2. Resolução Numérica de Equações Não-Lineares

2.1 Introdução

Neste capítulo será visto algoritmos iterativos para encontrar raízes de funções não-lineares. Nos métodos iterativos, as soluções encontradas não são exatas, mas estarão dentro de um critério de tolerância o mais exato quanto possível.

2.2 Representação Matemática

Encontrar uma raiz de uma função $f(x)$, significa resolver a equação $f(x)=0$. Ou seja encontrar um $\alpha \in C$, tal que $f(\alpha)=0$.

Exemplos:

a) $ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b) $\ln(2x)=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{e^3}{2}$

c) $\sin(x)=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \quad para\ k\ \text{int}\,eiro$

Pode-se observar que para os exemplos dados a solução é explícita e analítica. Chega-se a uma solução exata. Entretanto nem sempre é possível chegar-se a uma solução analítica. Nestes casos podemos chegar a valores para as raízes, com de uma determinada exatidão, utilizando-se métodos iterativos.

Exemplos complexos:

a) $x^5-6x+9=0$

b) $e^{-x}=\sin(\dfrac{\pi x}{2})$

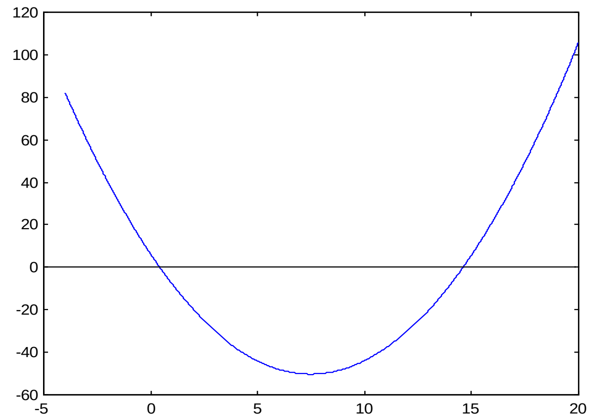
c) $tg(x)\times tgh(x)=0$

d) $(1+x+\dfrac{x^2}{2})e^{-x}=0{,}9$

Nestes casos a solução explícita é difícil ou praticamente impossível. É nestes casos complexos que se utilizam métodos iterativos de solução.

As raízes de uma equação podem ser reais ou complexas. No caso de raízes de polínômios é muito comum a ocorrência de raízes complexas. Inicialmente será visto raízes reais.

As raízes reais são representadas pelos pontos em que a curva da função $f(x)$ corta o eixo dos x's.



Para o exemplo da figura tem-se duas raízes reais. No caso de raízes complexas a curva não corta o eixo dos x's.

Métodos Iterativos

A idéia central dos métodos iterativos é encontrar uma aproximação inicial e e, seguida refiná-la através de um processo iterativo. O processo normalmente é realizado em duas fases:

1 – Isolamento: Encontra-se um intervalo [a,b] que contenha uma e somente uma raíz de f(x)=0.

2 – Refinamento: Escolhida uma aproximação inicial em [a,b], melhorá-la até uma exatidão ε pré-fixada.

Formas de Isolamento

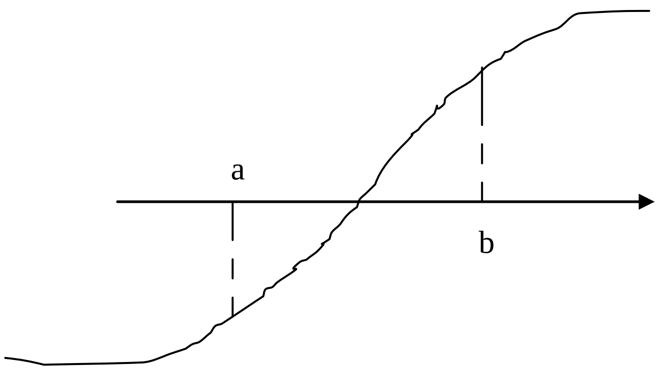
1 – Análise das propriedades físicas do problema.

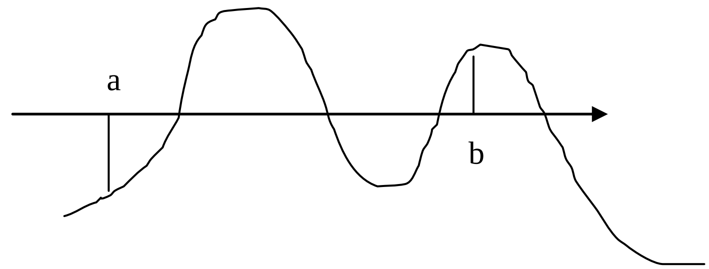
2 – Traçar o gráfico de f(x).

3 – Aplicar propriedades algébricas e/ou geométricas de f(x)

Teorema 1

Seja f(x) uam função contínua rm [a,b]. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $\exists$ pelo menos um $\alpha \in [a,b]$, tal que $f(\alpha) = 0$.





Observação: Se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em [a,b] a raiz α é única em [a,b].

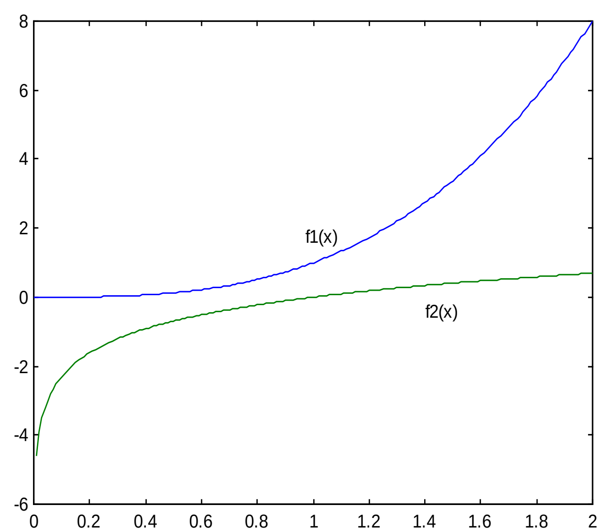
Teorema 2

Se substituir-se $f(x)=0$ por uma equação $f_1(x)-f_2(x)=0$, então toda abscissa da intersecção de $f_1(x)$ com $f_2(x)$ é raiz de $f(x)=0$ e vice-versa.

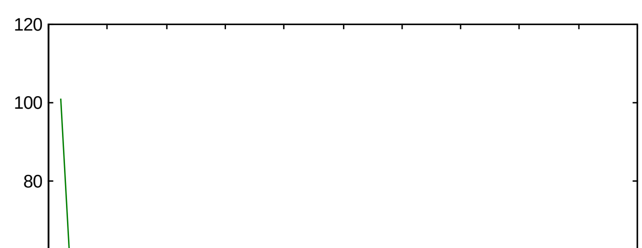
Exemplo: Seja localizar as raízes reais das seguintes equações:

a) $x^3-\ln(x)=0$

$$f_1(x)=x^3$$
$$f_2(x)=\ln(x)$$



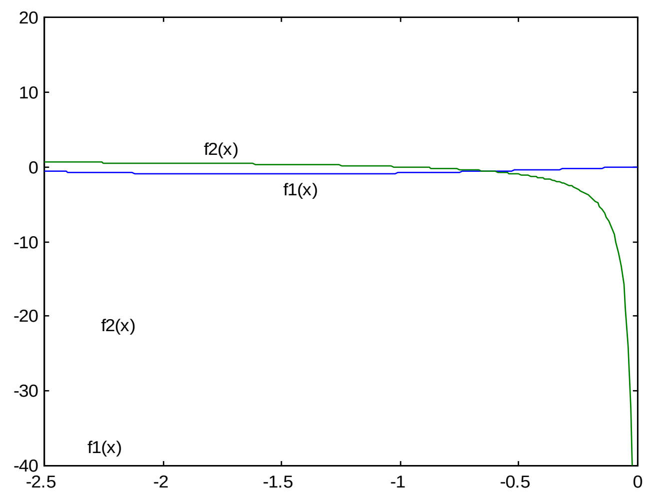
b)



$$f_1(x) = sin(x)$$
$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

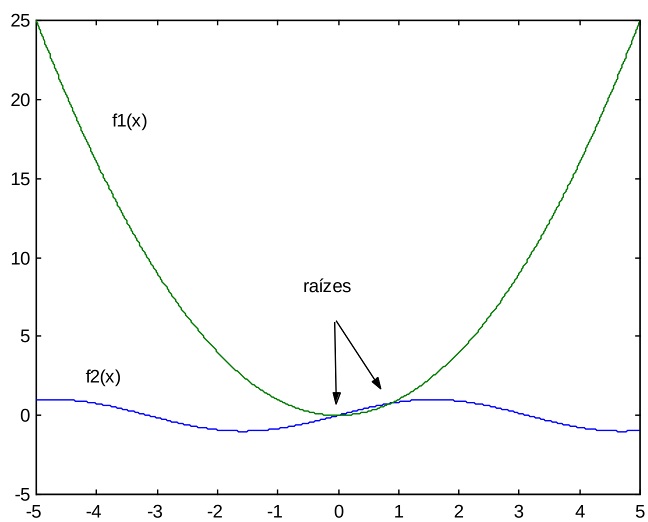
Gráfico - Parte Positiva

Gráfico - Parte Negativa



c)

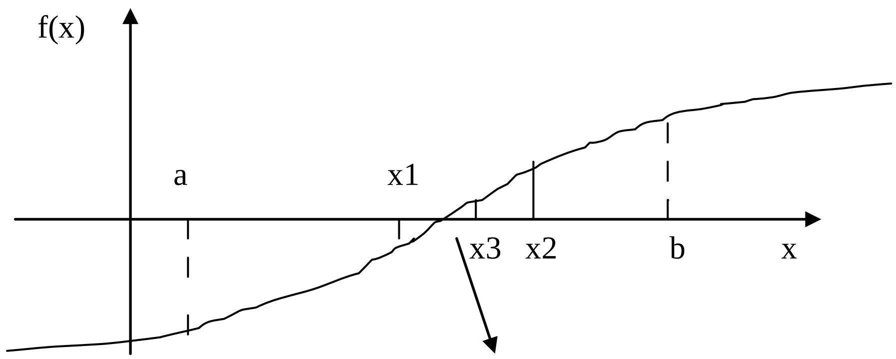
$$f_1(x) = sin(x)$$
$$f_2(x) = x^2$$



2.3 Métodos de Refina

2.3.1 Método da Bissecção

Seja *f(x)* uma função contínua no intervalo [a,b] e $f(a)\cdot f(b)<0$. O objetivo do método da bissecção é reduzir a amplitude do intervalo que contenha as raízes, até chegar a um valor que satisfaça a exatidão requerida. Ou seja: $b-a<\varepsilon$, sendo ε a exatidão requerida.



$x_k \quad tal\,que \ |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

Algoritmo

Passo 1 – Escolha estimativas inferior (a_o) e superior (b_o) , sendo que $f(a_o)\cdot f(b_o)<0$.

Passo 2 - Uma primeira estimativa da raiz é dada por:

$$x_1 = \frac{a_o + b_o}{2}$$

Passo 3 – Faça as seguintes avaliações para determinar em qual subintervalo a raiz α está:

- Se $f(a_o)\cdot f(x_1)<0 \quad \alpha\in[a_o,x_1]=[a_1,b_1]$ e vá ao passo 4.
- Se $f(a_o)\cdot f(x_1)>0 \quad \alpha\in[x_1,b_o]=[a_1,b_1]$ e vá ao passo 4.
- Se $f(a_o)\cdot f(x_1)=0 \quad \alpha = x_1$, fim.

Passo 4 – Calcule uma nova estimativa para a raiz:

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Passo 5 – Decida se a nova estimativa é exata o suficiente. Se positivo, fim. Em caso contrário repetir o processo até a convergência.

Análise da Convergência:

É intuitivo perceber que se f(x) for contínua no intervalo [a,b] e $f(a)\cdot f(b)<0$ o método da bissecção vai gerar uma sequência x_k que converge para a raiz α.
Na n-ésima iteralção, o comprimento do intervalo será:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Para $n\to\infty$

$$\lim \frac{b-a}{2^n} = 0$$

Assim: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.
Resta saber se α é raíz..

Como $f(a_n)f(b_n)<0$ e *f(x)* é contínua:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n) \le 0$$

Portanto: $0 \le [f(\alpha)]^2 \le 0 \Rightarrow f(\alpha)=0$ α é raíz.

Como viu-se , para a iteração n:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

A partir desta expressão pode-se estimar o número de iterações necessárias para chegar-se a convergência com tolerância ε.
Para $\left|\frac{b-a}{2^n}\right| \le \varepsilon$ tem-se que $n \ge \frac{\ln[(b-a)/\varepsilon]}{\ln 2}$.

Critérios de Parada

Para interromper um processo iterativo, pode-se adotar um dos seguintes critérios.

a) Estipular um erro ε tolerável (positivo e pequeno) e interromper o processo quando:
$|x_i - x_{i-1} \le| \varepsilon$ ou $|f(x_i)| \le \varepsilon$ onde i representa a i-ésima iteração.

b) Fixar um número máximo de iteração. Num processo iterativo é prudente se estipular um número máximo de iteração de forma que o processo seja abortado quando não consegue a convergência.

b) Combinar os critérios a) e b) e interromper o processo quando um deles for alcançado.

Exercícios:

1) Obter a estimativa de raiz da equação $x + e^x - 2 = 0$ a partir de 5 iterações do Método da Bissecção.
2) Determine a partir de quatro iterações do Método da Bissecção a raiz da equação $\cos x - xe^x = 0$, situada no intervalo [0,1].