算机程序精确绘制，而且可以从图上获得准确的根轨迹点数据和增益数据. 不过，对于不太复杂的系统，只要先利用根轨迹和补根轨迹的性质计算出某些特征根轨迹点的位置数据，就可以徒手迅速绘制出足敷使用的根轨迹草图，从中得出正确的、对分析和设计有启发的结论.

在采用根轨迹方法对系统进行串联校正设计时，也使用超前、滞后和超前滞后校正装置. 前面在采用频率方法设计时已经讨论了它们的性能和作用，本章则从根轨迹的角度来解释这些校正装置的作用，从而得到采用根轨迹进行设计的基本方法. 采用根轨迹方法可以清楚地说明超前校正和滞后校正的作用. 超前校正装置提供一个超前角，使校正后系统的闭环主导极点向左方移动，从而提高系统的稳定性和提高系统的响应速度；而且，只要参数选择适当，也能略微提高系统的静态性能. 滞后校正很容易在基本不改变原有闭环主导根点位置的前提下提升系统的开环增益，从而较大幅度地提高系统的静态性能；当然，如果不需要提高静态性能，也不考虑对响应速度的不利影响，滞后校正也能在不大的程度上改进稳定性.

如果从频率响应和根轨迹这两个方面来互相印证、互相补充地研究校正装置参数对闭环系统性能的影响，那么，对校正装置的设计方法及参数选取原则就会有更为深入的理解. 校正设计时，设计步骤和参数选取常常不是唯一的. 只有对校正设计原理具有深刻的理解，才能够更加灵活、妥当地选取校正装置参数，从而获得最理想的闭环特性.

习题

6.1　给定如下被控对象传递函数：

(a) $\dfrac{K}{(s-1)(s+5)}$；　　(b) $\dfrac{K}{(s+1)^4}$；

(c) $\dfrac{K(s^2+1)}{(s+2)^3}$；　　(d) $\dfrac{K(s+0.5)}{s^3+s^2+1}$；

(e) $\dfrac{K(s+2)}{(s^2+6s+10)(s^2+2s+4)}$；　　(f) $\dfrac{K(s^2+2s+5)}{s(s+2)(s+3)}$.

其中增益 K 由 0 变化到 $+\infty$. 试画出上述系统在单位负反馈结构下的根轨迹；如果根轨迹穿过虚轴，则求出使闭环系统稳定的增益范围.

6.2　已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+4)(s+8)(s^2+2s+5)},\quad K\geqslant 0.$$

试画出系统的根轨迹，并求系统临界稳定时的增益 K.

6.3　给定负反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K(s^2+2s+5)}{s^2(s+1)(s+3)}.$$

试画出它们的根轨迹，并说明 K 使闭环稳定的取值范围.

6.4　给定单位负反馈控制系统的前向通道传递函数

$$G(s)=\frac{K(s^2+0.2s+6.26)}{s(s^2+0.2s+4.01)}.$$

试画出它的根轨迹，并求根轨迹与虚轴的交点.

6.5　已知系统如图 6.E.1 所示，其中 $K>0$. 试作该系统的根轨迹图，并说明 K 在什么范围内取值时系统为过阻尼系统？K 在什么范围内为欠阻尼系统？

6.6　已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s^2+6s+10)}{s^2+2s+10},\quad K\geqslant 0.$$

试证明该系统的根轨迹是圆心位于原点、半径为$\sqrt{10}$的圆弧.

6.7　已知系统如图 6.E.2 所示. 为使闭环系统极点为 $s_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$，试用根轨迹方法确定增益 K 和速度反馈系数 k 的值.

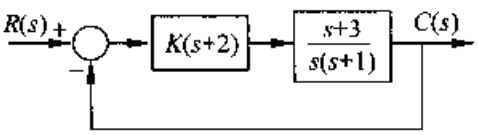


图 6.E.1　习题 6.5 的控制系统

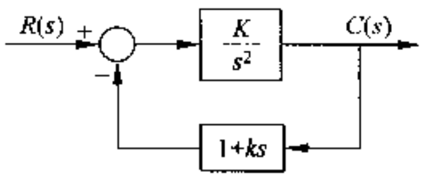


图 6.E.2　习题 6.7 的控制系统

6.8　已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+a)}.$$

当增益 K 和参数 a 从 0 变到无穷大时，试画出系统的根轨迹族.

6.9　图 6.E.3 表示一个具有时间延迟的系统，其中 $K>0$，$T=1$. 试绘制该系统的根轨迹图，并确定使闭环系统稳定的 K 值范围.

6.10*　参照 6.4.4 节关于延时系统根轨迹的讨论步骤写出延时系统补根轨迹的相关性质，并画出开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}$$

的系统的补根轨迹.

6.11　设控制系统如图 6.E.4 所示，其中 $K>0$，$T>0$. 试按 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况画根轨迹图，并利用根轨迹图说明 a 在什么范围内闭环系统稳定.

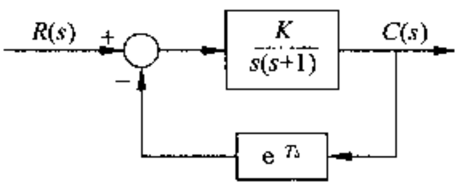


图 6.E.3　习题 6.9 的控制系统

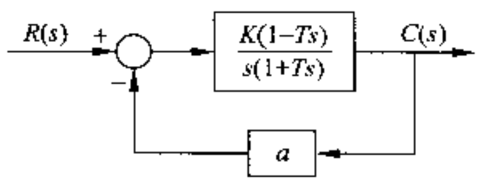


图 6.E.4　习题 6.11 的控制系统

6.2

1. 极点&零点

$z_1 = -2$

$p_1 = 0 \quad p_2 = -4 \quad p_3 = -8 \quad p_4, p_5 = \cancel{-2 \pm \sqrt{4}}$ $-1 \pm 2j$

2. 实轴上的 root luci

3. Asymptotes

$$\gamma = \frac{\pm 180°(2k+1)}{n-m} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{4} = \pm 45°, \pm 135°$$

$$\sigma = \frac{-4-8-1-\cancel{2j}-1+\cancel{2j}+2}{4} = -3$$

4. 分离点 break away point

$$k = -\frac{s(s+4)(s+8)(s^2+2s+5)}{s+2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -\frac{(s+2)(5s^4+56s^3+183s^2+248s+160)-(s^5+14s^4+\dots)}{(s+2)^2}$$

$s_1 = -6.48 \quad s_2, s_3 = -2.72 \pm 1.26j \quad s_4, s_5 = 0.54 + 1.04j$

$k = 185.5 > 0$

5. Angle of departure from complex poles

$\angle p_4 - p_1 = 116.6° \quad \angle p_4 - p_2 = 33.7° \quad \angle p_4 - p_3 = 15.9°$

$\angle p_4 - p_5 = 90° \quad \angle p_4 - z_1 = 63.4°$

$$\varphi_4 = 180° - 116.6° - 33.7° - 15.9° - 90° + 63.4° = -12.8°$$

$\varphi_5 = 12.8°$

6. Intercepts with j axis

$$\frac{K(s+2)}{s(s+4)(s+8)(s^2+2s+5)} + 1 = 0$$

$$K(s+2) = -(s^5 + 14s^4 + 61s^3 + 124s^2 + 160s)$$

$$s^5 + 14s^4 + 61s^3 + 124s^2 + (160+K)s + 2K = 0$$

$$jw^5 + 14w^4 - 61jw^3 - 124w^2 + (160+K)jw + 2K = 0$$

$$14w^4 - 124w^2 + 2K = 0$$

$$K = 62w^2 - 7w^4$$

$$w^5 - 61w^3 + (160+K)w = 0$$

$$w^5 - 61w^3 + 160w + 62w^3 - 7w = 0$$

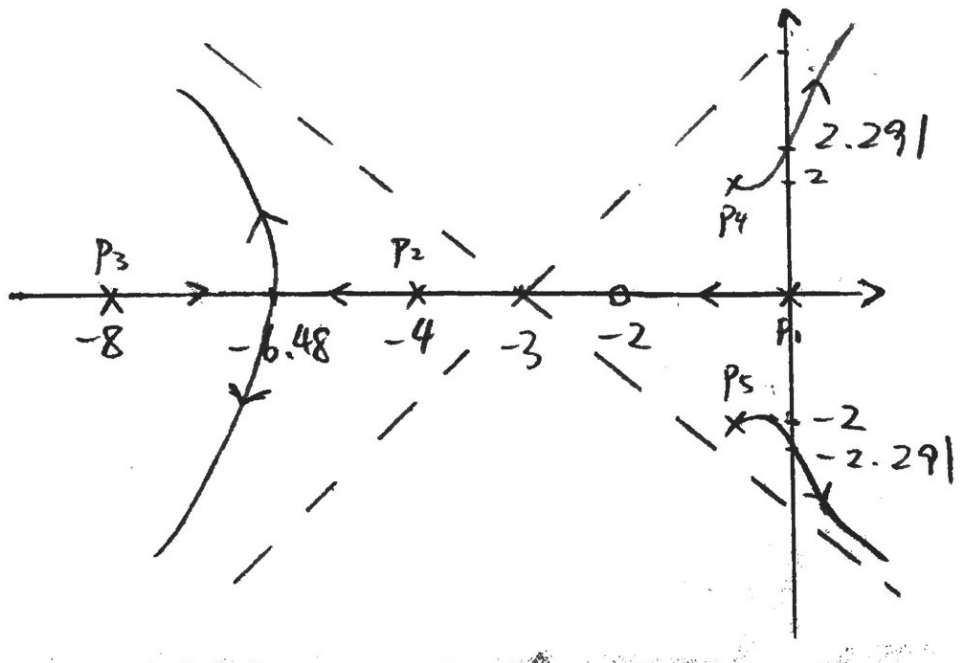
~~$w_1 = 11.74 \quad w_2 = -5.72 \quad w_3 = 1.69 \quad w_{4,5} = -0.355 \pm 1.134j$~~

$$-6w^5 + w^3 + 160w = 0$$

$$w(-6w^4 + w^2 + 160) = 0$$

$$w_1 = 0 \qquad w_{2,3} = \pm 2.291 \qquad w_{4,5} = \pm 2.254j$$

$$K = 62w^2 - 7w^4 \Big|_{w_2, w_3} = 132.58$$



（科目：　　　）数　学　作　业　纸

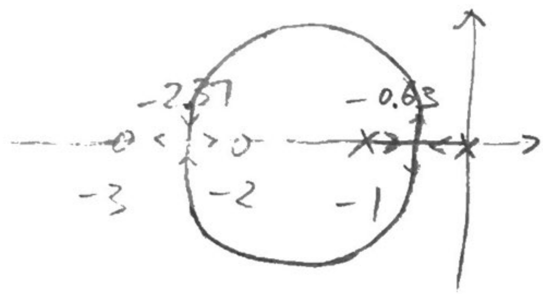
编号：2018 28035 | 班级：　　姓名：　　第　　页

6.5

$$G(s) = \frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

CE、 $\frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = -1$

$$k(s^2+5s+6) = \cancel{s^3} - s^2 - s$$
$$(k+1)s^2 + (5k+1)s + 6k = 0$$



1. Poles ~~&~~ & zeroes

$p_1=0$ $p_2=-1$ $z_1=-2$ $z_2=-3$

2. Asymptotes

~~..~~ $n-m=0$ NA

4. Breakaway points

$$k = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -\frac{(s^2+5s+6)(2s+1) - s(s+1)(2s+5)}{(s+2)^2(s+3)^2} = 0$$

$\cancel{2s^3 + 17s + 6 = 2s^3}$

$$\cancel{2s^3} + 11s^2 + 17s + 6 = \cancel{2s^3} + 7s^2 + 5s$$
$$2s^2 + 6s + 3 = 0$$
$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{4}$$

$$s_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} = -0.63 \qquad s_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} = -2.37$$

CE $\quad s^2 + \frac{5k+1}{k+1} s + \frac{6k}{k+1} = 0$

$$2\xi\omega_n = \frac{5k+1}{k+1} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{6k}{k+1}}$$

$$\xi = \frac{5k+1}{2(k+1)\omega_n} = \frac{5k+1}{2\sqrt{6k(k+1)}}$$

~~过阻尼:~~

$$\cancel{\frac{5k+1}{2(k+1)} > 1}$$

$$\cancel{5k+1 > 2k+2}$$

$$\cancel{3k}$$

过阻尼:

$$\frac{5k+1}{2\sqrt{6k(k+1)}} > 1$$

$$5k+1 > 2\sqrt{6(k+1)k}$$

$$25k^2+10k+1 > 24k^2+24k$$

$$\cancel{25k^2-14k-23>0}$$

$$k^2-14k+1>0$$

$$0<k<0.072 \quad \text{or} \quad k>13.93$$

欠阻尼:

$$\frac{5k+1}{2\sqrt{6k(k+1)}} < 1$$

$$0.072 < k < 13.93$$

Q6.7 $G(s)_{open} = \frac{k}{s^2}$

$$G(s)_{close} = \frac{k/s^2}{1+\frac{k}{s^2}(1+ks)} = \frac{k}{s^2+K(1+ks)}$$

$$= \frac{K}{s^2+Kks+K}$$

$s^2+Kks+K=0$

$$根 = \frac{-Kk \pm \sqrt{K^2k^2-4K}}{2} = -1 \pm j\sqrt{3}$$

$-\frac{Kk}{2} = -1$

$k = \frac{2}{K}$

$k = \frac{1}{2}$

$\frac{K^2k^2-4K}{4} = -3$

$K^2k^2-4K=-12$

$4K=16$

$K=4$

这种简单求法就可以求 K 与 k

不太清楚“根轨迹方法”具体指什么

画出根轨迹来求.

Q 6.8

$$K = -s(s+1)(s+a)$$

$$0 = s^3 + (1+a)s^2 + (as + k)$$

$$-a(s^2+s) = s^3 + s^2 + K$$

$$0 = \frac{as(s+1)}{s^3 + s^2 + K} + 1$$

sub $k=0$ $\quad G'_{open}(s) = \cancel{\frac{as(s+1)}{s^2(s+1)}}$

$$= \frac{as(s+1)}{s^2(s+1)} = \frac{a}{s}$$

$$0 = s^3 + (1+a)s^2 + (as + k)$$

$$-k = s\,[s^2 + (1+a)s + a]$$

$$K = -s(s+1)(s+a)$$

$$G_{open}(s) = \frac{K}{s\,[s^2 + (1+a)s + a]}$$

$$\text{poles} = 0,\ \frac{-(1+a) \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4a}}{2}$$

$$= 0,\ \frac{-(1+a) \pm (1-a)}{2}$$

$$= 0,\ -a,\ -1$$

1. Find poles & zeroes

$p_1 = 0$, $p_2 = -a$, $p_3 = -1$

Q6.8　2. Determine ~~root loci on real axis~~ asymptote

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-(1+a)}{3}$$

$\gamma = \pm 60°,\ -180°$

3. Determine ~~root loci on real axis~~ breakaway points

$$K = -s(s+1)(s+a)$$

$$0 = -s(s+1) - (s+a)(2s+1)$$

$$0 = 3s^2 + 2(a+1)s + a$$

$$s = \frac{-2(a+1) \pm \sqrt{4(a+1)^2 - 12a}}{6}$$

$$= \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 3a}}{3}$$

$$= \frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2 - a + 1}}{3}$$

Breakaway point $= -\dfrac{(a+1)}{3} \pm \dfrac{\sqrt{a^2-a+1}}{3}$

4. Find intercept with j axis

$$s^3 + as^2 + s^2 + sa + K = 0$$

$$-j\omega^3 - a\omega^2 - \omega^2 + aj\omega + K = 0$$

$$(a+1)\omega^2 - K = 0$$

$$K = (a+1)\omega^2$$

$$\cancel{K = (a+1)a}$$

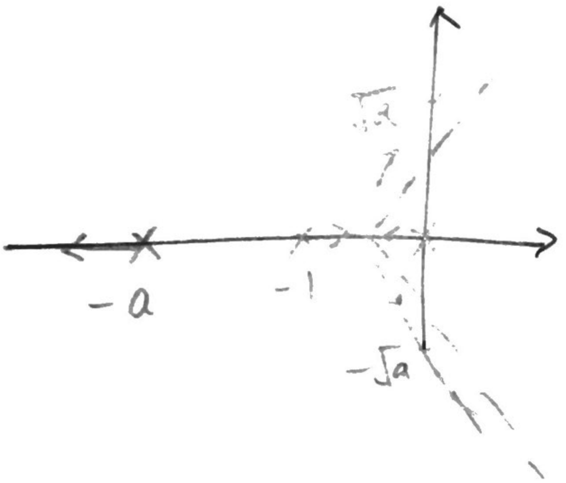
$$K = \pm a(a+1)$$

$$-\omega^3 + a\omega = 0$$

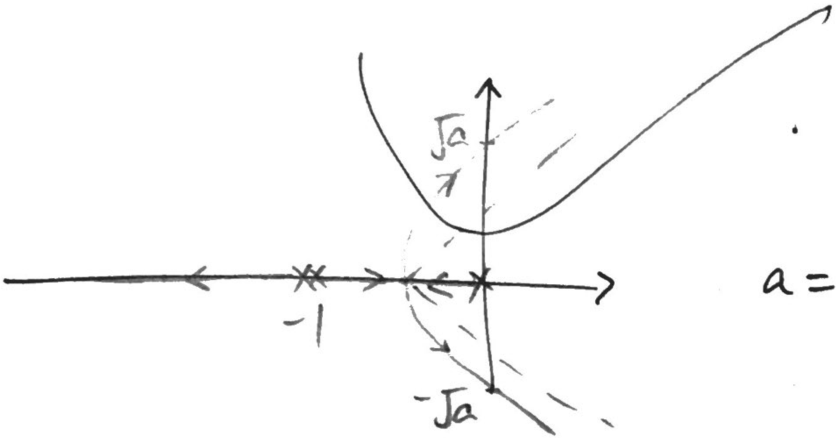
$$\omega(a - \omega^2) = 0$$

$$\omega(\omega - \sqrt{a})(\omega + \sqrt{a}) = 0$$

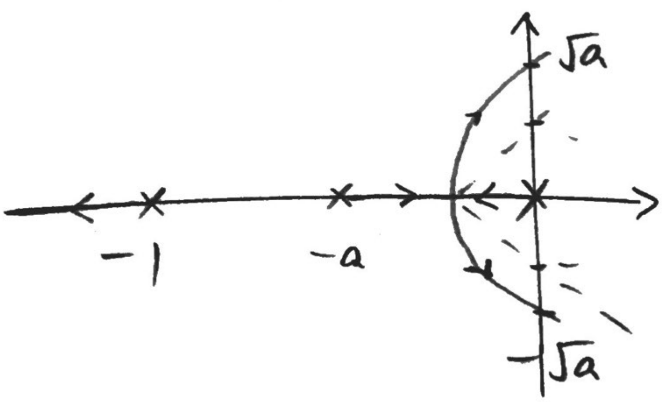
$$\omega = 0, \pm\sqrt{a}$$



$a > 1$



$a = 1$



$a < 1$

分开画了.画在同一张图太乱

6.11

$$1+\frac{K(1-Ts)\,a}{s(1+Ts)}=0$$

$$K(1-Ts)a+s(1+Ts)=0$$

$$K=-\frac{s(1+Ts)}{a(1-Ts)}$$

$$\cancel{Ka-KaTs+s+Ts^2=0}$$

1. Find zeroes & poles

$$p_1=0,\quad p_2=-\frac{1}{T},\quad z_1=\frac{1}{T}$$

2. Determine asymptotes

$n=2 \quad m=1$

$$\sigma=\frac{\Sigma p_i-\Sigma z_j}{n-m}=-\frac{2}{T}$$

$$\gamma=\pm 180^\circ$$

3. Determine breakaway / breakin points

$$\frac{\partial K}{\partial s}=0 \qquad a(1-Ts)(1+2Ts)+s(1+Ts)(-Ta)=0$$

$$s=\frac{1\pm\sqrt{2}}{T}$$

4. Intercept with j axis

$$k(1 - Tj\omega)a + j\omega(1 + Tj\omega) = 0$$

$$Ka - KaTj\omega + j\omega - T\omega^2 = 0$$

$$Ka - T\omega^2 = 0$$

$$\cancel{\omega = \sqrt{\frac{Ka}{T}}}$$

$$k = \frac{T\omega^2}{a}$$

$$k = \frac{1}{aT}$$

$$a = \frac{1}{KT}$$

$$\cancel{KaT\omega = 1}$$

$$\cancel{K^2 a^2 T^2 \frac{Ka}{T} = 1}$$

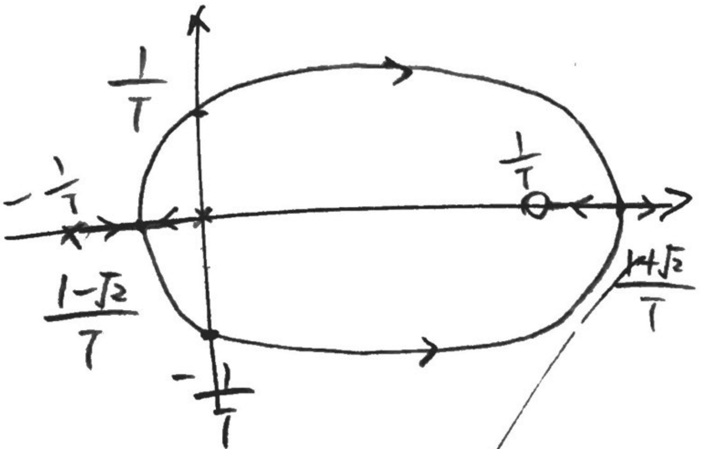
$$\cancel{K}$$

$$KaT\omega = \omega$$

$$\frac{T\omega^2}{\cancel{a}} \cancel{a} T\omega = \omega$$

$$T^2\omega^2 = 1$$

$$\omega = \pm \frac{1}{T}$$



case: $a > 0$

stability: $0 < a < \frac{1}{KT}$

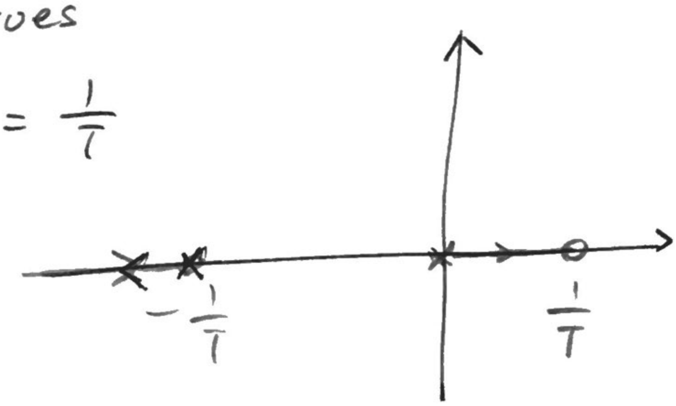
$$1-\frac{bK(1-Ts)}{s(1+Ts)}=0$$

case $a<0$

Let $b=-a$ $\quad \cancel{p_1=-\frac{1}{T} \quad p_2=0 \quad z_1=\frac{1}{T}}$

1. Determine poles & zeroes

$p_1=0 \quad p_2=-\frac{1}{T} \quad z_1=\frac{1}{T}$



2. Asymptote

$\gamma = 360^\circ$

$$\sigma = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_j}{n-m} = -\frac{2}{T}$$

No stable value for $a<0$

3. Breakaway / Breakin points

$$1-\frac{bk(1-Ts)}{s(1+Ts)}=0$$

$$s(1+Ts)-bk(1-Ts)=0$$

$$\cancel{0=\frac{\partial k}{\partial s}=1+2Ts+bkT}$$

$$\cancel{-2Ts=1+bkT}$$

$$\cancel{s=-\frac{1+bkT}{2T}}$$

$$K=\frac{s(1+Ts)}{b(1-Ts)}$$

$$\frac{dk}{ds}=0$$

$$0=b(1-Ts)(1+2Ts)+bTs(1+Ts)$$

$$0=1+Ts-2T^2s^2+Ts+T^2s^2$$

$$s=\frac{1\pm\sqrt{2}}{T}$$