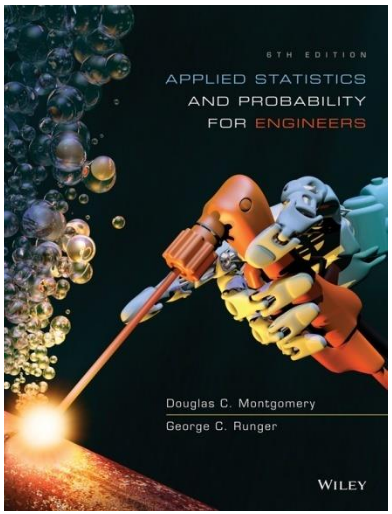
WILEY



Applied Statistics and Probability for Engineers

Sixth Edition

Douglas C. Montgomery George C. Runger

Chapter 2
Probability

2 Probability

Tópicos do capítulo

Objetivos da aprendizagem Cap. 2

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos
5. Interpretar e calcular probabilidade condicional
6. Determinar independencia e usar independencia para calcular probabilidades
7. Entender o teorema de Bayes' e quando usa-lo
8. Entender variáveis aleatórias

Experimento aleatório

- Um experimento é um procedimento que é
  - realizado sob condições controladas, e
  - executado para descobrir um resultado.
- Um experimento em que se obtêm diferentes resultados mesmo quando repetido toda a vez de uma mesma forma, é um experimento aleatório.

Espaço amostral

- O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, S ou Ω.
- *S ou* Ω é discreto se consiste de um conjunto finito ou infinito contável de resultados.
- *S ou* Ω é contínuo se contem um intervalo de números reais.

Exemplo 2-1: Definindo S

- Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash.

  $S = R^+ = \{x \mid x > 0\}$, números reais positivos.

- Suponha que é conhecido que todos os tempos de reciclo estão entre 1.5 e 5 segundos. Então

  $S = \{x \mid 1.5 < x < 5\}$ é contínuo.

- É conhecido que tempo de reciclo tem somente três valores (low, medium ou high). Então

  $S = \{low, medium, high\}$ é discreto.

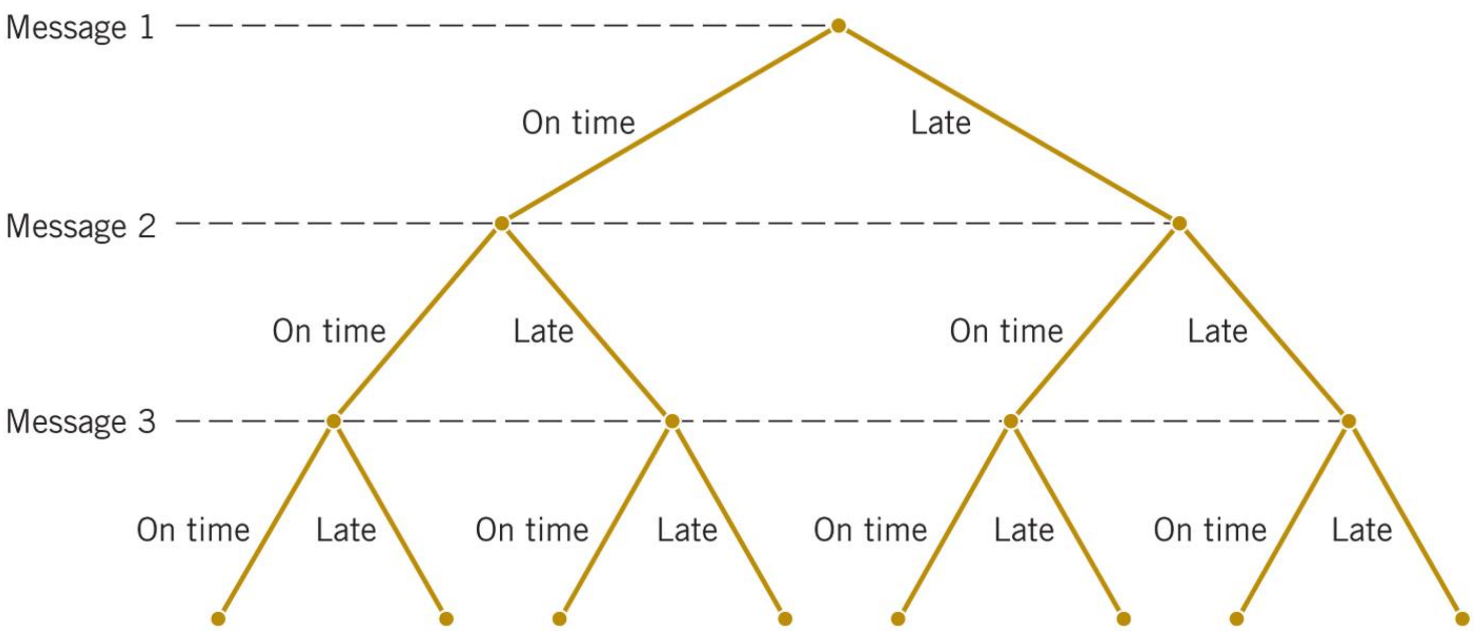
- A camera se enquadra nas especificações de tempo de reciclo mínimo?

  $S = \{sim, não\}$ é discreto.

Espaço amostral definido com diagrama de árvore

Exemplo 2-2: Mensagens são classificadas como on-time(o) ou late(l). Classifique as próximas 3 mensagens.

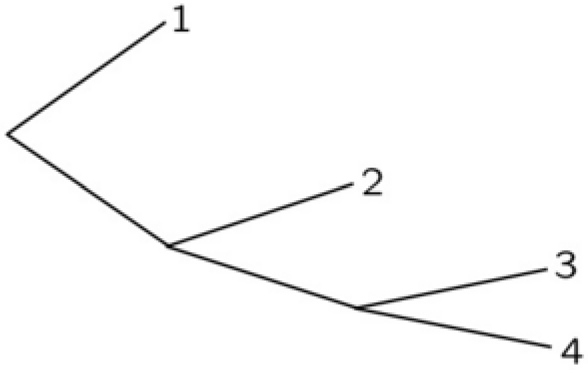
$$S = \{ooo, ool, olo, oll, loo, lol, llo, lll\}$$



WILEY

Espaço amostral exercício

Exercício: Paulo verifica a previsão do tempo. Se a previsão é boa, Paulo vai sair para uma caminhada. Se a previsão for ruim, então Paulo vão quer ficar em casa ou ir para fora. Se ele sai, ele pode lembrar ou esquecer o seu guarda-chuva. No diagrama de árvore abaixo, identifique a folha que corresponde ao caso em que a previsão é ruim e Paulo fica em casa.



Eventos são conjuntos de resultados

- Um evento (*E*) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.
- Combinação de eventos
  - A União de dois eventos consiste em todos os resultados que estão contidos em um evento <u>ou</u> no outro, denotado como $E_1 \cup E_2$.
  - A Interseção de dois eventos consiste de todas os resultados que estão contidos em um evento <u>e</u> no outro, denotado como $E_1 \cap E_2$.
  - O Complemento de um evento é o conjunto de resultados do espaço amostral que <u>não</u> está contido no evento, denoted as E'.

Exemplo 2-3 Eventos Discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante. Abreviamos sim e não como y e n. O espaço amostral é S = {yy, yn, ny, nn}.

Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma camera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$

Suponha, E_2 denote um evento nenhuma camera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$

Suponha, E_3 denote um evento evento que ao menos uma camera não está nas especificações, .

então $E_3 = \{yn, ny, nn\}$,

- Assim, $E_1 \cup E_3 = S$
- $E_1 \cap E_3 = \{yn, ny\}$
- $E_1' = \{nn\}$

Exemplo 2-4 Eventos Contínuos

As medidas de espessura de uma peça são modeladas com o espaço amostral: $S = R^+$.

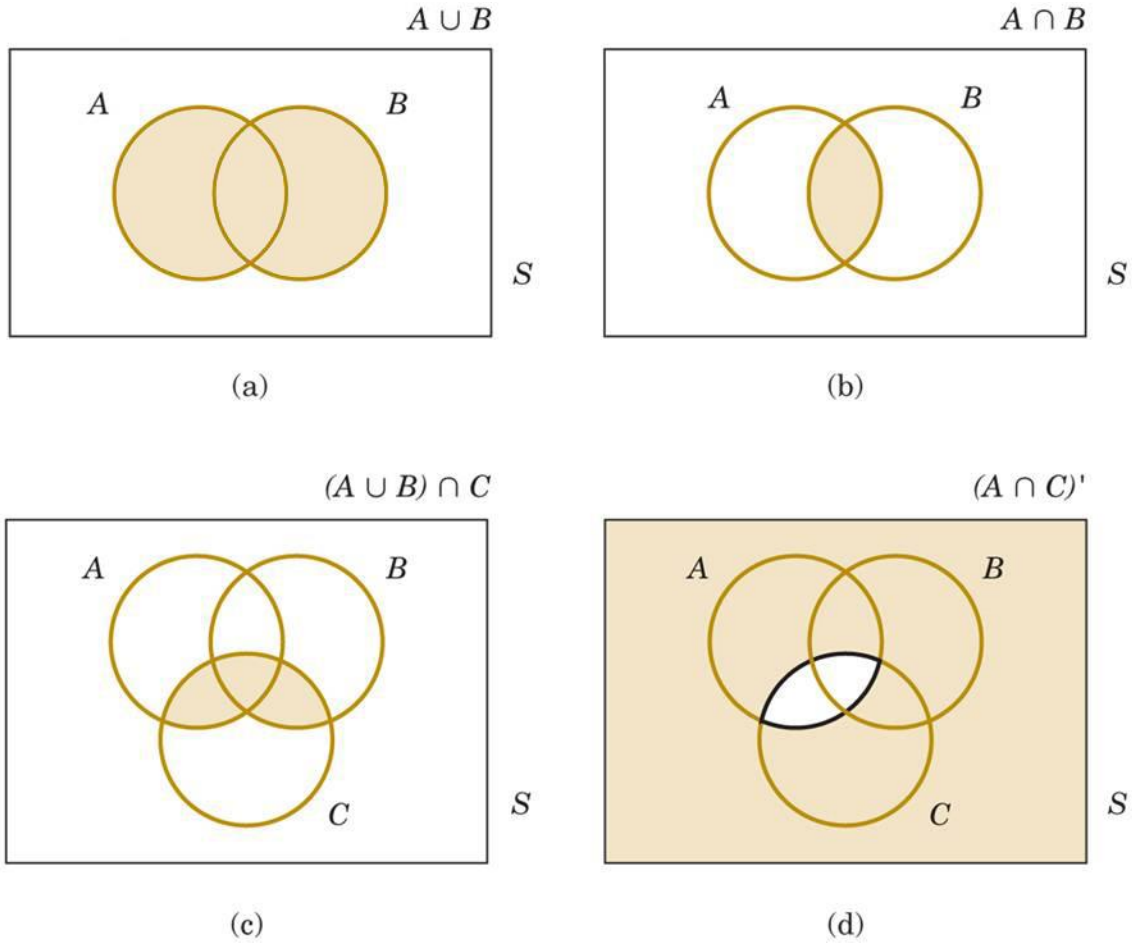
Seja $E_1 = \{x \mid 10 \leq x < 12\}$,

Seja $E_2 = \{x \mid 11 < x < 15\}$

- Então $E_1 \cup E_2 = \{x \mid 10 \leq x < 15\}$
- Então $E_1 \cap E_2 = \{x \mid 11 < x < 12\}$
- Então $E_1' = \{x \mid 0 < x < 10 \text{ ou } x \geq 12\}$
- Então $E_1' \cap E_2 = \{x \mid 12 \leq x < 15\}$

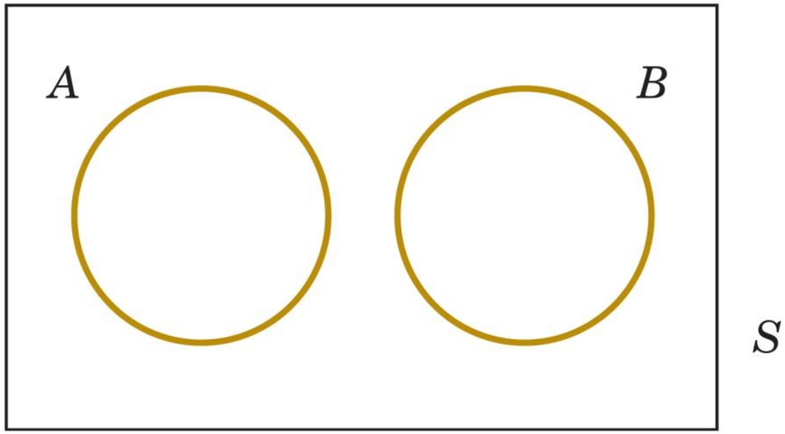
Diagrama de Venn

Eventos *A* & *B* contém seus respectivos resultados. As regiões preenchidas indicam as relações dos eventos de cada diagrama.



Eventos mutuamente exclusivos

- Os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos pois não compartilham resultados.
- A ocorrência de um evento exclui a ocorrência do outro.
- Simbolicamente, $A \cap B = \emptyset$



WILEY

Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
  - $A \cap B = B \cap A$ and $A \cup B = B \cup A$

- Lei distributiva (com em álgebra):
  - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- Lei associativa (com em álgebra):
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leis

- Lei de DeMorgan's:
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$ O complemento da união é a interseção dos complementos.
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$ O complemento da interseção é a união dos complementos.

- Lei do complemento:

$$(A')' = A.$$

Técnicas de contagem

- Existem três regras especiais, ou técnicas de contagem, usado para determinar o número de resultados em eventos.
- São:
    1. Regra da Multiplicação
    2. Regra da Permutação
    3. Regra da Combinação
- Cada um tem o seu propósito especial que deve ser aplicado corretamente - a ferramenta certa para o trabalho certo.

Contagem – Regra da Multiplicação

- Regra da Multiplicação:
  - Seja uma operação que consiste de K etapas e existem
    - n_1 formas de completar o passo 1,
    - n_2 formas de completar o passo 2, … e
    - n_k formas de completar o passo k.
  - Então, o número total de formas para efetuar os K passos K é :
    - $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Exemplo 2-5 - Web Site Design

- Na concepção de um site, podemos optar por usar entre :
  - 4 cores,
  - 3 fonts, e
  - 3 posições para uma imagem.

  Quantos projetos são possíveis?
- Resposta via regra da multiplicação : $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Contagem – Regra da Permutação

- Uma permutação é uma sequência única de itens distintos.
- Se $S = \{a, b, c\}$, então há 6 permutações
  - Como: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* (ordem importa)
- Numero de permutações para um conjunto de n itens é $n!$
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5{,}040$ = FACT(7) no Excel
- Por definição: $0! = 1$

Contagem–Arranjo de subconjuntos e um exemplo

- Para uma sequência de *r itens* de um conjunto de *n itens*:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Exemplo 2-6**: Printed Circuit Board
- Uma placa de circuito impresso tem oito locais diferentes, em que um componente pode ser alocado. Se quatro componentes diferentes estão para serem colocados na placa, quantos projetos são possíveis?
- Resposta: A ordem é importante, utilizar permutação n = 8, r = 4.

$$P_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

Contagem - Permutação item semelhante

- Usado para contar as sequências quando alguns itens são idênticos.
- O número de permutações de:

  $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ itens dos quais

  $n_1, n_2, \ldots, n_r$ são idênticos.

  é calculado como:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ \ldots\ n_r!}$$

WILEY

Exemplo 2-7: Horário Hospital

- Em um hospital, uma sala de operação precisa agendar três cirurgias no joelho e duas cirurgias de quadril em um dia. A cirurgia do joelho é denotado como ***k*** e do quadril como ***h***. Quantas sequências existem?

  Uma vez que existem 2 cirurgias de quadril idênticas e 3 cirurgias no joelho idênticas, em seguida,

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 10$$

  – Qual é o conjunto de sequências?

  {*kkkhh*, *kkhkh*, *kkhhk*, *khkkh*, *khkhk*, *khhkk*, *hkkkh*, *hkkhk*, *hkhkk*, *hhkkk*}

Contagem – Regra Combinação

- Uma combinação é uma seleção de ***r*** itens de um conjunto de ***n*** elementos onde a ordem não importa.
- Se $S = \{a, b, c\}$, $n = 3$, então
  - Se $r = 3$, então 1 combinação: *abc*
  - Se $r = 2$, então existem 3 combinações, *ab*, *ac*, e *bc*
- # de permutações ≥ # de combinações
- Uma vez que a ordem não importa em combinações, estamos dividindo o # de permutações por ***r!***, onde ***r!*** é o # de arranjos de r elementos

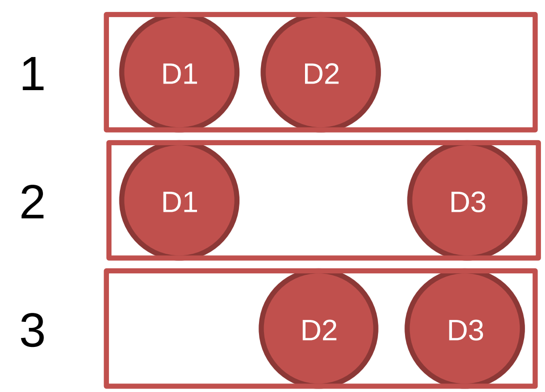
$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Exemplo 2-8: Amostragem sem reposição -1

- Em uma caixa com 50 peças contém 3 defeituosas e 47 sem defeito. Uma amostra de 6 peças é selecionado dentre o 50, sem reposição. Quantas amostras de tamanho 6 pode conter 2 peças defeituosas?
- Em primeiro lugar, quantas maneiras existem para selecionar 2 peças das 3 peças defeituosas?

"De acordo com o explicitado na questão, podemos interpretar, como, a ordem não importa! Assim a combinação é levada em consideração"

$$C_2^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$



- Excel:

3	=COMBIN(3,2)

Exemplo 2-8: Amostragem sem reposição -2

- Agora, quantas maneiras podemos selecionar 4 peças das 47 peças sem defeito?

“Mais uma vez, se considerarmos que a ordem não importa...”

$$C_4^{47} = \frac{47!}{4! \cdot 43!} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 43!} = 178365$$

- In Excel:

178,365	= COMBIN(47,4)

WILEY

Exemplo 2-8: Amostragem sem reposição -3

- Agora, de quantas formas podemos obter:
  - 2 de 3 defeituosas, e
  - 4 de 47 não-defeituosas?

$$C_2^3 C_4^{47} = 3 \cdot 178{,}365 = 535095$$

  - In Excel:

535,095	=COMBIN(3,2)*COMBIN(47,4)

WILEY

Resumo

Contagem (sequência) ou permutação com repetição = de quantas formas é possível colocar **r** elementos em sequência, de um conjunto com **n** elementos, podendo repetir. - $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{r}}$

Permutação simples = de quantas formas é possível colocar **n** elementos em posições, de maneira que se diferenciem pela ordem em que os elementos aparecem - $\boldsymbol{n}!$

Arranjo = de quantas formas é possível ordenar **r** elementos dentre um grupo de **n** elementos (a ordem dos objetos é importante). $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$

Combinação = de quantas formas distintas é possível combinar **r** elementos de um grupo de **n** elementos (a ordem não é importante). $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$

Probabilidade

- Probabilidade é a verossimilhança ou chance de que um determinado resultado ou evento de um experimento aleatório ocorrer.
- Neste capítulo, foi considerado somente espaços amostrais discretos (finito ou contável infinito).
- Probabilidade é um número no intervalo [0,1]
- Probabilidade:
  - 1 certeza de ocorrência
  - 0 impossibilidade de ocorrência

WILEY

Probabilidade de um evento

Para um espaço amostral discreto, a probabilidade de um evento E, designado por P(E), é igual à soma das probabilidades dos resultados em E.

O espaço amostral discreto pode ser:

- Um conjunto finito de resultados
- Um conjunto infinito contável de resultados

Tipos de probabilidade

- Probabilidade clássica ou a priori (Fermat e Pascal, XVII)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

N_A é o número de ocorrências do evento A em um total de N resultados possíveis do experimento E.

Tipos de probabilidade

- Probabilidade clássica ou a priori (Fermat e Pascal, XVII)

  Restrições:

  i) os casos possíveis devem ter a mesma probabilidade (**Igualmente-Prováveis**)

  ii) ii) número finito de casos possíveis (espaço amostral finito).

Tipos de probabilidade

- Probabilidade frequentista ou a posteriori (Venn e Von Mises, 1883-1953)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

n_A é o número de ocorrências do evento A em n tentativas do experimento E.

Tipos de probabilidade

- Probabilidade frequentista ou a posteriori (Venn e Von Mises, 1883-1953)

Conveniência – dados viciados

Aristóteles: *o que a experiência diz que acontece ou não...*

Nem todos os eventos são reprodutíveis

Tipos de probabilidade

- Probabilidade axiomática (A. N. Kolmogorov, ~1933)

  Probabilidades são números associados a eventos de acordo com certas regras, expressas em axiomas (base da teoria da probabilidade).

Tipos de probabilidade

- Probabilidade subjetiva é um "grau de crença."

  Alternativa à visão clássica

  Trabalhos de Finetti e de Savage

  Noções subjetivas podem ser relacionadas com ideias físicas de um experimento..

  Formam a base da teoria Bayesiana moderna.

  Exemplo: "Existe 50% chance de que eu estude essa noite."

Probabilidade com base em resultados Igualmente-Prováveis

- Sempre que um espaço amostral consistir de N resultados possíveis que têm a mesma probabilidade, a probabilidade de cada resultado será 1/N.

Exemplo: Em um lote de 100 díodos, onde 1 é um diodo de laser. Um diodo é selecionado aleatoriamente do lote.

- Aleatório significa que cada diodo tem uma chance igual de ser selecionado.
- A probabilidade de escolher o diodo laser é 1/100 ou 0.01, porque cada resultado do espaço amostral tem a mesma probabilidade.

Exemplo 2-9: probabilidades de eventos

Um experimento aleatório tem um espaço amostral {a, b, c, d}.

Estes resultados **não são igualmente-prováveis**; pois suas probabilidades são: 0.1, 0.3, 0.5, 0.1

- Seja o Evento $\boldsymbol{A} = \{a,b\}$, $\boldsymbol{B} = \{b,c,d\}$, e $\boldsymbol{C} = \{d\}$
  - $P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4$
  - $P(B) = 0.3 + 0.5 + 0.1 = 0.9$
  - $P(C) = 0.1$
  - $P(A') = 0.6$ e $P(B') = 0.1$ e $P(C') = 0.9$
  - $A \cap B = \{b\}$, então $P(A \cap B) = 0.3$
  - $A \cup B = \{\mathrm{a},b,c,d\}$, então $P(A \cup B) = 1.0$
  - $A \cap C = \{\text{nulo}\}$, então $P(A \cap C) = 0$

WILEY

Axiomas da Probabilidade

- **Probabilidade** é um número que é atribuído a cada membro de uma coleção de eventos de um experimento aleatório que satisfaz as seguintes propriedades:

  Se **S** (ou **Ω**) é o espaço amostral e **E** é qualquer evento no experimento aleatório,

  1. $P(S) = 1$
  2. $0 \le P(E) \le 1$
  3. **Para quaisquer dois eventos** E_1 **e** E_2 **com** $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

  $$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

- O axioma implica que:
  - $P(\emptyset) = 0$ e $P(E') = 1 - P(E)$
  - Se E_1 esta contido em E_2, então $P(E_1) \le P(E_2)$.

Regra da adição

- Eventos conjuntos são gerados através da aplicação de operações básicas de conjunto para eventos individuais, especificamente:
  - Uniões de eventos, $A \cup B$
  - Interseções de eventos, $A \cap B$
  - Eventos complementos, A'
- Probabilidades de <u>eventos conjuntos</u> podem muitas vezes ser determinada a partir das probabilidades dos eventos individuais que os compõem.

WILEY

Exemplo 2-10: Semiconductor Wafers

Um wafer é selecionado aleatoriamente a partir de um lote que é classificado pela contaminação e localização.

- Seja H o evento em que o wafer apresenta alta concentração de contaminantes. Então $P(H)$ = 358/940 =0.38.
- Seja C o evento em que o wafer esteja localizado no centro de uma ferramenta de recobrimeto. Então $P(C)$ = 626/940 = 0.66.
- $P(H \cap C)$ = 112/940 = 0.12

Contamination	Location of Tool		Total
	Center	Edge	
Low	514	68	582
High	112	246	358
Total	626	314	940

- $P(H \cup C)$ =

Exemplo 2-10: Semiconductor Wafers

Um wafer é selecionado aleatoriamente a partir de um lote que é classificado pela contaminação e localização.

– Seja H o evento em que o wafer apresenta alta concentração de contaminantes. Então $P(H) = 358/940 = 0.38$.

– Seja C o evento em que o wafer esteja localizado no centro de uma ferramenta de recobrimeto. Então $P(C) = 626/940 = 0.66$.

– $P(H \cap C) = 112/940 = 0.12$

Contamination	Location of Tool		Total
	Center	Edge	
Low	514	68	582
High	112	246	358
Total	626	314	940

– $P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C)$

$$= (358 + 626 - 112)/940 = 0.927$$

Esta é a regra da adição.

WILEY

Probabilidade de uma união

- Para quaisquer dois eventos A e B, a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos, então

$$P(A \cap B) = \varphi,$$

and therefore:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Regra da adição: 3 ou mais eventos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Observe a alteração dos sinais.

If a collection of events E_i are pairwise mutually exclusive;

that is $E_i \cap E_j = \phi$, for all i, j

$$\text{Then}: P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)$$

WILEY

Probabilidade condicional

- *P (B | A) é a probabilidade do evento B ocorrer, sendo que o evento A já ocorreu.*.

- Um canal de comunicações tem uma taxa de erro de 1 por 1.000 bits transmitidos. Erros são raros, mas tendem a ocorrer em sequência.
- Se um bit está em erro, a probabilidade de que o bit seguinte também estar em erro é maior que 1/1000.

Probabilidade condicional

- A probabilidade condicional de um evento B sendo que um evento A ocorreu, denotado como P (B | A), é a seguinte:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

para $P(A) > 0$.

- Definição entendida como todos os *n* resultados como igualmente prováveis:
  - $P(A)$ = (número de resultados em A) / n
  - $P(A \cap B)$ = (número de resultados em $A \cap B$) / n
  - $P(B \mid A)$ = número de resultados em $A \cap B$ / número de resultados em A

Exemplo 2-22 – pg.28

Existem 4 probabilidades condicionais em falhas na tabela abaixo.

Parts Classified			
Defective	Surface Flaws		Total
	Yes (F)	No (F')	
Yes (D)	10	18	28
No (D')	30	342	372
Total	40	360	400

$P(F) =$

$P(D) =$

$P(D|F) =$

$P(D'|F) =$

$P(D|F') =$

$P(D'|F') =$

Exemplo 2-22 – pg.28

Existem 4 probabilidades condicionais em falhas na tabela abaixo.

Parts Classified			
Defective	Surface Flaws		Total
	Yes (F)	No (F')	
Yes (D)	10	18	28
No (D')	30	342	372
Total	40	360	400

$$P(F) = 40/400 \text{ and } P(D) = 28/400$$

$$P(D \mid F) = P(D \cap F)/P(F) = \tfrac{10}{400} \Big/ \tfrac{40}{400} = \tfrac{10}{40}$$

$$P(D' \mid F) = P(D' \cap F)/P(F) = \tfrac{30}{400} \Big/ \tfrac{40}{400} = \tfrac{30}{40}$$

$$P(D \mid F') = P(D \cap F')/P(F') = \tfrac{18}{400} \Big/ \tfrac{360}{400} = \tfrac{18}{360}$$

$$P(D' \mid F') = P(D' \cap F')/P(F') = \tfrac{342}{400} \Big/ \tfrac{360}{400} = \tfrac{342}{360}$$

Exemplos

Verdadeiro ou Falso:

Se Ω é finito e os resultados igualmente prováveis, e se $B \neq \emptyset$, então a probabilidade condicional em B, dado que B ocorreu, é também igualmente provável?

Exemplos

Verdadeiro ou Falso:

Se Ω é finito e os resultados igualmente prováveis, e se $B \neq \emptyset$, então a probabilidade condicional em B, dado que B ocorreu, é também igualmente provável?

Verdadeiro, pois os resultados de B mantém a mesma frequência relativa (probabilidades)...

Amostras aleatórias

- Amostra aleatória implica que cada elemento é igualmente provável de ser escolhido. Se mais de um item for amostrado, os itens que permanecem são igualmente prováveis.
  - 2 itens obtidos de {a,b,c} **sem reposição**.
  - Espaço amostral **ordenado**:

  $S = \{ab,ac,bc,ba,ca,cb\}$

  - Espaço amostral **desordenado**:

  $S = \{ab,ac,bc\}$

Exemplo 2-12 : amostragem sem enumeração

- Uma batelada de 50 partes contém 10 feitas pela ferramenta 1 e 40 pela ferramenta 2. Se 2 partes são selecionadas aleatoriamente*,

  a) Qual é a probabilidade de que a 2^{nd} parte venha da ferramenta 2, sendo que a 1^{st} parte veio da ferramenta 1?

  - $P(E_1) = P(1^{st}$ parte ferramenta 1) =
  - $P(E_2 \mid E_1) = P(2^{nd}$ parte ferramenta 2 dado que 1^{st} parte ferramenta 1)

  b) Qual é a probabilidade de que a 1^{st} parte venha da ferramenta 1 e a 2^{nd} parte venha da ferramenta 2?

  - $P(E_1 \cap E_2) = P(1^{st}$ parte ferramenta 1 e 2^{nd} parte ferramenta 2)

  * Selecionados aleatoriamente implica que, em cada passo da amostra, os itens remanescentes no lote são igualmente prováveis de serem selecionados.

Exemplo 2-12 : amostragem sem enumeração

- Uma batelada de 50 partes contém 10 feitas pela ferramenta 1 e 40 pela ferramenta 2. Se 2 partes são selecionadas aleatoriamente*,

  a) Qual é a probabilidade de que a 2^{nd} parte venha da ferramenta 2, sendo que a 1^{st} parte veio da ferramenta 1?

  – $P(E_1) = P(1^{st}$ parte ferramenta 1$) = 10/50$
  – $P(E_2 \mid E_1) = P(2^{nd}$ parte ferramenta 2 dado que 1^{st} parte ferramenta 1$)$
  $= 40/49$

  b) Qual é a probabilidade de que a 1^{st} parte venha da ferramenta 1 e a 2^{nd} parte venha da ferramenta 2?

  – $P(E_1 \cap E_2) = P(1^{st}$ parte ferramenta 1 e 2^{nd} parte ferramenta 2$)$
  $= (10/50)\cdot(40/49) = 8/49$

* Selecionados aleatoriamente implica que, em cada passo da amostra, os itens remanescentes no lote são igualmente prováveis de serem selecionados.

Regra da multiplicação

- A probabilidade condicional pode ser reescrita para generalizar a regra da multiplicação.

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

- *Troca-se o A por B na última expressão.*

Exemplo 2-13: Estágios de usinagem

A probabilidade de que uma parte feita no primeiro estágio de uma operação de usinagem atende às especificações é de 0.90. A probabilidade de que ela atenda às especificações na 2ª etapa, uma vez que foram respeitadas as especificações na primeira fase é de 0,95.

Qual é a probabilidade de que ambas as fases atendem às especificações?

- Sejam A e B os eventos que representam que a parte atende as especificações na 1ª e 2ª etapa, respectivamente.

- $P(A \cap B) =$

Exemplo 2-13: Estágios de usinagem

A probabilidade de que uma parte feita no primeiro estágio de uma operação de usinagem atende às especificações é de 0.90. A probabilidade de que ele atende às especificações na 2ª etapa, uma vez que foram respeitadas as especificações na primeira fase é de 0,95.

Qual é a probabilidade de que ambas as fases atendem às especificações?

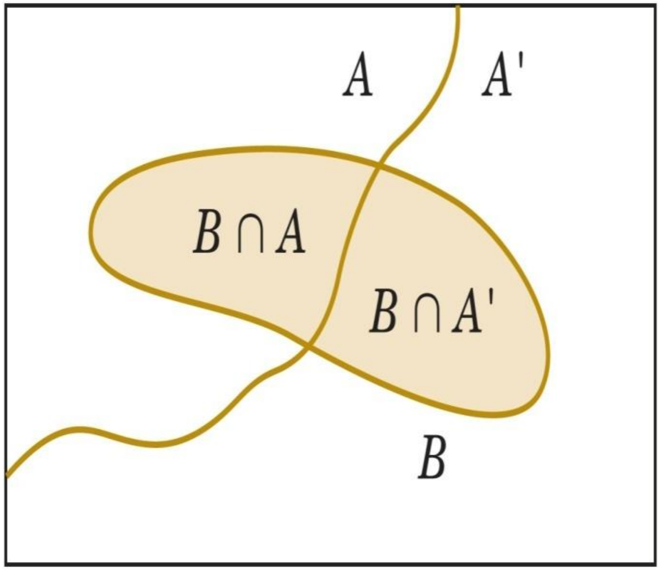
- Sejam A e B os eventos que representam que a parte atende as especificações na 1ª e 2ª etapa, respectivamente.

- $P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = 0.95 \cdot 0.90 = 0.855$

Subconjuntos mutuamente exclusivos

- A e A' são mutuamente exclusivos.
- $A \cap B$ e $A' \cap B$ são mutuamente exclusivos

- $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$



Regra da probabilidade total

Para quaisquer dois eventos *A* and *B.*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$
$$= P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A') \cdot P(A')$$

Probabilidade condicional e Bayes

- Suponha que eu olhe o registro dos moradores da minha cidade e escolha uma pessoa ao acaso.

- Qual é a probabilidade de que essa pessoa tem menos de 18 anos de idade?

  A resposta é cerca de 25%.

- Suponha agora que eu adiciono a informação de que esta pessoa é casada. Você vai dar a mesma resposta? Claro que não.

- A probabilidade de estar a menos de 18 anos de idade é agora muito menor.

- O que aconteceu aqui? Começamos com algumas probabilidades iniciais que refletem o que sabemos ou pensamos sobre o mundo. Mas, em seguida, adquirimos algum conhecimento adicional, algumas novas evidencias, por exemplo, sobre a situação familiar dessa pessoa.

Probabilidade condicional e Bayes

- Este novo conhecimento deve mudar nossas crenças, e as probabilidades originais devem ser substituídas por novas probabilidades que levem em conta as novas informações.

- Essas probabilidades revisadas são o que chamamos probabilidades condicionais.

- Em particular, a regra de Bayes é a base para o campo de inferência. É um guia sobre como processar os dados e fazer inferências sobre quantidades não observadas ou fenômenos.

- Como tal, é uma ferramenta que é utilizada o tempo todo, em toda a ciência e engenharia.

Exemplo 2-14: Semiconductor Contamination

Informações sobre falha do produto com base na contaminação do processo de fabricação de pastilhas é dado abaixo. Encontre a probabilidade de falha.

Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.1	High	0.2
0.005	Not High	0.8

Seja F o caso em que o produto falha.

Seja H o caso em que a pastilha é exposta a alta contaminação durante a fabricação. Então

- $P(F \mid H) = 0.1$
- $P(H) = 0.2$
- $P(F \cap H) = 0.02$
- $P(F \mid H') =$
- $P(H') =$
- $P(F \cap H') =$
- $P(F) =$

Exemplo 2-14: Semiconductor Contamination

Informações sobre falha do produto com base na contaminação do processo de fabricação de pastilhas é dado abaixo. Encontre a probabilidade de falha.

Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.1	High	0.2
0.005	Not High	0.8

Seja F o caso em que o produto falha.

Seja H o caso em que a pastilha é exposta a alta contaminação durante a fabricação. Então

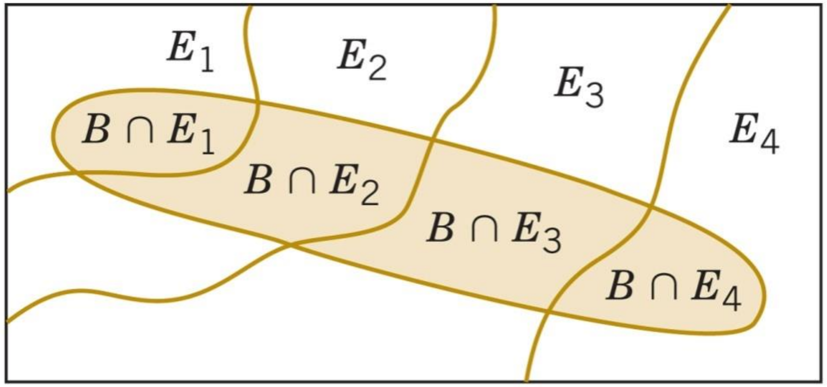
- $P(F \mid H) = 0.100$ e $P(H) = 0.2$, assim $P(F \cap H) = 0.02$
- $P(F \mid H') = 0.005$ e $P(H') = 0.8$, assim $P(F \cap H') = 0.004$
- $P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap H')$ (Usando a regra da probabiliidade total)

$$= 0.020 + 0.004 = 0.024$$

Probabilidade total (Multiplos Eventos)

- Uma coleção de conjuntos $E_1, E_2, \ldots E_k$ tais que $E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_k = S$ são ditos **exaustivos**.
- Assume-se que $E_1, E_2, \ldots E_k$ são k mutuamente exclusivos e exaustivos. Então

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \ldots + P(B \cap E_k) \\
&= P(B \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(B \mid E_2) \cdot P(E_2) + \ldots + P(B \mid E_k) \cdot P(E_k)
\end{aligned}
$$

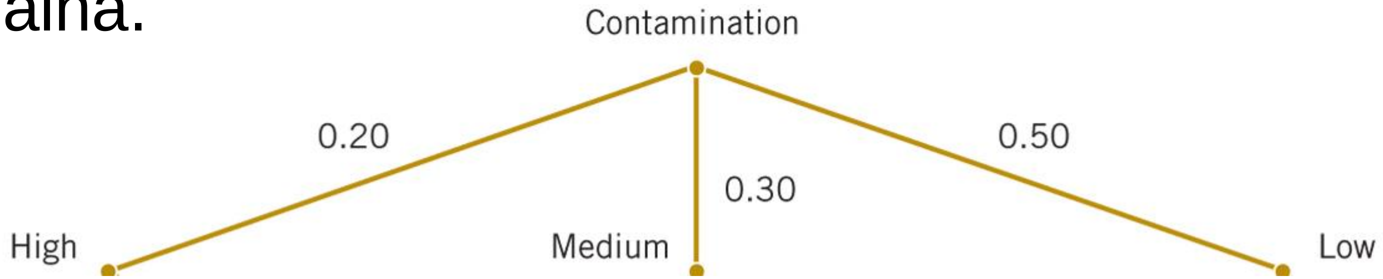


$$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$$

Exemplo 2-15: Semiconductor Failures-1

Continuando a discussão de contaminação durante a manufatura do chip, encontre a probabilidade de falha.

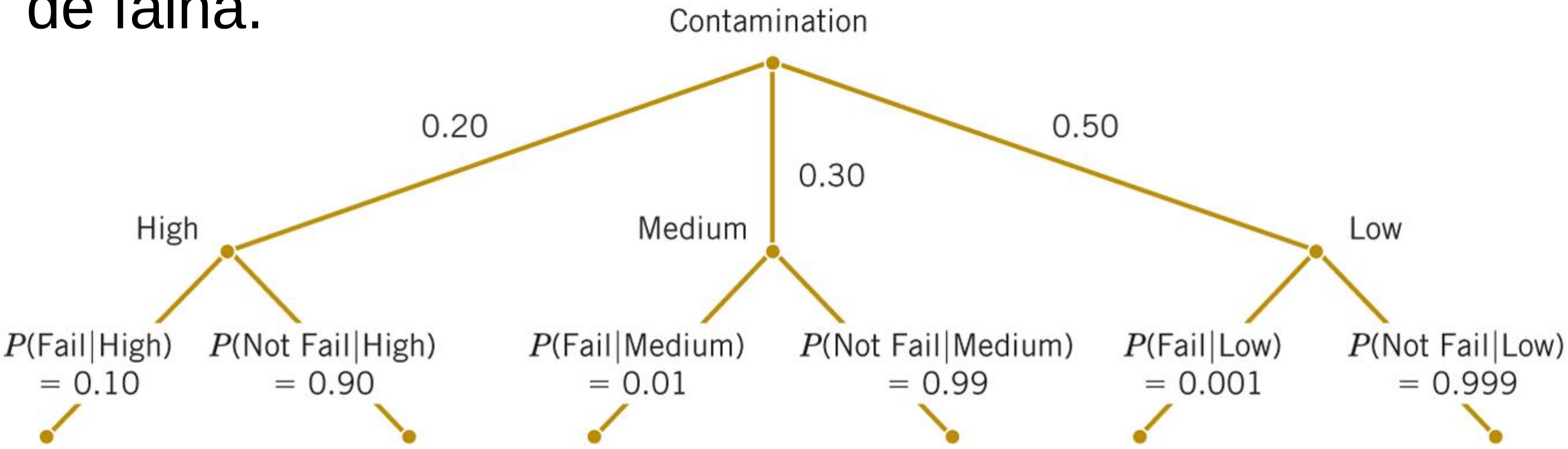
Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.100	High	0.2
0.010	Medium	0.3
0.001	Low	0.5



Exemplo 2-15: Semiconductor Failures-1

Continuando a discussão de contaminação durante a manufatura do chip, encontre a probabilidade de falha.

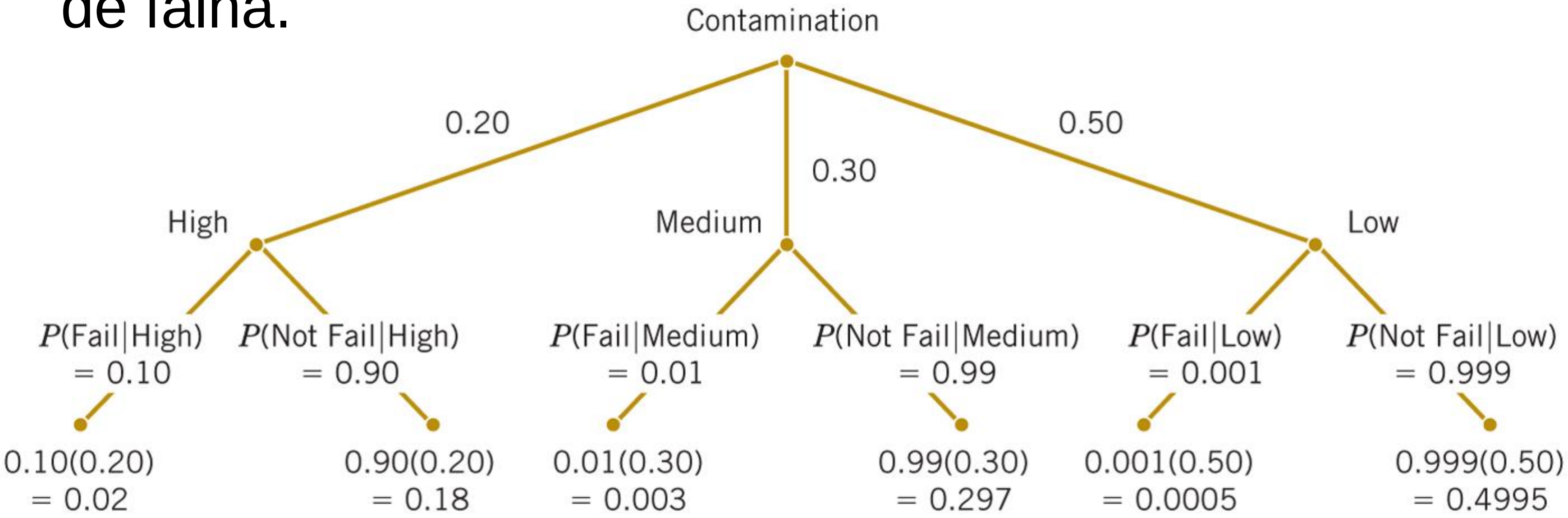
Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.100	High	0.2
0.010	Medium	0.3
0.001	Low	0.5



Exemplo 2-15: Semiconductor Failures-1

Continuando a discussão de contaminação durante a manufatura do chip, encontre a probabilidade de falha.

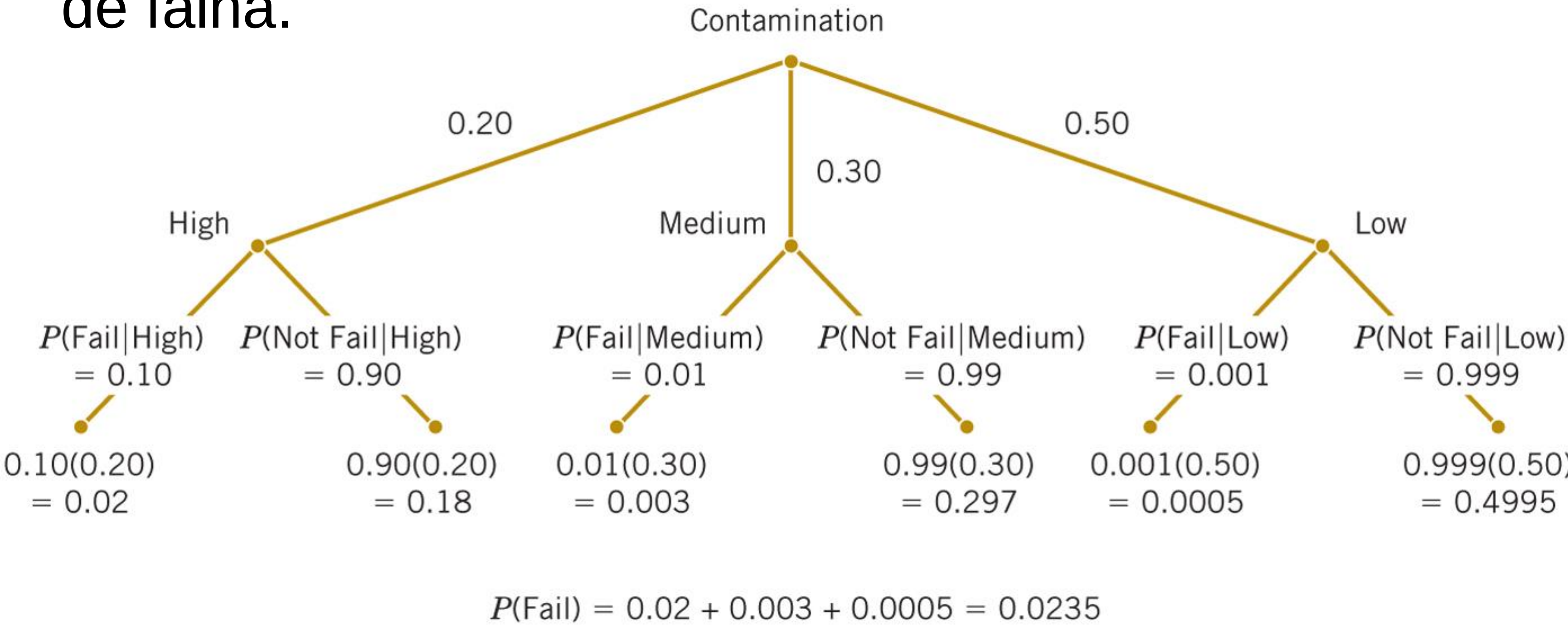
Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.100	High	0.2
0.010	Medium	0.3
0.001	Low	0.5



Exemplo 2-15: Semiconductor Failures-1

Continuando a discussão de contaminação durante a manufatura do chip, encontre a probabilidade de falha.

Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.100	High	0.2
0.010	Medium	0.3
0.001	Low	0.5



Exemplo 2-15: Semiconductor Failures-2

- Seja F o evento que o chip falha
- Seja H o evento que chip é exposto a níveis altos de contaminação
- Seja M o evento que chip é exposto a níveis médios de contaminação
- Seja L o evento que chip é exposto a níveis baixos de contaminação
- Usando o Teorema da Probabilidade Total,

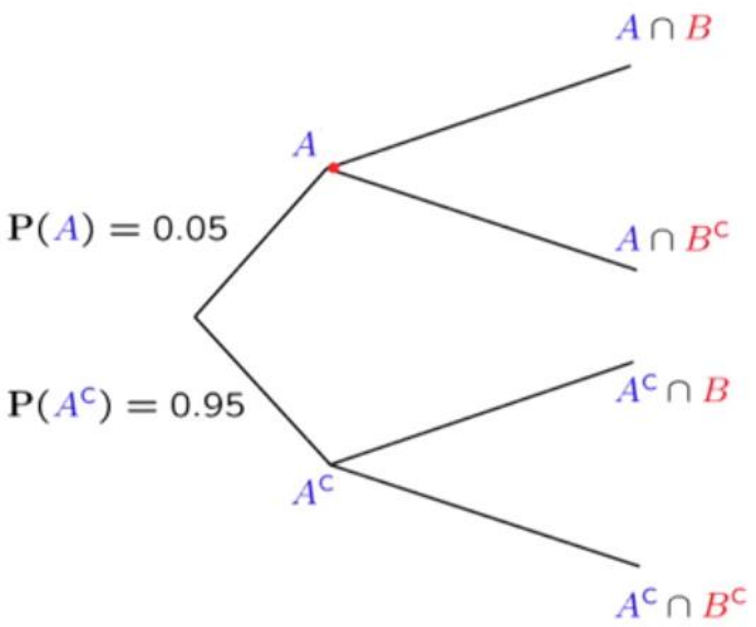
$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \mid H)P(H) + P(F \mid M)P(M) + P(F \mid L)P(L) \\ &= (0.1)(0.2) + (0.01)(0.3) + (0.001)(0.5) \\ &= 0.0235 \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

Radar:

A : o avião está voando;

B : alguma coisa é registrada na tela do radar

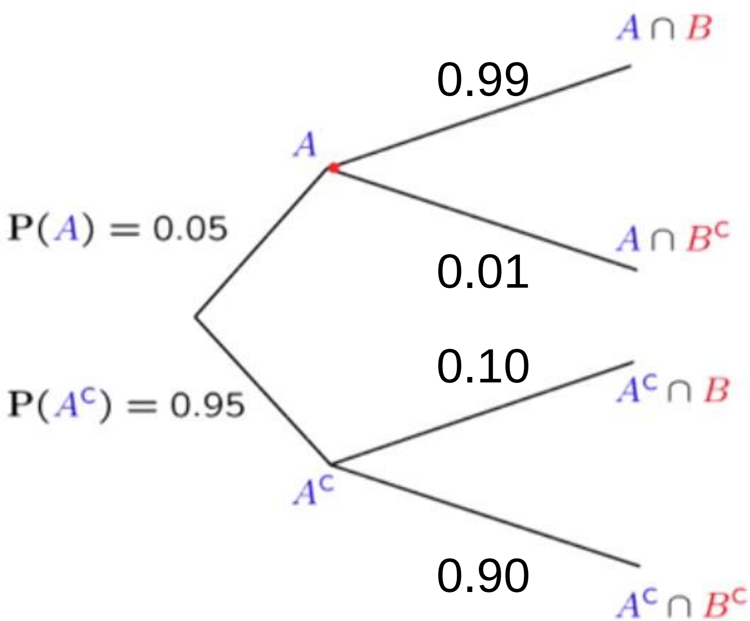


Probabilidade condicional

Radar:

A : o avião está voando;

B : alguma coisa é registrada na tela do radar



WILEY

Probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

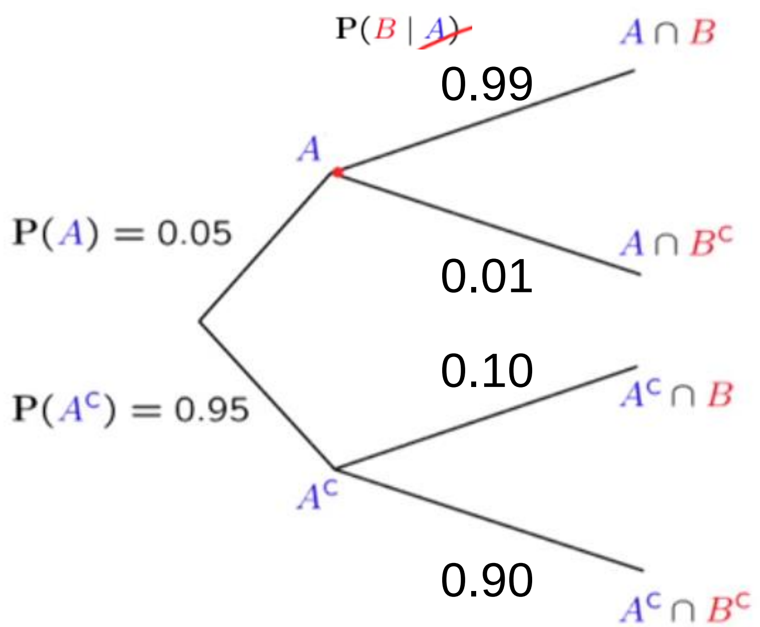
Radar:

A : o avião está voando;

B : alguma coisa é registrada na tela do radar

$$P(A \cap B) =$$

$$P(B) =$$



Probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Radar:

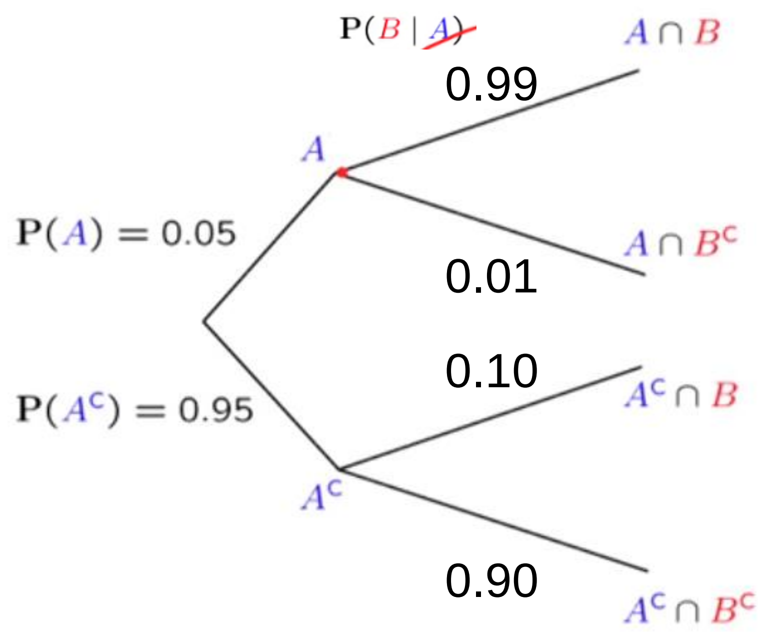
A : o avião está voando;

B : alguma coisa é registrada na tela do radar

$P(A \cap B) =$ 0.05 * 0.99

$P(B) =$ 0.05 * 0.99 + 0.95 * 0.1 = 0.1445

Suponha que o radar detecte algo, qual a probabilidade de ser um avião:



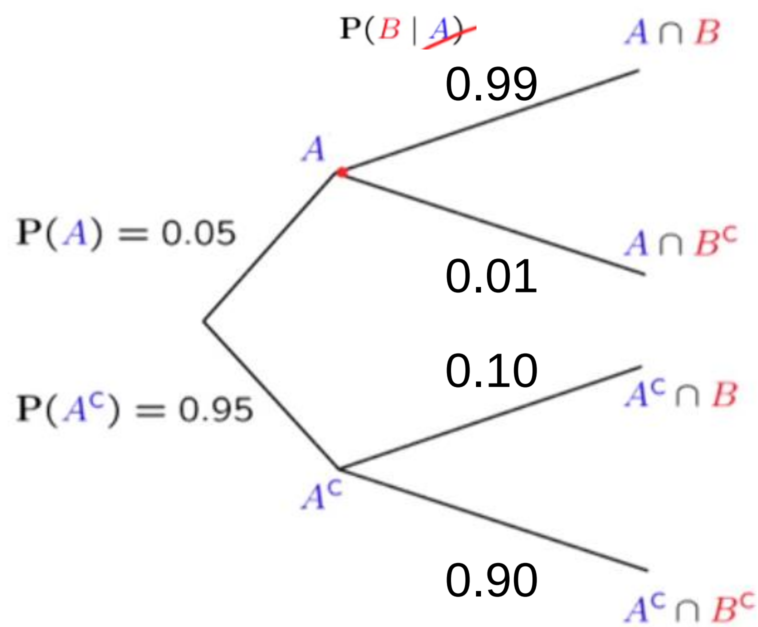
Probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Radar:

A : o avião está voando;

B : alguma coisa é registrada na tela do radar



$P(A \cap B) =$ 0.05 * 0.99

$P(B) =$ 0.05 * 0.99 + 0.95 * 0.1 = 0.1445

Suponha que o radar detecte algo, qual a probabilidade de ser um avião:

$P(A \mid B) =$

WILEY

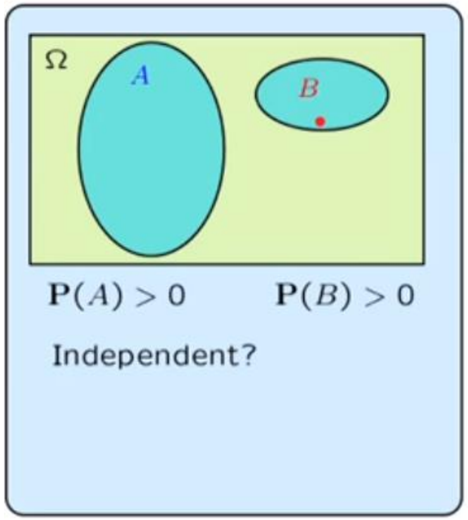
Event Independence

- Dois eventos são independentes se:
  1. $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = P(A)$
  2. $P(B \mid A) = P(B)$
  3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Isto significa que a ocorrência de um evento não impacta na probabilidade de ocorrência do outro evento.

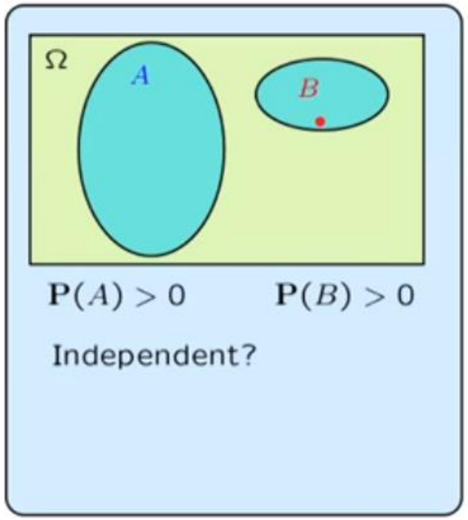
Independência

- Independência entre dois eventos;
- Independência entre eventos pareados;
- Independência entre múltiplos de eventos;
- Independência condicional;

Event Independence



Event Independence



$$P(A \cap B) = 0$$

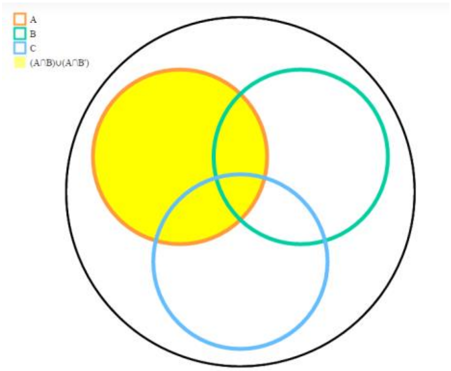
$$P(A) \cdot P(B) > 0$$

Ou seja, não são independentes

Independência

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Se A e B são independentes, então A e B^C são independentes?



$$P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B^C)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

Axioma da aditividade

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B^C)$$

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A)P(B)$$

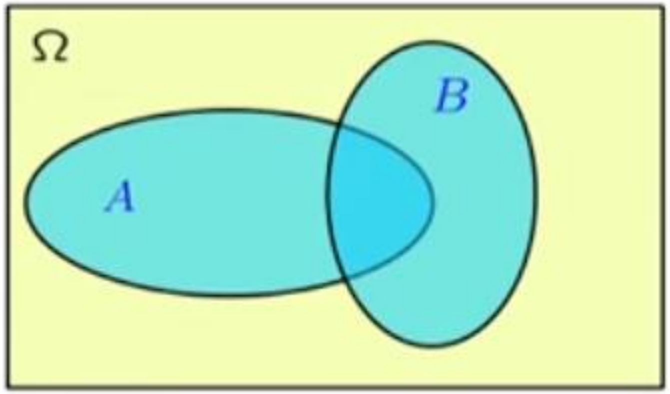
$$P(A \cap B^C) = P(A)(1 - P(B))$$

$$P(A \cap B^C) = P(A)(P(B^C))$$

Independência condicional

Independência condicional, dado C, é definida como independência sob a condicional

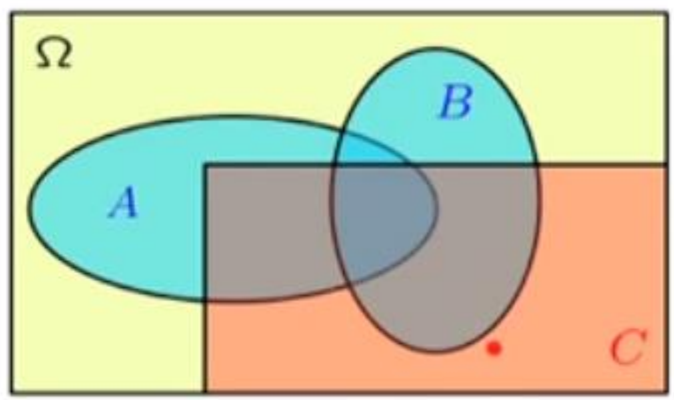
P(.|C)



Independência condicional

Independência condicional, dado C, é definida como independência sob a condicional

P(.|C)



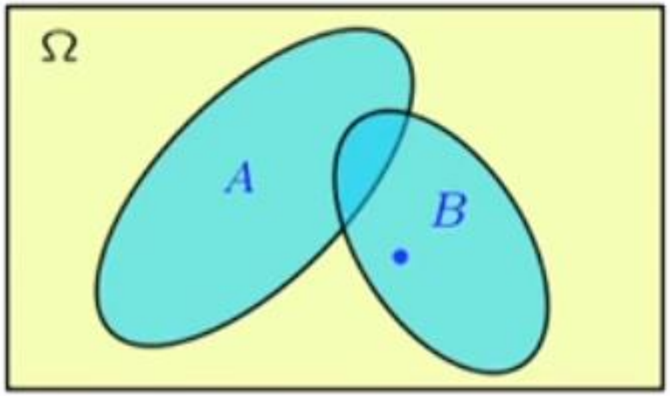
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Independência condicional

Independência condicional, dado C, é definida como independência sob a condicional

$P(. | C)$



Assuma A e B independentes

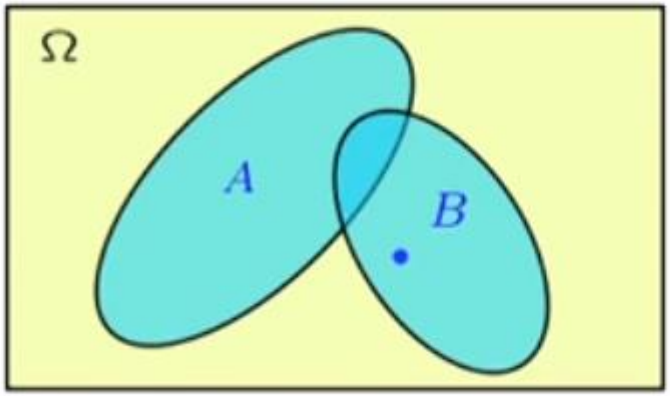
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$

Independência condicional

Independência condicional, dado C, é definida como independência sob a condicional

P(.|C)



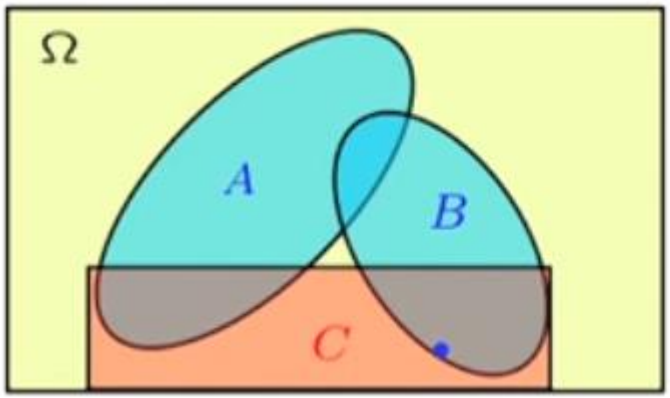
Assuma A e B independentes

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Independência condicional

Independência condicional, dado C, é definida como independência sob a condicional

P(.|C)



Assuma A e B independentes

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sob a condição C, são independentes?

WILEY

Example 2-16: Flaws and Functions

A Tabela 1 fornece um exemplo de 400 partes designadas pelos defeitos superficiais e como (funcionalmente) defeituosos. Suponha-se que a situação seja diferente e segue Tabela 2.
Seja F o evento em que a parte tem defeitos na superfície.
Seja D o evento em que a parte é defeituoso.
Os dados mostram se os eventos são independentes? Comprove

TABLE 1 Parts Classified				TABLE 2 Parts Classified (data chg'd)			
	Surface Flaws				Surface Flaws		
Defective	Yes (F)	No (F')	Total	Defective	Yes (F)	No (F')	Total
Yes (D)	10	18	28	Yes (D)	2	18	20
No (D')	30	342	372	No (D')	38	342	380
Total	40	360	400	Total	40	360	400

Example 2-16: Flaws and Functions

A Tabela 1 fornece um exemplo de 400 partes designadas pelos defeitos superficiais e como (funcionalmente) defeituosos. Suponha-se que a situação seja diferente e segue Tabela 2.

Seja F o evento em que a parte tem defeitos na superfície.

Seja D o evento em que a parte é defeituoso.

Os dados mostram se os eventos são independentes? Comprove

TABLE 1 Parts Classified				TABLE 2 Parts Classified (data chg'd)			
	Surface Flaws				Surface Flaws		
Defective	Yes (F)	No (F')	Total	Defective	Yes (F)	No (F')	Total
Yes (D)	10	18	28	Yes (D)	2	18	20
No (D')	30	342	372	No (D')	38	342	380
Total	40	360	400	Total	40	360	400
	$P(D\|F)$ =	10/40 =	0.25		$P(D\|F)$ =	2/40 =	0.05
	$P(D)$ =	28/400 =	0.10		$P(D)$ =	20/400 =	0.05
			not same				same
	Events D & F are **dependent**				Events D & F are **independent**		

Independence with Multiple Events

Os eventos E_1, E_2, … , E_k são independentes se e somente se, para qualquer subconjunto desses eventos:

$$P(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \ldots , \cap E_{ik}) = P(E_{i1}) \cdot P(E_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(E_{ik})$$

Independência

- Independência entre dois eventos;
- Independência entre eventos pareados;
- Independência entre múltiplos de eventos;
- Independência condicional;

Consultar notas de aula e o livro texto

Análise de confiabilidade

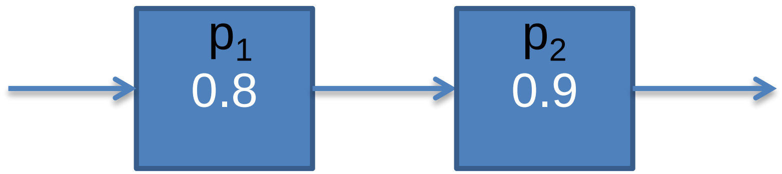
- Exemplos de confiabilidade de um sistema
- Exercícios

Consultar notas de aula e o livro texto

WILEY

Análise de confiabilidade

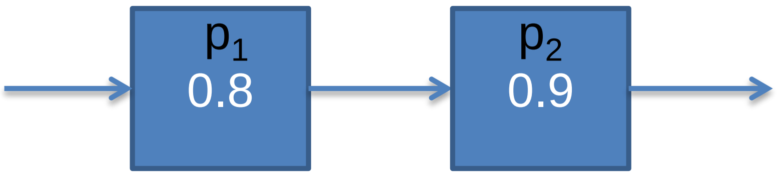
- O seguinte circuito opera somente da esquerda para a direita. Suponha $\mathbf{p_i}$ a probabilidade do dispositivo **i** funcionar, e que os dispositivos falhem de forma independente.
- F_i : falha do dispositivo i
- O_i : operação do dispositivo i



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

Análise de confiabilidade

- O seguinte circuito opera somente da esquerda para a direita. Suponha $\mathbf{p_i}$ a probabilidade do dispositivo **i** funcionar, e que os dispositivos falhem de forma independente.
- F_i : falha do dispositivo i
- O_i : operação do dispositivo i

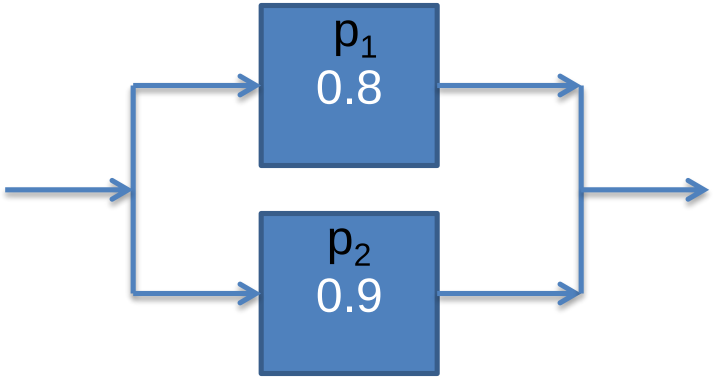


- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

$P(O_1 \cap O_2) = P(O_1)P(O_2) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

Análise de confiabilidade

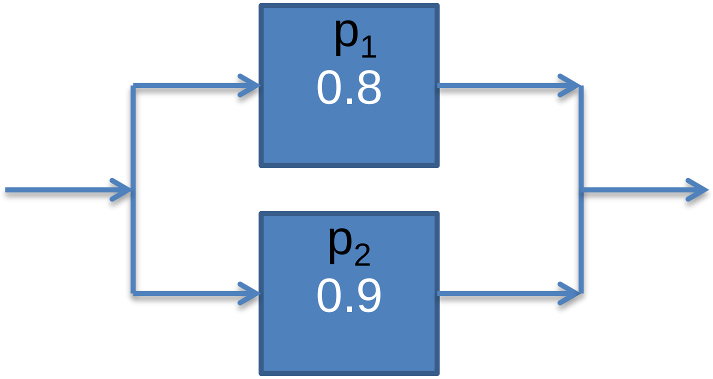
- Exemplo 2:
- F_i : falha do dispositivo i
- O_i : operação do dispositivo i



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

Análise de confiabilidade

- Exemplo 2:
- F_i : falha do dispositivo i
- O_i : operação do dispositivo i

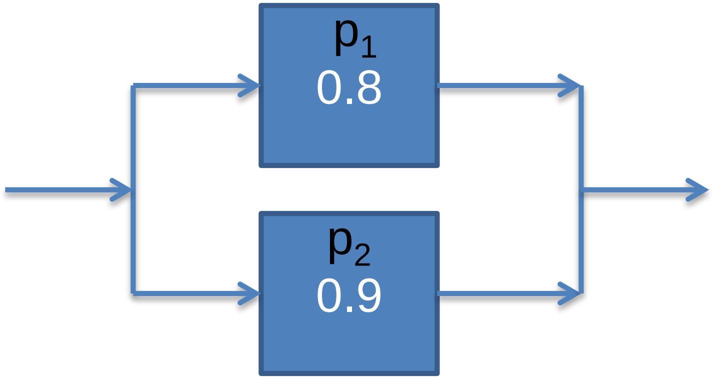


- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

$$P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2)$$
$$= 0.8 + 0.9 - (0.8)(0.9)$$
$$= 0.98$$

Análise de confiabilidade

- Exemplo 2:
- F_i : falha do dispositivo i
- O_i : operação do dispositivo i



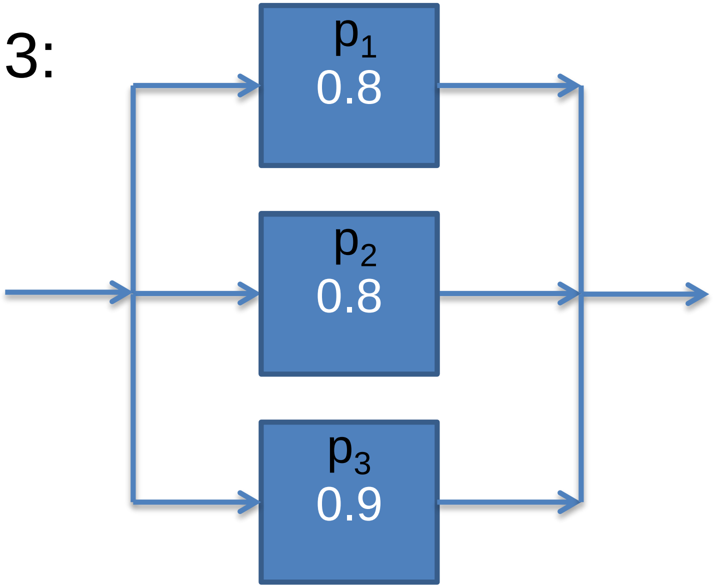
- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

$$P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2) = 0.8 + 0.9 - (0.8)(0.9) = 0.98$$

$$P(O_1 \cup O_2) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - (0.2)(0.1) = 0.98$$

Análise de confiabilidade

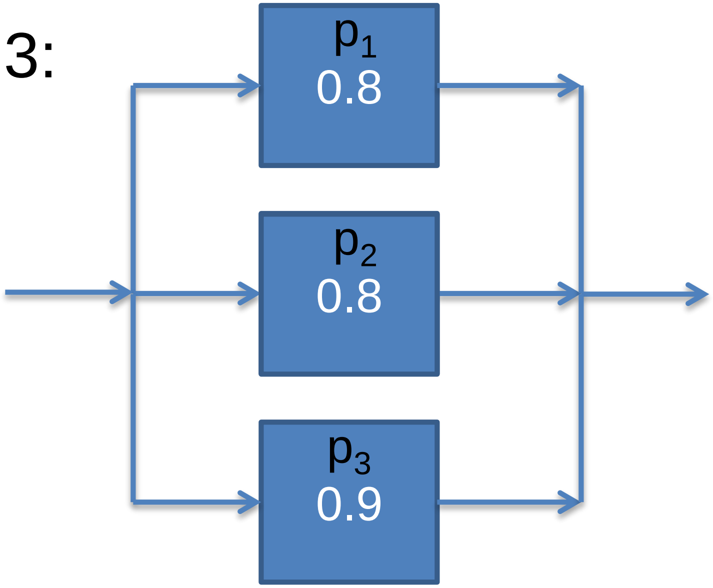
- Exemplo 3:



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

Análise de confiabilidade

- Exemplo 3:



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

$$P(O_1 \cup O_2 \cup O_3) = P(O_1) + P(O_2) + P(O_3) - P(O_1 \cap O_2) - P(O_1 \cap O_3) - P(O_2 \cap O_3) + - P(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$$

??? Como transformar uma união em uma interseção, pois é onde a independência é relacionada... ???

Leis

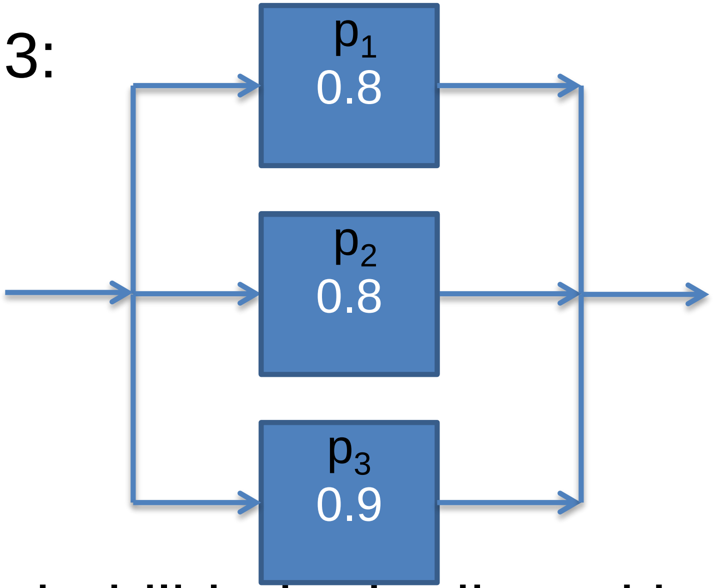
- Lei de DeMorgan's:
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$ O complemento da união é a interseção dos complementos.
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$ O complemento da interseção é a união dos complementos.

- Lei do complemento:

$$(A')' = A.$$

Análise de confiabilidade

- Exemplo 3:



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

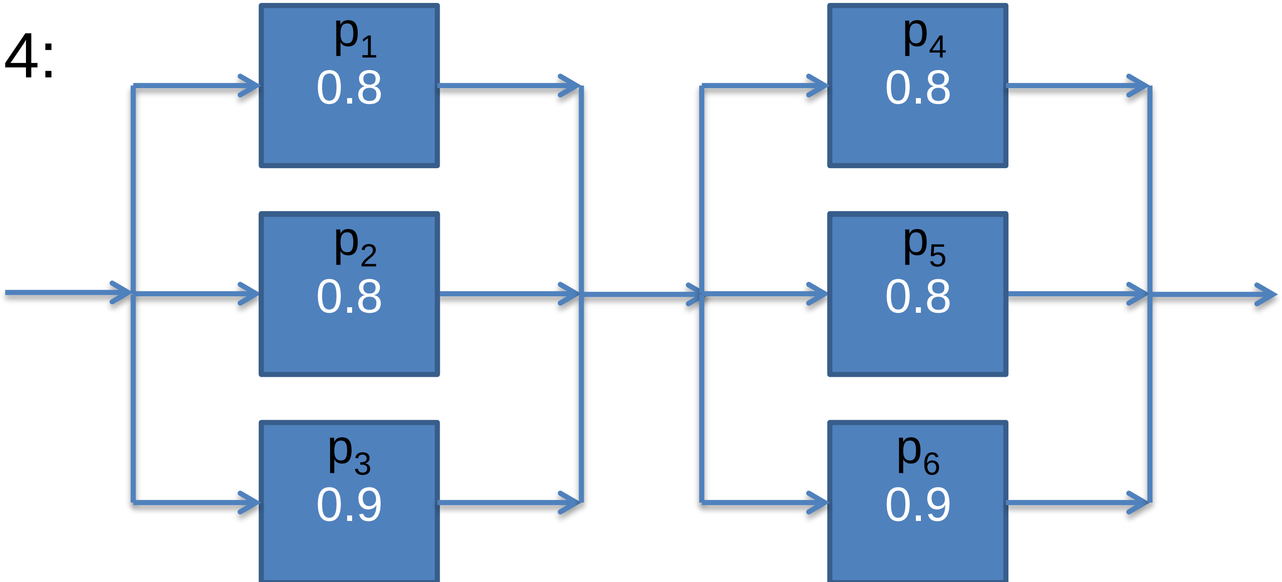
$$P(O_1 \mathbf{U} O_2 \mathbf{U} O_3)^C = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

$$P(O_1 \mathbf{U} O_2 \mathbf{U} O_3) = 1 - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

$$P(O_1 \mathbf{U} O_2 \mathbf{U} O_3) = 1 - [0.2 \times 0.2 \times 0.1] = 0.996$$

Análise de confiabilidade

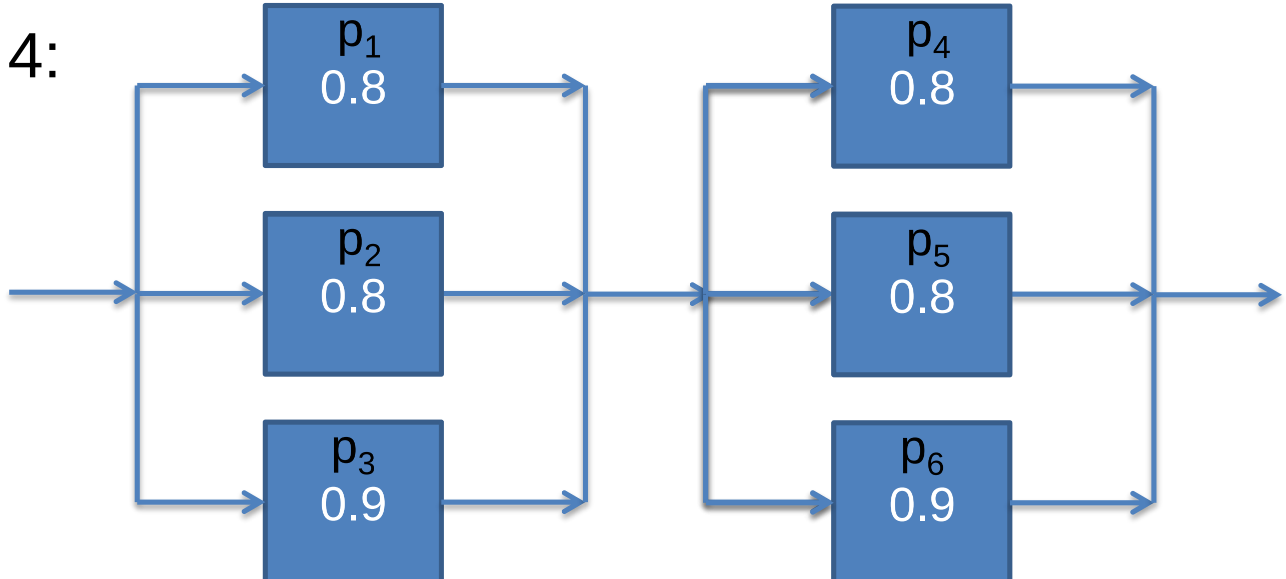
- Exemplo 4:



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

Análise de confiabilidade

- Exemplo 4:



- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

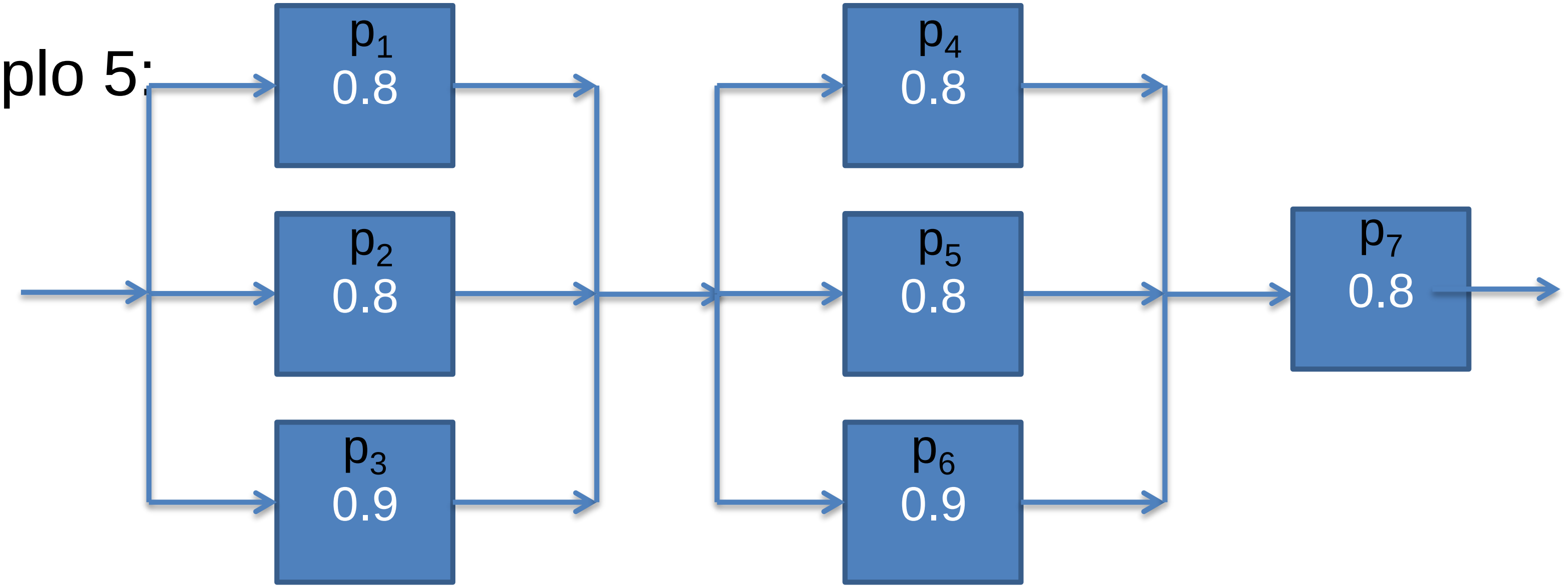
$P((O_1 \cup O_2 \cup O_3) \cap (O_4 \cup O_5 \cup O_6)) = (1 - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3))\,(1 - P(F_4 \cap F_5 \cap F_6))$

$P((O_1 \cup O_2 \cup O_3) \cap (O_4 \cup O_5 \cup O_6)) = (1 - [0.2 \times 0.2 \times 0.1])(1 - [0.2 \times 0.2 \times 0.1]) = 0.992$

WILEY

Análise de confiabilidade

- Exemplo 5:



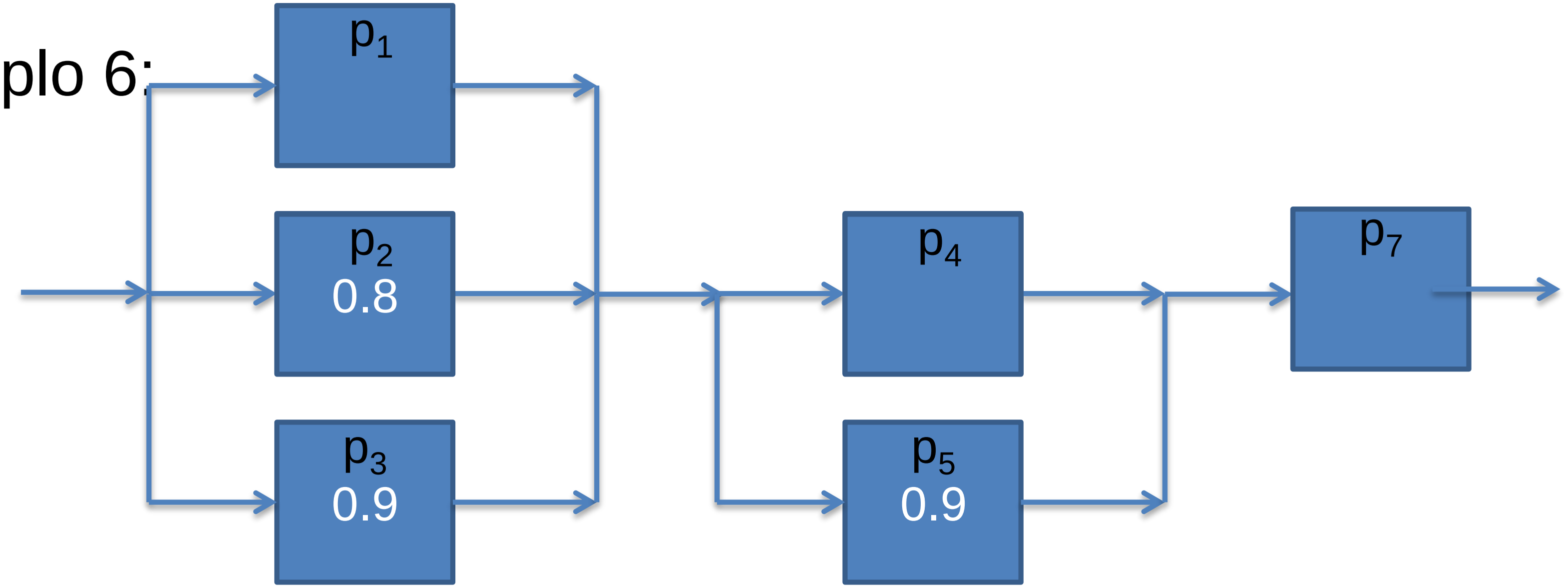
- Qual a probabilidade do dispositivo funcionar?

$P((O_1 \cup O_2 \cup O_3) \cap (O_4 \cup O_5 \cup O_6) \cap O_7) = (1 - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3))\ (1 - P(F_4 \cap F_5 \cap F_6))(O_7)$

$P((O_1 \cup O_2 \cup O_3) \cap (O_4 \cup O_5 \cup O_6)) = (1 – [0.2 \times 0.2 \times 0.1])(1 – [0.2 \times 0.2 \times 0.1])(0.8) = 0.793$

Análise de confiabilidade

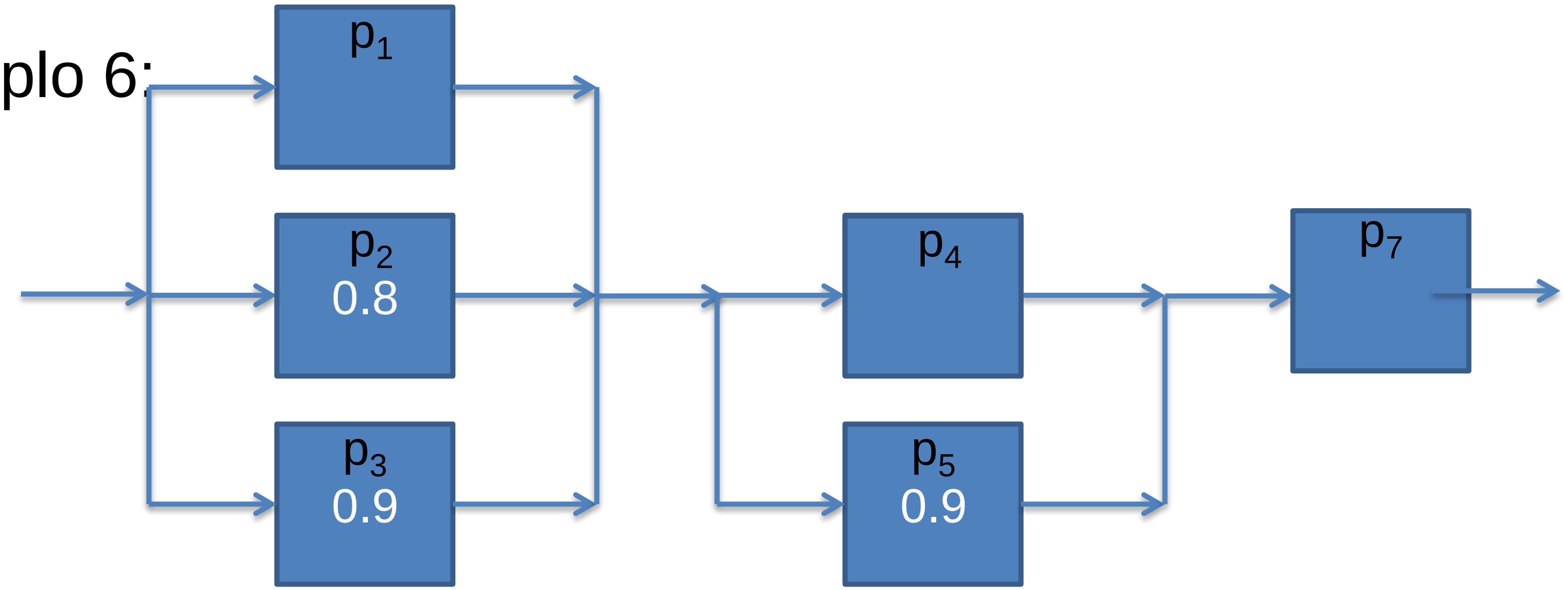
- Exemplo 6:



- Você possui 3 dispositivos diferentes para alocar em 1, 4 e 7, sendo $P(O_{sony}) = 0.99$, $P(O_{samsung}) = 0.98$, $P(O_{sang}) = 0.97$.
- Qual configuração lhe proporciona maior confiabilidade?

Análise de confiabilidade

- Exemplo 6:



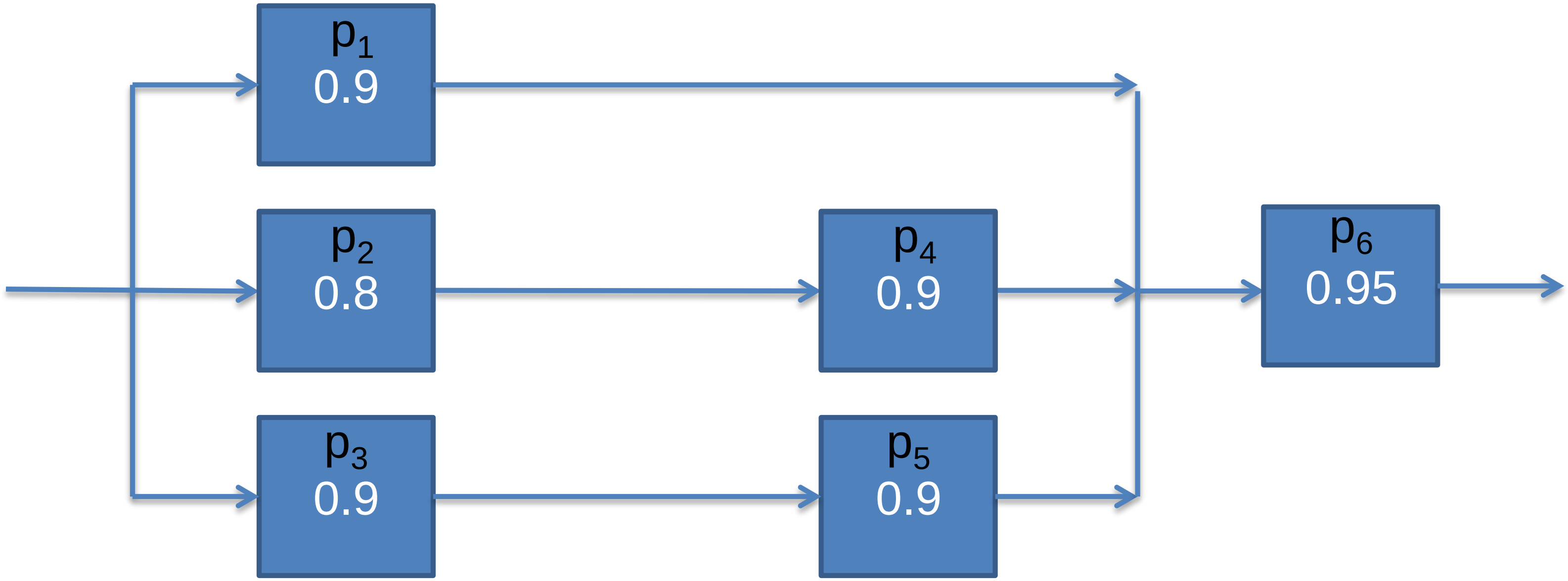
(1-0.01*0.2*0.1)*(1-0.02*0.1)*(0.97) = 0.9678664
(1-0.02*0.2*0.1)*(1-0.01*0.1)*(0.97) = 0.9686424

(1-0.01*0.2*0.1)*(1-0.03*0.1)*(0.98) = 0.9768646
(1-0.03*0.2*0.1)*(1-0.01*0.1)*(0.98) = 0.9784326

(1-0.02*0.2*0.1)*(1-0.03*0.1)*(0.99) = 0.9866352
(1-0.03*0.2*0.1)*(1-0.02*0.1)*(0.99) = 0.9874272

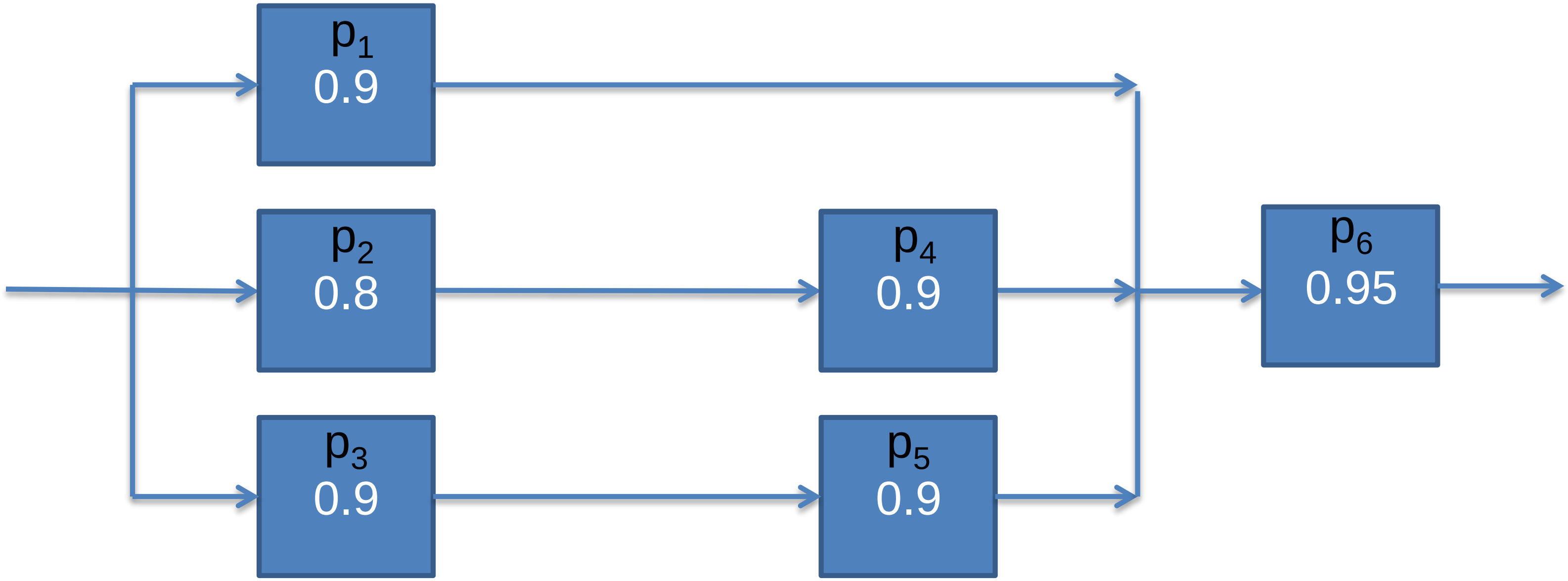
Análise de confiabilidade

- Exemplo 7:



Análise de confiabilidade

- Exemplo 7:



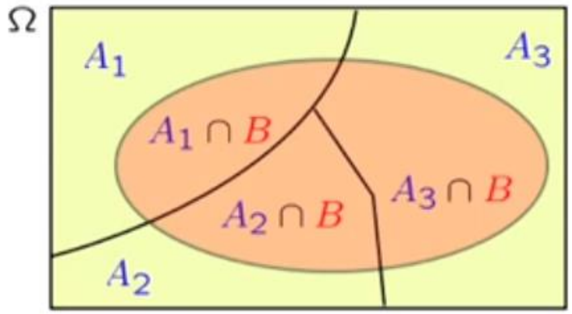
$P((O_1 \cup O_2 \cap O_4 \cup O_3 \cap O_5) \cap (O_6))$

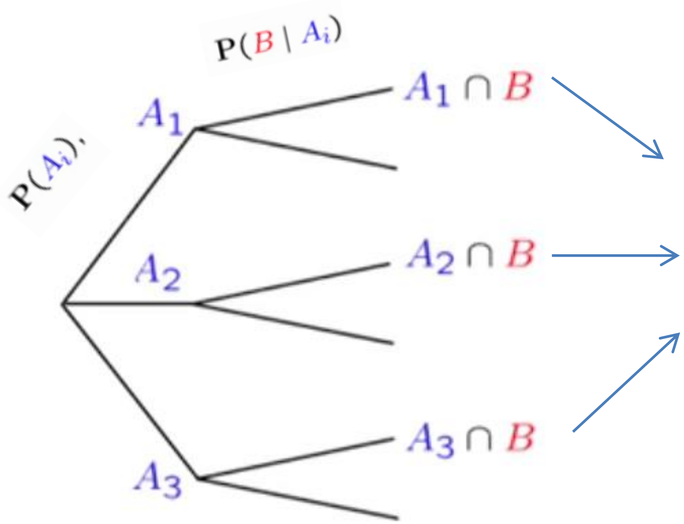
$P(O_2 \cap O_4) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

$P(O_3 \cap O_5) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$

$$\begin{aligned} P((O_1 \cup O_2 \cap O_4 \cup O_3 \cap O_5) &= (1 - P(F_1 \cap F_{24} \cap F_{35}))P(O_6) \\ &= (1 - (0.1)(0.28)(0.19))(0.95) \\ &= 0.944 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes





$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}{\sum_j \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}$$

Teorema de Bayes

Bayes' rule and inference

- Thomas Bayes, presbyterian minister (c. 1701-1761)
- "Bayes' theorem," published posthumously
- systematic approach for incorporating new evidence

- Bayesian inference
  - initial beliefs $\mathbf{P}(A_i)$ on possible causes of an observed event B
  - model of the world under each A_i: $\mathbf{P}(B \mid A_i)$

$$A_i \xrightarrow[\mathbf{P}(B \mid A_i)]{\text{model}} B$$

  - draw conclusions about causes

$$B \xrightarrow[\mathbf{P}(A_i \mid B)]{\text{inference}} A_i$$

Exemplo – slide extra

Bayes' Theorem

- Thomas Bayes (1702-1761) was an English mathematician and Presbyterian minister.
- His idea was that we observe conditional probabilities through prior information.
- Bayes' theorem states that,

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \bullet P(A)}{P(B)} \quad \text{for } P(B) > 0$$

Example 2-18

The conditional probability that a high level of contamination was present when a failure occurred is to be determined. $P(H \mid F)$
The information from Example 2-14 is summarized here.

Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.1	High	0.2
0.005	Not High	0.8

Example 2-18

The conditional probability that a high level of contamination was present when a failure occurred is to be determined. The information from Example 2-14 is summarized here.

Probability of Failure	Level of Contamination	Probability of Level
0.1	High	0.2
0.005	Not High	0.8

<u>Solution:</u>

Let *F* denote the event that the product fails, and let *H* denote the event that the chip is exposed to high levels of contamination. The requested probability is *P*(*F*).

$$P(H \mid F) = \frac{P(F \mid H) \cdot P(H)}{P(F)} = \frac{0.10 \cdot 0.20}{0.024} = 0.83$$

$$P(F) = P(F \mid H) \cdot P(H) + P(F \mid H^{'}) \cdot P(H^{'})$$
$$= 0.1 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.024$$

Bayes Theorem with Total Probability

If E_1, E_2, … E_k are k mutually exclusive and exhaustive events and B is any event,

$$P(E_1 \mid B) = \frac{P(B \mid E_1)P(E_1)}{P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + \ldots + P(B \mid E_k)P(E_k)}$$

where $P(B) > 0$

Note : Numerator expression is always one of the terms in the sum of the denominator.

Example 2-19: Bayesian Network

A printer manufacturer obtained the following three types of printer failure probabilities. Hardware $P(H) = 0.3$, software $P(S) = 0.6$, and other $P(O) = 0.1$. Also, $P(F \mid H) = 0.9$, $P(F \mid S) = 0.2$, and $P(F \mid O) = 0.5$.

If a failure occurs, determine if it's most likely due to hardware, software, or other.

Example 2-19: Bayesian Network

A printer manufacturer obtained the following three types of printer failure probabilities. Hardware $P(H) = 0.1$, software $P(S) = 0.6$, and other $P(O) = 0.3$. Also, $P(F \mid H) = 0.9$, $P(F \mid S) = 0.2$, and $P(F \mid O) = 0.5$.

If a failure occurs, determine if it's most likely due to hardware, software, or other.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \mid H)P(H) + P(F \mid S)P(S) + P(F \mid O)P(O) \\ &= 0.9(0.1) + 0.2(0.6) + 0.5(0.3) = 0.36 \end{aligned}$$

$$P(H \mid F) = \frac{P(F \mid H) \cdot P(H)}{P(F)} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.36} = 0.250$$

$$P(S \mid F) = \frac{P(F \mid S) \cdot P(S)}{P(F)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.36} = 0.333$$

$$P(O \mid F) = \frac{P(F \mid O) \cdot P(O)}{P(F)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.36} = 0.417$$

Note that the conditionals given failure add to 1. Because $P(O \mid F)$ is largest, the most likely cause of the problem is in the *other* category.

Random Variable and its Notation

- A variable that associates a number with the outcome of a random experiment is called a random variable.
- A random variable is a function that assigns a real number to each outcome in the sample space of a random experiment.
- A random variable is denoted by an uppercase letter such as X. After the experiment is conducted, the measured value of the random variable is denoted by a lowercase letter such as $x = 70$ milliamperes. X and x are shown in italics, e.g., $P(X = x)$.

WILEY

Discrete & Continuous Random Variables

- A discrete random variable is a random variable with a finite or countably infinite range. Its values are obtained by counting.
- A continuous random variable is a random variable with an interval (either finite or infinite) of real numbers for its range. Its values are obtained by measuring.

Examples of Discrete & Continuous Random Variables

- Discrete random variables:
  - Number of scratches on a surface.
  - Proportion of defective parts among 100 tested.
  - Number of transmitted bits received in error.
  - Number of common stock shares traded per day.
- Continuous random variables:
  - Electrical current and voltage.
  - Physical measurements, e.g., length, weight, time, temperature, pressure.

Important Terms & Concepts of Chapter 2

Addition rule
Axioms of probability
Bayes' theorem
Combination
Conditional probability
Equally likely outcomes
Event
Independence
Multiplication rule
Mutually exclusive events
Outcome
Permutation

Probability
Random experiment
Random variable
- Discrete
- Continuous

Sample space
- Discrete
- Continuous

Total probability rule
Tree diagram
Venn diagram
With replacement
Without replacement