<u>№1</u> Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ и $dimV_1 = n$.
Тогда $dim\ Ker\varphi + dim\ Im\varphi = n = dimV_1$.

<u>№2</u> Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

Число λ называется собственным числом линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, если существует вектор $v \neq 0$ такой, что $\varphi(v) = \lambda v$. При этом вектор v называется собственным вектором оператора φ.

<u>№3</u> Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.

Для произвольной квадратной матрицы A многочлен вида $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

<u>№4</u> Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

<u>Примечание</u> Здесь немного «отсебятины», потому что переписывал с грубой формулы.
Следующие условия эквивалентны:

1. λ - собственное значение линейного оператора A.
2. $|A - \lambda E| = 0$(т.е. $\chi_A(\lambda) = 0$ или λ является корнем характеристического многочлена A).

<u>№5</u> Дайте определение собственного подпространства.

Собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ_i оператора A называется множество:

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_i x\}$$

<u>№6</u> Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?

Алгебраической кратностью собственного значения называют его кратность как корня характеристического уравнения.
<u>Пример</u> $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 6)^2(\lambda + 3)$: алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = 5$ равна 3.
Геометрической кратностью собственного значения называют размерность собственного подпространства V_{λ_i}.

Геометрическая кратность собственного значения всегда положительна и не превосходит его алгебраической кратности.

№7 Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - различные собственные значения линейного оператора A ($\forall i \neq j \;\; \lambda_i \neq \lambda_j$), а $v_1, \ldots, v_k$ - соответствующие им собственные вектора. Тогда вектора $v_1, \ldots v_k$ линейно независимы.

№8 Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе $\iff$ все вектора этого базиса являются собственными векторами данного линейного оператора.

№9 Сформулируйте критерий диагонализируемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.

Матрица линейного оператора диагонализируема $\iff$ для любого его собственного значения геометрическая кратность равна алгебраической кратности.

№10 Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.

Жорданова клетка размера $m \times m$ соответствующего собственного значения λ_i - матрица вида:

$$J_m(\lambda_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m$$

Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора - блочно-диагональная матрица с Жордановыми клетками на диагонали.

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u> Любая матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приводится заменой базиса к Жордановой нормальной форме над алгебраически замкнутым полем.

№11 Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.

Пусть q_h - число жордановых клеток размера $h \times h$ с λ_i на диагонали. Пример:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$$

$$q_1(\lambda_1) = 1, q_2(\lambda_1) = 0,$$

$$q_1(\lambda_1) = 0, q_2(\lambda_2) = 1, q_3(\lambda_2) = 1, q_4(\lambda_2) = 0$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 5)^5$$

<u>Утверждение</u> Для любого собственного значения λ_i $q_h = r_{h+1} - 2r_h + r_{h-1}$, где $r_h = Rg(A - \lambda E)^h, r_0 = RgE$

№12 Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.

$\chi_A(A) = 0$, где χ_A - характеристический многочлен матрицы A.

№13 Дайте определение корневого подпространства.

Корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ_i называют множество: $K_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i E)^{m_i}$, где m_i - алгебраическая кратность собственного значения.

№14 Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.

Минимальным многочленом линейного оператора A называется многочлен $\mu_A(\lambda)$ такой, что:

1. $\mu_A(A) = 0$
2. $\mu_A \neq 0$
3. Степень многочлена μ_A минимальна и старший коэффициент равен 1.

№15 Дайте определение инвариантного подпространства.

L называется инвариантным подпространством линейного оператора $A : V \longrightarrow V$, если $\forall x \in L \ \ Ax \in L$(т.е. $A(L) \subset L$)