Comentários Adicionais do Método de Newton-Raphson

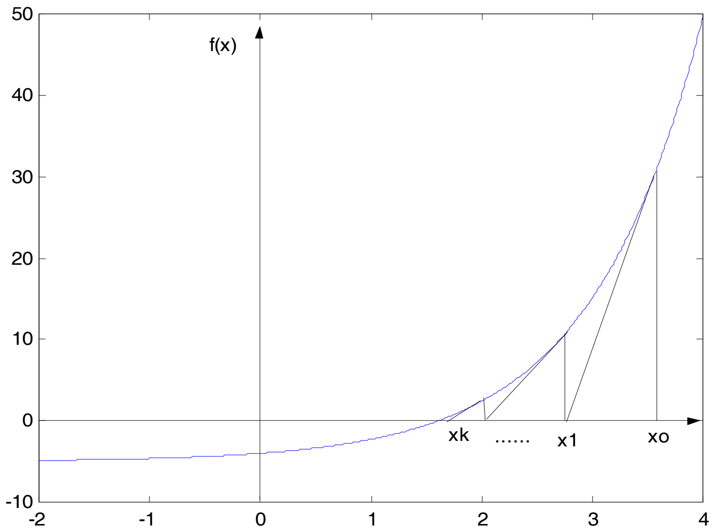
a) Método de Newton Modificado

Seja a expressão geral do método:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

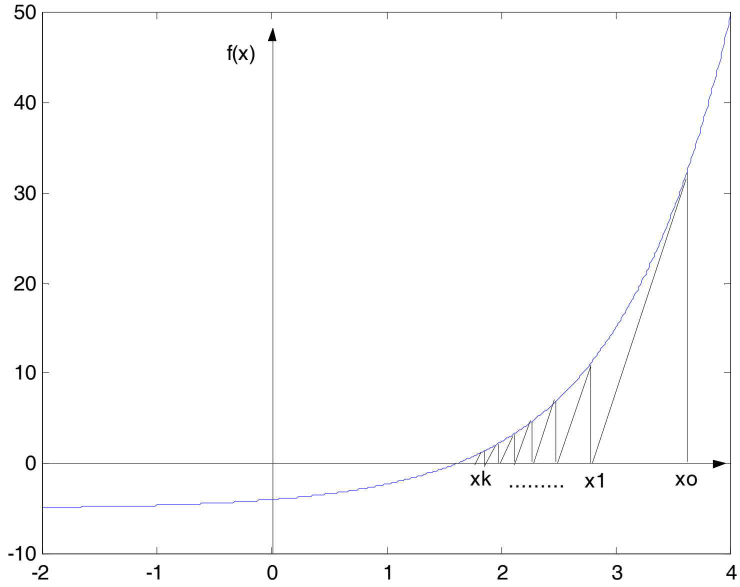
Observe que a cada iteração é calculada a derivada da função no novo ponto. A interpretação gráfica do método está na figura abaixo. A cada iteração a inclinação da reta tangente é modificada.

Gráfico do Método de Newton original



O Método de Newton modificado mantém constante o valor da derivada calculada na primeira iteração, ou seja $f^{'}(x_o)$, em todo o processo iterativo. A interpretação geométrica significa manter-se a reta tangente com inclinação constante em todas as iterações. Pode-se observar comparando as figuras do método original com o método modificado que o modificado necessita de um número maior de iterações para alcançar a convergência. Na prática este método modificado é utilizado na solução de sistemas de equações não-lineares, no qual, em vez de uma derivada, deve-se calcular uma matriz Jacobiana e a sua inversa a cada iteração. O custo computacional de realizar-se estes cálculos, normalmente é muito maior do que realizar um maior número de iterações com a matriz Jacobiana constante. O método modificado pode ser computacionalmente vantajoso.

Gráfico do Método de Newton modificado



b) Raízes Múltiplas

Multiplicidade de Raízes de Polinômios

Seja *F* um campo e *p(x)* de uma única variável e coeficientes em *F*. Um valor $a \in F$ é chamado de raiz de multiplicidade *k* de *p(x)* se existir um polinômio *s(x)* tal que $s(a) \neq 0$ e $p(x) = (x-a)^k s(x)$.

Para exemplificar seja o polinômio $p(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8$. Este polinômio tem como raízes -2 e -1 e pode ser escrito da forma: $p(x) = (x+2)^3 (x+1)$. Portanto, a raiz -2 tem multiplicidade 3 e a raiz -1 tem multiplicidade 1.

Multiplicidade de Raízes de uma Função

Seja *I* um intervalo de $\Re$, seja *f(x)* uma função de *I* para $\Re$ e $c \in I$ seja uma raiz de *f(x), ou seja* $f(c) = 0$. O ponto *c* é uma raiz de multiplicidade *k* da função *f(x)* se existir um número real $l \neq 0$ tal que:

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x)|}{|x-c|^k} = l$$

Está definição também é valida para polinômios, entretanto é mais comum a definição anterior.

Exemplo1: Seja a função $f(x) = \sin(x)$. O valor 0(zero) é raiz da função, pois $f(0) = \sin(0) = 0$. Qual a multiplicidade desta raíz? Pode-se mostrar que:

$$\lim_{x \to c} \frac{|\sin(x)|}{|x|} = 1$$

Portanto, 0 é uma raiz de multiplicidade 1. Porque não é de multiplicidade 2?

$$\lim_{x \to c} \frac{|\sin(x)|}{|x|^2} = \infty$$

Exemplo2: Seja a função $f(x) = 1 - \cos(x)$. O valor 0(zero) é raiz da função, $f(0) = 1 - \cos(0) = 0$. Qual a multiplicidade desta raíz? Pode-se mostrar que:

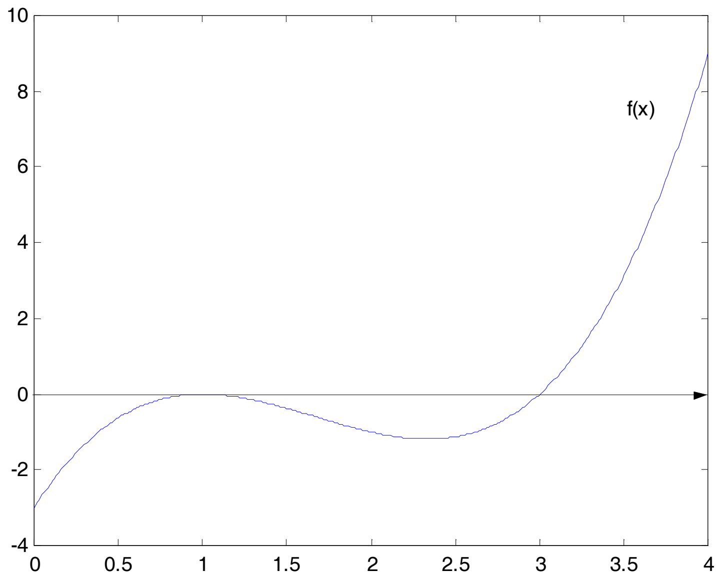
$$\lim_{x \to c} \frac{|1 - \cos(x)|}{|x|^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, 0 é uma raiz de multiplicidade 2. Porque não é de multiplicidade 3?

$$\lim_{x \to c} \frac{|1 - \cos(x)|}{|x|^3} = \infty$$

Geometricamente pode-se observar que a curva definida por uma função *f(x)*, com raízes múltiplas em um ponto *a*, terá uma tangente horizontal no eixo das abscissas. Genericamente, se para uma função contínua *f(x)* tem-se $f(a) = f^{'}(a) = f^{''}(a) = ...f^{m-1}(a) = 0$, então a é uma raiz de *f(x)* com multiplicidade *m*.

Para exemplificar, seja o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, que possui raiz dupla em x=1. Observe que possui tangente horizontal ao eixo das abscissas.



Observe no gráfico que para x igual ao valor da raiz tem-se $f(x)=0 \quad e \quad f^{'}(x)=0$. Na utilização do método de Newton-Raphson aparecerá uma divisão por zero. O zero no denominador acarretará o surgimento de um overflow. Entretanto, os matemáticos Ralston e Rabinowitz provaram que a função $f(x)$ alcança o zero anter da derivada $f^{'}(x)$. Uma checagem na função $f(x)$ pode levar a parar o processo antes que $f^{'}(x)$ alcance o zero e desta forma foge-se do overflow.

A convergência do Método de Newton-Raphson normalmente é lenta, a convergência quadrática passa a ser linear. Uma modificação que pode ser introduzida para melhorar a convergência é mudar a expressão de recorrência do método pela expressão:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

onde *m* é o número de multiplicidade das raízes. Observe que este método é de pouca valia, pois raramente em aplicações práticas se conhece a multiplicidade da raiz.

Os matemáticos Ralston e Rabinowitz propuseram uma nova formulação:

$$U(x) = \frac{f(x)}{f^{'}(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{U(x_k)}{U^{'}(x_k)}$$

Sendo que:

$$U^{'}(x_k) = \frac{f^{'}(x_k)f^{'}(x_k) - f(x_k)f^{''}(x_k)}{\left[f^{'}(x_k)\right]^2}$$

Resultando em:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f^{'}(x_k)}{\left\{\left[f^{'}(x_k)\right]^2 - f(x_k)f^{''}(x_k)\right\}}$$

Exercício

Para a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ ache as raizes com $x_o = 0$ e $x_o = 4$ utilizando o método original e o método proposto por Ralston e Rabinowitz. A partir da análise dos processos iterativos, conclua sobre a aplicação dos dois métodos na determinação de raízes.

2.3.4 - Método da Secante

O método de Newton-Raphson também é conhecido como o método da tangente, como viu-se, em cada iteração determina-se a reta tangente ao ponto calculado na iteração. No Método da Secante se aproxima a tangente por uma secante determinada por dois pontos anteriormente calculados, ou seja:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

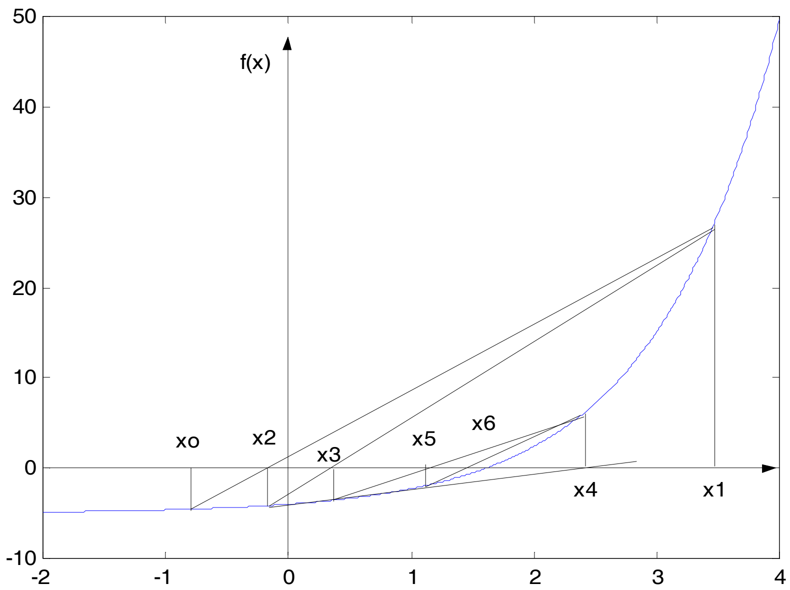
sendo, x_k *e* x_{k-1} duas aproximações para a raiz.

O processo iterativo resulta em:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Observe que são necessárias duas aproximações para inicializar o processo iterativo. Observe também que o processo pode divergir se $f(x_k) = f(x_{k-1})$. A ordem de convergência do Método da Secante está situada entre a convergência linear do Método de Iteração Linear e a convergência quadrática do Método de Newton-Raphson. Mais precisamente, p=1,618.

Interpretação Geométrica do Método



2.3.5 – Equações Polinômiais

Nesta seção será feito um estudo específico para as equações polinômiais.

Forma Geral

$p(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n$

Com $a_i \in \Re, \quad i = 0,1,...,n$ e $a_n \neq 0$ para garantir que o polinômio é do grau n..

Teorema

Se $p(x)$ é um polinômio de grau n, então para qualquer α, existe um único polinômio $q(x)$ com grau (n-1), tal que:

$$p(x) = (x-\alpha)q(x) + p(\alpha)$$

Observe pela expressão que a expressão resulta da divisão do polinômio por $(x-\alpha)$, resultando $q(x)$ como quociente e $p(\alpha)$ como resto. $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio.

Exemplo:

$p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad e \quad \alpha = 1$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + x + 1 & x - 1 \\ \hline
x^3 + x^2 & x^2 + 3x + 4 \\ \hline
3x^2 + x + 1 & \\
-3x^2 + 3x & \\ \hline
4x + 1 & \\
-4x + 4 & \\ \hline
5 &
\end{array}$$

$q(x) = x^2 + 3x + 4$

$p(1) = 5$

Observação: O resto da divisão de $q(x)$ por $(x-\alpha)$ é o valor de $p^{'}(\alpha)$.

Valor Numérico de um Polinômio

Exemplo: $p(x) = x^2 - 3x + 1$

Deseja-se o valor numérico do polinômio em $x = 3$.
$p(3) = 1\times 3\times 3 - 3\times 3 + 1 = 1$
Observe que para a determinação do valor do polinômio realizou-se 2 operações de soma e três operações de multiplicação. Pode-se estender este número de operações para um polinômio de grau n:

$$\begin{cases} n \quad \textit{adições} \\ \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \textit{multiplicações} \end{cases}$$

Em computação numérica sempre deve-se ter a preocupação de utilizar métodos eficientes e numericamente estáveis no desenvolvimento de algoritmos. É o caso do cálculo do valor numérico de polinômios, que possui um método mais eficiente e numéricamente mais estável que simplesmente realizar as operações na sequência conforme feito no exemplo.

Método de Horner

Seja o polinômio $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$. Este polinômio pode ser escrito na forma:

$p(x) = (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_o$

Definindo:

$b_4 = a_4$

$b_3 = a_3 + a_4x = a_3 + b_4x$

$b_2 = a_2 + b_3x$

$b_1 = a_1 + b_2x$

$b_o = a_o + b_1x$

O valor do polinômio em $x = \alpha$ é determinado por $p(\alpha) = b_o$, onde:

$b_4 = a_4$

$b_3 = a_3 + a_4\alpha = a_3 + b_4\alpha$

$b_2 = a_2 + b_3\alpha$

$b_1 = a_1 + b_2\alpha$

$b_o = a_o + b_1\alpha$

As operações necessárias para o cálculo do valor do polinômio, utilizando o Método de Horner são:

$$\begin{cases} n \quad \textit{adições} \\ n \quad \textit{multiplicações} \end{cases}$$

De forma similar pode-se calcular o valor da derivada do polinômio em $x = \alpha$.

$c_4 = b_4$
$c_3 = b_3 + c_4 x$
$c_2 = b_2 + c_3 x$
$c_1 = b_1 + c_2 x$

O valor da derivada do polinômio em $x = \alpha$ é dada por $p^{'}(\alpha) = c_1$, onde:
$c_4 = b_4$
$c_3 = b_3 + c_4 \alpha$
$c_2 = b_2 + c_3 \alpha$
$c_1 = b_1 + c_2 \alpha$