WARNING: я не даю гарантию, что задачи решены на 100% верно!!!

5.1: Найти магнитный момент μ и возможные проекции μ_z атома в состоянии:
а) ^1F
б) $^2D_{3/2}$

Основные формулы:

$$\mu_L = -\mu_Б\sqrt{L(L+1)}; \quad \mu_{LZ} = m_L\mu_Б; \quad m_L = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm L$$

$$\mu_S = -2\mu_Б\sqrt{S(S+1)}; \quad \mu_{SZ} = 2m_S\mu_Б; \quad m_S = -S, -S+1, ..., +S$$

$$\mu_J = -\mu_Б g\sqrt{J(J+1)}; \quad \mu_{JZ} = m_J g\mu_Б; \quad m_J = -J, -J+1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а) $^1F : L = 3, S = 0, J = 3$

$$g = 0$$

$$\mu_L = -2\mu_Б\sqrt{3}$$

$$\mu_S = 0$$

$$\mu_J = 0$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2, \pm3$$

$$m_S = 0$$

$$m_J = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

б) $^2D_{3/2} : L = 2, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$

$$g = \frac{12}{5}$$

$$\mu_L = -\mu_Б\sqrt{6}$$

$$\mu_S = -\mu_Б\sqrt{3}$$

$$\mu_J = -\frac{6}{5}\mu_Б\sqrt{15}$$

$$m_L = 0, \pm1, \pm2$$

$$m_S = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

5.2: Вычислить магнитный момент атома водорода в основном сотоянии. Используем формулы из предыдущей задачи.

$$S = \frac{1}{2} \text{ из условия } m_S = \frac{1}{2} \text{ и } S = \sum m_S = \frac{1}{2}$$

$$L = 0; \quad J = L + S \Rightarrow J = \frac{1}{2}$$

$$g = 2; \quad \mu_L = 0; \quad \mu_S = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3}; \quad \mu_J = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3};$$

5.3: Найти механические моменты атома в состояниях ^5F и ^7H, если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.
Основные формулы:

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}; \quad M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}; \quad M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

а) ^5F

$$L = 3, \quad S = 2, \quad J = 0$$

$$M_L = 2\hbar\sqrt{3}; \quad M_S = \hbar\sqrt{6}; \quad M_J = 0$$

б) ^7H

$$L = 4, \quad S = 3, \quad J = 0$$

$$M_L = 2\hbar\sqrt{5}; \quad M_S = 2\hbar\sqrt{3}; \quad M_J = 0$$

5.4 Механический момент атома в состоянии ^3F прецессирует в магнитном поле B = 500 Гс с угловой скоростью $\omega = 5.5 \cdot 10^9$ рад/с. Определить механический и магнитный моменты атома.

$$\mu_{\text{Б}} = \frac{e\hbar}{2m}$$

$$^3F : S = 1, L = 3, J = L + S = 4$$

$$\dot{\vec{M}}_J = \vec{N} = \vec{\mu_J} \times \vec{B}$$

$$M_J \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin\alpha = \mu_J \cdot B \cdot \sin\alpha$$

$$M_J\omega = \mu_J \cdot B$$

$$M_J = \frac{\mu_J B}{\omega}$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{5}{4}$$

$$\mu_J = \mu_Б g\sqrt{J(J+1)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\mu_Б$$

В результате получаем:

$$M_J = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\mu_Б B}{\omega}$$

5.5 Объяснить с помощью векторной модели, почему механический момент атома, находящегося в состоянии $^6F_{1/2}$ прецессирует в магнитном поле B с угловой скоростью ω, вектор которого направлен противоположно вектору B.

5.6 Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна и Герлаха через резко неоднородное магнитное поле. Определить:

а) максимальные значения проекций магнитных моментов атомов в состояниях ^4F, ^6S и ^5D, если известно, что пучок расщепляется соответственно на 4, 6 и 9 компонент;

б) на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях $^3D_2$ и $^5F_1$?

а) Используемые формулы:

$$\mu_{LZ} = m_L \mu_Б; \quad m_L = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm L$$

$$\mu_{SZ} = 2m_S \mu_Б; \quad m_S = -S, -S+1, ..., +S$$

$$\mu_{JZ} = m_J g \mu_Б; \quad m_J = -J, -J+1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим каждое состояние атома в отдельности:

$$^4F : L = 3, S = \frac{3}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot 4}{3 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3; \quad m_S = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$m_J = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leftarrow \text{расщепление на 4 компоненты}$$

$$\mu_{maxLZ} = 3\mu_{\text{Б}}; \quad \mu_{maxSZ} = 3\mu_{\text{Б}}; \quad \mu_{maxJZ} = \frac{6}{5}\mu_{\text{Б}};$$

$$^6S : L = 0, S = \frac{5}{2}, J = \frac{5}{2}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{35}{4} + \frac{35}{4}}{\frac{35}{2}} = 2$$

$$m_L = 0; \quad m_S = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

$$m_J = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \leftarrow \text{расщепление на 6 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 0; \quad \mu_{maxSZ} = 5\mu_{\text{Б}}; \quad \mu_{maxJZ} = 10\mu_{\text{Б}}$$

$$^5D : L = 2, S = 2, J = 4$$

$$g = 1 + \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2; \quad m_S = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$m_J = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \leftarrow \text{расщепление на 9 компонент}$$

$$\mu_{maxLZ} = 2\mu_{\text{Б}}; \quad \mu_{maxSZ} = \mu_{\text{Б}}; \quad \mu_{maxJZ} = 3\mu_{\text{Б}}$$

б)

5.7 Атом находится в магнитном поле B = 3,00 кГс. Определить:

а) полное расщепление, см$^{-1}$, терма ^1D

б) спектральный символ синглетного терма, полная ширина расщепления которого составляет 0,84 см$^{-1}$.

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_{\text{Б}} B}{\hbar}(m_{J2} g_2 - m_{J1} g_1)$$

$$m_J = -J, -J + 1, ..., +J$$

$$g = 1 + \frac{S(S+1)+J(J+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

а)

$$^1D: L=2, S=0, J=2; \quad m_J = -2,-1,0,1,2; \quad g=1$$

В предположении, что полное расщепление образуется в случае разности m_J и постоянства числа g, получаем:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(2+2) = 4\frac{\mu_Б B}{\hbar}$$

б)

5.8 Спектральная линия L = 0,612 мкм обусловлена переходом между двумя синглетными термами атома. Определить интервал L между крайними компонентами этой линии в магнитном поле B = 10,0 кГс.

5.9 Построить схему возможных переходов между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии:

а) смещения зеемановских компонент в единицах $\mu_Б B/\hbar$
б) интервал, см$^{-1}$, между крайними компонентами, если B = 5,00 кГс.

5.10 Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещения (в единицах $\mu_Б B/\hbar$) зеемановских компонент спектральной линии:

а) $^2D_{3/2} \rightarrow ^2 P_{3/2}$
б) $^2D_{5/2} \rightarrow ^2 P_{3/2}$

Используемые формулы:

$$\Delta\omega = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1) = \Delta\omega_0(m_{J2}g_2 - m_{J1}g_1)$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Рассмотрим пункт решение для пункта а:

$$^2D_{3/2}: L=2, S=\frac{1}{2}, J=\frac{3}{2}$$

$$m_{J2} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_2 = 1 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-2\cdot 3}{\frac{15}{2}} = \frac{24}{30}$$

$$^2P_{3/2} : L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$$

$$m_{J1} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$g_1 = 1 + \frac{\frac{18}{4}-2}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3}$$

Правило отбора: $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

$$-\frac{3}{2} \to -\frac{3}{2} : \Delta\omega = \Delta\omega_0(-\frac{3}{2}\cdot\frac{24}{30}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}) = -\frac{1}{5}\Delta\omega_0$$

Считаем $\Delta\omega$ для чисел:

$$-\frac{3}{2} \to -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \to \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2} \to \frac{3}{2};$$

И находим разность между двумя $\Delta\omega$.

Пункт б считается по аналогии.

5.11 Найти значения температуры, при которых средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул H_2 и N_2 равна их вращательной энергии в состоянии с квантовым числом J = 1.

5.12 Определить момент импульса молекулы кислорода в состоянии с вращательной энергией 2,16 мэВ.

5.13 Найти для молекулы HCl вращательные квантовые числа двух соседних уровней, разность энергий которых равна 7,86 мэВ.

5.14 Найти механический момент молекулы кислорода, вращательная энергия которой E = 2,16 мэВ.

5.15 Для двухатомной молекулы известны интервалы между тремя последовательными вращательными уровнями ΔE_1 = 0,20 мэВ и ΔE_2 = 0,30 мэВ. Найти вращательное квантовое число среднего уровня исоответствующий момент инерции молекулы.

Используемая формула:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

Запишем формулы для вращательных уровней:

$$E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

$$E_{J2} = \frac{\hbar^2}{2I} (J+1)(J+2) = \frac{\hbar^2}{2I} n(n+1)$$

$$E_{J3} = \frac{\hbar^2}{2I} (J+2)(J+3)$$

Сделав обозначение $n = J + 1$.

Распишем разность энергий через формулы для уровней:

$$\Delta E_1 = E_{J2} - E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I}((J+1)(J+2) - J(J+1)) = \frac{\hbar^2}{I}(J+1)$$

$$\Delta E_1 = E_{J2} - E_{J1} = \frac{\hbar^2}{2I}((J+2)(J+3) - (J+1)(J+2)) = \frac{\hbar^2}{I}(J+2)$$

Найдём значение J поделив ΔE_1 на ΔE_2:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{J+1}{J+2}$$

Сделав преобразования относительно J получим:

$$J = \frac{\Delta E_2 - 2\Delta E_1}{\Delta E_1 - \Delta E_2} = 1$$

Отсюда получаем значение для среднего уровня $n = J + 1 = 2$.

Для определение момента запишем:

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = \frac{\hbar^2}{I}(J + 2 - J - 1) \Rightarrow I = \frac{\hbar^2}{\Delta E_2 - \Delta E_1}$$

5.16 Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекул CO, момент инерции которых равен $I = 1.44 \cdot 10^{-39}$г $\cdot$ см^2.

5.17 Найти отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения двухатомной молекулы на первый колебательный и первый вращательный уровни. Вычислить это отношение для следующих молекул:

а) H_2

б) HI

в) I_2