Q1 和书中例 2.1.7 一样

设每个连通支有 m_i 条边，n_i 个结点

$G_i = (V_i, E_i)$ $\quad |V_1| = n_1 \quad \dots \quad |V_k| = n_k$

$|E_1| = m_1 \quad \dots \quad |E_k| = \cancel{n_k}\ m_k$

$\sum_1^k n_i = n \qquad \sum_1^k m_i = m$

$\cancel{n_i \le n-k+1}$

$|E_i| \le \frac{1}{2} n_i (n_i - 1)$

$\sum_1^k |E_i| = \sum_1^k m_i = m \le \frac{1}{2} n_1(n_1-1) + \dots + \frac{1}{2} n_k (n_k - 1)$

$\cancel{m \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n_1+n_2+\dots+n_k-k)}$

$\cancel{m \le \frac{1}{2}(n-1)}$

还设 $n_i \ge 1 \ \forall i$，就有 $n_i \le n-(k-1)$

$n_i \le n-k+1$

$m \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n_1+n_2+\dots+n_k-k)$

$m \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$ //

Q5 (a) $d(v_i) + d(v_j) \le n$ for all $(v_i, v_j) \in E(G)$

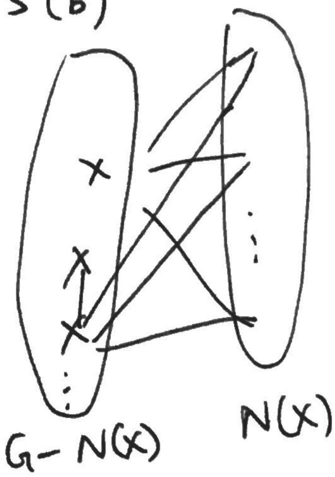
否则有三角形 (v_i, v_j, v_k)

有定理 $\sum_{v_i \in V(G)} d^2(v_i) = \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} d(v_i) + d(v_j)$

$\sum_{v_i \in V(G)} d^2(v_i) \le \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} n$

$\sum_{v_i \in V(G)} d^2(v_i) \le mn$

Q5(b)



~~考虑 x 结点~~

考虑 G 中度数最大的结点 x where $d(x) = k$

让 N(x) 代表 x 所有相邻的结点的集

这样我们把 V(G) 分为 N(x) 和 G−N(x) 集

G−N(x) 中每个结点度数 $d(v_i) \le k$ where $v_i \in G-N(x)$

$\cancel{\Rightarrow |E(G-N(x))| \le k(n-k)}$

N(x) 中没有边，否则有三角~~形~~形 ~~(v_i, v_j)~~

$(v_i, v_j) \notin E(G)$ where $v_i, v_j \in V(N(x))$

$\Rightarrow m = |E(G)| \le k(n-k)$

$$f(k) = k(n-k) = nk - k^2$$

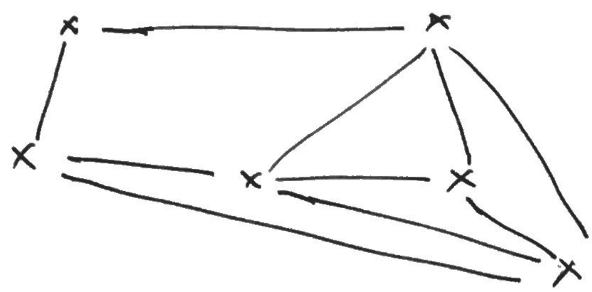
$$\frac{df(k)}{dk} = n - 2k = 0$$

$$k^* = \frac{n}{2}$$

$$\max m = k^*(n-k^*) = \frac{n^2}{4}$$

$$\therefore m \le \frac{n^2}{4}$$

Q6 和 Königsberg 问题一样



∃ $d(v_i)$ 为奇数的结点 v_i

∴ 不存在过各门一次的路

Q10 G: 每人为一结点，相互认识用边表示，$n \geq 4$

证：G 中有 Hamiltonian cycle (哈密顿回路)。

由已知条件，$v_i, v_j \in$ ~~G~~ $V(G)$ 都有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$

① 若 $(v_i, v_j) \in E(G) \Rightarrow d(v_i) + d(v_j) \geq n$

∴ G 中有 Hamiltonian cycle

② 若 $(v_i, v_j) \notin E(G)$，则有 $v_k \in V(G)$; (v_i, v_k), $(v_j, v_k) \in E(G)$

否则，设 $(v_i, v_k) \notin E(G)$，那么 v_k & v_j 都不认识 v_i，和原设矛盾。

因此 $d(v_i) + d(v_j) \geq n-2 + n-2 = 2n-4$

当 $n \geq 4$，$d(v_i) + d(v_j) \geq 2n-4 \geq n$

∴ G 中有 Hamiltonian cycle

只有 $n=3$ 时才有可能 $d(v_i) + d(v_j) = n-1$

既存在 Hamiltonian trail but not cycle

Q12 用 (x, y, z) 表示每个小立方块

中央的方块 $= (0, 0, 0)$

角上的方块 $= (1, 1, 1)$ without loss of generality

然后定义 $f(x, y, z) = (x+y+z) \% 2$

就有中心方块： $f(0, 0, 0) = 0$

角上方块： $f(1, 1, 1) = 1$

每移动 1 小方块，f 都会从 0 变 1 或从 1 变 0

移动 26 次之后 f 一定不变，但 $f(0,0,0) \neq f(1,1,1)$

∴ 此 Hamiltonian path 不成立

练习题：

1: 无

2: 无

3: 2

4: 2

书中图 2.17 是不是缺了一个结点？

正确的图是

这里有结点.