2.3 Свойства простой системы

Мы в этом разделе не доказываем формальным образом почти никаких утверждений, за формальными индуктивными доказательствами отсылаем к [3]. Если конкретная система (Карри или Черча) не указана, то утверждение относится к обеим системам. В случае расхождения свойств утверждение о системе Карри синее, а о системе Черча — красное.

2.3.1 Вспомогательные леммы, нетипизируемые предтермы

Начнем знакомство со свойствами систем $\lambda_{\to}$ с ряда вспомогательных технических лемм.

Лемма 10 (инверсии (генерации)). • $\Gamma \vdash x : \sigma \;\Rightarrow\; x^{\sigma} \in \Gamma$.

- $\Gamma \vdash M\,N : \tau \;\Rightarrow\; \exists \sigma\; [\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \;\wedge\; \Gamma \vdash N : \sigma]$.
- $\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \rho \;\Rightarrow\; \exists \sigma, \tau\; [\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma \to \tau]$.
  ($\lambda_{\to}$ а ля Карри)
- $\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.\, M : \rho \;\Rightarrow\; \exists \tau\; [\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma \to \tau]$.
  ($\lambda_{\to}$ а ля Чёрч)

Эта лемма представляет собой прочитанные наоборот, снизу вверх, правила приписывания типов термам. Отметим, что это не механческая операция, верная для любых систем типов. Лемма верна потому, что для каждого из трех способов формирования термов (переменная, аппликация, абстракция) в системе $\lambda_{\to}$ есть в точности одно правило типизации.

Лемма 11 (о типизируемости подтерма). *Пусть M' — подтерм M. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma' \vdash M' : \sigma'$ для некоторых Γ' и σ'. То есть, если терм имеет тип, то каждый его подтерм тоже имеет тип.*

Следующая группа лемм описывает свойства контекстов.

Лемма 12 («разбавления» (Thinning)). *Пусть Γ и Δ — контексты, причём $\Delta \supseteq \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Delta \vdash M : \sigma$. Расширение контекста не влияет на выводимость утверждения типизации.*

Лемма 13 (о свободных переменных). $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; FV(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$. *Свободные переменные типизированного терма должны присутствовать в контексте.*

Лемма 14 (сужения). $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$. *Сужение контекста до множества свободных переменных терма не влияет на выводимость утверждения типизации.*

Вместе эти леммы отвечают на вопрос: какой контекст требуется, чтобы произвести присваивание типов? Ответ следующий: в контексте обязательно должны присутствовать свободные переменные типизируемого терма; все остальные переменные опциональны, не влияют на типизацию и могут быть безболезненно отброшены[14].

Приведенных лемм достаточно, чтобы продемонстрировать, что в системах $\lambda_{\to}$ есть нетипизируемые предтермы. Рассмотрим предтерм содержащий самоприменение, например $x\,x$. Предположим, что это терм. Тогда имеются контекст Γ и тип τ, такие что

$$\Gamma \vdash x\,x : \tau$$

По лемме об инверсии (пункт 2, аппликация) существует такой σ, что правый подтерм $x : \sigma$, а левый подтерм (тоже x) имеет тип $\sigma \to \tau$. По лемме о свободных переменных $x \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ и должен иметь там *единственное* связывание по определению контекста. Возникает требование $\sigma = \sigma \to \tau$. Но тип не может быть несобственным подвыражением самого себя, поскольку (*и пока*) типы конечны. Поэтому предтерму $x\,x$ в в системах $\lambda_{\to}$ не может быть приписан никакой тип.

По лемме о типизируемости подтерма предтермы $\boldsymbol{\omega} = \lambda x.\, x\,x$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{Y} = \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f(x\,x))(\lambda x\,.\,f(x\,x))$ не имеют типа в $\lambda_{\to}$. Иногда этот факт записывают следующим образом

$$x^{\sigma} \nvdash x\,x : \tau, \quad \nvdash \boldsymbol{\omega} : \sigma, \quad \nvdash \boldsymbol{\Omega} : \sigma, \quad \nvdash \mathbf{Y} : \sigma.$$

2.3.2 Подстановка типа, подстановка терма, редукция субъекта

Обсудим теперь какие преобразования сохраняют утверждение типизации. Начнем с преобразований над типами.

Для $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ *подстановку* типа τ вместо всех вхождений переменной α в тип σ обозначим $[\alpha \mapsto \tau]\sigma$. Например, для типа $\alpha \to \beta \to \alpha$ подстановка в него типа $\gamma \to \gamma$ вместо переменной α записывается

$$[\alpha \mapsto (\gamma \to \gamma)](\alpha \to \beta \to \alpha)$$

и дает в результате тип

$$(\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma$$

Подстановку можно так же осуществлять в контекст, при этом она выполняется во все типы-предикаты объявлений этого контекста. В системе Черча термы содержат типы, в этом случае можно определить подстановку типа в терм.

Мы уже отмечали, что замена переменной типа на произвольный тип не портит дерева вывода типов: все правила вывода остаются верными при этой операции. Поэтому верно следующее утверждение.

Лемма 15 (подстановки типа).
$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto \tau]\Gamma \vdash M : [\alpha \mapsto \tau]\sigma$. *($\lambda_{\to}$ Карри)*
$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto \tau]\Gamma \vdash [\alpha \mapsto \tau]M : [\alpha \mapsto \tau]\sigma$. *($\lambda_{\to}$ Чёрч)*
Подстановка в выводимое утверждение типизации некоторого типа вместо переменной типа порождает выводимое утверждение типизации.

Например, подстановка $[\alpha \mapsto (\gamma \to \gamma)]$ в утверждение типизации для системы Черча

$$x^{\alpha} \;\vdash\; \lambda y^{\alpha} z^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$$

осуществляется и в тип, и в терм, и в контекст и дает новое утверждение типизации

$$x^{\gamma\to\gamma} \;\vdash\; (\lambda y^{\gamma\to\gamma} z^{\beta}\,.\, x) : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma$$

Поскольку первое утверждение типизации выводимо (проверьте это), то и второе тоже выводимо.

Перейдем теперь к обсуждению преобразований над термами, сохраняющими утверждение типизации. По аналогии с типами рассмотрим подстановку терма вместо термовой переменной. Очевидно, что для сохранения типизации они должны быть одного типа.

Лемма 16 (подстановки терма). *Пусть* $\Gamma, x^\sigma \vdash M : \tau$ *и* $\Gamma \vdash N : \sigma$, *тогда* $\Gamma \vdash [x \mapsto N]M : \tau$. *Подходящая по типу подстановка терма сохраняет тип.*

Пример. Берём выводимое утверждение типизации

$$x^{\gamma\to\gamma} \;\vdash\; \lambda y^\beta.\, x : \beta \to \gamma \to \gamma$$

и подставляем в него вместо свободной переменной x типа $\gamma \to \gamma$ терм $\lambda z^\gamma.\, z$ подходящего типа $\gamma \to \gamma$. Получаем

$$\vdash\; \lambda y^\beta\, z^\gamma.\, z : \beta \to \gamma \to \gamma$$

Теорема 9 (о редукции субъекта). *Пусть* $M \twoheadrightarrow_\beta N$. *Тогда* $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$. *Тип терма сохраняется при* β*-редукциях.*

С практической точки зрения это одно из ключевых свойств любой системы типов, системы которые нарушают это свойство сложно было бы использовать.

Следствие 1. *Множество типизируемых в* $\lambda_\to$ *термов замкнуто относительно редукции.*

В обратную сторону эта теорема (и следствие из нее) не верны для $\lambda_\to$. (TODO примерчики этого.)

Изучаемые до сих пор свойства были общими для систем Карри и Черча. Следующее свойство, единственности типа верно только для черчевской версии $\lambda_\to$.

Теорема 10 (о единственности типа для $\lambda_\to$ а ля Чёрч). *Пусть* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *и* $\Gamma \vdash M : \tau$. *Тогда* $\sigma \equiv \tau$. *Терм в* $\lambda_\to$ *а ля Чёрч имеет единственный тип.*

Следствие 2. *Пусть* $\Gamma \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : \tau$ *и* $M =_\beta N$. *Тогда* $\sigma \equiv \tau$. *Типизируемые* β*-конвертируемые термы имеют одинаковый тип в* $\lambda_\to$ *а ля Чёрч.*

Для системы а ля Карри единственности типа нет. Несложно привести пример, иллюстрирующий этот факт. Оба приведенных ниже типа подходят для $\mathbf{K} = \lambda x\, y.\, x$ в $\lambda_\to$ а ля Карри:

$$\begin{array}{l} \vdash\; \lambda x\, y.\, x : \alpha \to (\delta \to \gamma \to \delta) \to \alpha \\ \vdash\; \lambda x\, y.\, x : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma \end{array}$$

В целом между системами Карри и Чёрча имеется тесная связь. Можно задать стирающее отображение $|\cdot| : \Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$\begin{array}{rcl} |x| & \equiv & x \\ |M\, N| & \equiv & |M|\, |N| \\ |\lambda x^\sigma.\, M| & \equiv & \lambda x.\, |M| \end{array}$$

С помощью этого отображения все атрибутированные типами термы из версии Чёрча $\lambda\!\!\to$ «проектируются» в термы в версии Карри:

$$M \in \Lambda_{\mathbb{T}} \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{Ч}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\text{К}} |M| : \sigma$$

Обратно, типизированные термы из версии Карри $\lambda\!\!\to$ могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча, приписыванием переменным в лямбдах типовых атрибутов, однозначно восстанавливаемых из типа терма:

$$M \in \Lambda \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{К}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \exists N \in \Lambda_{\mathbb{T}}\, [\Gamma \vdash_{\text{Ч}} N : \sigma \;\wedge\; |N| \equiv M]$$

Для произвольного типа $\sigma \in \mathbb{T}$ выполняется

$$\sigma \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Карри} \iff \sigma \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Чёрч}$$