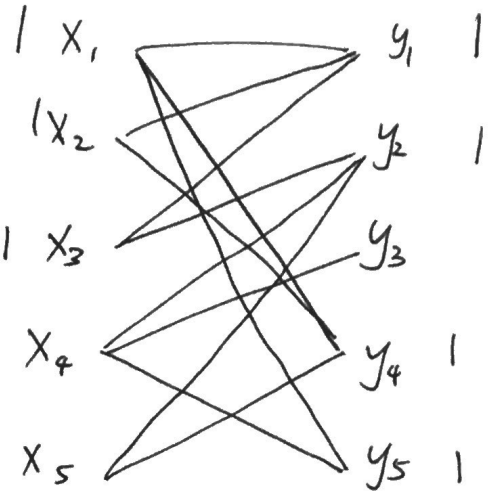
Q1 $M=\{(x_1,y_1),(x_4,y_2)\}$



$u=\{x_2\}$ $v=\underline{\Phi}$

$\tau(u)=\{y_1,y_4\}$ $\tau(u)-v=\{y_1,y_4\}$

$M=\{(x_1,y_1)$

(x_4,y_2)

$(x_2\ y_4)\}$

$u=\{x_3\}$ $v=\underline{\Phi}$

$\tau(u)=\{y_1,y_2\}$ $\tau(u)-v=\{y_1,y_2\}$

$u=\{x_3,x_1\}$ $v=\{y_1\}$

$\tau(u)=\{y_1\ y_2\ y_4\ y_5\}$ $\tau(u)-v=\{y_2,y_4,y_5\}$

$u=\{x_3,x_1,x_4\}$ $v=\{y_1,y_2\}$

$\tau(u)=\{y_1\ y_2\ y_4\ y_5\ y_3\}$ $\tau(u)-v=\{y_4\ y_5\ y_3\}$

$u=\{x_3\ x_1\ x_4\ x_2\}$ $v=\{y_1\ y_2\ y_4\}$

$\tau(u)=\{y_1\ y_2\ y_4\ y_5\ y_3\}$ $\tau(u)-v=\{y_5\ y_3\}$

$M=\{(x_1,y_1),(x_2\ y_4),(x_3\ y_2),(x_4\ y_5)\}$

$u=\{x_5\}$ $v=\underline{\Phi}$

$\tau(u)=\{y_2,y_4\}$ $\tau(u)-v=\{y_2,y_4\}$

$u=\{x_5\ x_3\}$ $v=\{y_2\}$

$\tau(u)=\{y_2\ y_4\ y_1\}$ $\tau(u)-v=\{y_4\ y_1\}$

$u=\{x_5\ x_3\ x_2\}$ $v=\{y_2\ y_4\}$

$T(u)=\{y_2\ y_4\ y_1\}$ $T(u)-V=\{y_1\}$

$u=\{x_5\ x_3\ x_2\ x_1\}$ $V=\{y_2\ y_4\ y_1\}$

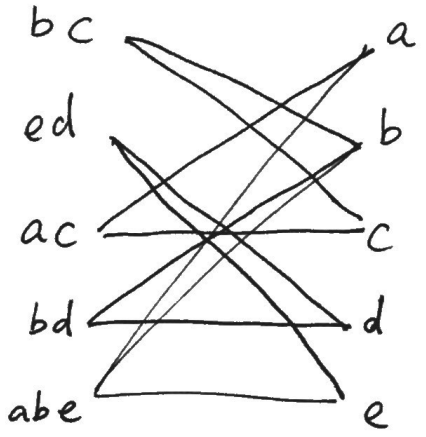
$T(u)=\{y_2\ y_4\ y_1\ y_5\}$ $T(u)-V=\{y_5\}$

$u=\{x_5\ x_3\ x_2\ x_1\ x_4\}$ $V=\{y_2\ y_4\ y_1\ y_5\}$

$T(u)=\{y_2\ y_4\ y_1\ y_5\ y_3\}$ $T(u)-V=\{y_3\}$

$M=\{(x_4\ y_3),(x_1\ y_5),(x_2\ y_1),(x_5\ y_4),(x_3\ y_2)\}$

Q2



这么多条边，肯定有完全匹配/完美匹配！

~~M={~~

$M=\{(a,\ ac),(c,\ bc)$

$(b,bd),(d,ed),(e,abe)\}$

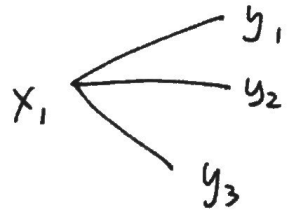
用a代表ac等等。

Q3 ~~这个结论不对吧~~

原题：2n结点的树最多只有1个完全匹配

这个结论不对吧？

T：



T有3个完全匹配

$2n=4$

Q3 把原题改成：完美匹配

我们用 $\gamma(v_i)$ 表示点 v_i 连的叶子的数目。

明显 $\exists \gamma(v_i) > 2$，$\forall v_i \in T$，T 完美匹配方案 $= 0$

那么我们再考虑 $\gamma(v_i) \leq 2$ $\forall v_i \in T$ 的树

归纳法：

$n=1$ 时有1个完美匹配。结论成立

设：$n = N-1$ 时结论成立

$n=N$ 时，找一个叶子，把它和它相邻点匹配

$\Rightarrow$ 剩下的 $2(N-1)$ 个点根据假设只有 ≤ 1 完美匹配

$\Rightarrow$ 把叶子和它的邻点加回来，整个 $2N$ 个点也只有 ≤ 1 完美匹配

Q8

$l(x_1)=8$ $l(x_2)=10$ $l(x_3)=9$ $l(x_4)=11$ $l(x_5)=9$ $l(x_6)=7$

$l(y_1)=0$ $l(y_2)=0$ $l(y_3)=0$ $l(y_4)=0$ $l(y_5)=0$ $l(y_6)=0$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & \textcircled{1} & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\delta_1 = 1$

Q8

$B_1 =$

$B \pm \delta_1 =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

B_2

$l(x_1) = 7 \qquad l(y_1) = 1$

$l(x_2) = 9 \qquad l(y_2) = 1$

$l(x_3) = 8 \qquad l(y_3) = 0$

$l(x_4) = 10 \qquad l(y_4) = 0$

$l(x_5) = 8 \qquad l(y_5) = 0$

$l(x_6) = 6 \qquad l(y_6) = 1$

B_2

$\delta_2 = 2$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & (0) & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 1 & 1 & (0) \\ 4 & 3 & (0) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & (0) & 5 & 9 \\ 1 & (0) & 3 & 2 & 0 & 2 \\ (0) & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$r = n = 6$

$\Sigma l(x_i) + \Sigma l(y_i) = 51$ //

练习题：$M = \{(f, ef), (e, be), (a, ab), (d, ad), (c, cd), (b, bc)\}$ //

Q5 1. 选 $A \in X$ where $\max \delta(A)$ for all $A' \in X$

A 有 $|A|$ 个结点，但只有 ~~$\delta(G)$~~ $\Gamma(A)$ ~~$= \delta(G)$~~ 个邻点

A 里有至少 $|A| - \Gamma(A)$ 个点不能匹配

我们把最大匹配边数 ~~和~~ 叫 d

$$\Rightarrow d \leq |X| - \left(|A| - |\Gamma(A)|\right)$$

$$d \leq |X| - \delta(G) \quad //$$

2. 在 Y 集结点集中加 ~~$\delta(G)$~~ $\delta(G)$ 个点，把这些点 ~~与~~ 与 X 所有点相连，形成图 G'。

$$\delta(G') = \max_{A \subseteq X} \delta(A) = \max_{A \subseteq X} |A| - |\Gamma(A)| \leq 0 \quad \forall A \subseteq X$$

$$|\Gamma(A)| \geq |A| \quad \forall A \subseteq X \text{ in } G'$$

By Hall's theorem: $d = |X|$

然后把后加入的 G' 中 ~~$\delta(G)$~~ $\delta(G)$ 个点去掉

$$d \geq |X| - \delta(G) \quad //$$

$$d = |X| - \delta(G)$$