3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

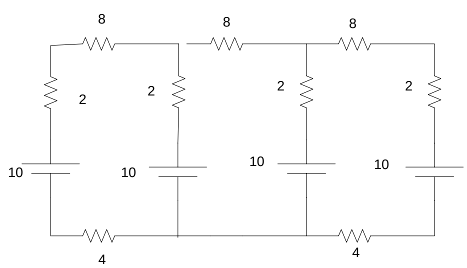
3.1 Introdução

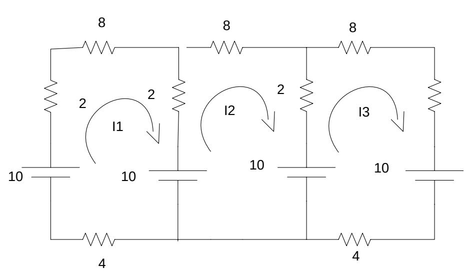
A solução de sistemas lineares é uma ferramenta matemática muito importante na engenharia. Normalmente os problemas não-lineares são solucionados por ferramentas lineares.

As fontes mais comuns de problemas de equações lineares algébricas aplicados à engenharia incluem:

a) Solução de modelos matemáticos de circuitos lineares;
b) aproximação de equações diferenciais ou integrais contínuas através de sistemas discretas e finitos;
c) linearização local de sistemas de equações não lineares;
d) ajuste de curvas em dados.

Exemplo de um Circuito:





3.2 Representação do Sistema Linear

Um sistema linear é um conjunto de n equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots\dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado através de uma representação matricial da forma:

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

onde:
A – matriz de coeficientes de ordem $n \times n$
$\underline{x}$ – vetor de incógnitas de ordem $n \times 1$
$\underline{b}$ – vetor independente de ordem $n \times 1$

Os tipos de solução do sistema dependem da matriz *A*:

A não-singular $\Rightarrow$ compatível $\Rightarrow \{\textit{solução única}$

$$A \text{ singular} \Rightarrow \begin{cases} \textit{compatível} \Rightarrow \inf \textit{initas soluções} \\ \textit{sistema incompatível} \Rightarrow \textit{não existe solução} \end{cases}$$

Sistema Compatível $\rightarrow$ Posto(*A*)=Posto(*Ab*)

$$\text{Ab}=\underline{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}}$$

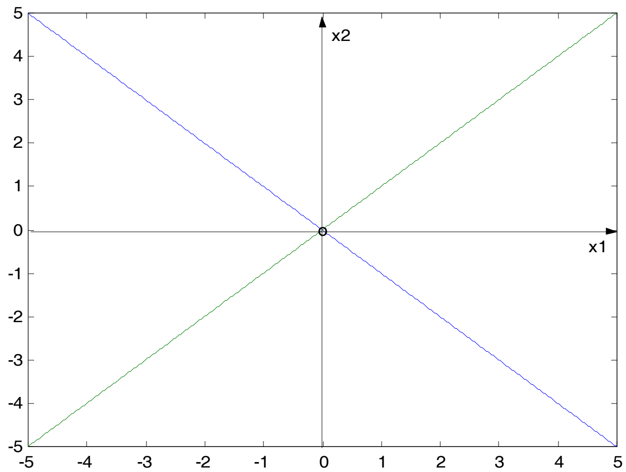
Se Posto(*A*)=Posto(*Ab*) = *n* $\Rightarrow$ solução única
Se Posto(*A*)=Posto(*Ab*) = *k*<n $\Rightarrow$ infinitas soluções

Sistema Incompatível $\rightarrow$ Posto(*A*)<Posto(*Ab*)

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

Det(A)=2 Posto(A)=Posto(Ab) = n = 2 $\Rightarrow$ solução única

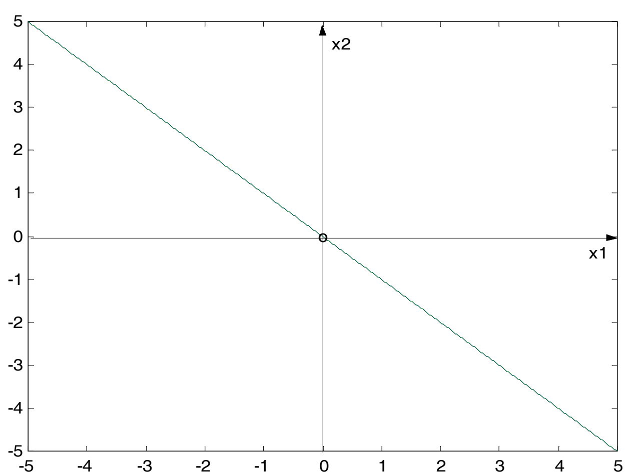


Este é um sistema homogêneo com solução trivial $\underline{x} = [0 \quad 0]^T$. A solução é dada pelo ponto de intersecção das retas no gráfico. Neste caso como $n=2$ a solução é um ponto no $\Re^2$.

Exemplo 2:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

Det(A)=0 Posto(A) = Posto(Ab) = 1 < 2 $\Rightarrow$ compatível com infinitas soluções

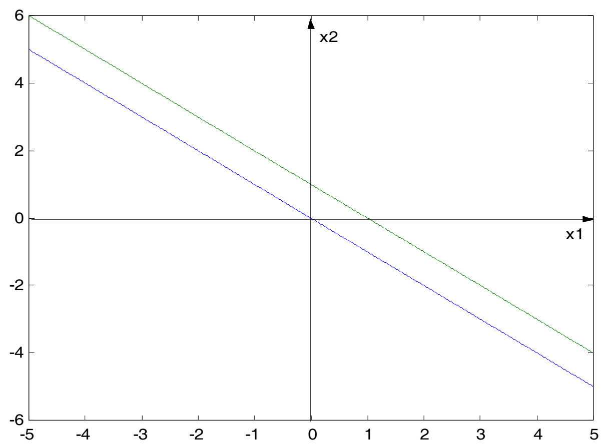


Observe que as retas são coincidentes e temos infinitos pontos de intersecção.

Exemplo 3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Det(A)=0 Posto(A)=1 Posto(Ab) = 2 $\Rightarrow$ sistema incompatível. Não existe solução. Pose-se observar no gráfico que neste caso não há intersecção entre as retas representadas no $\Re^2$.



Não há nenhum ponto de intersecção entre as retas.

3.3 Métodos de Solução

Métodos Diretos – Fornece solução "exata" após um número finito de operações. Solução assegurada para matriz de coeficientes não-singular.

$$Métodos \quad Diretos \quad \begin{cases} \text{Re}\, gra \quad de \quad Cramer \\ Inversão \quad da \quad Matriz \quad A \\ E\,\text{lim}\, inação \quad de \quad Gauss \\ Fatoração \quad LU \end{cases}$$

Métodos Iterativos – Processo de aproximação iterativa da solução. A convergência é assegurada sob certas condições.

$$\textit{Métodos} \quad \textit{Iterativos} \quad \begin{cases} \textit{Estacionários} & \begin{cases} Gauss - Jacobi \\ Gauss - Seidel \\ Sobrerelaxação \end{cases} \\ \textit{Não} - \textit{Estacionários} & \begin{cases} Gradiente \quad Conjugado \\ Gradiente \quad Biconjugado \\ GradienteBiconjugadoEstabilizado \\ etc.. \end{cases} \end{cases}$$

3.3.1 Regra Cramer

A solução de cada componente do vetor de incógnitas é dado pela relação de dois determinantes:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

onde:

Δ = determinante da matriz A

Δ_i = determinante da matriz A com a $i^{ésima}$ *coluna substituída pelo vetor independente* $\underline{b}$.

Exemplo da ordem de grandeza do tempo de solução para um sistema de ordem 20.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Operações necessárias:
a) Cálculo de 21 determinantes, cada um de ordem 20.

O determinante de uma matriz A é definido como uma soma de termos $a_{1-} a_{2-} a_{3-} \ldots\ldots\ a_{n-}$ onde o símbolo – representa subscritos de permutações de 1 a *n*. No exemplo a soma tem 20! termos cada qual requerendo 19 multiplicações. Assim, a soluções do sistema requer 21 x 20! x 19 multiplicações, além de um número 21 x 20! de somas que será desconsiderado.

Seja um computador com capacidade de 2000 Mflops.

2.000.000.000 operações por segundo.

Tempo de Solução:

$$\frac{21x20!\,x19}{2.000.000.000x3600x24x360} \quad = \quad 15604{,}55 \text{ anos}$$

Strang 1993 - “If world be crazy to solve equation this way”.

O método de Cramer também possui pouca estabilidade numérica. [Highan]. (erros de arredondamento excessivos). (forward estability)

3.3.2 Inversão da Matriz *A*

A solução do sistema linear pode ser dada por:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

Entretanto, na grande maioria de problemas práticos é desnecessário e mesmo desaconselháveis o cálculo da matriz inversa A^{-1}.

Veja o que acontece neste exemplo simples com uma equação:

$$7x = 21$$

A melhor maneira de obter a solução é por divisão,

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

O uso da matriz inversa levaria a (precisão 6 dígitos) :

b

$$x = \left(7^{-1}\right)\left(21\right)$$

$$x = \left(0{,}142857\right)\left(21\right) = 2{,}99997$$

A inversa requer mais aritmética (uma divisão e uma multiplicação em vez de uma só divisão), além de produzir uma resposta menos exata.

3.3.3 Eliminação de Gauss

Sistemas Lineares Equivalentes

Dois sistemas lineares $A\underline{x} = \underline{b}$ e $\tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$ são equivalentes se qualquer solução de um também é solução do outro.

Teorema

Seja $A\underline{x} = \underline{b}$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações desse sistema linear uma sequência de operações, escolhidas entre:

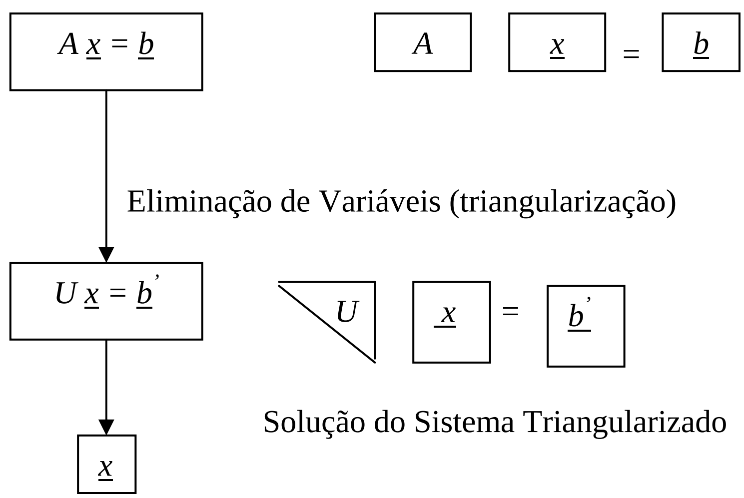
a) trocar a posição de duas equações entre si;
b) multiplicar uma equação por uma constante;
c) somar uma equação a outra multiplicada por uma constante.

Obtém-se um novo sistema $\tilde{A}\underline{x} = \underline{\tilde{b}}$ e os sistemas $A\underline{x} = \underline{b}$ e $\tilde{A}\underline{x} = \underline{\tilde{b}}$ são equivalentes.

O método de solução através da eliminação aplica as operações elementares para eliminar variáveis do sistema e transformá-lo num sistema triangular.

A eliminação de Gauss é composta de duas etapas básicas:

1. Eliminação direta de variáveis
2. Substituição inversa



Números de operações necessárias para obter soluções, considerando a matriz *A* cheia.

a) Solução por Inversão

$\underline{x} = A^{-1}\,\underline{b}$

1. Obtenção da matriz inversa utilizando um algoritmo eficiente de matriz cheia

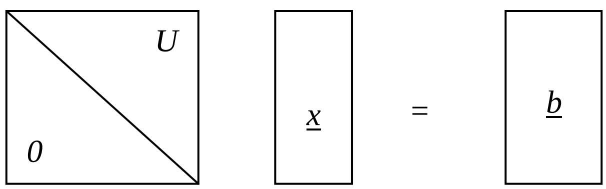
$$\boxed{n^3 \text{ operações (produto)}}$$

2. Obtenção de $\underline{x}$ pelo produto de A^{-1} com $\underline{b}$

$$\boxed{n^2 \text{ operação (produto)}}$$

b) Solução por eliminação de Grauss

1. Redução triângular
   U $\underline{x}$ = $\underline{b}$



$\sim \dfrac{n^3}{3}$ operações de produção

2. Substituição Inversa.

$\dfrac{\eta^2}{2}$ operações de produto

Exemplo Numérico

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Estágio 1

pivô $a_{11} = 3$

Multiplicadores

$M_{21} = \frac{1}{3}$

$M_{31} = \frac{4}{3}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)}$$

Estágio 2

Pivô $a_{22} = 1/3$

Multiplicador $M_{23} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituição Inversa

.

$$-8\ x_3 = 0 \qquad x_3 = 0$$

$$1/3\, x_2 + 2/3\, x_3 = 5/3 \qquad x_2 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \qquad x_1 = -3$$

3.3.3.1 Estratégia de Pivoteamento

(a) Evitar pivôs nulos
(b) Evitar pivôs próximos de zero (multiplicadores elevado, ampliação de erros de arredondamento)

Exemplo:

Usando aritmética de 3 dígitos

$$\begin{cases} 0{,}0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2x10^{-3} & 0.2x10^{1} \\ 0,2x10^{1} & 2.2x10^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x10^{1} \\ 0.6x10^{1} \end{bmatrix}$$

pivô 0.2 x 10^{-3}

multiplicadores $\dfrac{0.2x10^{1}}{0.2x10^{-3}} = 1x10^{4} = 0.1x10^{5}$

$$\begin{bmatrix} 0.2x10^{-3} & 0.2x10^{1} \\ 0 & -0.2x10^{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x10^{1} \\ -0.5x10^{5} \end{bmatrix}$$

$$a_{22} = 0.2x10^{1} - \left(0.1x10^{5}\right)\left(0.2x10^{1}\right) = -0.2x10^{5}$$
$$b_2 = 0.6x10^{1} - 0.5x10^{1}\, x0.1x10^{5} = -0.5x10^{5}$$

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$ Não satisfaz o sistema

Com pivoteamento

$$\begin{bmatrix} 0.2x10^{1} & 0.2x10^{1} \\ 0.2x10^{-3} & 0.2x10^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6x10^{1} \\ 0.5x10^{1} \end{bmatrix}$$

pivô $0.2x10^{1}$ mult. $\dfrac{0.2x10^{-3}}{0.2x10^{1}} = 0.1x10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 0.2x10^{1} & 0.2x10^{1} \\ 0 & 0.2x10^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6x10^{1} \\ 0.5x10^{1} \end{bmatrix}$$

$0.2x10^{1} - 0.2x10^{1}\, x0.1x10^{-3} = 0.2x10^{1}$ $x_2 = 2,5$

$0.5x10^{1} - 0.1x10^{-3}\, x0.6x10^{1} - 0.5x10^{1}$ $x_1 = 0,5$

Solução de sistema

Resumindo: Pivoteamento parcial consiste em adotar como pivô no passo (K) da eliminação de Gauss o maior elemento (em valor absoluto) na parte não reduzido da coluna. As linhas contendo esses elementos devem ser intercambiadas.

OBS: Seja $\underline{x}_*$ é a solução calculada de A$\underline{x}$=$\underline{b}$ e $\underline{x}$ a solução exata (teórica). Como os elementos de $\underline{x}_*$ são representados em uma aritmética de precisão finita existe uma diferença em relação $\underline{x}$. Normalmente utiliza-se as seguintes medidas para auferir esta diferença.

Erro: $\underline{e} = \left| \underline{x} - \underline{x}_* \right|$

Resíduo: $\underline{r} = \| \underline{b} - A\, x_* \|$ (dependente de escala, multiplicando-se A e b por uma constante α, o resíduo também vai ser multiplidado por α)

Resíduo relativo: $\dfrac{\| b - Ax_* \|}{\|A\| \, \|x_*\|}$

Da teoria de matrizes sabemos que, sendo A não singular e se uma medida acima é nula, a outra também o será, mas ambos não são necessariamente igualmente pequenas.