设施选址(1)

计9x 吴梦迪

题目大意

给定带权无向图$G=(V,E)$,

定义$f(v_i)=\max(\pi(v_i,v_j))$,

求$\min(f(v_i))$。

$n\le 200, m\le n^2$

解题思路

求出$\pi(v_i, v_j)$。

Floyd-Warshall算法

定义$D_{i,j}^k$为只经过$[1,k]\cup i,j$中节点的从i到j的最短路长度，

讨论最短路是否经过k，有

$$D_{i,j}^k=\min(D_{i,j}^{k-1},D_{i,k}^{k-1}+D_{k,j}^{k-1})$$

。

则$\pi(v_i,v_j)=D_{i,j}^n$。

Floyd-Warshall算法的实现

```
for k from 1 to n
  for i from 1 to n
    for j from 1 to n
      dist[i][j] ← min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j])
```

时间复杂度为$O(n^3)$。

Dijkstra算法

分别以每个点为起点使用Dijkstra算法，时间复杂度$O(nm+n^3)$。

使用数据结构实现Dijkstra算法

直接实现的Dijkstra算法瓶颈在于步骤b中计算$\arg\min \pi(i)$在整个算法实现中共进行了$O(n^2)$次比较，稀疏图上表现不佳。

可以使用优先队列维护π函数的值，根据优先队列的实现方式（二项堆、D叉堆、斐波那契堆等），时间复杂度为$O((n+m)\log n)$、$O(m\log_{\frac{m}{n}} n)$、$O(m+n\log n)$或其他。

习题一(6)

计9x 吴梦迪

Ramsey numbers

将K_n二着色，必有颜色0的r阶子完全图或颜色1的s阶子完全图，满足该条件的最小的n记为$R(r, s)$。

Ramsey numbers的性质

1.$R(r,s) \le R(r-1,s)+R(r,s-1)$；

2.当$R(r-1,s)$和$R(r,s-1)$均为偶数时，
$R(r,s) \le R(r-1,s)+R(r,s-1)-1$。

证明1

将$K_{R(r-1,s)+R(r,s-1)}$二着色，

记$M=\{v_i|(color_{0,i}=0)\}$，$N=\{i|(color_{0,i}=1)\}$，

由于$R(r-1,s)+R(r,s-1)=|M|+|N|+1$，

有$|M|\geq R(r-1,s)$或$|N|\geq R(s,r-1)$，

不妨设$|M|\geq R(r-1,s)$，则有$|M|\cup v_0$有颜色0的r阶子完全图或$|M|$有颜色1的s阶子完全图。

证明2

当$R(r-1,s)$和$R(r,s-1)$均为偶数时，
$R(r-1,s)+R(r,s-1)-1$为奇数，故必有一点与偶数条颜色0边相连，不妨设为v_0，M,N定义同上，有

- $|M|$和$|N|$均为偶数，
- $|M|+|N|=R(r-1,s)+R(r,s-1)-2$;

由于$R(r-1,s)-1$和$R(r,s-1)-1$均为奇数，必有$|M|\geq R(r-1,s)$或$|N|\geq R(s,r-1)$。

习题一(6)

$$R(3,3) = 6$$
$$R(4,2) = 4$$
$$R(4,3) \leq R(3,3) + R(4,2) - 1 = 9$$