Estudo da Convergência do Método de Newton-Raphson

Deseja-se mostrar que, se o Método de Newton-Raphson converge, esta convergência se dá para a raiz (zero da função).

Hipótese:

A raiz α é única no intervalo [a,b].

Define-se :

$$\overline{\alpha} = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Para mostrar que a convergência do método se dá para o zero da função, deve-se provar que $\overline{\alpha} = \alpha$.

Parte-se da expressão que define o processo iterativo do Método de Newton-Raphson.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

Levando a expressão ao limite:

$$\lim_{k \to \infty} x_{k+1} = \lim_{k \to \infty} x_k - \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

Substituindo:

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha} - \frac{f(\overline{\alpha})}{f^{'}(\overline{\alpha})}$$

Solucionando a expressão acima:

$$f(\overline{\alpha}) = 0$$

Portanto $\overline{\alpha}$ é raiz da função. Como α é a única raiz no intervalo [a,b], tem-se que $\overline{\alpha} = \alpha$.

Condições Suficientes para a convergência

1) $f^{'}(x) \quad e \quad f^{''}(x)$ não nulas e preservam o sinal no intervalo [a,b].
2) x_o tal que $f(x_o) f^{''}(x_o) > 0$.

As condições suficientes para convergência pode-se dizer que não são as ideais para aplicações práticas, pois, se não forem satisfeitas, nada se pode dizer sobre a convergência do processo.

Na prática, para se obter a convergência no Método de Newton-Raphson, procura-se soluções iniciais próxima à raiz. Em situações de difícil convergência, para se ter uma solução inicial de melhor qualidade, pode-se rodar algumas iterações de outros métodos.

Exemplo 1

Determine o zero da função $f(x) = \ln x + e^x$, a partir de 3 iterações do Método de Newton-Raphson com valor inicial $x_o = 1$.

$$f(x) = \ln x + e^x$$

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

$$x_1 = 1 - \frac{2{,}718}{3{,}71} = 0{,}269$$

$$x_2 = 0{,}269 - \frac{f(0{,}269)}{f^{'}(0{,}269)} = 0{,}27$$

$$x_3 = 0{,}27 - \frac{f(0{,}27)}{f^{'}(0{,}27)} = 0{,}27$$

Exemplo 2

Determine o zero da função $f(x) = x^4 - x - 10$, utilizando o Método de Newton-Raphson com $x_o = 1$ e tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$f(x) = x^4 - x - 10$$

$$f^{'}(x) = 4x^3 - 1$$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f^{'}(1)} = 1 - \frac{-10}{3} = 4{,}33$$

$$x_2 = 4{,}33 - \frac{f(4{,}33)}{f^{'}(4{,}33)} = 4{,}33 - \frac{337{,}19}{323{,}73} = 3{,}28$$

$$x_3 = 3{,}28 - \frac{f(3{,}28)}{f^{'}(3{,}28)} = 3{,}28 - \frac{102{,}46}{140{,}15} = 2{,}55$$

$$x_4 = 2{,}55 - \frac{f(2{,}55)}{f^{'}(2{,}55)} = 2{,}55 - \frac{29{,}732}{65{,}32} = 2{,}095$$

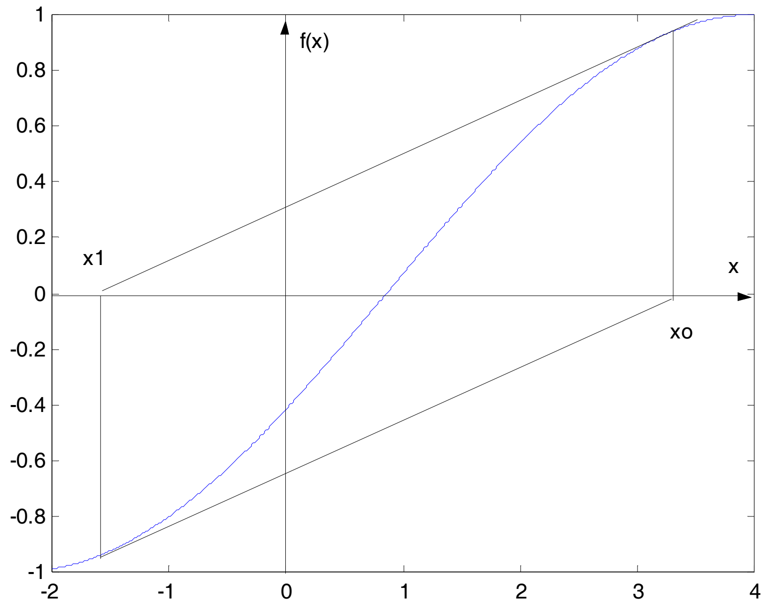
$$x_5 = 2{,}095 - \frac{f(2{,}095)}{f^{'}(2{,}095)} = 2{,}095 - \frac{7{,}1685}{35{,}780} = 1{,}895$$

$$x_6 = 1{,}895 - \frac{f(1{,}895)}{f^{'}(1{,}895)} = 1{,}895 - \frac{1{,}000}{26{,}22} = 1{,}857$$

$$x_7 = 1{,}857 - \frac{f(1{,}857)}{f^{'}(1{,}857)} = 1{,}857 - \frac{0{,}0348}{24{,}615} = 1{,}856$$

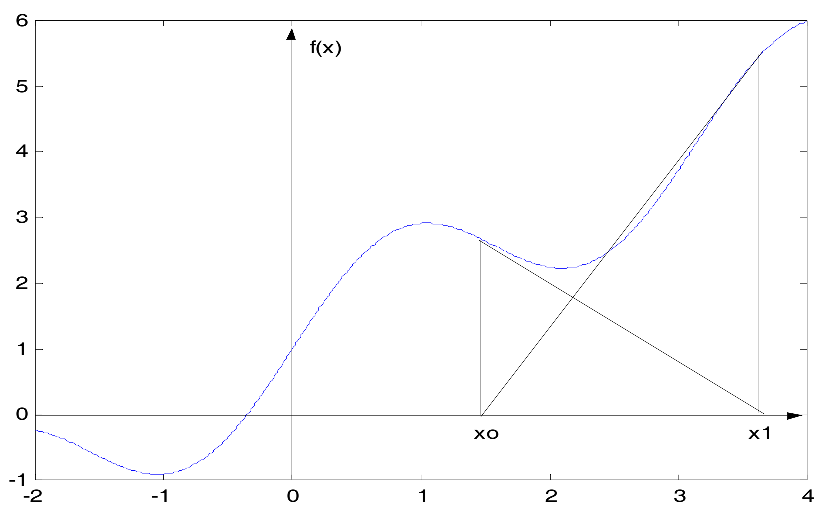
Casos de Difícil Convergência para o Método de Newton-Raphson

a) Pontos de Inflexão mas proximidades da raiz, $f''(x) = 0$.

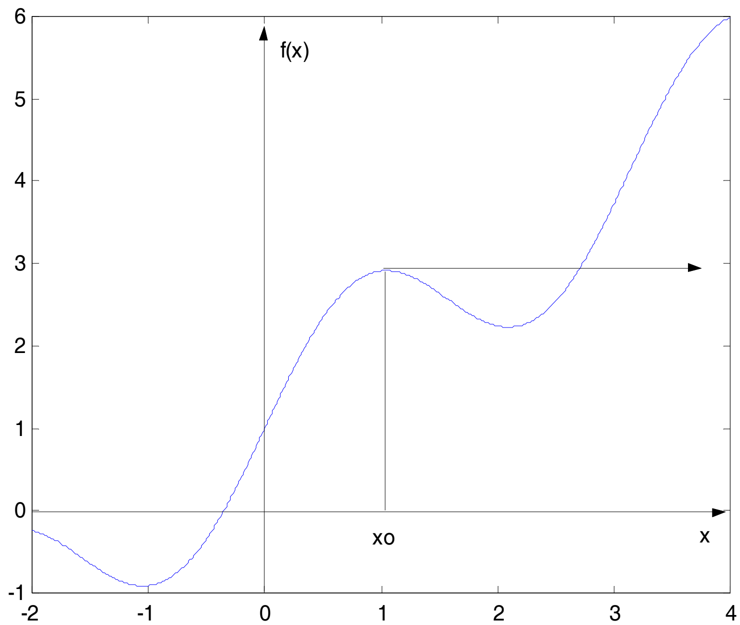


Observe que este é um caso extremo no qual o processo entra em "loop" e não chega a convergência. Em situações deste tipo, dependendo da condição inicial, o processo passa a ser muito oscilatório, retardando a convergência.

b) Ponto de máximo ou mínimo local, $f'(x) = 0$. Observe a análise gráfica através da função $f(x) = x + sin(2x) + 1$.



Observe que para o valor inicial dado o processo entrou em "loop" e não converge. Veja como fica mudando o valor inicial.



Observe que o processo diverge. Neste caso $f'(x_o) = 0$ e na expressão de recorrência do Método de Newton-Raphson aparecerá uma divisão por zero, criando uma situação para o overflow.

Comparação entre o Método de Iterações Lineares e o Método de Newton-Raphson

Considere a equação $f(x) = 0$.

Para o Método de Iterações Lineares o processo iterativo é realizado através da definição de uma função de iteração: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.

Para o Método de Newton-Raphson o processo iterativo se dá através da expressão: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Tomando como função de iteração linear:

$$\varphi(x_{k+1}) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Pode-se interpretar que o Método de Newton-Raphson é um caso particular do Método de Iterações Lineares.

Ordem de Convergência de Métodos Iterativos

Definição: Seja $\{x_k\} = \{x_o, x_1, x_2, ...\}$ uma sequência que converge para um número α e seja $e_k = x_k - \alpha$ o erro na iteração k. Se existir um número $p > 0$ e uma constante $c > 0$, tal que:

$$\lim_{k \to \infty} = \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

Então p é chamado de ordem de convergência da sequência $\{x_k\}$ e c é a constante assintótica do erro.

Observações

1 - Se $\lim_{k \to \infty} = \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = c$, com $0 \le |c| < 1$, então a convergência é pelo menos linear.

2- Da expressão $\lim_{k \to \infty} = \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$, pode-se escrever que:

$$|e_{k+1}| \approx c|e_k|^p \quad para \quad k \to \infty$$

Para $\{x_k\}$convergente, tem-se $e_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Portanto, quanto maior for o valor de p, mais rápido será a redução do valor da expressão $c|e_k|^p$, quando $e_k < 1$, e mais rápida será a convergência.

Ordem de Convergência do Método de Iteração Linear

Seja $\{x_k\}$ uma sequência, obtida através do Método de Iterações Lineares. que converge para a raiz α e seja $e_k = x_k - \alpha$ o erro na iteração k. Considere as relações:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$
$$\alpha = \varphi(\alpha)$$

Subtraindo as duas expressões, chega-se:

$$x_{k+1} - \alpha = \varphi(x_k) - \varphi(\alpha)$$

A partir do teorema do valor médio, tem-se:

$$x_{k+1} - \alpha = \varphi(x_k) - \varphi(\alpha) = \varphi'(c_k)(x_k - \alpha) \quad com \quad c_k \in [x_k, \alpha]$$

Rearranjando a expressão, tem-se:

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \varphi'(c_k)$$

Levando a relação ao limite:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}=\lim_{k\to\infty}\varphi^{'}(c_k)$$

A partir da hipótese que o processo é convergente, tem-se que:

1. $\varphi(x) \quad e \quad \varphi^{'}(x)$ são contínuas num intervalo [a,b].
2. $\left|\varphi^{'}(x)\right| \le M \le 1 \quad \forall x \in [a,b]$.
3. $x_o \in [a,b]$.

Considerando as hipóteses de convergência:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}=\lim_{k\to\infty}\varphi^{'}(c_k)=\varphi^{'}\left(\lim_{k\to\infty}c_k\right)=\varphi^{'}(\alpha)$$

Portanto:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\varphi^{'}(\alpha)=c \quad |c|<1$$

Concluindo: Pela análise da expressão acima, o Método de Iterações Lineares possui convergência linear e será mais rápido quanto menor for $\varphi^{'}(\alpha)$, pois para $k\to\infty$, tem-se que $e_{k+1}\approx\varphi^{'}(\alpha)e_k$.

Ordem de Convergência do Método de Newton Raphson

Suponha que o Método de Newton-Raphson gere uma sequência $\{x_k\}$ que converge para a raiz α.

Toma-se a expressão geral do método:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} \qquad (1)$$

Subtraindo α da expressão (1):

$$x_{k+1}-\alpha=x_k-\alpha-\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} \qquad (2)$$

Como:

$$\begin{aligned} e_{k+1}&=x_{k+1}-\alpha \\ e_k&=x_k-\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

Substituindo as equações (3) na equação (2), tem-se:

$$e_{k+1}=e_k-\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} \qquad (4)$$

Desenvolvendo $f(x)$ em Série de Taylor, no ponto $x=x_k$, chega-se:

$$f(x) = f(x_k) + f^{'}(x_k)(x - x_k) + \frac{f^{''}(c_k)}{2}(x - x_k)^2 \quad para \quad c_k \in [x, x_k] \quad (5)$$

Para $x = \alpha$, sendo α raiz:

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) - f^{'}(x_k)(x_k - \alpha) + \frac{f^{''}(c_k)}{2}(x_k - \alpha)^2 \quad para \quad c_k \in [x_k, \alpha] \quad (6)$$

Dividindo a expressão (6) por $f^{'}(x)$, chega-se a:

$$\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} = (x_k - \alpha) + \frac{f^{''}(c_k)}{2f^{'}(x_k)}(x_k - \alpha)^2 \quad (7)$$

Substituindo a expressão (3) e (4) na expressão (7), tem-se:

$$\frac{f^{''}(c_k)}{2f^{'}(x_k)}(e_k)^2 = -\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} + (e_k) = e_{k+1} \quad (8)$$

Rearranjando a expressão (8), tem-se:

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f^{''}(c_k)}{2f^{'}(x_k)}(e_k)^2 \quad (9)$$

Levando a expressão (9) ao limite para $k \to \infty$, chega-se:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{f^{''}(c_k)}{f^{'}(x_k)}(e_k)^2 \quad (10)$$

Considerando que a primeira derivada e a segunda derivada da função f(x) são contínuas, pode-se levar os limites para os argumentos das funções:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f^{''}(\lim_{k\to\infty} c_k)}{f^{'}(\lim_{k\to\infty} x_k)}(e_k)^2 = \frac{1}{2}\frac{f^{''}(\alpha)}{f^{'}(\alpha)} \quad (11)$$

Considerando para a convergência que $f^{''}(\alpha) \quad e \quad f^{'}(\alpha)$ sejam diferentes de zero:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f^{''}(\alpha)}{f^{'}(\alpha)} = C, \quad C \neq 0 \quad (12)$$

Analisando a expressão (12), pode-se concluir que o Método de Newton-Raphson tem convergência quadrática.