}{2} \text{ из условия } m_S = \frac{1}{2} \text{ и } S = \sum m_S = \frac{1}{2}$$

$$L = 0; \quad J = L + S \Rightarrow J = \frac{1}{2}$$

$$g = 2; \quad \mu_L = 0; \quad \mu_S = -\mu_B \sqrt{3}; \quad \mu_J = -\mu_B \sqrt{3};$$

5.3: Найти механические моменты атома в состояниях 5F и 7H , если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.

Основные формулы:

$$M_L = \hbar \sqrt{L(L+1)}; \quad M_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}; \quad M_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}$$

а) 5F

$$L = 3, \quad S = 2, \quad J = 0$$

$$M_L = 2\hbar\sqrt{3}; \quad M_S = \hbar\sqrt{6}; \quad M_J = 0$$

б) 7H

$$L = 4, \quad S = 3, \quad J = 0$$

$$M_L = 2\hbar\sqrt{5}; \quad M_S = 2\hbar\sqrt{3}; \quad M_J = 0$$

5.4 Механический момент атома в состоянии 3F прецессирует в магнитном поле $B = 500$ Гс с угловой скоростью $\omega = 5.5 \cdot 10^9$ рад/с. Определить механический и магнитный моменты атома.

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

$${}^3F : S = 1, L = 3, J = L + S = 4$$

$$\dot{\vec{M}}_J = \vec{N} = \vec{\mu}_J \times \vec{B}$$

$$M_J \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \alpha = \mu_J \cdot B \cdot \sin \alpha$$

$$M_J \omega = \mu_J \cdot B$$

$$M_J = \frac{\mu_J B}{\omega}$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{5}{4}$$

$$\mu_J = \mu_B g \sqrt{J(J+1)} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \mu_B$$

В результате получаем:

$$M_J = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\mu_B B}{\omega}$$

5.5 Объяснить с помощью векторной модели, почему механический момент атома, находящегося в состоянии ${}^6F_{1/2}$ прецессирует в магнитном поле В с угловой скоростью ω , вектор которого направлен противоположно вектору В.

5.6 Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна и Герлаха через резко неоднородное магнитное поле. Определить:

- максимальные значения проекций магнитных моментов атомов в состояниях 4F , 6S и 5D , если известно, что пучок расщепляется соответственно на 4, 6 и 9 компонент;
- на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях 3D_2 и 5F_1 ?

а) Используемые формулы:

$$\mu_{LZ} = m_L \mu_B; \quad m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$$

$$\mu_{SZ} = 2m_S \mu_B; \quad m_S = -S, -S+1, \dots, +S$$

$$\mu_{JZ} = m_J g \mu_B; \quad m_J = -J, -J+1, \dots, +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим каждое состояние атома в отдельности:

$${}^4F : L = 3, S = \frac{3}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot 4}{3 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3; \quad m_S = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leftarrow \text{расщепление на 4 компоненты}$$

$$\mu_{maxLZ} = 3\mu_B; \quad \mu_{maxSZ} = 3\mu_B; \quad \mu_{maxJZ} = \frac{6}{5}\mu_B;$$

$${}^6S : L = 0, S = \frac{5}{2}, J = \frac{5}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{35}{4} + \frac{35}{4}}{\frac{35}{2}} = 2$$

$$m_L = 0; \quad m_S = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

$$m_J = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \leftarrow \text{расщепление на 6 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 0; \quad \mu_{maxSZ} = 5\mu_B; \quad \mu_{maxJZ} = 10\mu_B$$

$${}^5D : L = 2, S = 2, J = 4$$

$$g = 1 + \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2; \quad m_S = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$m_J = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \leftarrow \text{расщепление на 9 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 2\mu_B; \quad \mu_{maxSZ} = \mu_B; \quad \mu_{maxJZ} = 3\mu_B$$

б)

5.7 Атом находится в магнитном поле $B = 3,00$ кГс. Определить:

а) полное расщепление, см^{-1} , терма 1D

б) спектральный символ синглетного терма, полная ширина расщепления которого составляет $0,84 \text{ см}^{-1}$.

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar} (m_{J2} g_2 - m_{J1} g_1)$$

$$m_J = -J, -J + 1, \dots, +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а)

$$^1D : L = 2, S = 0, J = 2; \quad m_J = -2, -1, 0, 1, 2; \quad g = 1$$

В предположении, что полное расщепление образуется в случае разности m_J и постоянства числа g , получаем:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar}(2 + 2) = 4 \frac{\mu_B B}{\hbar}$$

б)

5.8 Спектральная линия $L = 0,612$ мкм обусловлена переходом между двумя синглетными термами атома. Определить интервал L между крайними компонентами этой линии в магнитном поле $B = 10,0$ кГс.

5.9 Построить схему возможных переходов между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии:

а) смещения зеемановских компонент в единицах $\mu_B B / \hbar$

б) интервал, см^{-1} , между крайними компонентами, если $B = 5,00$ кГс.

Используемые формул:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar}(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$m_J = -J, -J+1, \dots, +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Распишем значения двух термов:

$$^2P_{\frac{3}{2}} : L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}; \quad m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \quad g = \frac{1}{3}$$

$$^2S_{\frac{1}{2}} : L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}; \quad m_J = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \quad g = 2$$

а)

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = 0(???)$$

б)

5.10 Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещения (в единицах $\mu_B B / \hbar$) зеемановских компонент спектральной линии:

$$\text{а) } {}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$$

$$\text{б) } {}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$$

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar} (m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1) = \Delta\omega_0 (m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим пункт решение для пункта а:

$${}^2D_{3/2} : L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$m_{J2} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_2 = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 3}{\frac{15}{2}} = \frac{24}{30}$$

$${}^2P_{3/2} : L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$m_{J1} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_1 = 1 + \frac{\frac{18}{4} - 2}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3}$$

Правило отбора: $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

$$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} : \Delta\omega = \Delta\omega_0 \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{30} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{5} \Delta\omega_0$$

Считаем $\Delta\omega$ для чисел:

$$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2};$$

И находим разность между двумя $\Delta\omega$.

Пункт б считается по аналогии.

5.11 Найти значения температуры, при которых средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул H_2 и N_2 равна их вращательной энергии в состоянии с квантовым числом $J = 1$.

5.12 Определить момент импульса молекулы кислорода в состоянии с вращательной энергией 2,16 мэВ.

5.13 Найти для молекулы HCl вращательные квантовые числа двух соседних уровней, разность энергий которых равна 7,86 мэВ.

5.14 Найти механический момент молекулы кислорода, вращательная энергия которой $E = 2,16$ мэВ.

5.15 Для двухатомной молекулы известны интервалы между тремя последовательными вращательными уровнями $\Delta E_1 = 0,20$ мэВ и $\Delta E_2 = 0,30$ мэВ. Найти вращательное квантовое число среднего уровня и соответствующий момент инерции молекулы.

Используемая формула:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

Запишем формулы для вращательных уровней:

$$E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

$$E_{J2} = \frac{\hbar^2}{2I} (J+1)(J+2) = \frac{\hbar^2}{2I} n(n+1)$$

$$E_{J3} = \frac{\hbar^2}{2I} (J+2)(J+3)$$

Сделаем обозначение $n = J + 1$.

Распишем разность энергий через формулы для уровней:

$$\Delta E_1 = E_{J2} - E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I} ((J+1)(J+2) - J(J+1)) = \frac{\hbar^2}{I} (J+1)$$

$$\Delta E_2 = E_{J3} - E_{J2} = \frac{\hbar^2}{2I} ((J+2)(J+3) - (J+1)(J+2)) = \frac{\hbar^2}{I} (J+2)$$

Найдём значение J поделив ΔE_1 на ΔE_2 :

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{J+1}{J+2}$$

Сделав преобразования относительно J получим:

$$J = \frac{\Delta E_2 - 2\Delta E_1}{\Delta E_1 - \Delta E_2} = 1$$

Отсюда получаем значение для среднего уровня $n = J + 1 = 2$.

Для определение момента запишем:

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = \frac{\hbar^2}{I}(J + 2 - J - 1) \Rightarrow I = \frac{\hbar^2}{\Delta E_2 - \Delta E_1}$$

5.16 Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекул CO , момент инерции которых равен $I = 1.44 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

5.17 Найти отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения двухатомной молекулы на первый колебательный и первый вращательный уровни. Вычислить это отношение для следующих молекул:

- а) H_2
- б) HI
- в) I_2