1.4 Свойства вычислений

Основной теоремой, из которой следуют многие важные свойства нашей вычислительной системы служит теорема Чёрча-Россера.

Теорема 1 (Чёрча-Россера)**.** *Если* $\mathsf{M} \longrightarrow_\beta \mathsf{N}$*,* $\mathsf{M} \longrightarrow_\beta \mathsf{K}$*, то существует* L*, такой что* $\mathsf{N} \longrightarrow_\beta \mathsf{L}$ *и* $\mathsf{K} \longrightarrow_\beta \mathsf{L}$*.*

Доказательство будет дано ниже.

Можно изобразить это свойство в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{M} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\mathsf{N} \arrow[dr, dotted, two heads] & & \mathsf{K} \arrow[dl, dotted, two heads] \\
& \mathsf{L} &
\end{tikzcd}$$

На таких диаграммах обычно подразумевают, что то, что дано в условии, изображено сплошными линиями, а то, что требуется доказать, прерывистыми. Иногда подобное свойство называют *свойством ромба.* Также используют термин *конфлюентность.*

Следующие факты являются следствиями теоремы Чёрча-Россера.

Теорема 2 (о существовании общего редукта)**.** *Если* $\mathsf{M} =_\beta \mathsf{N}$*, то существует* L*, такой что,* $\mathsf{M} \twoheadrightarrow_\beta \mathsf{L}$ *и* $\mathsf{N} \twoheadrightarrow_\beta \mathsf{L}$*.*

Доказательство (индукция по генерации $=_\beta$):

Случай $\mathsf{M} =_\beta \mathsf{N}$, поскольку $\mathsf{M} \twoheadrightarrow_\beta \mathsf{N}$. Возьмем $\mathsf{L} = \mathsf{N}$.

Случай $\mathsf{M} =_\beta \mathsf{N}$, поскольку $\mathsf{N} =_\beta \mathsf{M}$. По гипотезе индукции имеется общий β-редукт L_1 для N, M. Возьмем $\mathsf{L} = \mathsf{L}_1$.

Случай $\mathsf{M} =_\beta \mathsf{N}$, поскольку $\mathsf{M} =_\beta \mathsf{N}'$, $\mathsf{N}' =_\beta \mathsf{N}$. Тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{M} \arrow[dr, two heads] & (\mathsf{IH}) & \mathsf{N}' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & (\mathsf{IH}) & \mathsf{N} \arrow[dl, two heads] \\
& \mathsf{L}_1 \arrow[dr, dotted, two heads] & (\mathsf{CR}) & \mathsf{L}_2 \arrow[dl, dotted, two heads] & \\
& & \mathsf{L} & &
\end{tikzcd}$$

Здесь (IH) указывает на применение гипотезы индукции, а (CR) — теоремы Черча-Россера. ■

Теорема 3 (о редуцируемости к NF)**.** *Если* M *имеет* N *в качестве* β*-NF, то* $\mathsf{M} \twoheadrightarrow_\beta \mathsf{N}$*.*

Доказательство (упражнение).

Теперь мы можем доказать отсутствие нормальной формы у $\mathbf{\Omega}$. Действительно, если бы у $\mathbf{\Omega}$ была β-NF, скажем N, то выполнялось бы $\mathbf{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta N$. Но комбинатор $\mathbf{\Omega}$ редуцируется лишь сам к себе и не является β-NF.

Теорема 4 (о единственности β-NF)**.** *λ-терм имеет не более одной β-NF.*

Доказательство (упражнение).

Единственность β-NF дает нам простой алгоритм проверки β-эквивалентности двух термов, имеющих β-нормальные формы. Достаточно провести редукцию до нормальной формы для каждого из этих термов и сравнить результаты[8]. Напомним, что в общем случае проверка β-эквивалентности термов неразрешима.

1.5 Доказательство теоремы Чёрча-Россера

Мы следуем идеям доказательства из [3]. Доказательство во многом базируется на том соображении, что при редукциях редекс не может «развалиться». Иными словами, если работать в синтаксисе с обязательными скобками и покрасить некоторый редекс следующим образом

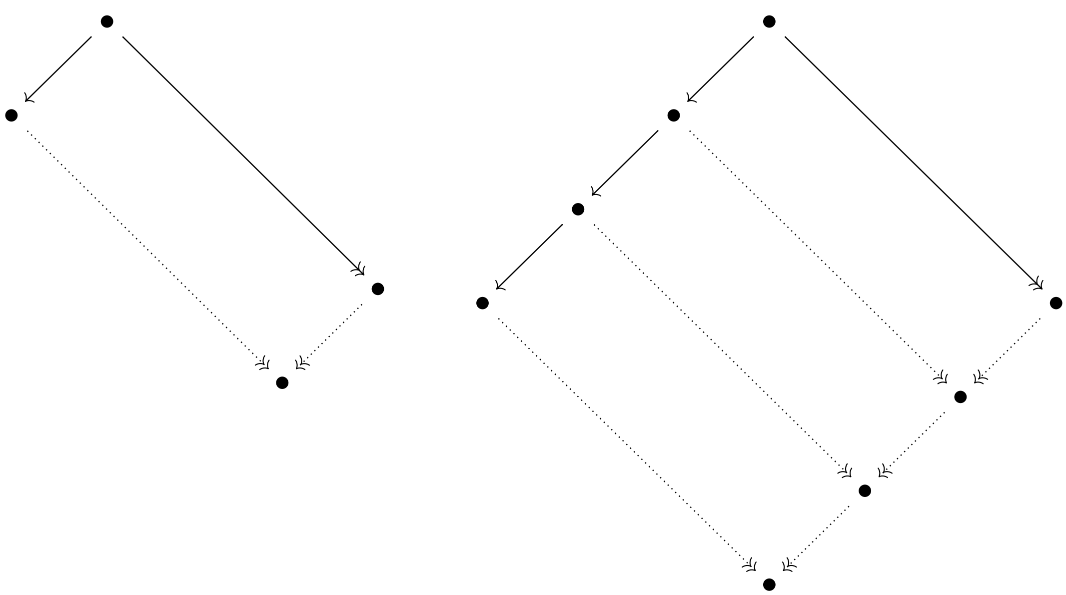
$$\ldots((\lambda x.\, M)(N))\ldots$$

то при вычислениях этот покрашенный редекс может полностью пропасть (либо его сокращением, либо под действием внешних факторов), размножится (пар цветных скобок станет несколько), M и N могут видоизменится произвольным (в общем случае) образом. Но пока пара цветных скобок цела, они всегда неотрывно будет следовать друг за другом. В доказательстве мы будем использовать более экономную раскраску редексов.

Технически доказательство устроено так: сначала доказываем Лемму полоски, а

[8] С точностью до α-эквивалентности.

затем из полосок составляем «ромб».



Термы *подкрашенного* лямбда-исчисления, множество которых мы будем обозначать Λ, определяются индуктивно:

$$
\begin{array}{lcr}
x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda, \\
M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda, \\
M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda, \\
M, N \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M)\, N \in \Lambda.
\end{array}
\tag{13}
$$

То есть в редексах (и только в них) некоторые лямбды могут быть покрашены.

Подкрашенные редукции (одношаговые и многошаговые) определяются стандартным образом на базе правил сокращения:

$$
\begin{array}{l}
(\lambda x.\, M)\, N \longrightarrow_\beta [x \mapsto N]\, M, \\
(\lambda x.\, M)\, N \longrightarrow_\beta [x \mapsto N]\, M.
\end{array}
\tag{14}
$$

То есть вычисления игнорируют раскраску.

Вводится операция *стирания подкраски*. Если $M \in \Lambda$, то $|M| \in \Lambda$ получается заменой в M всего красного на черное.

Задается операция $\varphi : \Lambda \to \Lambda$, заключающаяся в сокращении всех подкрашенных редексов изнутри наружу:

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi(x) & = & x, \\
\varphi(M\,N) & = & \varphi(M)\,\varphi(N), \\
\varphi(\lambda x.\, M) & = & \lambda x.\, \varphi(M), \\
\varphi((\lambda x.\, M)\, N) & = & [x \mapsto \varphi(N)]\, \varphi(M).
\end{array}
\tag{15}
$$

Лемма 2.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d, "|\,|"'] & N' \arrow[d, "|\,|"] \\
M \arrow[r, "\beta"'] & N
\end{tikzcd}$$

Лемма 3.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, dotted, two heads, "\beta"] \arrow[d, "|\,|"'] & & N' \arrow[d, "|\,|"] \\
M \arrow[rr, two heads, "\beta"'] & & N
\end{tikzcd}$$

Лемма 4.

$$\varphi([x \mapsto N]\, M) = [x \mapsto \varphi(N)]\, \varphi(M).$$

Лемма 5.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, two heads, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"'] & & N \arrow[d, "\varphi"] \\
\varphi(M) \arrow[rr, dotted, two heads, "\beta"'] & & \varphi(N)
\end{tikzcd}$$

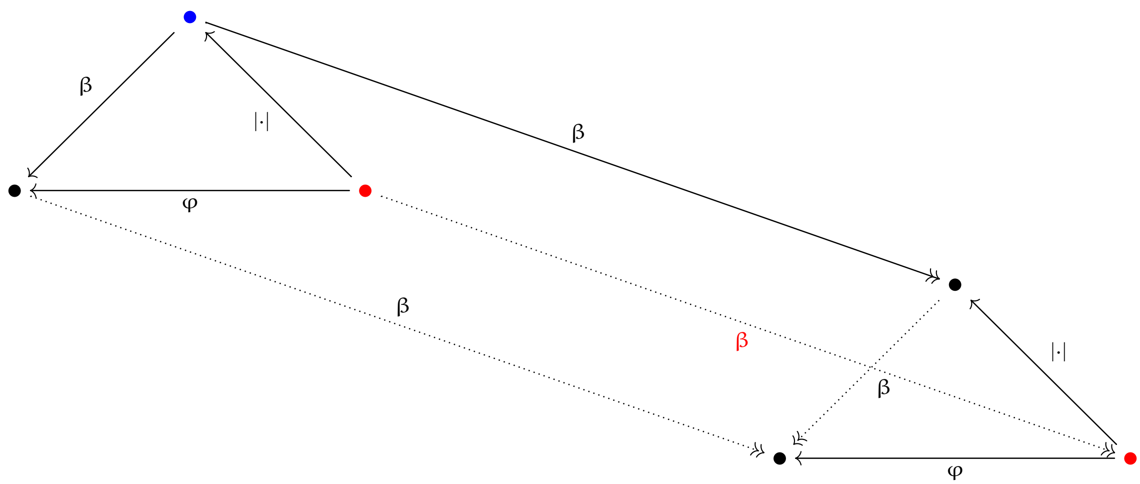
Лемма 6.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "|\,|"'] \arrow[dr, two heads, "\varphi"] & \\
N \arrow[rr, dotted, two heads, "\beta"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Лемма 7 (полоски)**.**

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[ddrr, two heads, "\beta"] & & \\
N_1 \arrow[ddrr, dotted, two heads, "\beta"'] & & & \\
& & & N_2 \arrow[dl, dotted, two heads, "\beta"] \\
& & N_3 &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Берем в M редекс, сокращаемый для получения N_1, и подкрашиваем его. Смысл верхнего левого треугольника при этом очевиден.



Грани призмы, содержащие красные вершины, представляют собой предыдущие леммы, а оставшаяся грань представляет собой лемму полоски. ■