Q1 $d(v_i) \geqslant 3$

$3n \leqslant 2m$

$5d \leqslant 2m$

$\cancel{d \Rightarrow} \quad \cancel{-m \geqslant -\frac{5}{2}d}$

$-m \leqslant -\frac{5}{2}d$

简单平面图 属于 平面图

所以有 $n-m+d \geqslant 2$

$$\frac{2}{3}m - m + d \geqslant 2$$

$$-\frac{1}{3}m + d \geqslant 2$$

$$-\frac{5}{6}d + d \geqslant 2$$

$$\frac{1}{6}d \geqslant 2$$

$$d \geqslant 12$$

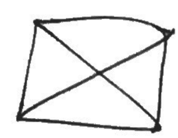
有矛盾

Q3 $n > 10$

反证：如果 G & $\bar{G}$ 都是平面图

有 $m_1 \leqslant 3n-6 \qquad m_2 \leqslant 3n-6$

$d_1 \leqslant 2n-4 \qquad d_2 \leqslant 2n-4$



$$m_1 + m_2 \leqslant 6n-12$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 6n-12$$

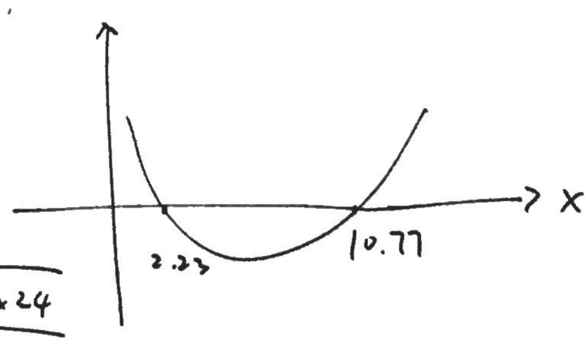
$$n(n-1) \leqslant 12n-24$$

$$n^2 - 13n + 24 \leqslant 0$$

$$\frac{13-\sqrt{13^2-4\times24}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{13+\sqrt{13^2-4\times24}}{2}$$

$$\frac{13-\sqrt{73}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{13+\sqrt{73}}{2}$$

$$2.23 \leqslant n \leqslant 10.77$$



题中有 $n \geqslant 11$

矛盾

Q7 图G：$d=5$；d_i & d_j 有 ≥ 1 公共边界 $\forall i,j$

~~对~~图G有对~~偶~~偶图 G^*：$n^* = d = 5$

$$G^* = K_5$$

$\Rightarrow$ G^* 不可平面

$\Rightarrow$ G^* 没有对偶图

$\Rightarrow$ 那么 $G = (G^*)^*$ 不存在

Q8 考虑 $G' = G$ 对应的极大平面图

如果 G' 中有至少4个结点 v_i，$i \in \{1,2,3,4\dots\}$ st $d(v_i) \leq 5$

~~那么~~ $\Rightarrow$ G中也一定能有这样4个结点

已知 $d(v_i) \geq \delta(G') \geq 3$ for $n \geq 4$

反证：设有图 G' 只有3个结点 v_i st $3 \leq d(v_i) \leq 5$

图 G' 也有 $n-3$ 个结点 v_j st $d(v_j) \geq 6$

for G': $2m = \sum\limits_{v \in G'}^{n} d(v)$

$$2m \geq 3 \times 3 + (n-3)6$$

$$2m \geq 9 + 6n - 18$$

$$m \geq 3n - \frac{9}{2}$$

~~已知 极大平面图有 G' 有 m = 3n − 6~~

已知简单平面图 G' 有 $m \leq 3n - 6$

矛盾

Q9 反证：设 G 的域可2着色

考虑 G^*

G 无割边 => G^* 无自环

$n^* = d$ $d^* = n$ $m^* = m$

G 的域可 2着色 => G^* 结点可 2着色

G^* ~~的结点~~ 是 2分图

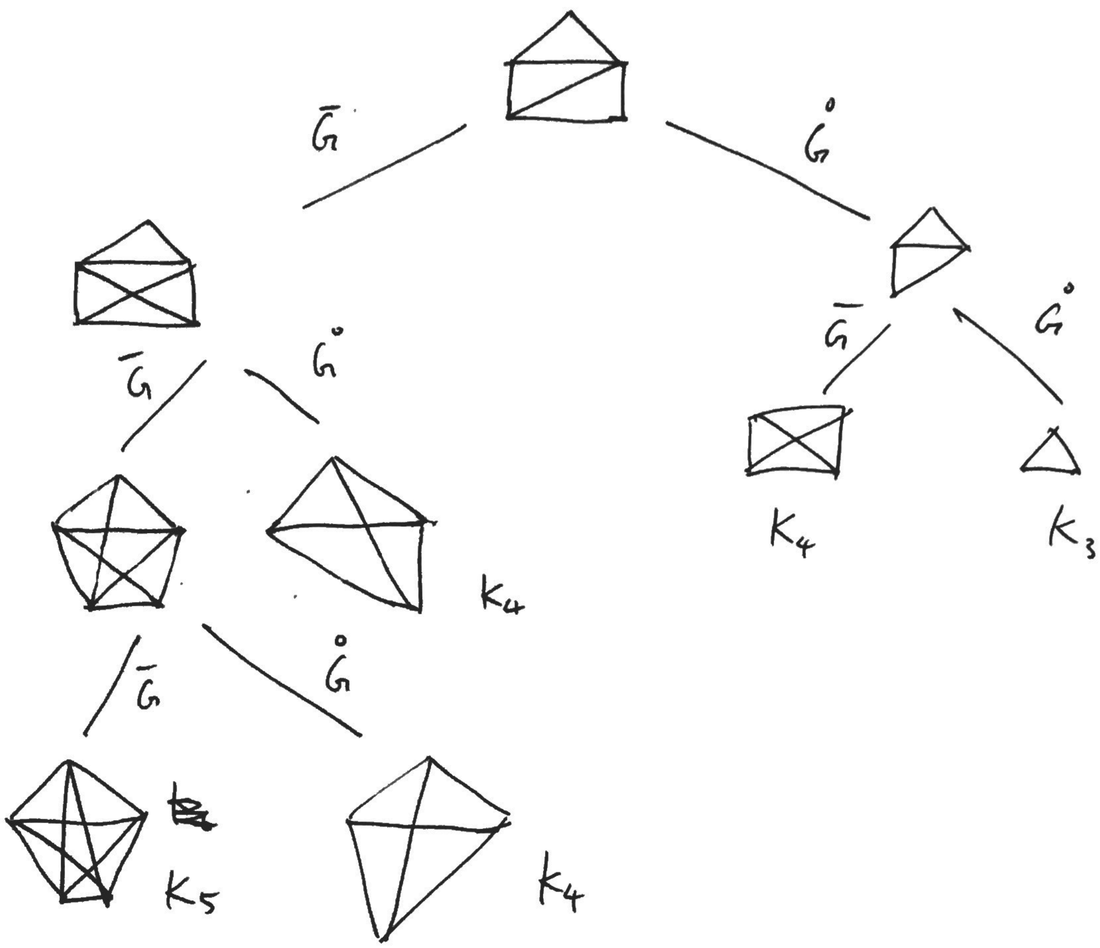
设所有 V_i 是 color 1；所有 V_j 结点是 color 2

就有 $\sum d(V_i) = \sum d(V_j)$

$xd \neq (n-x+1)d + d(V_1)$ —— 假设 V_1 的度不能被 d 整除

矛盾

Q13 $\gamma(G) = \min\{\gamma(\bar{G}_{ij}), \gamma(\mathring{G}_{ij})\}$



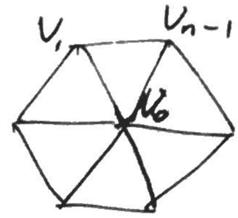
$\gamma(G) = \gamma(K_3) = 3$

$$f(G,t) = f(K_5,t) + 3f(K_4,t) + f(K_3,t)$$

$$= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$$
$$+ 3t(t-1)(t-2)(t-3)$$
$$+ t(t-1)(t-2)$$

$$= t(t-1)(t-2)(t^2-4t+4)$$

Q14 V_0 和其它 $n-1$ 结点着色不一样



其它 $n-1$ 个结点是一个回路

$$\Rightarrow \gamma(G) = \begin{cases} 1+2 & \text{if } \cancel{\ } (n-1)\,\%\,2=0 \\ 1+3 & \text{if } (n-1)\,\%\,2=1 \end{cases}$$

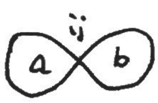
已知 $f(C_{n-1}, t-1) = (t-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-2)$

加入 V_0 后 $f(G, t) = t \cdot f(C_{n-1}, t-1)$

$$= t(t-2)^{n-1} + (-1)^{n-1} t (t-2)$$

Q16 $\gamma(G) = \max\left(\gamma(C_a), \gamma(C_b)\right)$

$$\gamma(G) = \begin{cases} 3 & \text{if } m\,\%\,2=1 \text{ or } n\,\%\,2=1 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

考虑 $G' =$ 

$$f(C_{m+n}, t) = f(G, t) + f(G', t)$$

$$f(G, t) = f(C_{m+n}, t) - f(G', t)$$

$$= \cancel{f} (t-1)^{m+n} + (-1)^{m+n}(t-1) - \max\left[f(C_m, t), f(C_n, t)\right]$$

$$= (t-1)^{m+n} + (-1)^{m+n}(t-1) - \max\left\{(t-1)^m + (-1)^m(t-1),\ (t-1)^n + (-1)^n(t-1)\right\}$$

~~[illegible]~~