Q3 半群是服从结合律的代数系统

证充分性：

$\forall a, b \in S \qquad (ab)^2 = a^2b^2$

$$abab = aabb$$

$$ba = ab$$

证必要性：

$$ab = ba$$

$$aabb = abab$$

$$a^2b^2 = (ab)^2$$

Q6 幺群 = 半群 + 单位元 e

同构：σ 是 $(S, \cdot)$ 到 $(T, *)$ 的双射

设 $a \in S$

$$a \cdot e = a \qquad\qquad e \cdot a = a$$

$$\sigma(a \cdot e) = \sigma(a) * \sigma(e) \qquad \sigma(e \cdot a) = \sigma(e) * \sigma(a)$$

$$\sigma(a) = \sigma(a) * \sigma(e) \qquad \sigma(a) = \sigma(e) * \sigma(a)$$

根据定义，$\sigma(e)$ 是 $(T, *)$ 上的单位元。

Q7 群 = 幺群 + 可逆元 a^{-1} for $\forall a \in G$

交换群是服从交换律的群

设 $a, b \in G$

$$ab = (ab)^{-1}$$

$$ab = b^{-1}a^{-1}$$

$$ab = ba$$

Q10 $xaxba = xbc$

$xax = xbca^{-1}b^{-1}$

$x^{-1}xax = x^{-1}xbca^{-1}b^{-1}$

$ax = bca^{-1}b^{-1}$

$x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$

唯一性显而易见

Q11 $(a, b)(c, d) = (ac, ad+b) \quad e=(1, 0)$

1. 结合律

$\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) \quad \forall (e, f) \in G$

$= (ac, ad+b)(e, f)$

$= (ace, acf + ad+b)$

$(a, b)\big((c, d)(e, f)\big)$

$= (a, b)(ce, cf + d)$

$= (ace, acf + ad + b)$

$\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big)$ //

2. 存在单位元 e

$(a, b)(1, 0) = (a, b) \quad e=(1, 0)$ //

3. $\forall (a, b) \in G$, 有$(a, b)^{-1} \in G$ 所有元素可逆

~~$(a, b)(a, b)^{-1} =$~~

设 $(a, b)^{-1} = (c, d) \in G$

$(a, b)(c, d) = (ac, ad+b) = (1, 0)$

$c = a^{-1} \quad d = -a^{-1}b$

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}b)$ //

Q12 幺群：半群又单位元 e

充分性：

$aba = a$

$abab = ab$

$ee = e$

$e = e$

$aba = ae = a$

$ab^2a = abba = ee = e$

必要性：

$aba = a$

设 a 有逆元 a^{-1}

$a^{-1}aba = a^{-1}a$

$ba = e$

$abaa^{-1} = aa^{-1}$

$ab = e$

$b = a^{-1}$ //

$ab^2a = e$

$abba = e$

$a^{-1}abbaa^{-1} = a^{-1}ea^{-1}$

$bb = a^{-1}a^{-1}$

$b = a^{-1}$ //