

№1 Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ и $\dim V_1 = n$.

Тогда $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n = \dim V_1$.

№2 Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

Число λ называется собственным числом линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, если существует вектор $v \neq 0$ такой, что $\varphi(v) = \lambda v$. При этом вектор v называется собственным вектором оператора φ .

№3 Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.

Для произвольной квадратной матрицы A многочлен вида $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A .

№4 Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

Примечание Здесь немного «отсебятины», потому что переписывал с грубой формулы.

Следующие условия эквивалентны:

1. λ - собственное значение линейного оператора A .
2. $|A - \lambda E| = 0$ (т.е. $\chi_A(\lambda) = 0$ или λ является корнем характеристического многочлена A).

№5 Дайте определение собственного подпространства.

Собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ_i оператора A называется множество:

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_i x\}$$

№6 Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?

Алгебраической кратностью собственного значения называют его кратность как корня характеристического уравнения.

Пример $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 6)^2(\lambda + 3)$: алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = 5$ равна 3.

Геометрической кратностью собственного значения называют размерность собственного подпространства V_{λ_i} .

Геометрическая кратность собственного значения всегда положительна и не превосходит его алгебраической кратности.

№7 Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные собственные значения линейного оператора A ($\forall i \neq j \quad \lambda_i \neq \lambda_j$), а v_1, \dots, v_k - соответствующие им собственные вектора. Тогда вектора v_1, \dots, v_k линейно независимы.

№8 Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе \iff все вектора этого базиса являются собственными векторами данного линейного оператора.

№9 Сформулируйте критерий диагонализруемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.

Матрица линейного оператора диагонализруема \iff для любого его собственного значения геометрическая кратность равна алгебраической кратности.

№10 Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.

Жорданова клетка размера $m \times m$ соответствующего собственного значения λ_i - матрица вида:

$$J_m(\lambda_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}}_m \Bigg\} m$$

Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора - блочно-диагональная матрица с Жордановыми клетками на диагонали.

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Теорема Любая матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приводится заменой базиса к Жордановой нормальной форме над алгебраически замкнутым полем.

№11 Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.

Пусть q_h - число жордановых клеток размера $h \times h$ с λ_i на диагонали. Пример:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$$

$$q_1(\lambda_1) = 1, q_2(\lambda_1) = 0,$$

$$q_1(\lambda_2) = 0, q_2(\lambda_2) = 1, q_3(\lambda_2) = 1, q_4(\lambda_2) = 0$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 5)^5$$

Утверждение Для любого собственного значения λ_i $q_h = r_{h+1} - 2r_h + r_{h-1}$, где $r_h = \text{Rg}(A - \lambda E)^h$, $r_0 = \text{Rg} E$

№12 Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.

$\chi_A(A) = 0$, где χ_A - характеристический многочлен матрицы A .

№13 Дайте определение корневого подпространства.

Корневым подпространством оператора A , соответствующим собственному значению λ_i называют множество: $K_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{m_i}$, где m_i - алгебраическая кратность собственного значения.

№14 Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.

Минимальным многочленом линейного оператора A называется многочлен $\mu_A(\lambda)$ такой, что:

1. $\mu_A(A) = 0$
2. $\mu_A \neq 0$
3. Степень многочлена μ_A минимальна и старший коэффициент равен 1.

№15 Дайте определение инвариантного подпространства.

L называется инвариантным подпространством линейного оператора $A : V \rightarrow V$, если $\forall x \in L \quad Ax \in L$ (т.е. $A(L) \subset L$)

№16 Дайте определение евклидова пространства.

Евклидово пространство $\epsilon = (V, g)$ - линейное пространство над \mathbb{R} с определенным скалярным произведением g , где $g(x, y) : V^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. $\forall x, y, \in V \quad g(x, y) = g(y, x)$
2. $\forall x, y, z \in V \quad g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
4. $g(x, x) \geq 0$, причем $g(x, x) = 0 \iff x = 0$

№17 Выпишите неравенства Коши–Буняковского и треугольника.

Неравенство Коши-Коши–Буняковского $\forall x, y \in \epsilon \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Неравенство треугольника $\forall x, y \in \epsilon \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

№18 Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.

Система векторов v_1, \dots, v_k называется:

- Ортогональной, если $\forall i \neq j \quad (v_i, v_j) = 0$
- Ортонормированной, если она ортогональна и $\forall i \quad (v_i, v_i) = 1$

Если $k = \dim V = n$, то v_1, \dots, v_k будет ортогональным базисом.

Если рассмотреть $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$, то получим ОНБ(ортонормированный базис).

№19 Дайте определение матрицы Грама.

Пусть a_1, \dots, a_n - базис в ϵ . Тогда $g(x, y) = X^T G Y$, где X, Y - столбцы координат векторов x и y в базисе a_1, \dots, a_n .

$$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} - \text{матрица Грама.}$$

№20 Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.

Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны следующим соотношением: $G' = U^T G U$, где U - матрица перехода от e к e' .

№21 Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта?

Определитель матрицы Грама не меняется при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта.

№22 Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.

Пусть $Gr(a_1, \dots, a_k) = \det \Gamma$ - грамиан.

Тогда (вектора a_1, \dots, a_k линейно независимы) $\iff Gr(a_1, \dots, a_k) \neq 0$

№23 Дайте определение ортогонального дополнения.

Пусть $H \subseteq V$. Тогда множество $H^\perp = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \forall y \in H\}$ называется ортогональным дополнением.

№24 Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.

$$\forall x \in \epsilon \quad x = y + z \quad y \in H, z \in H^\perp$$

y - ортогональная проекция x на H

z - ортогональная составляющая x относительно H

№25 Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.

Пусть $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и вектора a_1, \dots, a_k линейно независимые.

Тогда $\text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где A составлена из столбцов a_1, \dots, a_k .

№26 Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.

Расстояние $p(x, P)$ между плоскостью (линейным многообразием) $P = x_0 + L$, где $L = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ может быть найдено по формуле:

$$p^2(x, P) = \frac{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)} = \frac{Gr(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{Gr(a_1, \dots, a_k)}$$

№27 Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.

Линейный оператор $A^* : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется сопряженным к линейному оператору $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$, если

$$\forall x, y \in \epsilon \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

№28 Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.

Линейный оператор $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется самосопряженным (симметрическим), если если $\forall x, y \in \epsilon \quad (Ax, y) = (x, Ay)$, т.е. $A^* = A$.

№29 Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?

У любого линейного оператора $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ существует и единственен сопряженный оператор $A^* : \epsilon \longrightarrow \epsilon$, причем его матрицей будет матрица $(A^*)_b = \Gamma^{-1}(A)_b^T \Gamma$, где Γ - матрица грама базиса b .

№30 Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?

- Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора являются действительными числами.
- Пусть λ - собственное значение самосопряженного оператора A . Тогда алгебраическая кратность λ равна геометрической кратности.

№31 Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?

Собственные вектора самосопряженного линейного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

№32 Сформулируйте определение ортогональной матрицы.

Квадратную матрицу M называют ортогональной, если $M^T M = E$.

№33 Сформулируйте определение ортогонального оператора.

Линейный оператор $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется ортогональным, если $\forall x, y \in \epsilon \quad (Ax, Ay) = (x, y)$, т.е. A сохраняет скалярное произведение.

№34 Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

Матрица линейного оператора в ОНБ ортогональна $\iff A$ - ортогональный оператор.

№35 Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.

Для любого ортогонального оператора существует ОНБ, в котором его матрица имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\varphi_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Где $A_{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}$

Следствие: теорема Эйлера

Для любого ортогонального преобразования в R^3 существует ОНБ, в котором его матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j & 0 \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

То есть любое ортогональное преобразование в R^3 является или поворотом на некоторый угол φ вокруг оси, либо композиции такого поворота с отражением.

№36 Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.

Для любого самосопряженного оператора существует ОНБ, состоящий из собственных векторов A . Матрица A_e в этом базисе диагональна, а на диагонали стоят собственные значения, повторяющиеся столько, какова их алгебраическая кратность.

№37 Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

Любую квадратичную форму можно привести к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

№38 Сформулируйте утверждение о QR-разложении.

Пусть A - квадратная матрица размера $n \times n$, при этом столбцы A_1, \dots, A_n линейно независимы. Тогда A представима в виде $A = Q \cdot R$, где Q - ортогональная матрица, а R - верхнетреугольная матрица.

№39 Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.

Для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ существует сингулярное разложение:

$$A = V \Sigma U^T$$

Где $U \in M_n(\mathbb{R})$ - ортогональная матрица,

$V \in M_m(\mathbb{R})$ - ортогональная матрица,

$\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и Σ является диагональной с числами $\varsigma_i \geq 0$ на диагонали (сингулярные числа). При этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$

№40 Сформулируйте утверждение о полярном разложении.

Любая матрица $A \in M_N(\mathbb{R})$ представима в виде $A = S \cdot U$, где S - симметрическая матрица с положительными собственными значениями, а U - ортогональная матрица.

№41 Дайте определение сопряженного пространства.

Пространством, сопряженным к линейному пространству L называется множество линейных форм на нем с операциями сложения и умножения на число.

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in V$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in F$$

Обозначение: $L^* = \text{Hom}(L, F)$

№42 Выпишите формулу для преобразования координат ко-вектора при переходе к другому базису.

TODO

№43 Дайте определение взаимных базисов.

Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $f = (f^1, \dots, f^n)$ в сопряженном пространстве

$$L^* \text{ называют взаимными, если } f^i(e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \sigma_j^i$$

№44 Дайте определение биортогонального базиса.

TODO

№45 Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A — векторное пространство над полем K , снабженное операцией $A \times A \rightarrow A$, называемой умножением. Тогда A является алгеброй над K , если для любых $x, y, z \in A$, $a, b \in K$ выполняются следующие свойства:

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

Примеры: комплексные числа и кватернионы.

№46 Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть F - поле, V - векторное пространство над F ; V^* - сопряженное к V ; $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
 Тогда любое полилинейное отображение $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \longrightarrow F$ называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.

Примеры

- Тензор типа $(1, 0)$ - линейная функция на V , т.е. элементы V^* .
- Тензор типа $(2, 0)$ - билинейные формы на V .
- Тензор типа $(1, 1)$ можно интерпретировать как линейный оператор.

№47 Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетом эллипса.

Эксцентриситет всегда лежит в полуинтервале $[0; 1)$ и служит мерой «сплюснутости» эллипса.

№48 Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.

Каноническое уравнение гиперболой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Число $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетом гиперболой.

При этом $\varepsilon > 1$ (при $\varepsilon \rightarrow 1$ гипербола выражается в два луча) и характеризует угол между асимптотами.

№49 Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F , называемой фокусом параболы, и данной прямой, называемой ее директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$

№50 Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ , лежащую в некоторой плоскости P , и прямую L , не лежащую в P .

Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ .

№51 Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.

Примеры:

- Цилиндр
- Гиперболический параболоид
- Линейчатый гиперболоид