2.3.6 - Determinação de Raízes de Polinômios

Polinômio é um caso particular de equação não-linear, portanto o que foi visto para raízes de equações não-lineares pode ser estendido para polinômios. Será visto algumas características específicas de polinômios. Como viu-se, para a solução de raízes procura-se dividir o processo em duas fases: localização de raízes e determinação de raízes.

Localização de Raízes

Teorema Fundamental da Algebra

Se $p(x)$ for um polinômio de grau $n \geq 1$ ou seja $a_o, a_1, \ldots, a_n$, reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então $p(x)$ tem pelo menos um zero, ou seja $\exists$ um $\alpha \in C$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Regras de Sinal de Descartes

a) Raízes Reais Positivas: O número de zeros reais positivos *(pos)* de um $p(x)$, com coeficientes reais, não excede o número *(v)* de variações de sinal dos coeficientes e *(v-pos)* é inteiro, par e não negativo.

Exemplo: $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$$v = 2 \qquad \begin{cases} se \quad v - pos = 0 \rightarrow pos = 2 \\ se \quad v - pos = 2 \rightarrow pos = 0 \end{cases}$$

b) Raízes Reais Negativas: Toma-se $p(-x)$ e utiliza-se a regra para raízes positívas.

Exemplo:
$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$$
$$p(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x = 1$$

$$v = 3 \qquad \begin{cases} se \quad v - neg = 0 \rightarrow neg = 3 \\ se \quad v - neg = 2 \rightarrow neg = 1 \end{cases}$$

Teorema de Bolzano

Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais $x \in [a,b]$.

Se $p(a) \cdot p(b) < 0 \quad \rightarrow \quad \exists$ um número impar de raízes reais em $[a,b]$.

Se $p(a) \cdot p(b) > 0 \quad \rightarrow \quad \exists$ um número par ou não existe raízes reais em $[a, b]$.

Determinação de Raízes

Como polinômios são casos particulares de equações não-lineares, todos os métodos da Bissecção, MIL, N-R e Secante já estudados também podem ser utilizados na determinação de raízes.

Método de Birge-Vieta

O método de Birge-Vieta é uma variante do método de Newton-Raphson e utilizado associado ao Método de Horner para o cálculo de valores de polinômios se torna computacionalmente mais eficiente. Se $p(x)$ for um polinômio, o processo iterativo do Método de Newton-Raphson passa a ser:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{R}{\overline{R}}$$

Onde:

R é o resta da divisão $\dfrac{p(x)}{(x - x_k)}$

$\overline{R}$ é o resta da divisão $\dfrac{p'(x)}{(x - x_k)}$

Como viu-se os valores de R e $\overline{R}$ podem ser calculados de forma eficiente através do Método de Horner.

Exemplo

Obter utilizando o Método de Birge-Vieta uma raíz de $x^3 + 2x - 1$, com $x_o = 0$ e três iterações, utilizando o Método de Horner.

$p(x) = ((x + 0)x + 2)x - 1$

Primeira Iteração

$$p(x_o)\begin{cases} b_3 = a_3 = 1 \\ b_2 = a_2 + b_3 x_o = 0 + 1 \times 1 = 1 \\ b_1 = a_1 + b_2 x_o = 2 + 1 \times 1 = 3 \\ b_o = a_o + b_1 x_o = -1 + 3 \times 1 = 2 \end{cases} \qquad R = 2$$

$$p'(x_o)\begin{cases} c_3 = b_3 = 1 \\ c_2 = b_2 + c_3 x_o = 1 + 1\times 1 = 2 \\ c_1 = b_1 + c_2 x_o = 3 + 2\times 1 = 5 \end{cases} \quad \overline{R} = 5$$

$$x_1 = x_o - \frac{R}{\overline{R}} = 1 - \frac{2}{5} = 0{,}6$$

Segunda Iteração

$$p(x_1)\begin{cases} b_3 = a_3 = 1 \\ b_2 = a_2 + b_3 x_1 = 0 + 1\times 0{,}6 = 0{,}6 \\ b_1 = a_1 + b_2 x_1 = 2 + 0{,}6\times 0{,}6 = 2{,}36 \\ b_o = a_o + b_1 x_1 = -1 + 2{,}36\times 0{,}6 = 0{,}416 \end{cases} \qquad R = 0{,}416$$

$$p'(x_1)\begin{cases} c_3 = b_3 = 1 \\ c_2 = b_2 + c_3 x_1 = 0{,}6 + 1\times 0{,}6 = 1{,}2 \\ c_1 = b_1 + c_2 x_1 = 2{,}36 + 1{,}2\times 0{,}6 = 3{,}08 \end{cases} \qquad \overline{R} = 3{,}08$$

$$x_2 = x_1 - \frac{R}{\overline{R}} = 0{,}6 - \frac{0{,}416}{3{,}08} = 0{,}465$$

Terceira Iteração

$$x_3 = 0{,}454$$

Exemplo:
O preço à vista (PV) de uma mercadoria é R$ 300,00, que pode ser financiado com uma entrada (E) de R$ 100,00 e mais 04 (p) prestações mensais de R$ 80,00 (PM). Qual a taxa de juros (J).

$$\frac{PV - E}{PM} = \frac{1 - (1 + J)^{-p}}{J}$$

Exemplo – Determine a raiz do polinômio com $x_o = 0$ e utilizando o Método de Birge-Viete e o Método de Horner.

$$p(x) = 2{,}5x^5 - 3{,}5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 = 0$$

$$((((2{,}5x-3{,}5)x+0)x+0)x+0)x+1=0$$

$$b_5 = 2{,}5$$
$$b_4 = -3{,}5 + 2{,}5x$$
$$b_3 = 0 + b_4 x$$
$$b_2 = 0 + b_3 x$$
$$b_1 = 0 + b_2 x$$
$$b_o = 1 + b_1 x = R$$

$$c_5 = b_5$$
$$c_4 = b_4 + c_5 x$$
$$c_3 = b_3 + c_4 x$$
$$c_2 = b_2 + c_3 x$$
$$c_1 = b_1 + c_2 x = \overline{R}$$

2.3.7 - Determinação de Raízes Complexas

Teorema

Se os coeficientes de p(x) são reais, então as raízes complexas deste polinômio são complexas conjugadas aos pares, isto é, se $\alpha_1 = a_1 + jb_1$ é um zero de p(x) com multiplicidade m, então $\alpha_2 = a_1 - jb_1$ também e uma raiz com multiplicidade m.

A partir do teorema, pode-se perceber que uma maneira de encontrar-se raízes complexas é determinar o polinômio do segundo grau que é formado pelo produto das raízes complexas conjugadas.

Define-se então:

$$d(x) = [x-(a+jb)]\cdot[x-(a-jb)] = x^2 + px + q$$

sendo $d(x)$ um fator quadrático de $p(x)$ e p e q números reais.

Assim, o polinômio genérico $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_o$, pode ser escrito da forma:2

$$p(x) = \underbrace{(x^2 + px + q)}_{d(x)}\underbrace{(b_{n-2}x^{n-2} + ...+ b_1 x + b_o)}_{Q(x)} + R(x)$$

Se $p(x)$ não for divisível por $d(x)$, tem-se um resto $r_1x + r_2$.
Se $p(x)$ for divisível por $d(x)$, tem-se $r_1 = r_2 = 0$ e as duas raízes de $d(x)$ são raízes de $p(x)$.

Repetindo-se o processo em $Q(x)$, obtém-se mais duas raízes de $p(x)$. Assim sucessivamente até que $Q(x)$ seja um polinômio de grau ≤ 2.

Método de Lin

A idéia do Método de Lin é obter-se iterativamente os coeficientes p e q do polinômio do segundo grau $d(x)$ e, assim, obter as raízes complexas conjugadas utilizando a fórmula de Báskara.

Algoritmo

1. Tomar valores iniciais p_k e q_k.
2. Procedimento Iterativo
   a) Dividir $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$ por $d(x) = x^2 + p_k x + q_k$, através do método de Briot-Ruffini

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} - p_k b_n \\
b_{n-2} &= a_{n-2} - p_k b_{n-1} - q_k b_n \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 - p_k b_2 - q_k b_3 \\
b_o &= a_o - p_k b_1 - q_k b_2
\end{aligned}$$

   b) Efetuar:

$$q_{k+1} = \frac{a_o}{b_2}$$

$$p_{k+1} = \frac{a_1 - q_{k+1} b_3}{b_2}$$

c) Calcular o desvio $|p_{k+1} - p_k| + |q_{k+1} - q_k|$. Se desvio< ε, então $x^2 + p_{k+1}x + q_{k+1}$ é o fator quadrático procurado e passe ao passo 3. Em caso contrário volte ao passo 2.

3. Aplique a fórmula de Báskara e obtenha duas raízes.
4. Dividir $p(x)$ por $x^2 + p_{k+1}x + q_{k+1}$ e volte ao passo 1 com $n = n - 2$.
5. Repetir o procedimento até que $n < 2$.

O método de **Newton-Raphson** pode também ser utilizado no cálculo de raízes complexas. Basta mudar o algoritmo para aritmética complexa e iniciar com uma solução inicial complexa.

Exemplo:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Para um valor inicial $x_o = 0 + j$, tem-se:

$$x_1 = 0,75 + 0,75j$$

$$x_2 = 1,075 + 0,975j$$

$$x_3 = 0,9983 + 0,9973j$$

$$x_4 = 1,0 + 1,0j$$