№1 Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ и $dimV_1 = n$.
Тогда $dim\ Ker\varphi + dim\ Im\varphi = n = dimV_1$.

№2 Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

Число λ называется собственным числом линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, если существует вектор $v \neq 0$ такой, что $\varphi(v) = \lambda v$. При этом вектор v называется собственным вектором оператора φ.

№3 Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.

Для произвольной квадратной матрицы A многочлен вида $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

№4 Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

Примечание Здесь немного «отсебятины», потому что переписывал с грубой формулы.
Следующие условия эквивалентны:

1. λ - собственное значение линейного оператора A.
2. $|A - \lambda E| = 0$(т.е. $\chi_A(\lambda) = 0$ или λ является корнем характеристического многочлена A).

№5 Дайте определение собственного подпространства.

Собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ_i оператора A называется множество:

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_i x\}$$

№6 Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?

Алгебраической кратностью собственного значения называют его кратность как корня характеристического уравнения.
Пример $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 6)^2(\lambda + 3)$: алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = 5$ равна 3.
Геометрической кратностью собственного значения называют размерность собственного подпространства V_{λ_i}.

Геометрическая кратность собственного значения всегда положительна и не превосходит его алгебраической кратности.

№7 Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные собственные значения линейного оператора A ($\forall i \neq j \;\; \lambda_i \neq \lambda_j$), а $v_1, \dots, v_k$ - соответствующие им собственные вектора. Тогда вектора $v_1, \dots v_k$ линейно независимы.

№8 Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе $\iff$ все вектора этого базиса являются собственными векторами данного линейного оператора.

№9 Сформулируйте критерий диагонализируемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.

Матрица линейного оператора диагонализируема $\iff$ для любого его собственного значения геометрическая кратность равна алгебраической кратности.

№10 Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.

Жорданова клетка размера $m \times m$ соответствующего собственного значения λ_i - матрица вида:

$$J_m(\lambda_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\} m$$

Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора - блочно-диагональная матрица с Жордановыми клетками на диагонали.

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Теорема Любая матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приводится заменой базиса к Жордановой нормальной форме над алгебраически замкнутым полем.

№11 Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.

Пусть q_h - число жордановых клеток размера $h \times h$ с λ_i на диагонали. Пример:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$$

$$q_1(\lambda_1) = 1, q_2(\lambda_1) = 0,$$

$$q_1(\lambda_1) = 0, q_2(\lambda_2) = 1, q_3(\lambda_2) = 1, q_4(\lambda_2) = 0$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 5)^5$$

Утверждение Для любого собственного значения λ_i $q_h = r_{h+1} - 2r_h + r_{h-1}$, где $r_h = Rg(A - \lambda E)^h, r_0 = RgE$

№12 Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.

$\chi_A(A) = 0$, где χ_A - характеристический многочлен матрицы A.

№13 Дайте определение корневого подпространства.

Корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ_i называют множество: $K_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i E)^{m_i}$, где m_i - алгебраическая кратность собственного значения.

№14 Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.

Минимальным многочленом линейного оператора A называется многочлен $\mu_A(\lambda)$ такой, что:

1. $\mu_A(A) = 0$
2. $\mu_A \neq 0$
3. Степень многочлена μ_A минимальна и старший коэффициент равен 1.

№15 Дайте определение инвариантного подпространства.

L называется инвариантным подпространством линейного оператора $A : V \longrightarrow V$, если $\forall x \in L \;\; Ax \in L$(т.е. $A(L) \subset L$)

№16 Дайте определение евклидова пространства.

Евклидово пространство $\epsilon = (V, g)$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$ с определенным скалярным произведение g, где $g(x,y) : V^2 \Longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. $\forall x, y, \in V \;\; g(x,y) = g(y,x)$
2. $\forall x, y, z \in V \;\; g(x+y, z) = g(x,z) + g(y,z)$
3. $g(\lambda x, y) = \lambda g(x,y)$
4. $g(x,x) \geq 0$, причем $g(x,x) = 0 \iff x = 0$

№17 Выпишите неравенства Коши–Буняковского и треугольника.

Неравенство Коши-Коши–Буняковского $\forall x, y \in \epsilon \;\; |(x,y))| \leq ||x|| \cdot ||y||$
Неравенство треугольника $\forall x, y \in \epsilon \;\; ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

№18 Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.

Система векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется:

- Ортогональной, если $\forall i \neq j \;\; (v_i, v_j) = 0$
- Ортонормированной, если она ортогональна и $\forall i \;\; (v_i, v_i) = 1$

Если $k = dimV = n$, то $v_1, \ldots, v_k$ будет ортогональным базисом.
Если рассмотреть $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}, \ldots, e_n = \frac{v_n}{||v_n||}$, то получим ОНБ(ортонормированный базис).

№19 Дайте определение матрицы Грама.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - базис в ϵ. Тогда $g(x,y) = X^T \Gamma Y$, где X, Y - столбцы координат векторов x и y в базисе $a_1, \ldots, a_n$.

$\Gamma = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$ - матрица Грама.

№20 Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.

Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны следующим соотношением: $\Gamma' = U^T \Gamma U$, где $U-$ матрица перехода от e к e'.

№21 Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта?

Определитель матрицы Грама не меняется при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

№22 Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.

Пусть $Gr(a_1, \dots, a_k) = det\Gamma$ - грамиан.
Тогда (вектора $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы) $\iff Gr(a_1, \dots, a_k) \neq 0$

№23 Дайте определение ортогонального дополнения.

Пусть $H \subseteq V$. Тогда множество $H^{\perp} = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \forall y \in H\}$ называется ортогональным дополнением.

№24 Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.

$\forall x \in \epsilon \;\; x = y + z \; y \in H, z \in H^{\perp}$
y - ортогональная проекция x на H
z - ортогональная составляющая x относительно H

№25 Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.

Пусть $H =< a_1, \dots, a_k >$ и вектора $a_1, \dots, a_k$ линейно независимые.
Тогда пр$_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где A составлена из столбцов $a_1, \dots a_k$.

№26 Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.

Расстояние $p(x, P)$ между плоскостью(линейным многообразием) $P = x_0 + L$, где $L =< a_1, \dots, a_k >$ может быть найдено по формуле:
$p^2(x, P) = \frac{det\Gamma(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{det\Gamma(a_1, \dots, a_k)} = \frac{Gr(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{Gr(a_1, \dots, a_k)}$

№27 Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.

Линейный оператор $A^* : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется сопряженным к линейному оператору $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$, если $\forall x, y \in \epsilon \;\; (Ax, y) = (x, A^* y)$

№28 Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.

Линейный оператор $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется самосопржяенным(симметрическим), если если $\forall x, y \in \epsilon \;\; (Ax, y) = (x, A^y)$, т.е. $A^* = A$.

№29 Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?

У любого линейного оператора $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ существует и единственен сопряженный оператор $A^* : \epsilon \longrightarrow \epsilon$, причем его матрицей будет матрица $(A^*)_b = \Gamma^-1(A)_b^T\Gamma$, где Γ - матрица грама базиса b.

№30 Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?

- Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора являются действительными числами.
- Пусть λ - собственное значение самосопряженного оператора A. Тогда алгебраическая кратность λ равна геометрической кратности.

№31 Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?

Собственные вектора самосопряженного линейного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

№32 Сформулируйте определение ортогональной матрицы.

Квадратную матрицу M называют ортогональной, если $M^TM = E$.

№33 Сформулируйте определение ортогонального оператора.

Линейный оператор $A : \epsilon \longrightarrow \epsilon$ называется ортогональным, если $\forall x, y \in \epsilon \quad (Ax, Ay) = (x, y)$, т.е. A сохраняет скалярное произведение.

№34 Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

Матрица линейненого оператора в ОНБ ортогональна $\iff$ A - ортогональный оператор.

№35 Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.

Для любого ортогонального оператора существует ОНБ, в ктором его матрица имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$
\begin{pmatrix}
A_{\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A_{\varphi_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

Где $A_{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$

Следствие: теорема Эйлера

Для любого ортогонального преобразования в R^3 существует ОНБ, в котором его матрица имеет вид:

$$
\begin{pmatrix}
\cos\varphi_j & -\sin\varphi_j & 0 \\
\sin\varphi_j & \cos\varphi_j & 0 \\
0 & 0 & \pm 1
\end{pmatrix}
$$

То есть любое ортогональное преобразование в R^3 является или поворотом на некоторый угол φ вокруг оси, либо композици такого поворота с отражением.

№36 Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.

Для любого самосопряженного оператора существует ОНБ, состоящий из собственных векторов A. Матрица A_e в этом базисе диагональна, а на диагонали стоят собственные значения, повторяющиеся столько, какова их алгебраическая кратность.

№37 Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

Любую кввадратичую форму можно привести к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

№38 Сформулируйте утверждение о QR-разложении.

Пусть A - квадратная матрица замера $n \times n$, при этом столбцы $A_1, \ldots, A_n$ линейно независимы. Тогда A представима в виде $A = Q \cdot R$, где Q - ортогональная матрица, а R - верхнетреугольная матрица.

№39 Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.

Для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ существует сингулярное разложение:

$$A = V\mathbf{\Sigma}U^T$$

Где $U \in M_n(\mathbb{R})$ - ортогональная матрица,
$V \in M_m(\mathbb{R})$ - ортогональная матрица,
$\mathbf{\Sigma} \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{\Sigma}$ является диагональной с числами $\varsigma_i \geq 0$ на диагонали(сингулярные числа). При этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > 0$

№40 Сформулируйте утверждение о полярном разложении.

Любая матрица $A \in M_N(\mathbb{R})$ представима в виде $A = S \cdot U$, где S - симметрическая матрица с положительными собственными значениями, а U - ортогональная матрица.

№41 Дайте определение сопряженного пространства.

Пространством, сопряженным к линейному пространству L называется множество линейных форм на нем с операциями сложения и умножения на число.
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \ \ \forall \in V$
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \ \ \forall \lambda \in F$
Обозначение:$L^* = Hom(L, F)$

№42 Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

TODO

№43 Дайте определение взаимных базисов.

Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $f = (f^1, \ldots, f^n)$ в сопряженном пространстве L^* называют взаимными, если $f^i(e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \sigma^i_j$

№44 Дайте определение биортогонального базиса.

TODO

№45 Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A — векторное пространство над полем K, снабженное операцией $A \times A \to A$, называемой умножением. Тогда A является алгеброй над K, если для любых $x, y, z \in A, \ a, b \in K$ выполняются следующие свойства:

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

Примеры: комплексные числа и кватернионы.