面包的某(神仙)题

题目描述

给定 T 组 n ，求出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\gcd(i,j)=i\oplus j]$$

数据范围

$T\leqslant 10^5$, $n\leqslant 3\times 10^7$

题解

- $a-b\leqslant a\oplus b\ (a\geqslant b)$
- $a\oplus b=c\Leftrightarrow a\oplus c=b$
- $\gcd(a,b)=c$

suppose $a=k_1c$, $b=k_2c\ (a\geqslant b\,,\ \gcd(k_1,k_2)=1)$

$\therefore a-b=(k_1-k_2)c$

$\therefore a-b\geqslant c$

$\because a-b\leqslant a\oplus b$

$\therefore a-b\leqslant c$

$\therefore a-b=c$

枚举 c , 枚举一个 $a\ (b=a-c)$ ， 直接判断 $a\oplus b=c$ 即可。

注： $\gcd(a,b)=\gcd(a,a-c)=c$ ，所以 $\gcd(a,c)=c$, $c|a$ ，枚举倍数即可。

复杂度：据调和级数可积得复杂度为 $O(n\ln n)$

证明:

$$
\begin{aligned}
H(n) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{i}^{i+1} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} dx \\
&= \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} + \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} dx \\
&= \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx + \int_{1}^{n+1} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} dx \\
&\approx \ln(n+1) + \gamma
\end{aligned}
$$

$$
(\gamma \xlongequal{\text{def}} \lim_{n \to \infty} \int_{1}^{n} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} dx \approx 0.5772156649015328606065 1209)
$$