必修课

南京师范大学附属中学 杨天祺

题目大意

- 有 n 门课，每门课有一个完成需要的时间 c_i，都有一些前置课程要求。多门课可以并行的进行。现在对于每门课想要求出最早可能的完成时间，以及若减少其学时是否可以减少修完所有课所需要的最少时间。
- 对于 30% 的数据，$1 \le n \le 100$
- 对于 50% 的数据，$1 \le n \le 1000$
- 对于 100% 的数据，$1 \le n \le 10^5, 1 \le \sum c_i \le 10^6$

吐槽

- 部分分？
- 我不会做部分分……

建图

- 将每门课看作一个点，每门课的所有前置课程向其连一条权值为 c_i 有向边
- 构成一个有向无环图（DAG）
- 则如果一个点 u 可以到另一个点 v，那么 u 必须在 v 之前修
- 假设一个超级源 S，向所有点连权值为 0 的边
- 假设一个超级汇 T，向所有点连权值为 0 的边
- 超级源表示入学，超级汇表示毕业

转化

- 对于一门课所可能完成的最短时间，即为从 S 到这个点的最长路
- 毕业所需要时间即为 S 到 T 的最长路
- 一个点减小 c_i 可以缩短毕业时间即为减少这个点所有入边的权值会影响 S 到 T 最长路的长度

Part 1. S 到 T 最长路

- 我们设 $dist_u$，表示 S 到 u 的最长路长度
- 则如下方程应当恒成立：

$$dist_u = \sum_{(v,u)\in E} dist(v) + w(v,u)$$

- 又有 $dist_S = 0$
- 于是可以按照拓扑序通过递推解出所有 $dist_u$
- 复杂度：$\Theta(n)$

Part 2. 求关键点

- 考虑什么点减小 c_i 可以缩短毕业时间即为减少这个点所有入边的权值会影响 S 到 T 最长路的长度
- 我们考虑 G 的如下子图 G'：
- $V(G') = V(G),\ E(G') = \{(u, v) \in E(G) | dist_u + w(u, v) = dist_v\}$
- 即为所有可能在最长路上的边组成的子图
- 那么一个点 i 减小 c_i 可以缩短毕业时间即为减少这个点所有入边的权值会影响 S 到 T 最长路的长度当且仅当对于任意一条 G' 上的 S 到 T 的路径，都经过 i

支配点

- 在一个有向图 G 上，若所有从 u 到 v 的路径都需要经过点 w，则我们称 w 是 v 的支配点
- 原题就要求以 S 的起点的 T 的所有支配点
- **引理1.** 若 u 支配 v， v 支配 w，则 u 支配 w
- **推论2.** 若将每个点和它的最近支配点连接起来，则构成一棵树，我们称这棵树为支配树
- 求解支配树[1]：$O(n\,\alpha(n))$

有向图上支配树

- 按拓扑序建树
- 设 G_i 为前 i 个点的支配树
- 第 i 个点的最近支配点即为 i 的所有入边的起点在 G_{i-1} 上的最近公共祖先
- 倍增维护最近支配点
- 复杂度：$O(n\log n)$

问题转化

- 定义集合 $S(u,v)$ 为所有满足存在 u 到 i 和 i 到 v 的简单路径的点 i 组成的集合
- **引理3.** 有向图上以 u 为起点的条件下 w 支配 v，当且仅当 w 是 $S(u,v)$ 这个集合的导出子图转化为无向图后图中的割点
- 证明?
- 于是求点双连通分量即可

偏序？全序！

- 我们发现这题还有一些特殊的性质：每个点都有一个值 $dist_u$，这个偏序一定是 $dist_u$ 的全序的一个子集
- 我们将所有点放到数轴上，点 u 放到 $dist_u$ 这个点上，则有每条边都是数轴上一个区间，数轴长度 $O(\sum c_i)$
- 一个点是支配点，当且仅当这个点不被任何区间覆盖
- 从左往右扫描即可
- 复杂度：$O(n + \sum c_i)$

进一步优化

- 当 $1 \le c_i \le 10^9$ 的时候怎么办？
- 其实数轴上有用的点只有 $O(n)$ 个，只把这些点拿出来考虑即可
- 需要一个排序
- 复杂度：$O(n \log n)$

参考文献

- 1. Lengauer, Thomas; and Tarjan; Robert Endre (July 1979). "A fast algorithm for finding dominators in a flowgraph". *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*.

谢谢大家