Q13 定理 8.2.6

1. H_1 对 G 的乘法运算是封闭的 $a, b \in H_1 \Rightarrow ab \in H_1$

$$(x^{-1} a x)(x^{-1} b x)$$
$$= x^{-1}(ab)x \in H_1$$

2. H_1 有单位元 $e_1 = e \in G$

设：G 有单位元 e

$$x^{-1} e_1 x = x^{-1} x = e$$
$$e_1 = e$$

3. $\forall a \in H_1$, $a^{-1} \in H_1$ 且 a 在 G 中是逆元

$x \in G \Rightarrow x$ 可逆

$h \in H \Rightarrow h$ 可逆

$$(x^{-1} h x)^{-1} = x^{-1} h^{-1} (x^{-1})^{-1} = x^{-1} h^{-1} x \in H_1$$

Q13 定理 8.2.7

$(x^{-1} b x)^{-1}$ 可逆

$a, b \in H_1$

$$(x^{-1} a x)(x^{-1} b x)^{-1} = x^{-1} a x \, x^{-1} b^{-1} x = x^{-1}(ab^{-1})x$$

$ab^{-1} \in H$，因为 H 是 H 自己的子群

$\Rightarrow x^{-1}(ab^{-1})x \in H_1$

Q14 我们称这些子群为 G'，它们的交为 G''

1. 封闭性

$a, b \in G'' \Rightarrow a, b \in G'$ for all G' $\Rightarrow ab \in G'$ for all G' $\Rightarrow ab \in G''$

2. G'' 中有单位元 e，不然这些 G' 都不是子群

3. $\forall a \in G'' \Rightarrow \forall a \in G'$ for all G' $\Rightarrow \forall a \in G'\ \exists a^{-1} \in G'$ for all G'

$\Rightarrow \forall a \in G''\ \exists a^{-1} \in G''$

Q25 反证：

设有限群中没有元素 $a \neq e$，$a^2 = e$

因为是群，所以 $\exists a^{-1}\ \forall a$，$aa^{-1} = e$

那么 $aa \neq e$ for all $a \neq e$

$aa^{-1} = e$

$a \neq a^{-1} \Rightarrow a^{-1}$ 也是一个元素

a 和 a^{-1} 成对，再加上 $e = e^{-1}$，共有奇数个元素

和原题矛盾

~~Q25 通过 Lagrange 定理~~

~~有 有限群 元素 a 的阶都是 $2k$ 的因子，且适合 $a^n = e$~~

~~2是有限群阶的因子，就有 $a^2 = e$~~

Q4

$$\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 4)$$

$$\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1\ 6)(2\ 5)$$

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$$

$$= (1\ 4)(1\ 6)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 5)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 4)(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$$

$$= (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$$

Q27

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4)$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 3)$$

取 $a = e$

$\langle\alpha\rangle(e) = \langle e, (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\rangle$

??? 应取什么为 a?

Q30 Lagrange 定理

$[G:1] = [G:A][A:1]$

$[G:1] = [G:B][B:1]$ $\qquad [A:1] = [A:B][B:1]$

$[G:A][A:1] = [G:B][B:1]$

$[G:A][A:B][B:1] = [G:B][B:1]$

$[G:B] = [G:A][A:B]$ //

Q23 $\alpha(i_1, i_2 \ldots i_r)\alpha^{-1}$

$= \alpha(i_1\ i_r)(i_1\ i_{r-1})\ldots(i_1\ i_2)\alpha^{-1}$

$= (\alpha(i_1)\ \alpha(i_r))(\alpha(i_1)\ \alpha(i_{r-1}))\ldots(\alpha(i_1)\ \alpha(i_2))$

$= (\alpha(i_1)\ \alpha(i_2)\ldots\ \alpha(i_r))$