Cap 3. Variável aleatória discreta

Livro texto - Montgomery

Introdução

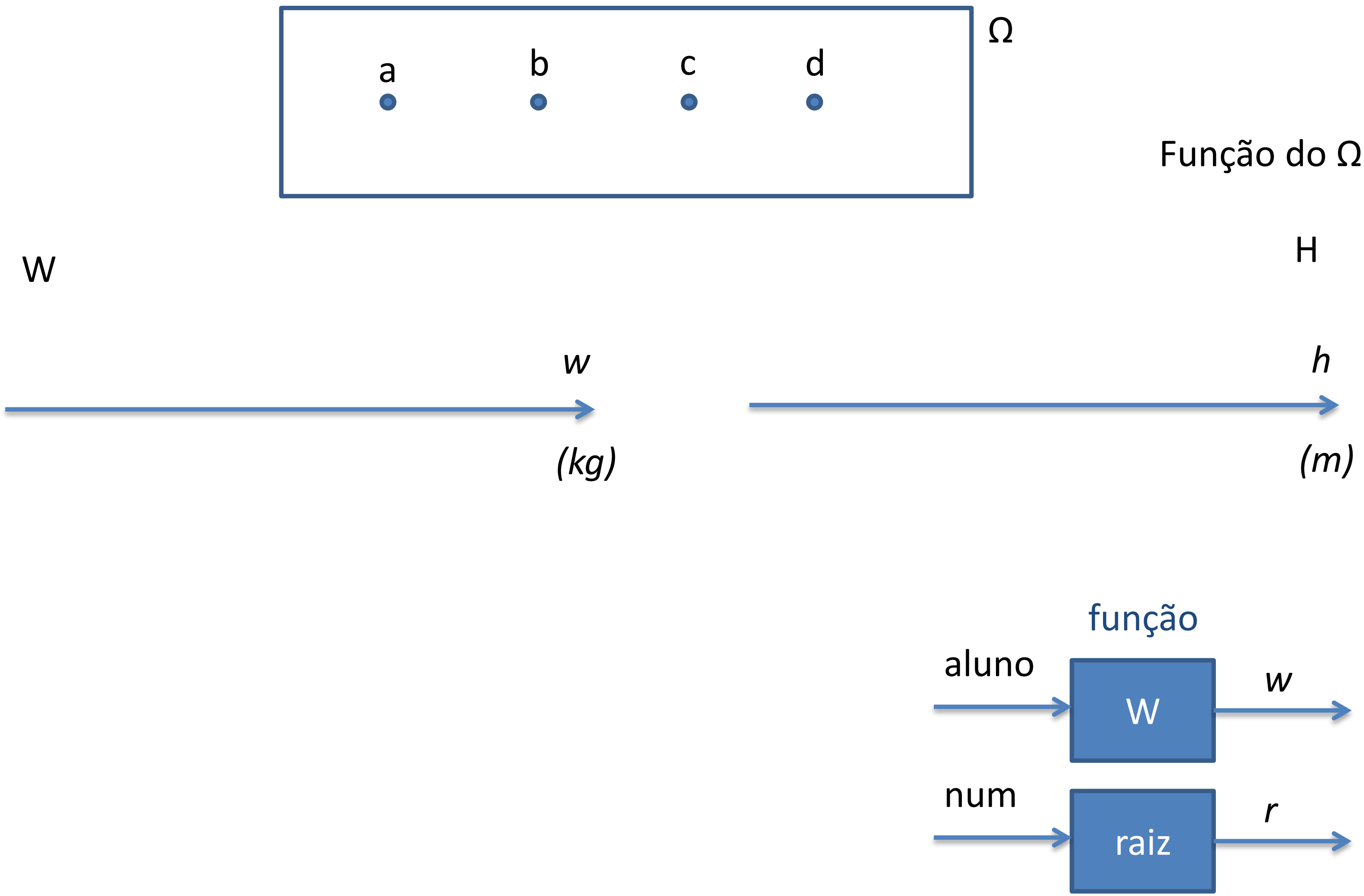
- **Imagine um experimento probabilístico...**
  - Ex: amostra ao acaso de um estudante
    - Resultado: ocorrência de um evento (A,M,F,...)
    - Outros resultados? peso
    - Peso x Evento
      - Quantidade x Evento – Valor/Medida x Evento
    - Quantidade – chamada de – variável aleatória
  - Variável aleatória – probabilidade (ampla)
  - Quantidade numéricas aleatórias e suas relações

Introdução

- **Variável aleatória**
  - sua distribuição
  - valor esperado, variância (resumo das propriedades)
- **Tópicos principais**
  - definição e notação
  - propriedades do valor esperado e variância
  - condicionamento e independência
  - Probabilidade total / teorema do valor esperado total
- **Enfoque em variável aleatória discreta – Cap3**
  - Atenção a notação

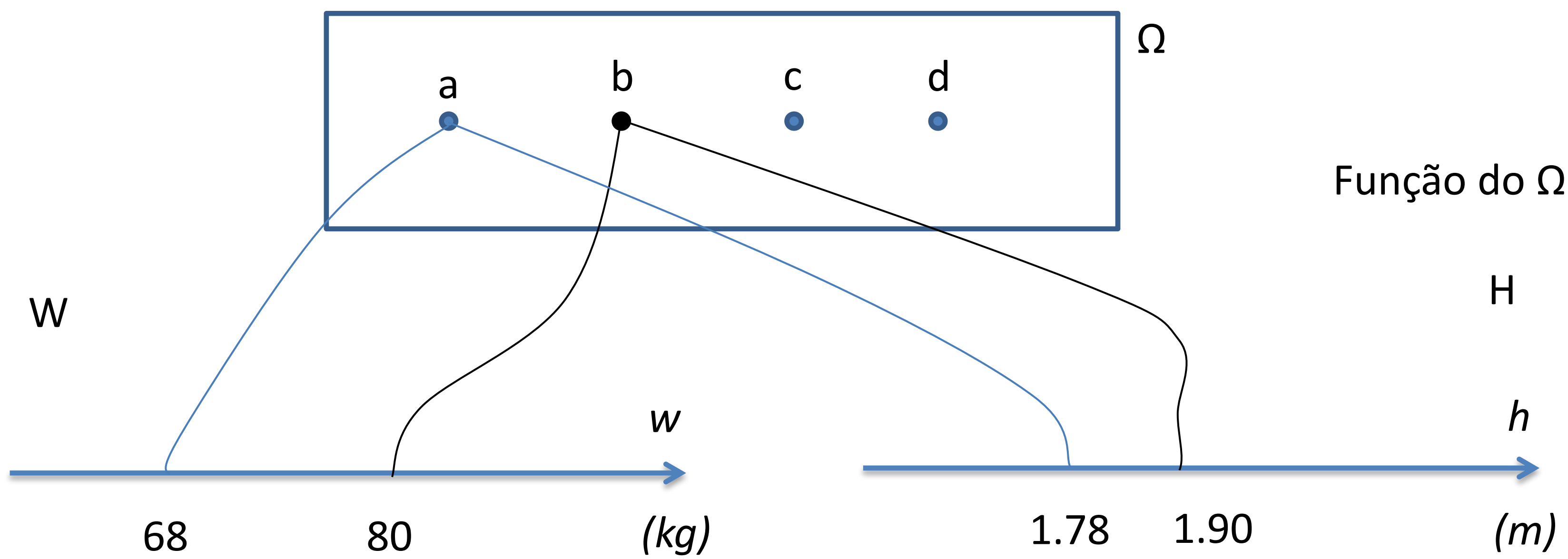
Introdução

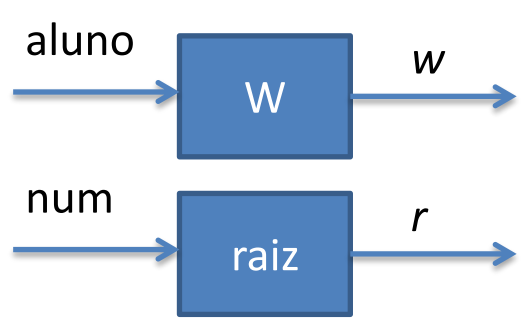
- **Variável aleatória – exemplo - ideia**



Introdução

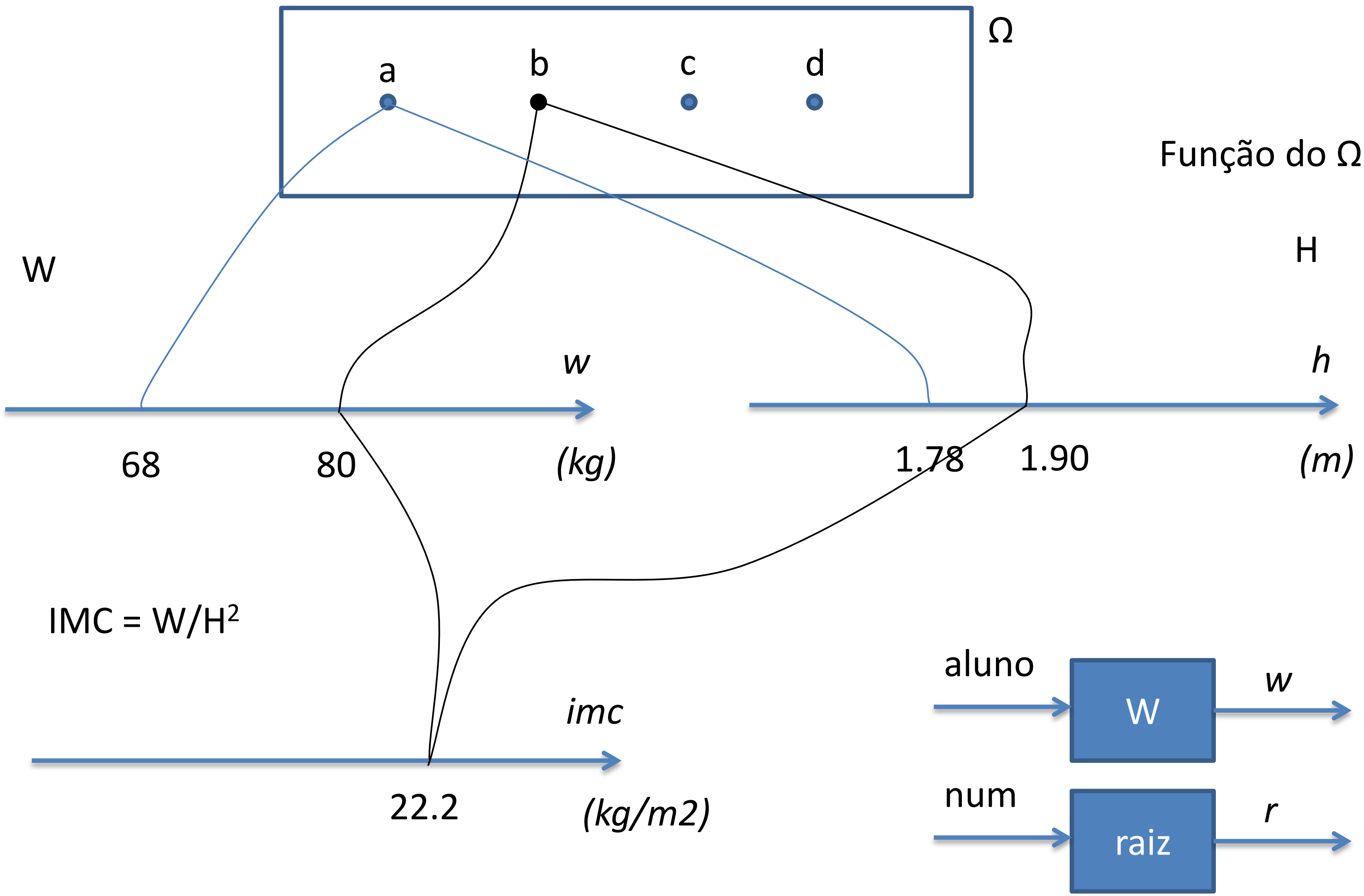
- **Variável aleatória – exemplo - ideia**





Introdução

- **Variável aleatória – exemplo - ideia**



Introdução

- **Variáveis aleatórias: Formalismo**
  - Uma variável aleatória (v.a.) associa um valor (número) para qualquer resultado possível;
  - Matematicamente: É uma função do espaço amostral Ω para os números reais;
  - Funções numéricas;
  - Os valores podem ser discretos ou contínuos;

Notação: variável aleatória $\boldsymbol{X}$ valor numérico $\boldsymbol{x}$

Introdução - exercício

Ex: Seja X uma v.a. associada com um experimento probabilístico, e seja x um número qualquer.

– Será sempre verdadeiro que $X + x$ seja uma v.a. ?

– Será sempre verdadeiro que $X - x = 0$?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**

  PMF – Probability mass function

  – Uma v.a. pode tomar diferentes valores numéricos dependendo do resultado do experimento aleatório;

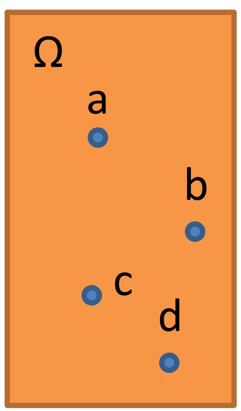
  – Alguns resultados são mais prováveis que outros e similarmente os valores numéricos de uma v.a.;

  – Vamos estabelecer a relação dessas probabilidades com o uso da distribuição de probabilidade – PMF – v.a. discretas;

  – A função massa de probabilidade é a “lei de probabilidade” ou “distribuição de probabilidade” de X – probabilidade a valores numéricos

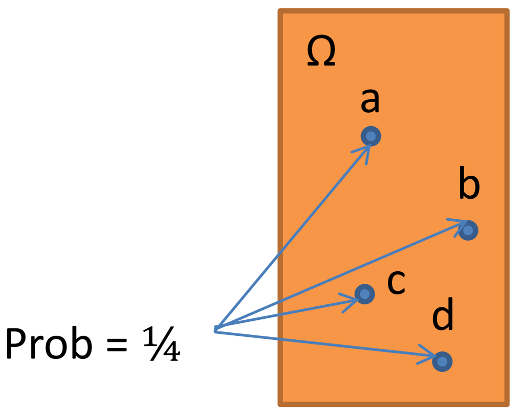
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**
  - Distribuição de probabilidade da X discreta
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).



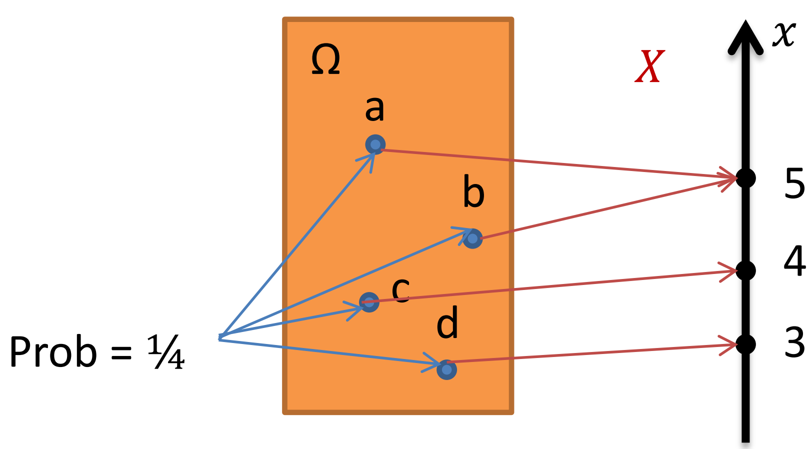
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).



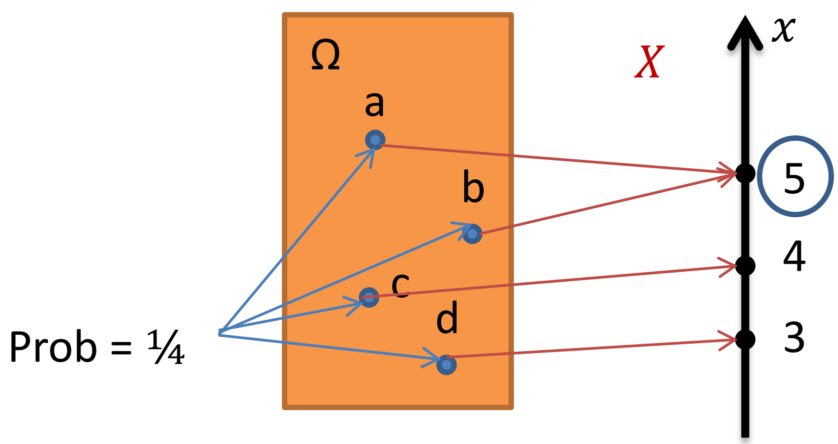
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).
  - Introduzimos uma v.a. X



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

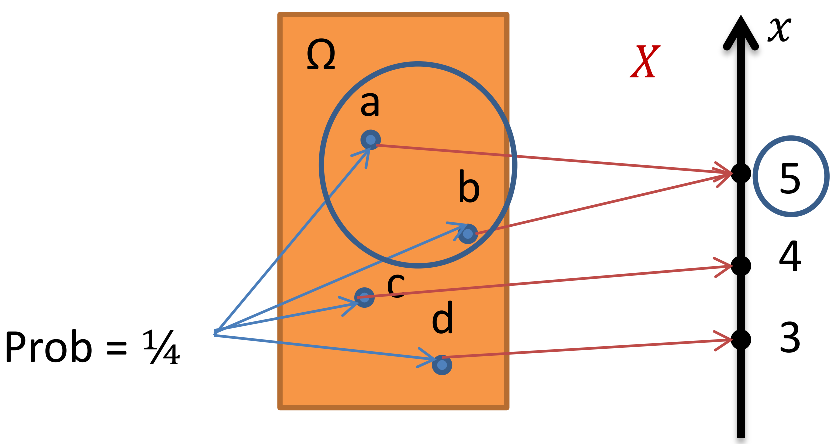
- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).
  - Introduzimos uma v.a. X



$x = 5$ $X = 5$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (FMP) de uma v.a. discreta**
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).
  - Introduzimos uma v.a. X



$x = 5$ $\qquad X = 5$

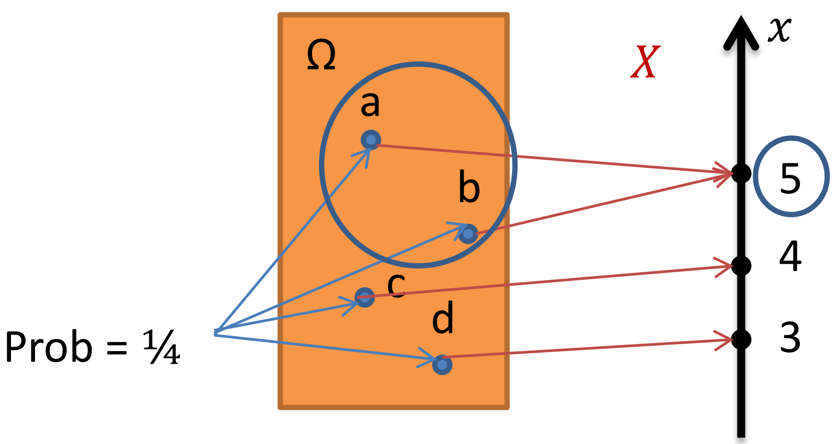
$$\{\omega\colon X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$$

evento

Conjunto de todos os resultados que sejam 5

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (FMP) de uma v.a. discreta**
  - Ex: temos um experimento probabilístico, com 4 resultados possíveis, uma lei de probabilidade do Ω (igualmente prováveis).
  - Introduzimos uma v.a. X



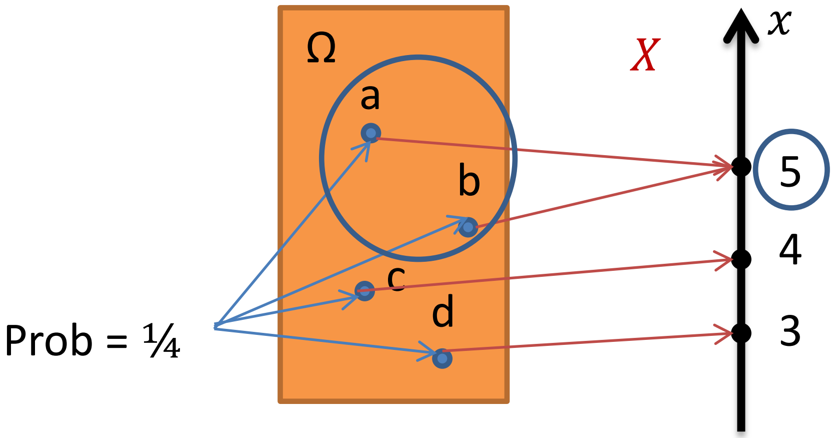
$$\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$$

$$P(X = x) = P(X = 5) = P(5) = p_X(5) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega\}; X(\omega) = x\})}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

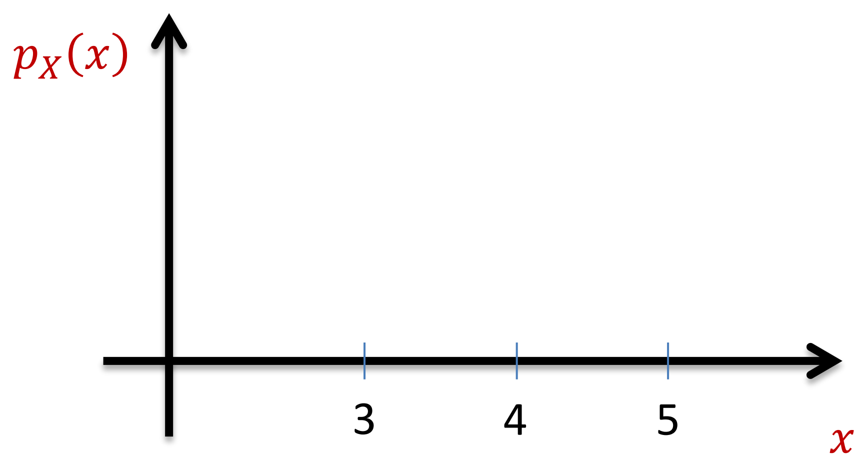
- **Função massa de probabilidade (FMP) de uma v.a. discreta**



$$\{w: X(w) = 5\} = \{a, b\}$$

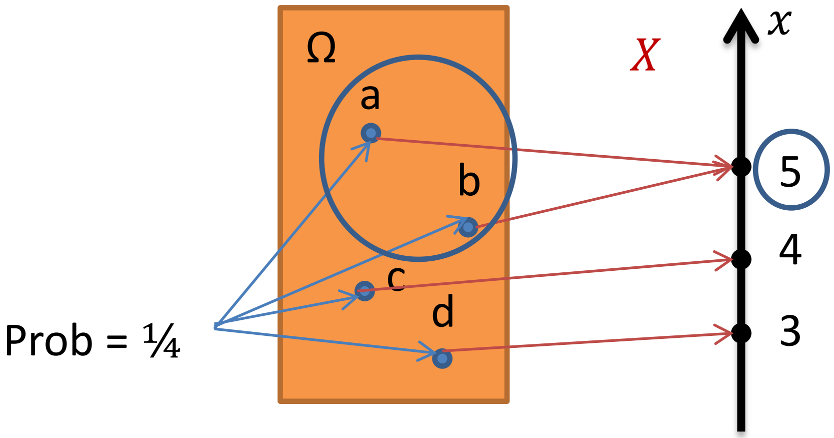
$$P(5) = \frac{1}{2}$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega\}; X(\omega) = x\})$$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (FMP) de uma v.a. discreta**

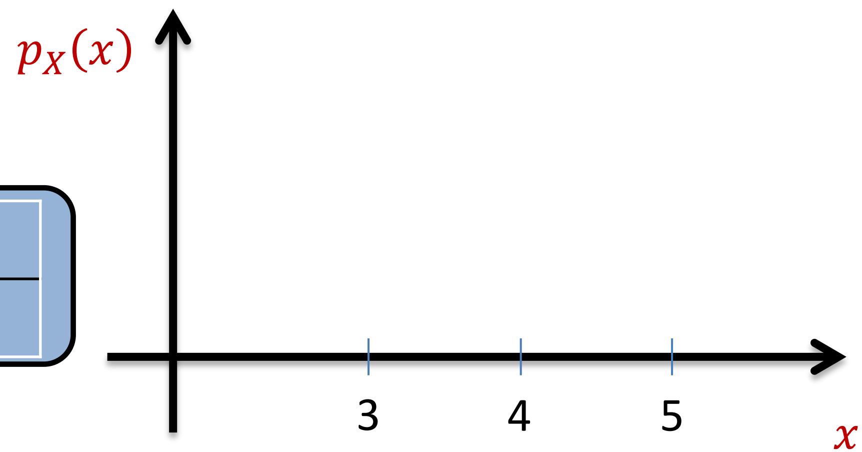


$$\{w: X(w) = 5\} = \{a, b\}$$

$$P(5) = \frac{1}{2}$$

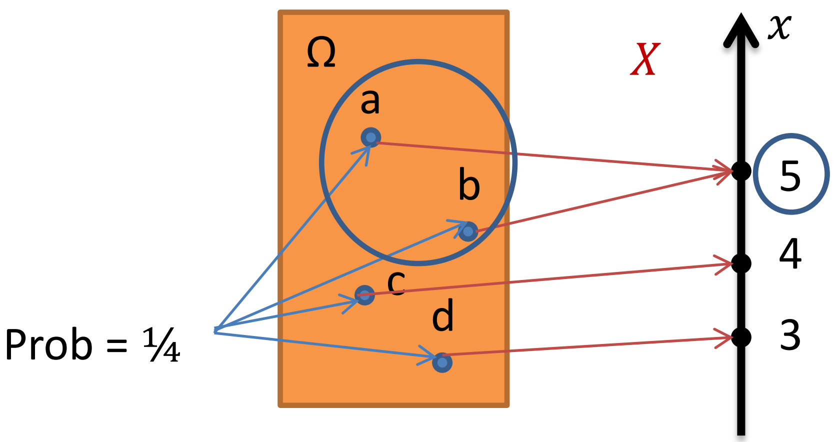
$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega\}; X(\omega) = x\})$$

X	x_1	x_2	x_3	…
p_i	p_1	p_2	p_3	…



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Função massa de probabilidade (PMF) de uma v.a. discreta**



$$\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$$

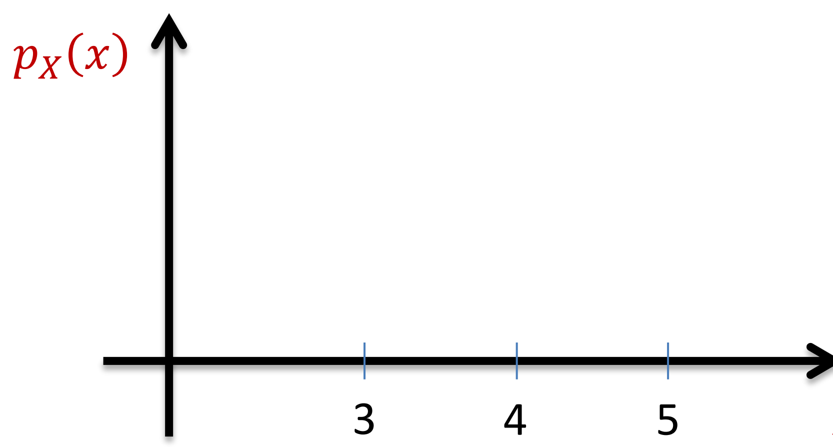
$$P(5) = \frac{1}{2}$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega\}; X(\omega) = x)$$

Propriedades

$$p_X(x) \geq 0$$

$$\sum_x p_X(x) = 1$$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - Para as famílias da região:
    - 20 % não tem filhos;
    - 30 % tem um filho;
    - 35 % tem dois;
    - As restantes se dividem igualmente entre 3, 4 e 5 filhos.
  - Definimos N como a v.a. número de filhos;
  - Os valores que N pode assumir são: {0,1,2,3,4,5}
  - **Qual é a função de probabilidade de N ?**

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - **Qual é a função de probabilidade de N ?**

$$\boldsymbol{P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3)+P(N=4)+P(N=5)=1}$$

$$0{,}20 + 0{,}30 + 0{,}35 + p + p + p = 1$$

$$0{,}85 + 3\,p = 1$$

$$p = \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05$$

função massa de probabilidade (pmf)

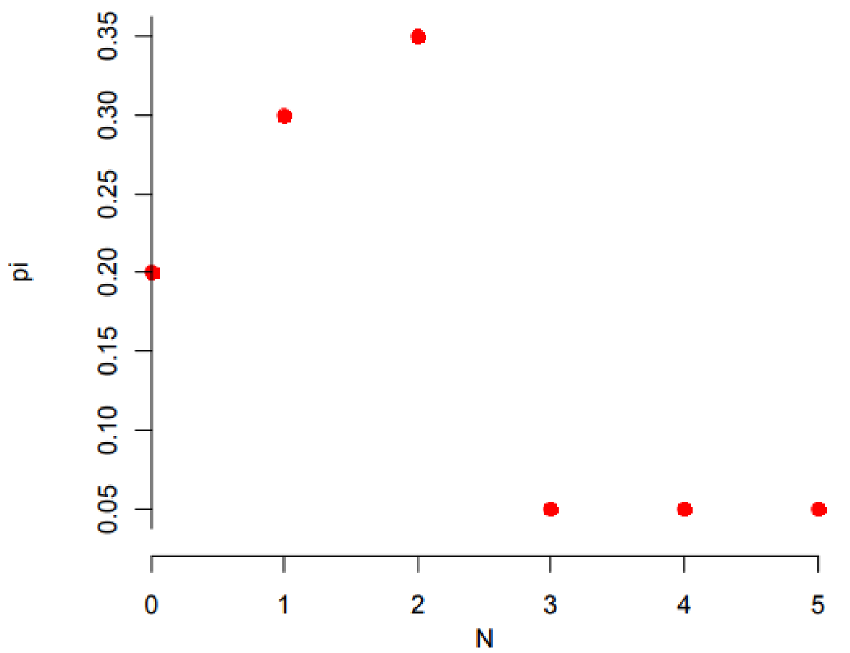
N	0	1	2	3	4	5	Total
$p_N(n)$	0.20	0.30	0.35	0.05	0.05	0.05	1.00

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - **Qual é a função de probabilidade de N ?**

função massa de probabilidade (pmf)

N	0	1	2	3	4	5	Total
$p_N(n)$	0.20	0.30	0.35	0.05	0.05	0.05	1.00



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - Exemplo: dado tetraédrico (4 lados iguais), dois lanç...
  - Resultados igualmente prováveis 1/16

$Y = 2^{\text{º}}\ lanç.$

4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4

$X = 1^{\text{º}}\ lanç.$

$Z = X + Y$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - Exemplo anterior: dado tetraédrico (4 lados iguais)
  - Resultados igualmente prováveis $1/16$

$Y = 2^{\text{º}}\ lanç.$

4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	2	3	4

$X = 1^{\text{º}}\ lanç.$

$Z = X + Y$

Calcular a PMF de Z

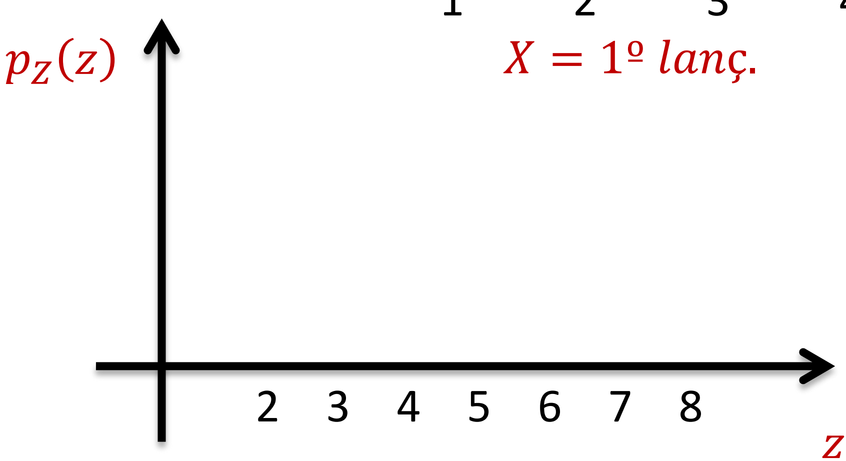
$p_Z(z)$

$p_Z(2) = P(Z = 2) = 1/16$

$p_Z(3) = P(Z = 3) = 2/16$

$p_Z(4) = P(Z = 4) = 3/16$

...



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Cálculos da PMF**
  - Exemplo anterior: dado tetraédrico (4 lados iguais)
  - Resultados igualmente prováveis 1/16

$Y = 2^{\underline{o}}\ lanç.$

4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4

$X = 1^{\underline{o}}\ lanç.$

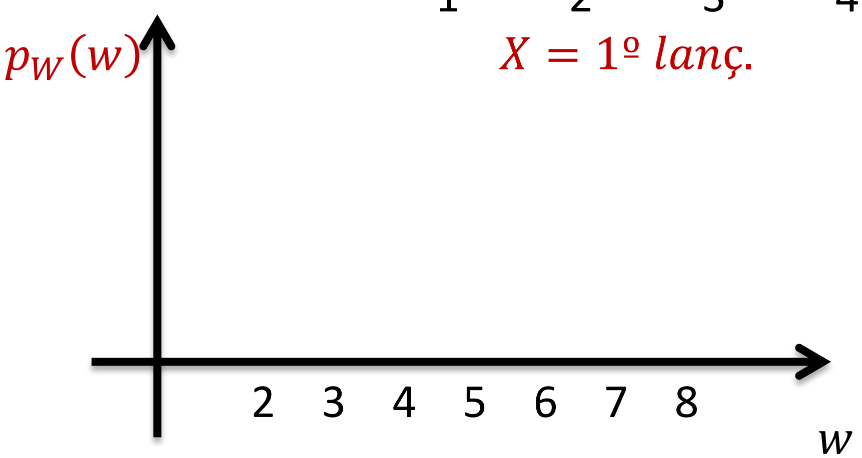
$W = XY$

Calcular a PMF de W

$p_W(w)$

$p_W(4) =$

$p_W(5) =$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Exemplos – Montgomery**
- **Função cumulativa de probabilidade**

Ver slides – Cap.3 Montogmery

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Modelos probabilísticos para v.a. discretas**
  - **Bernoulli**
  - Uniforme
  - Binomial (sequência de n ensaios de Bernoulli)
  - Geométrica
  - Binomial Negativa
  - Hipergeométrico
  - Poisson
- **Propriedades da distribuição**
  - Valor Esperado (média)
  - Variância
  - Desvio Padrão

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Modelo Bernoulli, $X \sim Ber(p)$

- **Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$**

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$p_X(0) = 1 - p$

$p_X(1) = p$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Modelo Bernoulli com parâmetro $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

- Função massa de probabilidade

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases}$$

$$p_X(0) = 1 - p$$

$$p_X(1) = p$$

- Aplicação:
  - modelos de tentativa de sucesso/fracasso;
  - cara/coroa;
  - etc..
- Premissas:
  - Ensaios independentes;
  - Probabilidade p de sucesso;

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

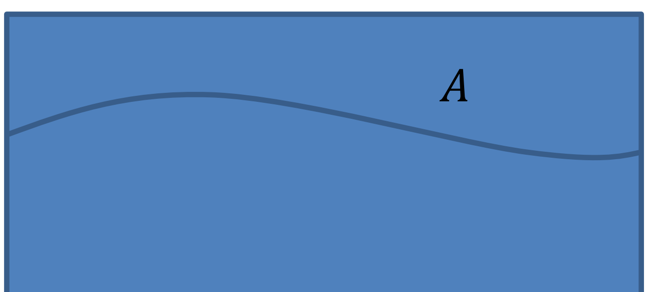
- **Exemplos simples de v.a. : Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$**

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases}$$

$$p_X(0) = 1 - p$$

$$p_X(1) = p$$

- A v.a. Indicadora (I) faz a conexão entre um evento e uma v.a.
- Variável aleatória indicadora de um evento A: $I_A = 1$ se e somente se A ocorrer;



$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & se \quad \omega \in A \\ 0, & se \quad \omega \notin A \end{cases}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x)$$

- **Interpretação:**
  - É o valor médio obtido em uma grande quantidade de tentativas independentes de um experimento.
  - É o valor esperado em média que irá ocorrer nessas condições.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x)$$

- **Interpretação:**
  - É o valor médio obtido em uma grande quantidade de tentativas independentes de um experimento.
  - É o valor esperado em média que irá ocorrer nessas condições.
- Precaução:
  - Se tivermos uma soma infinita (série infinita), é necessário que esta tenha limites bem definidos:

Assume-se que

$$\sum_{x} |x| p_X(x) < \infty \qquad \text{quantidade finita}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. **Bernoulli**

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. Bernoulli

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Se X é uma variável indicadora de um evento I_A

$X = 1$ se e somente se A ocorre.

$P = P(A)$

$E(X) = P(A)$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases} \qquad E[X] = p$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x) =$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases} \qquad \boldsymbol{E[X] = p}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x) = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p)$$

$$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\boldsymbol{V(X) = p(1-p)}$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

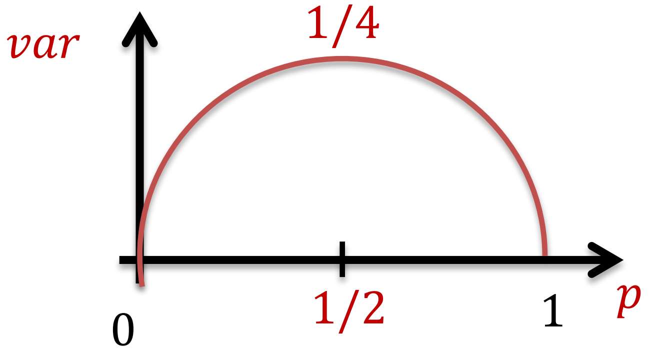
Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{1-p} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E[X] = p}$$

$$\boldsymbol{V(X) = p(1-p)}$$



Intepretação: lançamento de uma moeda

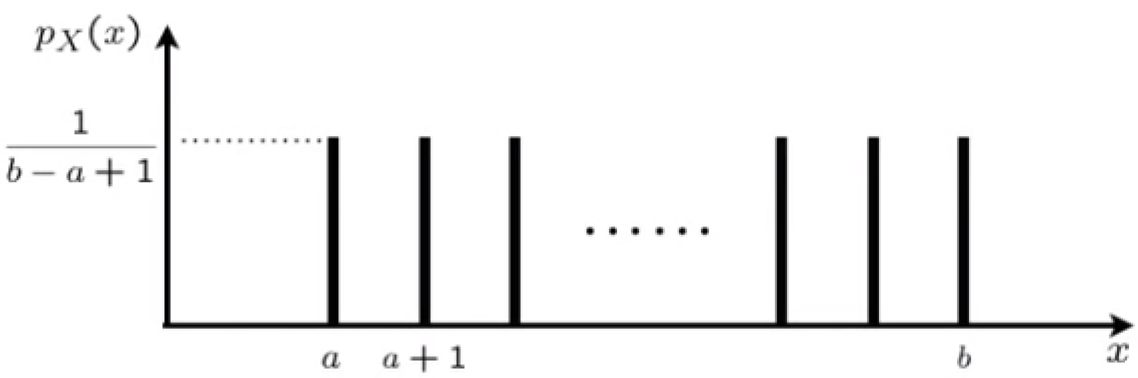
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

- **Modelos probabilísticos para v.a. discretas**
  - Bernoulli
  - **Uniforme**
  - Binomial (sequência de n ensaios de Bernoulli)
  - Geométrica
  - Binomial Negativa
  - Hipergeométrico
  - Poisson
- **Propriedades da distribuição**
  - Valor Esperado (média)
  - Variância
  - Desvio Padrão

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Modelo Uniforme discreto, $X \sim U(a, b)$

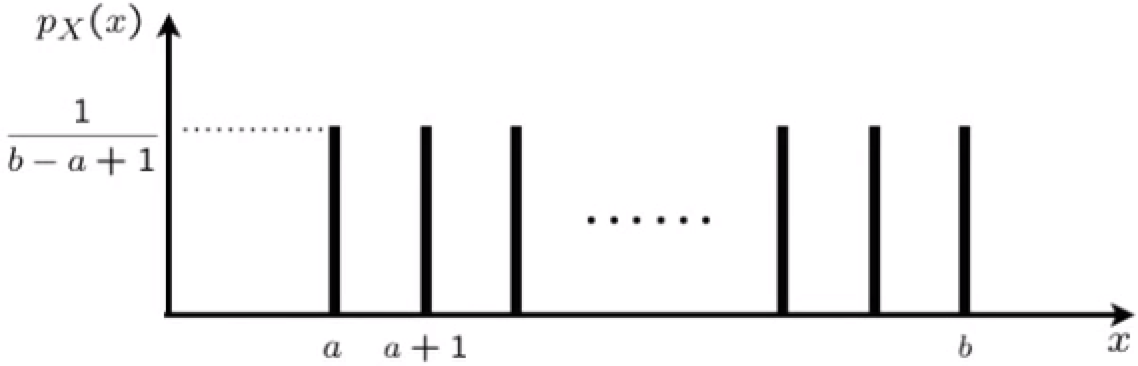
- Parâmetros: inteiros a, b
- Experimento: ao acaso, $a, a+1, \dots, b$; igualmente provável
- Espaço amostral: $\{a, a+1, \dots, b\}$
- Aplicações:
  - não percebemos as diferenças em termos de probabilidades
  - probabilidades iguais..



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Uniforme discreta: parâmetros a, b

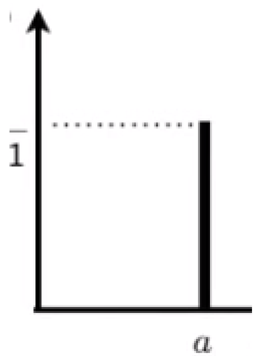
- Exemplo:
  - Relógio digital: segundos
  - $\{0,1, \ldots, 59\}$ seg
  - Ao olhar o relógio ao acaso – probabilidades iguais



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

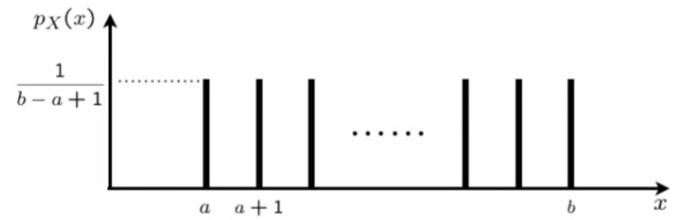
V.A. Uniforme discreta: parâmetros a, b

- Caso especial:
  - $a = b$
  - V.A. constante / determinístico



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. **Uniforme**



- Uniforme em 0,1,...,n

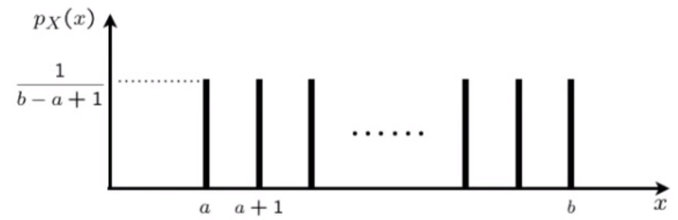
$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{n+1} + 1 \cdot \frac{1}{n+1} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}(0 + 1 + \cdots + n) = \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. **Uniforme**



- Uniforme em 0,1,...,n

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{n+1} + 1 \cdot \frac{1}{n+1} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}(0 + 1 + \cdots + n) = \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

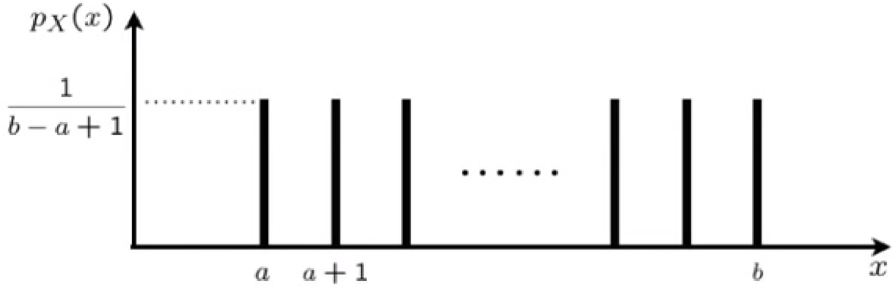
$$= \frac{n}{2}$$

ponto médio / centro de gravidade

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. Uniforme

- Uniforme **a** até **b**



$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = a \cdot \frac{1}{b-a+1} + \cdots + b \cdot \frac{1}{b-a+1}$$

$$= \sum_{k=a}^{b} k\left(\frac{1}{b-a+1}\right)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$ ponto médio / centro de gravidade

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Uniforme:

$$\boldsymbol{E[X] = \frac{n}{2}}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{n+1}(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2) - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{1}{12}\cdot n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot n(n+2)$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

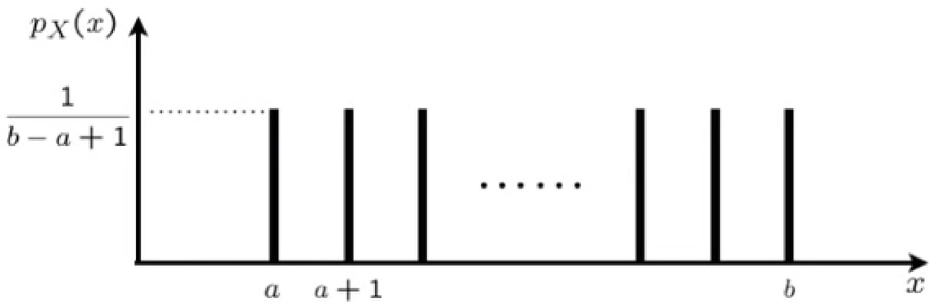
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Uniforme:

$$E[X] = \frac{n}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{12} \cdot n(n+2)$$



$$E[X] = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Modelo Binomial, $X \sim Bin(n, p)$

parâmetros:

- inteiro positivo n;
- $p \in [0,1]$

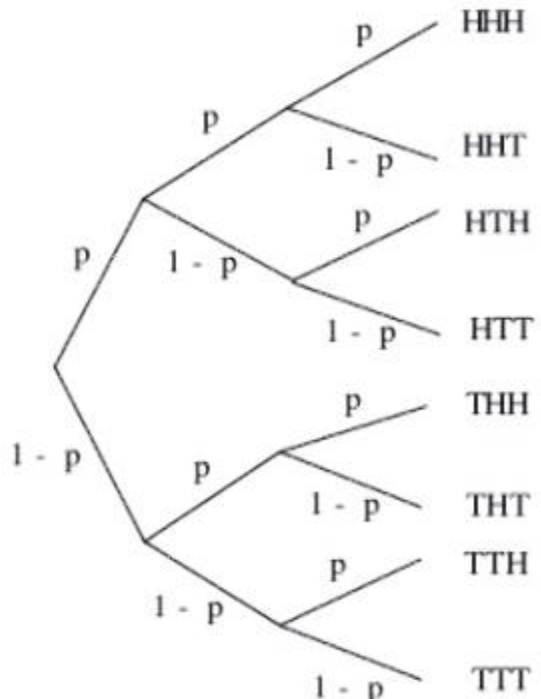
- **Aplicação e premissas**:
  - n tentativas independentes de um experimento aleatório
  - probabilidade p de sucesso constante
  - referenciado como n v.a.s Bernoulli (n tentativas Bernoulli)
- **Função massa de probabilidade**

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , para\ x = 0,1,\ldots,n$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$

- **Experimento**: n lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral:** Conjunto de sequencias de H e T, de tamanho n

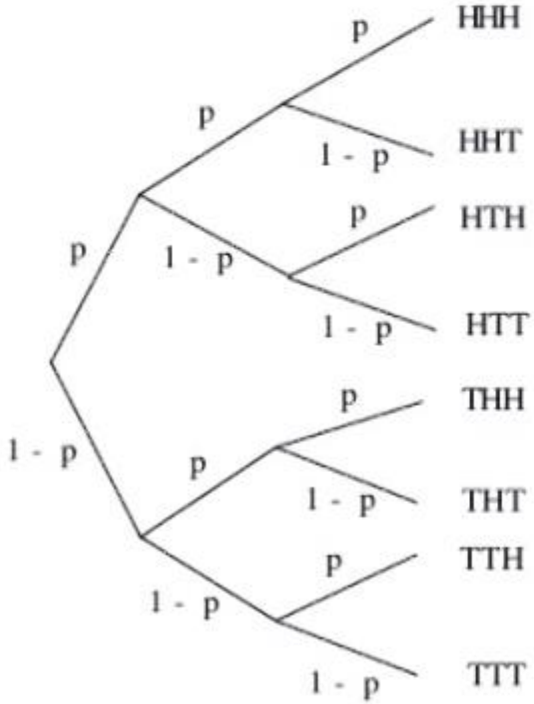


$n = 3$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo n; $p \in [0,1]$

- **Experimento**: n lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral**: Conjunto de sequencias de H e T, de tamanho n



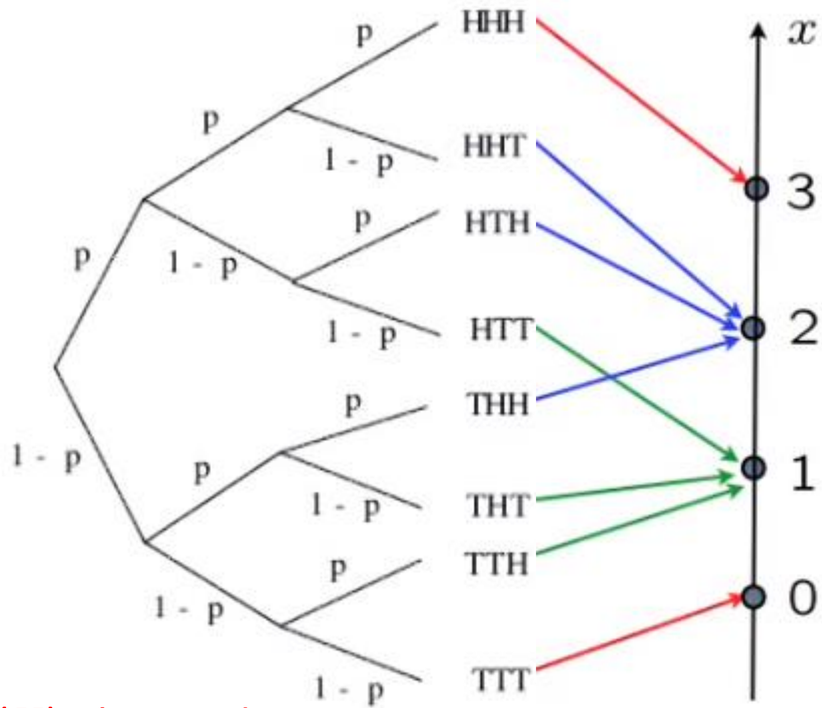
X: número de caras (H) observadas

$n = 3$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$

- **Experimento**: n lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral**: Conjunto de sequencias de H e T, de tamanho n



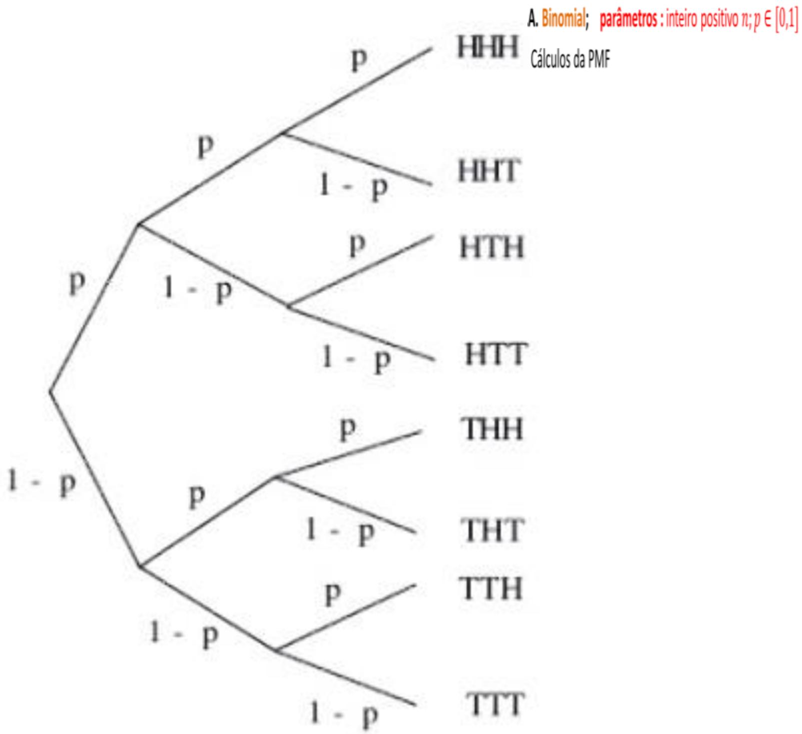
$n = 3$

X: número de caras (H) observadas

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; parâmetros : inteiro positivo $n; p \in [0,1]$

- Cálculos da PMF



X: número de caras (H) observadas
$n = 3$

$$
\begin{aligned}
p_X(2) &= P(X = 2) \\
&= P(HHT) + P(HTH) + P(THH) \\
&= 3.\,p^2(1-p) \\
&= \binom{3}{2}.\,p^2(1-p)
\end{aligned}
$$

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , para\ x = 0,1, \dots, n$$

Equação Binomial
Probabilidade de **x** sucessos em uma sequência de **n** tentativas independentes

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado e Variância – de PMF conhecidas

- Binomial:

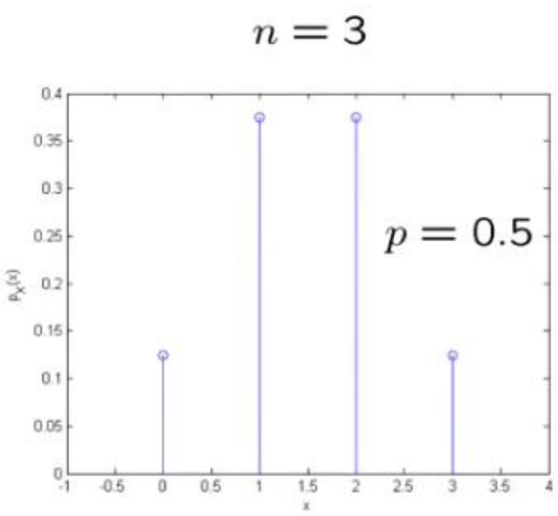
$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , para\ x = 0,1, \dots, n$$

$$\boldsymbol{E[X] = np}$$

$$\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$$

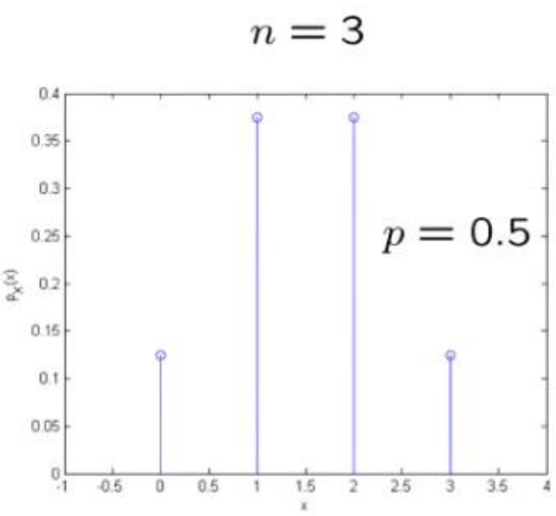
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

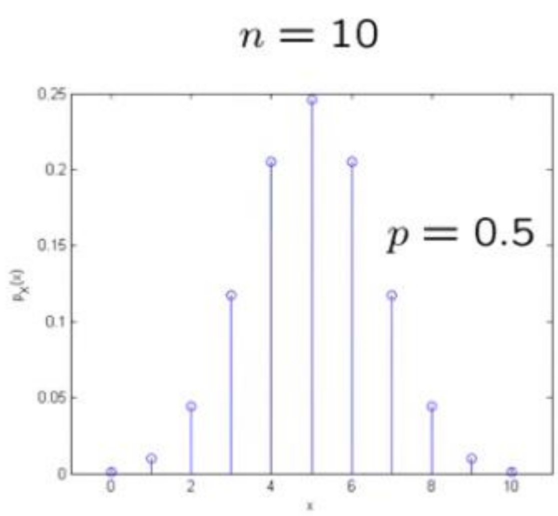
V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

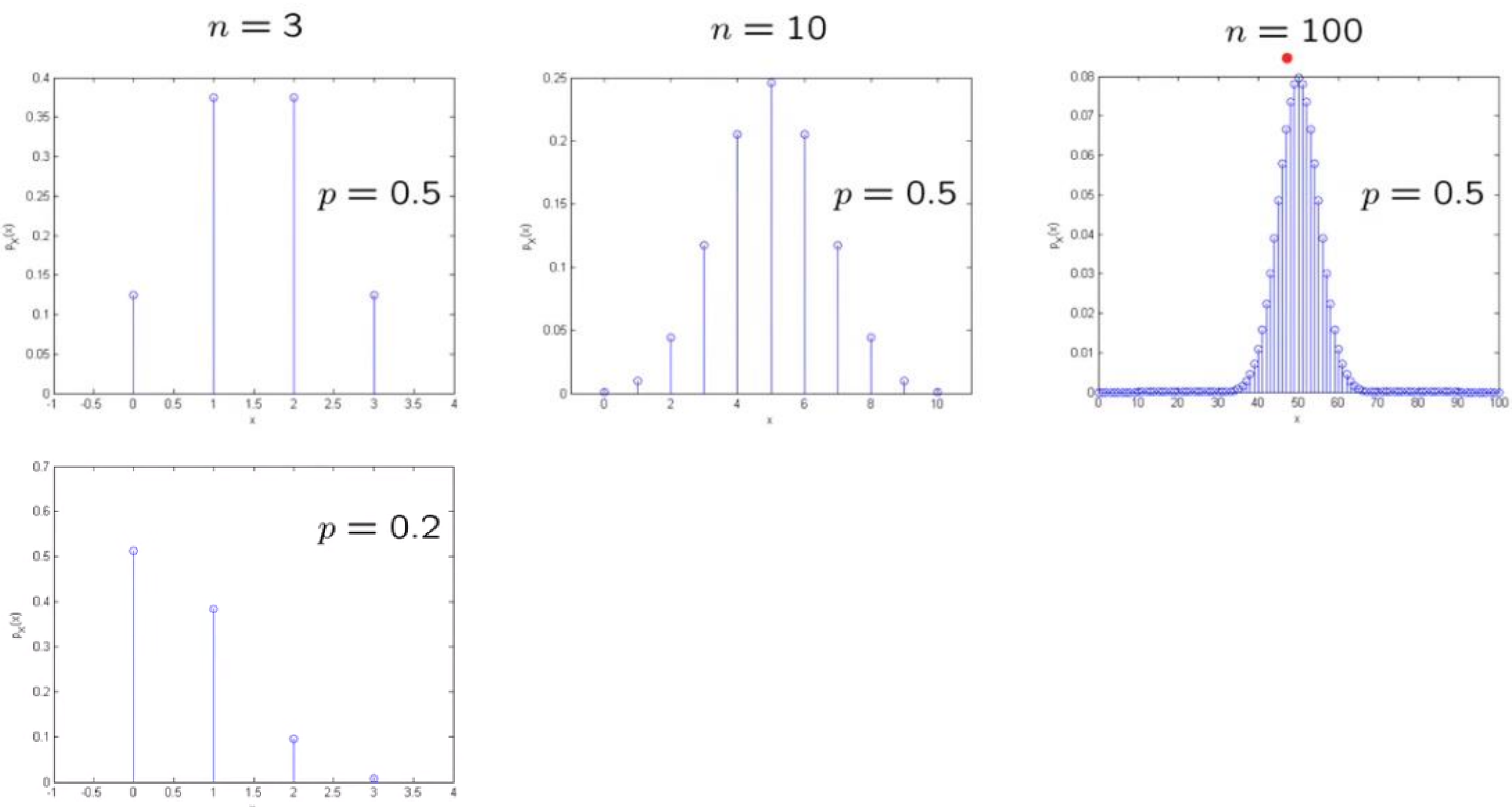
V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$





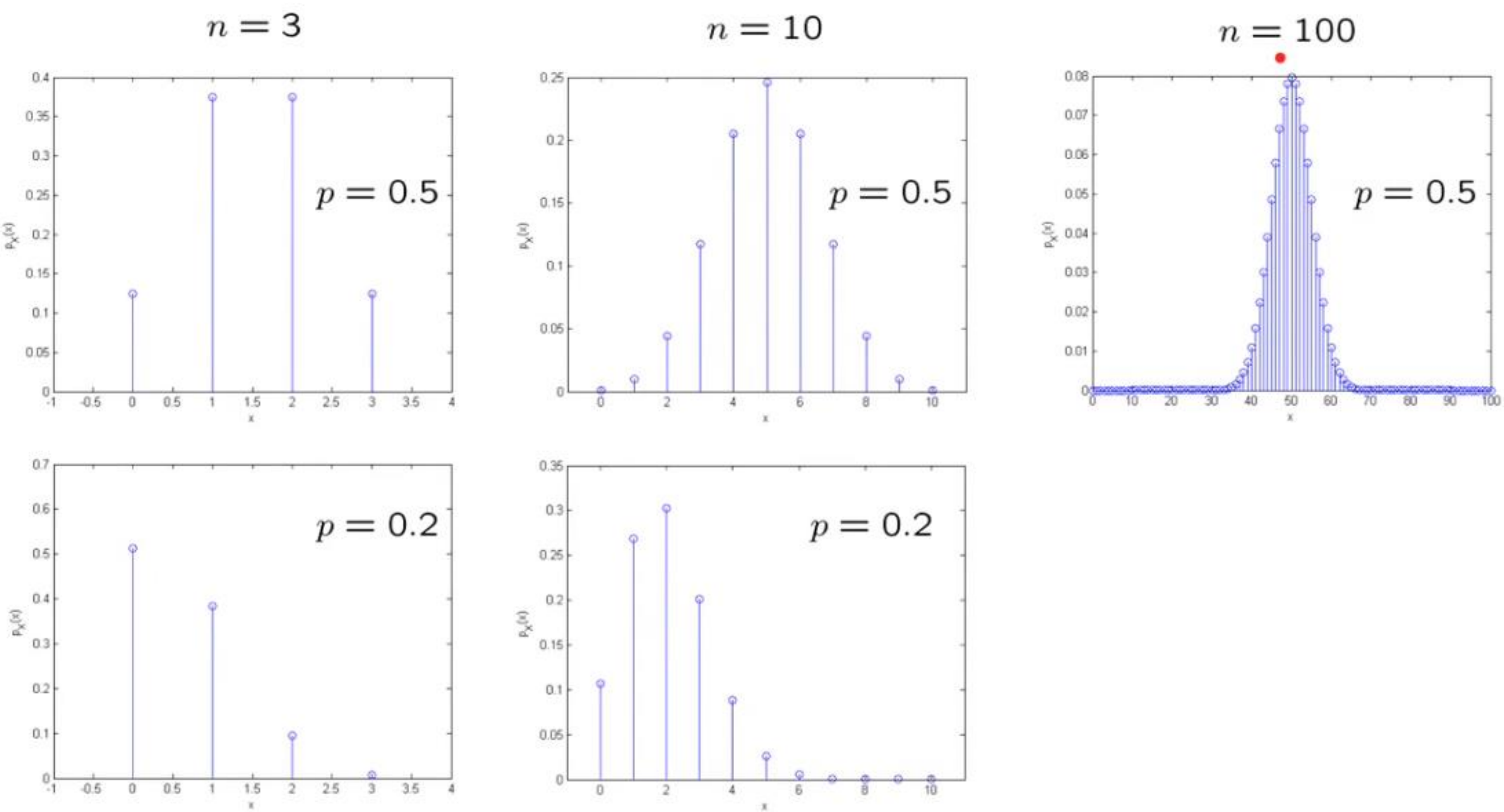
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$



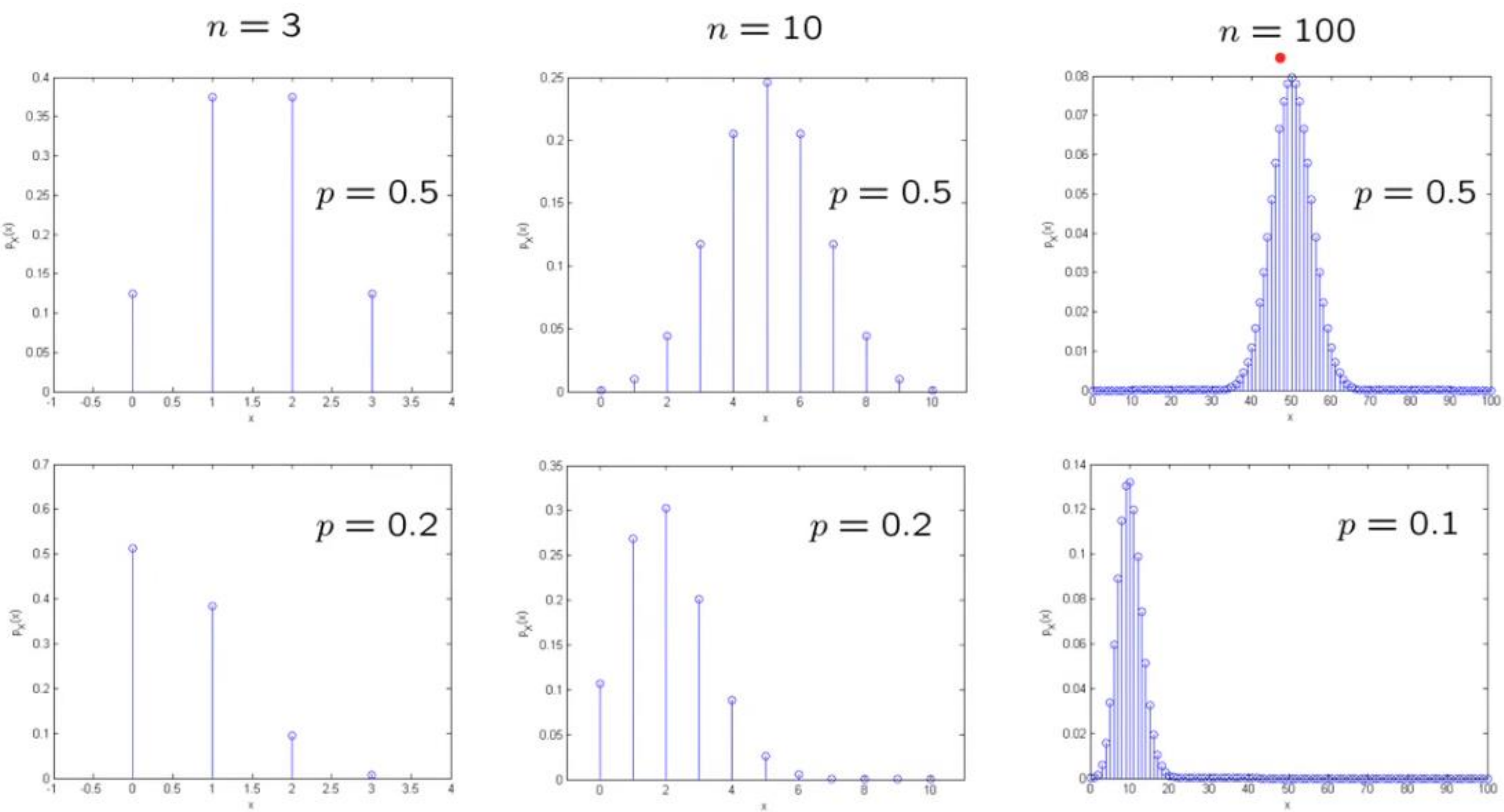
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo n; $p \in [0,1]$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Exercício:

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$

1) Você lança um dado justo (6-lados, igualmente prováveis) 5 vezes, independentemente. Seja X o número de vezes que o lançamento resultou em 2 ou 3. Encontre os seguintes valores numéricos:

   $a)$ $p_X(2.5) =$

   $b)$ $p_X(1) =$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Exercício:

V.A. Binomial; **parâmetros :** inteiro positivo $n; p \in [0,1]$

1) Você lança um dado justo (6-lados, igualmente prováveis) 5 vezes, independentemente. Seja X o número de vezes que o lançamento resultou em 2 ou 3. Encontre os seguintes valores numéricos:

$a)$ $p_X(2.5) = 0$

$b)$ $p_X(1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0.32922$

Para cada lançamento existe a prob de 2/6 = 1/3 de obter um 2 ou um 3. Uma vez que a v.a. $X \sim Bin\ (5, {}^{1}/_{3})$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-102:

Um teste de múltipla escolha contém 25 questões, cada uma com quatro respostas. Suponha que um estudante apenas tente “chutar” em cada questão:

a) Qual é a probabilidade de que o estudante responda mais de 20 questões corretamente?

b) Qual é a probabilidade de que o estudante responda menos de 5 questões corretamente?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-102:

Um teste de múltipla escolha contém 25 questões, cada uma com quatro respostas. Suponha que um estudante apenas tente "chutar" em cada questão:

a) Qual é a probabilidade de que o estudante responda mais de 20 questões corretamente?

n = 25
p = 0.25

$$a)P(X > 20) = \binom{25}{21} 0.25^{21}(0.75)^{4} + \binom{25}{22} 0.25^{22}(0.75)^{3} + \binom{25}{23} 0.25^{23}(0.75)^{2} + \binom{25}{24} 0.25^{24}(0.75)^{1} + \binom{25}{25} 0.25^{25}(0.75)^{0} = 9.677 \times 10^{-10}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-102:

Um teste de múltipla escolha contém 25 questões, cada uma com quatro respostas. Suponha que um estudante apenas tente "chutar" em cada questão:

a) Qual é a probabilidade de que o estudante responda menos de 5 questões corretamente?

$$b)P(X<5)=\binom{25}{0}0.25^{0}(0.75)^{25}+\binom{25}{1}0.25^{1}(0.75)^{24}+\binom{25}{2}0.25^{2}(0.75)^{23}$$
$$+\binom{25}{3}0.25^{3}(0.75)^{22}+\binom{25}{4}0.25^{4}(0.75)^{21}=0.2137$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-107:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) um bilhão de senhas do potencial conjunto, e a coincidência com a senha do usuário é chamado de êxito.

Qual é a distribuição do número de êxitos?

Qual é a probabilidade de nenhum êxito?

Quais são a média e o desvio padrão do número de êxitos?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-107:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente nove caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) um bilhão de senhas do potencial conjunto, e a coincidência com a senha do usuário é chamado de êxito.

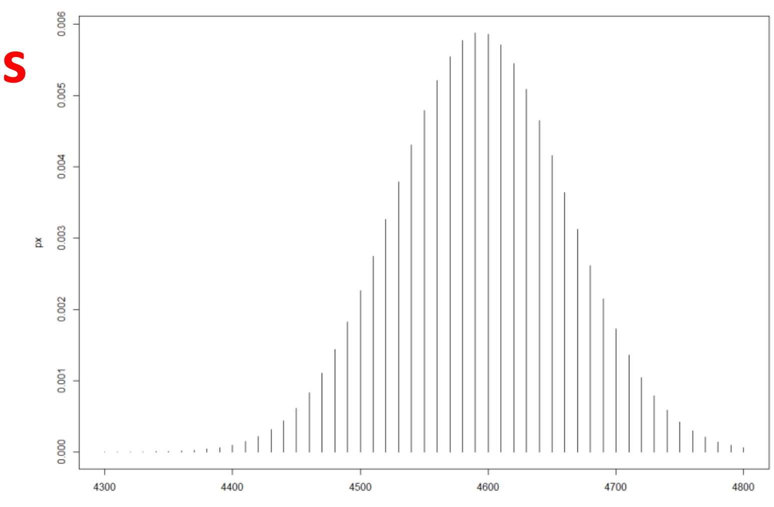
Qual é a distribuição do número de êxitos?

X = nº de êxitos em 1 bilhão de tentativas

Distribuição Binomial,

$p = 10^4/36^6 = 4.59394^{-06}$

$n = 10^9$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-107:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) um bilhão de senhas do potencial conjunto, e a coincidência com a senha do usuário é chamado de êxito.

Qual é a probabilidade de nenhum êxito?

$$P(X=0)=\binom{10^9}{0}p^0(1-p)^{10^9}=0.00$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial;

- 3-107:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) um bilhão de senhas do potencial conjunto, e a coincidência com a senha do usuário é chamado de êxito.

Quais são a média e o desvio padrão do número de êxitos?

$$\mu = E(X) = np = 10^9(0.45939^{-06}) = 4593.916 = 4.593$$

$$\sigma^2 = V(X) = np(1 - p) = 4593.937 = 4.593$$

$$\sigma = DP(X) = 67.77 = 67$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- **Experimento**: muitos (infinitos) lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral**: Conjunto infinito de sequencias de H e T

- **V. Aleatória**:
  - X: número de lançamentos até que H ocorra
  - X: número de **falhas** antes de **um sucesso.**

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- **Experimento**: muitos (infinitos) lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral**: Conjunto infinito de sequencias de H e T
- **V. Aleatória**: X: número de **lançamentos** até que H ocorra **um sucesso**;

$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\ldots$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- **Experimento**: muitos (infinitos) lançamentos independentes de uma moeda com $P(H) = p$
- **Espaço amostral**: Conjunto infinito de sequencias de H e T
- **V. Aleatória**: X: número de lançamentos até que H ocorra um sucesso;

$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\ \ldots$$

- **Modelo**: tempo de espera (esperando algo acontecer); número de tentativas até o sucesso, ... – experimentos, processos.. – interpretação de tentativa, e sucesso.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

$\underbrace{TTTTH}_{X=5}HT \ldots$

X: número de **lançamentos** até que H ocorra **um sucesso**;

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T \cdots T}_{k-1} H\right) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2,3, \ldots$

Positivos inteiros infinitos

$$\boxed{p_X(k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \text{para } k = 1,2,3 \ldots}$$

A distribuição geométrica é a distribuição do número de tentativas necessárias para se obter o primeiro sucesso em repetidos experimentos independentes de Bernoulli.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; parâmetro : p: $0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

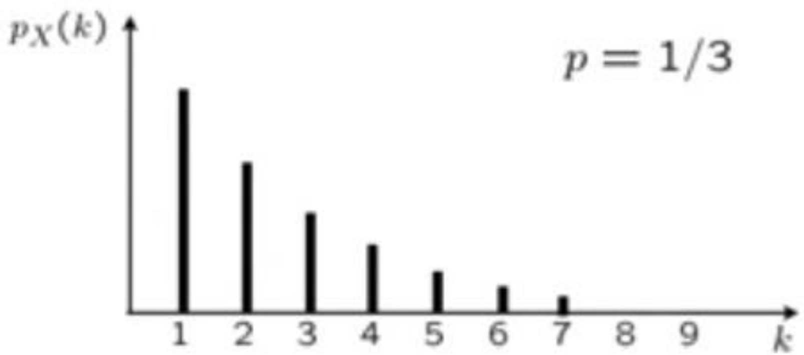
$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\,\ldots$$

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T\cdots T}_{k-1}\,H\right) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2,3, \ldots$

Positivos inteiros infinitos

Exemplo de PMF quando $p = 1/3$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

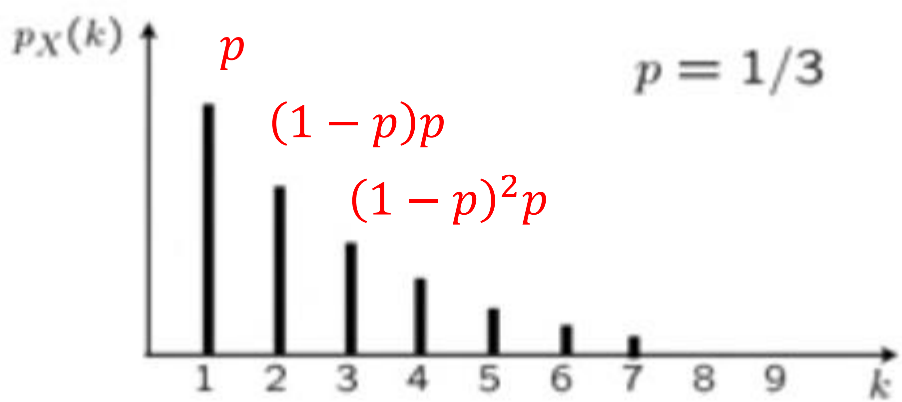
$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\,\ldots$$

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T\cdots T}_{k-1}\,H\right) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2,3, \ldots$

Positivos inteiros infinitos

Exemplo de FMP quando p = 1/3



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

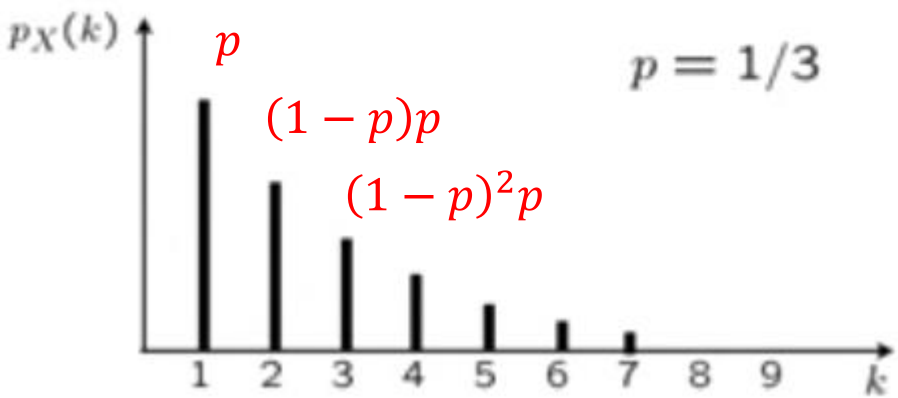
- **Cálculos:**

$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\, HT \ldots$$

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T \cdots T}\, H\right) = (1-p)^{k-1}p \qquad k = 1,2,3, \ldots$$

Positivos inteiros infinitos

Exemplo de FMP quando p = 1/3



p

$(1-p)p$

$(1-p)^2p$

$P(nunca\ obter\ H)$

$TTTTTTTT \cdots$

V.A. não está bem definida

"$X = \infty$"

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

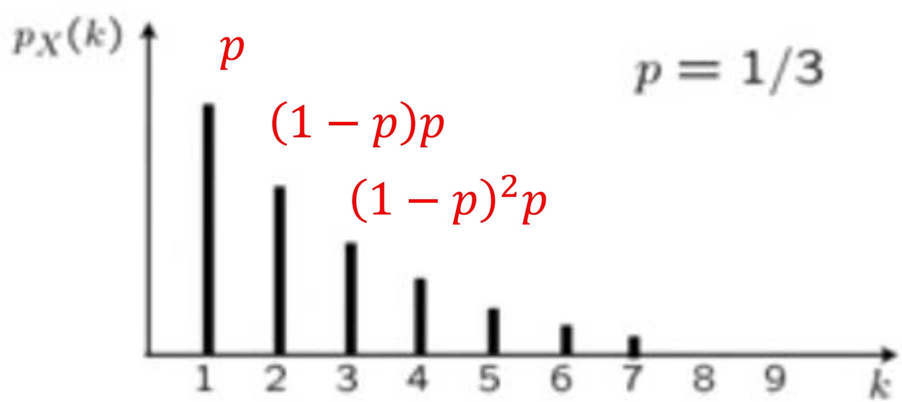
- **Cálculos:**

$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT \ldots$$

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T \cdots T}\, H\right) = (1-p)^{k-1}p \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Positivos inteiros infinitos

Exemplo de FMP quando p = 1/3



$P(nunca\ obter\ H)$

$TTTTTTTT \cdots$ → sempre ver coroas

V.A. não está bem definida

"$X = \infty$"

$\underbrace{T \cdots T}_{k}$ → ver coroas nas k primeiras tentativas

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p\colon 0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

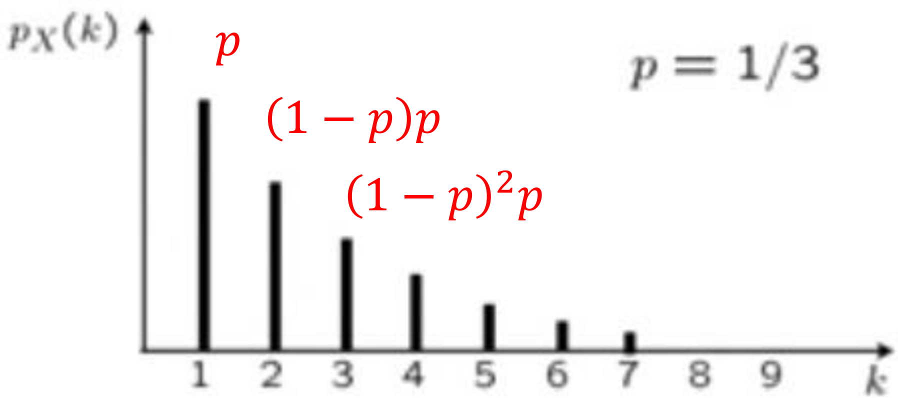
$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\ \ldots$$

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T \cdots T}\, H\right) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2,3,\ldots$

Positivos inteiros infinitos

Exemplo de FMP quando p = 1/3



$$P(nunca\ obter\ H) \leq \mathrm{P}\left(\underbrace{T \cdots T}_{k}\right) = (1-\mathrm{p})^{\mathrm{k}}$$

$k \to \infty$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

$$\underbrace{TTTT}_{X=4}HT\ldots$$

X: número de **falhas** antes de **um sucesso**.

$$p_X(x) = P(X = x) = P\Big(\underbrace{T\cdots T}_{x}H\Big) = (1-p)^x p \qquad x = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\boxed{p_X(x) = (1-p)^x p \qquad \text{para } x = 1,2,3\ldots}$$

Implementação na linguagem R

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; parâmetro : p: $0 < p \leq 1$

- **Cálculos:**

$$\underbrace{TTTTH}_{X=5}\,HT\ \ldots$$

X: número de **lançamentos** até que H ocorra **um sucesso**;

$$p_X(k) = P(X = k) = P\left(\underbrace{T \cdots T}_{k-1}\, H\right) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2,3, \ldots$

Positivos inteiros infinitos

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p \qquad \text{para } x = 1,2,3 \ldots$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- **Exercício:**
- **Seja** $\boldsymbol{X}$ uma v.a. geométrica com parâmetro p, encontre a probabilidade que $X \geq 10$.

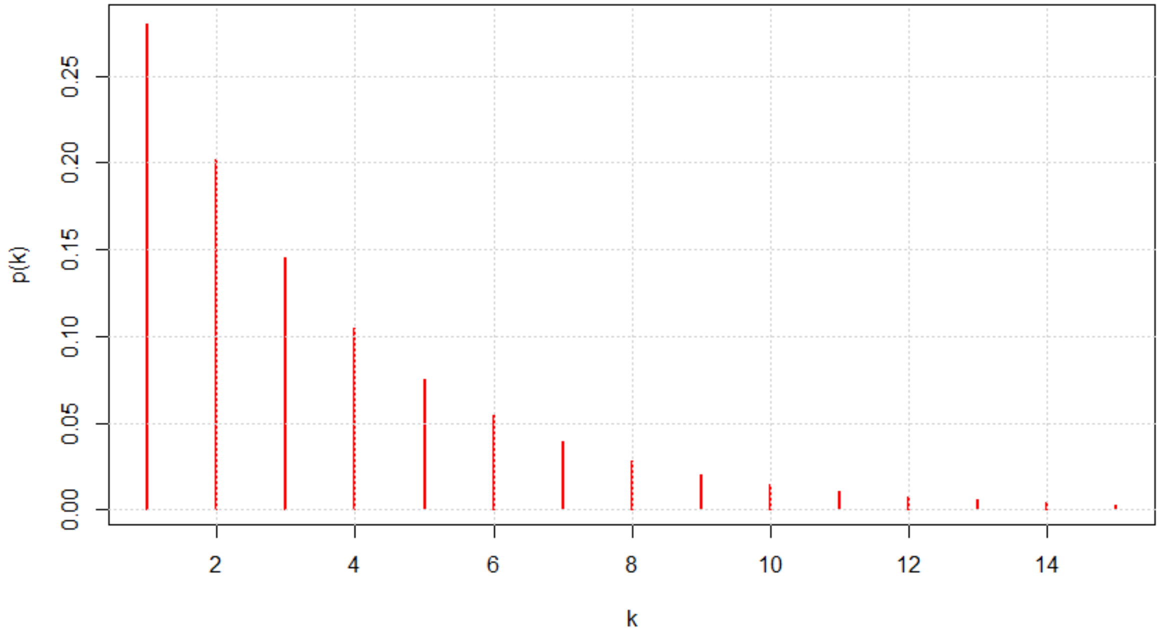
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- **Exercício:**

Lionel Messi acerta 28% dos seus chutes (Liga Espanhola 12/13)

- Qual a probabilidade de que Messi não acerte no gol até sua sétima tentativa ?



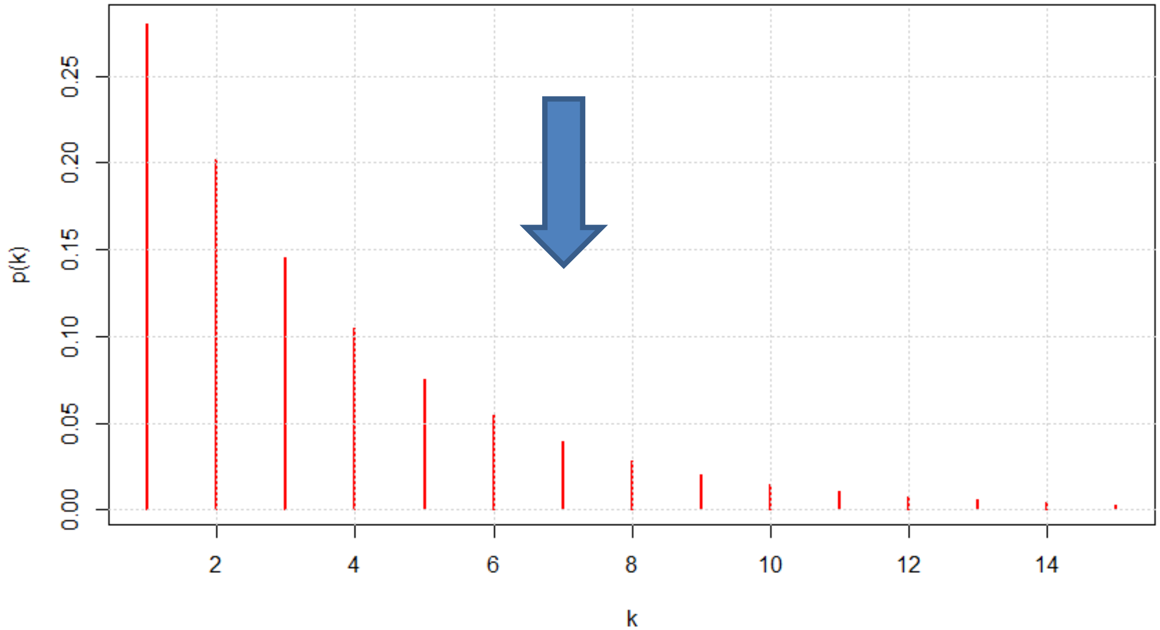
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- **Exercício:**

Lionel Messi acerta 28% dos seus chutes (Liga Espanhola 12/13)

- Qual a probabilidade de que Messi não acerte no gol até sua sétima tentativa ?



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- 3-128:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) senhas de um potencial conjunto.

Suponha que existam 9900 usuários com senhas com seis caracteres únicos no sistema, e o invasor seleciona aleatoriamente senhas com seis caracteres. Quais são o valor esperado (média) e o desvio-padrão do número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- 3-128:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) senhas de um potencial conjunto.

Suponha que haja 100 usuários com senhas com três caracteres únicas no sistema, e o invasor selecione aleatoriamente senhas com três caracteres. Quais são o valor esperado (média) e o desvio-padrão do número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- 3-128:

Um sistema de computadores usa senhas, que são exatamente seis caracteres, sendo cada caractere uma das 26 letras (a-z), ou 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários do sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) senhas de um potencial conjunto.

Comente a diferença entre as senhas de 3 e 6 caracteres.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** p: $0 < p \leq 1$

- 3-128:

Suponha que existam 9900 usuários com senhas com seis caracteres únicos no sistema, e o invasor seleciona aleatoriamente senhas com seis caracteres. Quais são o valor esperado (média) e o desvio-padrão do <u>número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário</u>?

X = <u>número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário</u>

$p = 9900/36^6 = 0.0000045$

$\mu = E(X) = 1/p = 219877$

$\sigma^2 = V(X) = (1 - p)/p^2 = 4.938E10^{10}$

$\sigma = DP(X) = 222,22$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica; **parâmetro :** $p: 0 < p \leq 1$

- 3-128:

Suponha que haja 100 usuários com senhas com três caracteres únicas no sistema, e o invasor selecione aleatoriamente senhas com três caracteres. Quais são o valor esperado (média) e o desvio-padrão do número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário?

$p = 100/36^3 = 0.00214$

$\mu = E(X) = 1/p = 467$

$\sigma^2 = V(X) = (1 - p)/p^2 = 217892.39$

$\sigma = DP(X) = 466.78$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Geométrica;

V.A. Binomial Negativa;

V.A. Poisson;

V.A. Hipergeométrica (amostragem sem reposição, dependentes)

Consultar página na web:

https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Binomial Negativa; parâmetro : $p: 0 < p \leq 1$

X: número de **tentativas** até que r **sucessos ocorram**;

$$\underbrace{TTTT\boldsymbol{H}TTT\boldsymbol{H}TT\boldsymbol{H}T\boldsymbol{H}}\ldots$$

$$p_X(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r \qquad \text{para } x = 1,2,3\ldots$$

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson; **parâmetro :** λ: $\lambda > 0$

X: número de **sucessos/ocorrências** em um **intervalo (tempo/espaço)**;

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda T} \lambda T^{x}}{x!}$$

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$\lambda = np$: Número médio de **sucessos/ocorrências** no **intervalo**

$$E[X] = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-167. ⊕ The number of surface flaws in plastic panels used in the interior of automobiles has a Poisson distribution with a mean of 0.05 flaw per square foot of plastic panel. Assume that an automobile interior contains 10 square feet of plastic panel.

(a) What is the probability that there are no surface flaws in an auto's interior?
(b) If 10 cars are sold to a rental company, what is the probability that none of the 10 cars has any surface flaws?
(c) If 10 cars are sold to a rental company, what is the probability that at most 1 car has any surface flaws?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-167. The number of surface flaws in plastic panels used in the interior of automobiles has a Poisson distribution with a mean of 0.05 flaw per square foot of plastic panel. Assume that an automobile interior contains 10 square feet of plastic panel.

(a) What is the probability that there are no surface flaws in an auto's interior?

X = número de falhas em um painel plástico de 10 pés quadrados.

X é uma v.a. Poisson com E(X) = λ = 0.05 * 10 = 0.5 falhas/painel

$$P(X = 0) = e^{-0.5} = 0.6065$$

Probabilidade de nenhuma falha em um painel plástico de um carro.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-167. ⊕ The number of surface flaws in plastic panels used in the interior of automobiles has a Poisson distribution with a mean of 0.05 flaw per square foot of plastic panel. Assume that an automobile interior contains 10 square feet of plastic panel.

(b) If 10 cars are sold to a rental company, what is the probability that none of the 10 cars has any surface flaws?

Y = número de carros sem falhas no painel, em 10 carros

Y é uma v.a. Binomial com p = 0.6065, n = 10

$$P(Y=10)=\binom{10}{10}(0.6065)^{10}(0.3935)^{0}=0.0067$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-167. ⊕ The number of surface flaws in plastic panels used in the interior of automobiles has a Poisson distribution with a mean of 0.05 flaw per square foot of plastic panel. Assume that an automobile interior contains 10 square feet of plastic panel.

(c) If 10 cars are sold to a rental company, what is the probability that at most 1 car has any surface flaws?

Seja W = numero de carros com falha na superfície em 10 carros.

Como o número de falhas tem uma distribuição de Poisson, as ocorrências de falhas de superfície em carros são eventos independentes com probabilidade constante.

De (a), a probabilidade de que um carro contenha falhas de superfície é 1 - 0,6065 = 0,3935.

Consequentemente, W tem uma distribuição binomial com n = 10 e p = 0,3935

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-167. ⊕ The number of surface flaws in plastic panels used in the interior of automobiles has a Poisson distribution with a mean of 0.05 flaw per square foot of plastic panel. Assume that an automobile interior contains 10 square feet of plastic panel.

(c) If 10 cars are sold to a rental company, what is the probability that at most 1 car has any surface flaws?

$$P(W=0)=\binom{10}{0}(0.3935)^{0}(0.6065)^{10}=0.0067$$

$$P(W=1)=\binom{10}{1}(0.3935)^{1}(0.6065)^{9}=0.0437$$

$$P(W\le 1)=0.0067+0.0437=0.0504$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-171. Cabs pass your workplace according to a Poisson process with a mean of five cabs per hour. Suppose that you exit the workplace at 6:00 P.M. Determine the following:

(a) Probability that you wait more than 10 minutes for a cab.

(b) Probability that you wait fewer than 20 minutes for a cab.

(c) Mean number of cabs per hour so that the probability that you wait more than 10 minutes is 0.1.

X = número de taxis que passam no seu trabalho em um intervalo de 10 minutos.

X é uma v.a. Poisson com parâmetro:

$\lambda = 5\ taxis/hora$

$$\lambda T = 5\frac{10}{60} = \frac{5}{6}\ \ Taxis \qquad P(X=0) = \frac{e^{-5/6}(5/6)^0}{0!} = 0.435$$

A probabilidade de nenhum taxi ocorrer no intervalo de 10 min

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-171. Cabs pass your workplace according to a Poisson process with a mean of five cabs per hour. Suppose that you exit the workplace at 6:00 P.M. Determine the following:

(a) Probability that you wait more than 10 minutes for a cab.

(b) Probability that you wait fewer than 20 minutes for a cab.

(c) Mean number of cabs per hour so that the probability that you wait more than 10 minutes is 0.1.

X = número de taxis que passam no seu trabalho em um intervalo de 20 minutos.

X é uma v.a. Poisson com parâmetro:

$\lambda = 5 \; taxis/hora$

$$\lambda T = 5\frac{20}{60} = \frac{5}{3} \quad Taxis$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = 1 - \frac{e^{-5/3}(5/3)^0}{0!} = 0.811$$

A probabilidade de um ou mais taxis aparecerem no intervalo de 20 min

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

V.A. Poisson;

3-171. Cabs pass your workplace according to a Poisson process with a mean of five cabs per hour. Suppose that you exit the workplace at 6:00 P.M. Determine the following:

(a) Probability that you wait more than 10 minutes for a cab.

(b) Probability that you wait fewer than 20 minutes for a cab.

(c) Mean number of cabs per hour so that the probability that you wait more than 10 minutes is 0.1.

Seja λ^* o número médio de taxis por hora e T=10/60 hora. Encontre o λ^* que satisfaça a seguinte condição:

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda^*/6}(\lambda^*/6)^0}{0!}=0.1$$

A probabilidade de nenhum taxi aparecer no intervalo de 10 min

$$e^{-\lambda^*/6}=0.1$$

$$-\frac{\lambda^*}{6}=\ln(0.1)$$

$$\lambda^*=13.816$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

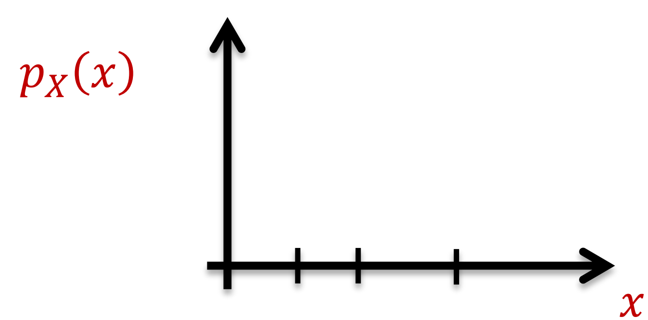
$$\mu = E(X) =$$

- Exemplo:

Suponha que você joga um jogo de azar, várias e várias vezes. A cada vez que você joga você tem a chance de ganhar uma certa quantidade aleatoriamente, X.

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{com prob. } 2/10 \\ \mathbf{2}, & \text{com prob. } 5/10 \\ \mathbf{4}, & \text{com prob. } 3/10 \end{cases}$$

ganho médio?



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

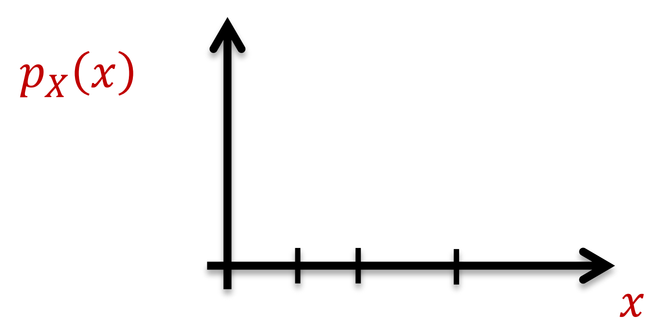
$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x)$$

- Exemplo:

Suponha que você joga um jogo de azar, várias e várias vezes. A cada vez que você joga você tem a chance de ganhar uma certa quantidade aleatoriamente, X.

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{com prob. } 2/10 \\ \mathbf{2}, & \text{com prob. } 5/10 \\ \mathbf{4}, & \text{com prob. } 3/10 \end{cases}$$

ganho médio?



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x)$$

- **Interpretação:**
  - É o valor médio obtido em uma grande quantidade de tentativas independentes de um experimento.
  - É o valor esperado em média que irá ocorrer nessas condições.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Expectância/Valor Esperado/média de uma v. aleatória

- Média ou valor esperado de uma v.a discreta X;

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

- **Interpretação:**
  - É o valor médio obtido em uma grande quantidade de tentativas independentes de um experimento.
  - É o valor esperado em média que irá ocorrer nessas condições.
- Precaução:
  - Se tivermos uma soma infinita (série infinita), é necessário que esta tenha limites bem definidos:

Assume-se que

$$\sum_x |x| p_X(x) < \infty \qquad \text{quantidade finita}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. Bernoulli

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x)$$

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x p_X(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. Bernoulli

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

Se X é uma variável indicadora de um evento I_A

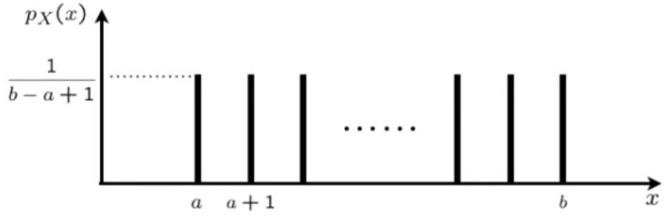
$X = 1$ se e somente se A ocorre.

$P = P(A)$

$E(X) = P(A)$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. **Uniforme**



- Uniforme em 0,1,...,n

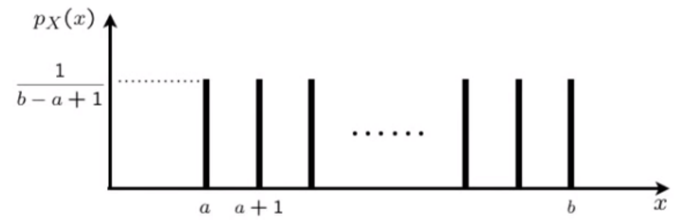
$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{n+1} + 1 \cdot \frac{1}{n+1} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}(0 + 1 + \cdots + n) = \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. **Uniforme**



- Uniforme em 0,1,...,n

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{n+1} + 1 \cdot \frac{1}{n+1} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}(0 + 1 + \cdots + n) = \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

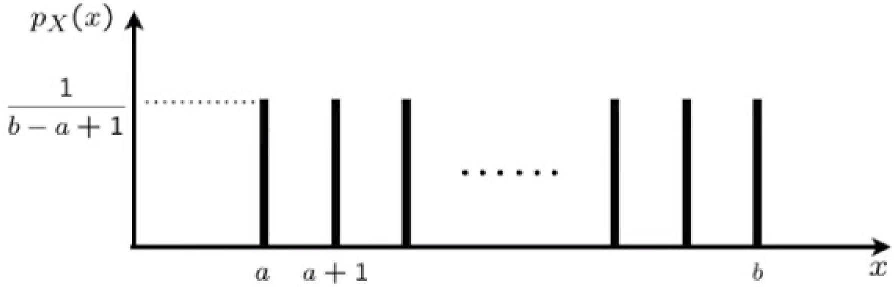
$$= \frac{n}{2}$$

ponto médio / centro de gravidade

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma v. a. Uniforme

- Uniforme **a** até **b**



$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x) = a \cdot \frac{1}{b-a+1} + \cdots + b \cdot \frac{1}{b-a+1}$$

$$= \sum_{k=a}^{b} k \left(\frac{1}{b-a+1} \right)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$ ponto médio / centro de gravidade

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma **população**

Outra interpretação do valor esperado/expectância

- Suponha uma turma com n estudantes, considere a v.a. peso x_i do i-ésimo aluno;
- Escolhe-se aleatoriamente um aluno (igualmente provável)
- V.A. X: peso de um estudante selecionado
  - Assume-se que os x_i são distintos

$$p_X(x_i) = \frac{1}{n}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média de uma **população**

- Outra interpretação de expectância
- Suponha uma turma com n estudantes, considere a v.a. peso x_i do i-ésimo aluno;
- Escolhe-se aleatoriamente um aluno (igualmente provável)
- V.A. X: peso de um estudante selecionado
  - Assume-se que os x_i são distintos

$$p_X(x_i) = \frac{1}{n}$$

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p_X(x) = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

média de peso dos alunos da turma

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média

- Cálculos de expectância:
- A função massa de probabilidade (PMF) de uma variável aleatória Y satisfaz
  - $p_Y(-1) = 1/6,$
  - $p_Y(2) = 2/6,$
  - $p_Y(5) = 3/6$ e
  - $p_Y(y) = 0$ para todos os outros valores de y.
- O valor esperado de Y é:

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média

- Cálculos de expectância:
- A função massa de probabilidade (PMF) de uma variável aleatória Y satisfaz
  - $p_Y(-1) = 1/6,$
  - $p_Y(2) = 2/6,$
  - $p_Y(5) = 3/6$ e
  - $p_Y(y) = 0$ para todos os outros valores de y.
- O valor esperado de Y é:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p_X(x) = -1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{18}{3} = 3$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média - **Propriedades**

- Se $\mathrm{X} \geq 0$, então $E(X) \geq 0$ (se X é não negativo)
  - Para todos ω: $X(\omega) \geq 0$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média - **Propriedades**

- Se $\mathrm{X} \geq 0$, então $E(X) \geq 0$ (se X é não negativo)
  - Para todos ω: $X(\omega) \geq 0$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

- Se $\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq b$, então $\mathrm{a} \leq E(X) \leq b$
  - Para todos ω: $a \leq X(\omega) \leq b$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média - **Propriedades**

- Se $X \geq 0$, então $E(X) \geq 0$ (se X é não negativo)
  - Para todos ω: $X(\omega) \geq 0$

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

- Se $a \leq X \leq b$, então $a \leq E(X) \leq b$
  - Para todos ω: $a \leq X(\omega) \leq b$

- Se c é uma constante, então $E(c) = c$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **com limites**

Ex) Suponha que a v.a. X possa assumir qualquer valor no intervalo $[-1,2]$ e a v.a. Y possa toma qualquer valor no intervalo $[-2,3]$.

a) A v.a. $X - Y$ pode tomar qualquer valor no intervalo $[a, b]$. Encontre os valores de a e b:

b) O valor esperado de $X + Y$ pode ser igual a 6?

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **com limites**

Ex) Suponha que a v.a. X possa tomar qualquer valor no intervalo $[-1,2]$ e a v.a. Y possa toma qualquer valor no intervalo $[-2,3]$.

a) A v.a. $X - Y$ pode tomar qualquer valor no intervalo $[a, b]$. Encontre os valores de a e b:

$[-4, 4]$

O menor valor de $X - Y = -1 - 3 = -4$

O maior valor de $X - Y = 2 - (-2) = 4$

b) O valor esperado de $X + Y$ pode ser igual a 6?

Não importa qual for o resultado do experimento o valor de $X + Y$ será no máximo 5, assim o valor esperado poderá ser no máximo 5.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

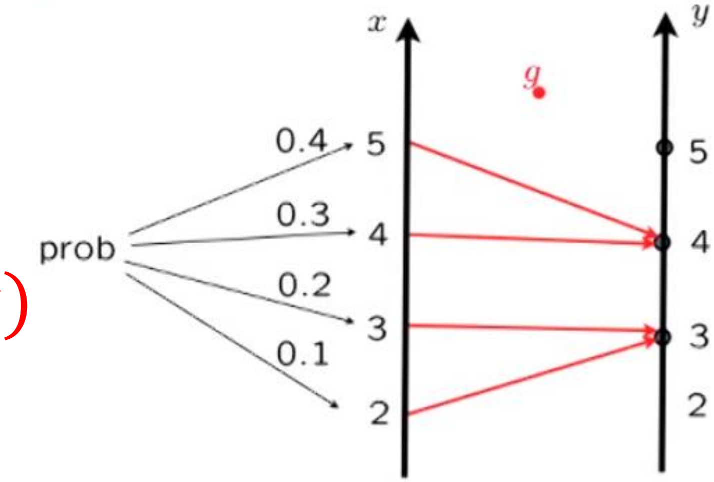
Valor Esperado/média – **para cálculos de função** $\boldsymbol{E[g(X)]}$

- Se X uma v.a. e $\mathrm{Y} = \mathrm{g(X)}$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **para cálculos de função $E[g(X)]$**

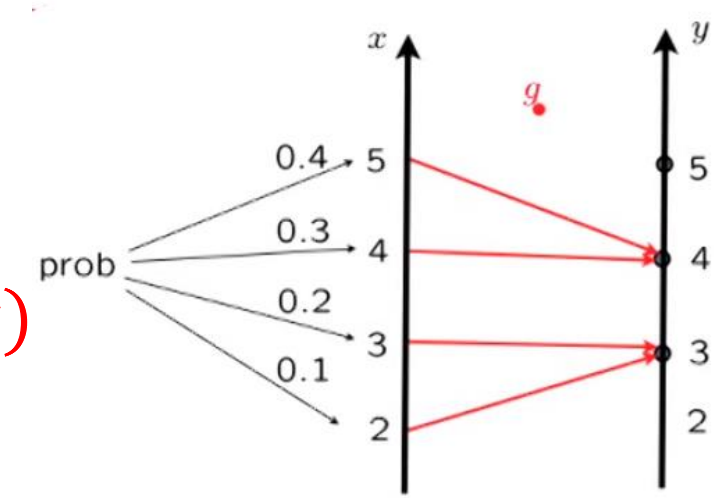
- Se X uma v.a. e $Y = g(X)$
- Média sobre y: $E(Y) = \sum_y y p_Y(y)$



Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **para cálculos de função $\boldsymbol{E[g(X)]}$**

- Se X uma v.a. e $\mathrm{Y = g(X)}$



- Média sobre y: $E(Y) = \sum_y y p_Y(y)$
- Forma alternativa:

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **para cálculos de função $\boldsymbol{E[g(X)]}$**

- $E(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x)$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **para cálculos de função $\boldsymbol{E[g(X)]}$**

- $E(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x)$
  - $g(x) = x^2$

- Cuidado: em geral $\boldsymbol{E[g(X)] \neq g(E[X])}$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **para cálculos de função $\boldsymbol{E[g(X)]}$**

- $E(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x)$
  - $g(x) = x^2$

- Cuidado: em geral $\boldsymbol{E[g(X)] \neq g(E[X])}$
  - $\boldsymbol{E[X^2] \neq (E[X])^2}$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **regra do valor esperado**

- Se X uma v.a. **uniforme** na faixa de valores de $\{-1,0,1,2\}$. Seja $Y = X^4$. Utilize a regra do valor esperado para calcular $E[Y]$.

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **regra do valor esperado**

- Se X uma v.a. uniforme na faixa de valores de $\{-1,0,1,2\}$. Seja $Y = X^4$. Utilize a regra do valor esperado para calcular $E[Y]$.

$$E(Y) = E(X^4) = \sum_x x^4 p_X(x) = (-1)^4.\frac{1}{4} + (0)^4.\frac{1}{4} + (1)^4.\frac{1}{4} + (2)^4.\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{16}{4} = 4.5$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Propriedade – Linearidade**

$$\boldsymbol{E[aX+b]=aE[X]+b}$$

- X = salário, $E(X)$ = salário médio
- Y = novo salário $= 2X + 100$
  - $E(Y) = E(2X + 100) = 2E(X) + 100$

- Para e somente para funções lineares temos que:

$$g(X) = ax + b$$

$$y = g(X)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Propriedade – Linearidade**

$$\boldsymbol{E[aX+b]=aE[X]+b}$$

- X = salário, $E(X)$ = salário médio
- Y = novo salário $= 2X + 100$
  - $E(Y) = E(2X+100) = 2E(X) + 100$

- Para e somente para funções lineares temos que:

$$g(X) = ax + b$$

$$y = g(X)$$

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

$$= \sum_x (ax+b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Propriedade – Linearidade**

$$\boldsymbol{E[aX+b]=aE[X]+b}$$

- X = salário, $E(X)$ = salário médio
- Y = novo salário $= 2X + 100$
  - $E(Y) = E(2X+100) = 2E(X) + 100$

$g(X) = ax + b$

$y = g(X)$

- Para e somente para funções lineares temos que:

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

$$= \sum_x (ax+b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$$

$$= aE(X) + \mathrm{b}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Propriedade – Linearidade**

$$\boldsymbol{E[aX+b]=aE[X]+b}$$

$$g(X)=ax+b$$

$$y=g(X)$$

- $X=$ salário, $E(X)=$ salário médio
- $Y=$ novo salário $=2X+100$
  - $E(Y)=E(2X+100)=2E(X)+100$
- Para e somente para **funções lineares** temos que:

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)$$

$$=\sum_x (ax+b)p_X(x)=a\sum_x xp_X(x)+b\sum_x p_X(x)$$

$$=aE(X)+\mathrm{b} \longrightarrow \boldsymbol{E[g(X)]=g(E[X])}$$

Exceção

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Linearidade Exercício**

- É conhecido que a v.a. X satisfaz $E[X] = 2$ e $E[X^2] = 7$. Encontre o valor esperado de $8 - X$ e $(X - 3)(X + 3)$.

- a) $E[8 - X] =$

- b) $E[(X - 3)(X + 3)] =$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Valor Esperado/média – **Linearidade Exercício**

- É conhecido que a v.a. X satisfaz $E[X] = 2$ e $E[X^2] = 7$. Encontre o valor esperado de $8 - X$ e $(X - 3)(X + 3)$.

- a) $E[8 - X] = 6$

- b) $E[(X - 3)(X + 3)] = -2$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância

- Mede o espalhamento ou dispersão de uma função massa de probabilidade.

- V.a. X, com média $\mu = E[X]$

- Distância ou afastamento da média: $X - \mu$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância

- Mede o espalhamento ou dispersão de uma função massa de probabilidade.
- V.a. X, com média $\mu = E[X]$
- Distância ou afastamento da média: $X - \mu$
- Qual distância média?
  - $E[X - \mu] = E[X] = E[X] - \mu = 0$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância

- Variância:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância

- Variância:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] \qquad \geq 0$$

- Cálculos, usando a regra do valor esperado,

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) \qquad g(x) = (x-\mu)^2$$

$$V[X] = E[g(X)] = \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância

- Variância:

$$\boxed{\sigma_X^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2]}$$

- Desvio padrão:

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V[X]}}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância - Propriedades

- Variância:

$$V(aX + b) = a^2V[X]$$

$$V(X + b) = V[X]$$

$$V(aX) = a^2V[X]$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância - Propriedades

- Variância: forma alternativa

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$V(X) = E[X^2] - (\mu)^2$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância - Exercícios

- Suponha que $V(X) = 2$. A variância de $2 - 3X$ é:

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

- $V(2 - 3X) =$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância - Exercícios

- É sempre verdade que $E[X^2] \geq (E[X])^2$?

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases} \qquad E[X] = p$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x) =$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \end{cases} \qquad \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{p}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x) = (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p)$$

$$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{p}(\mathbf{1} - \boldsymbol{p})$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

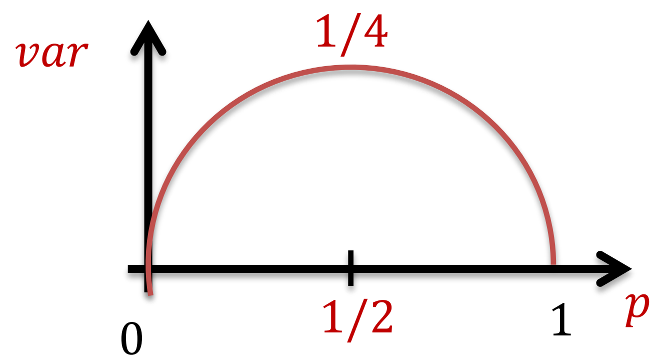
Variância – de PMF conhecidas

- Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$$E[X] = p$$

$$V(X) = p(1-p)$$



Intepretação: lançamento de uma moeda

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Uniforme:

$$\boldsymbol{E[X] = \frac{n}{2}}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{n+1}(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{1}{12} \cdot n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot n(n+2)$$

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

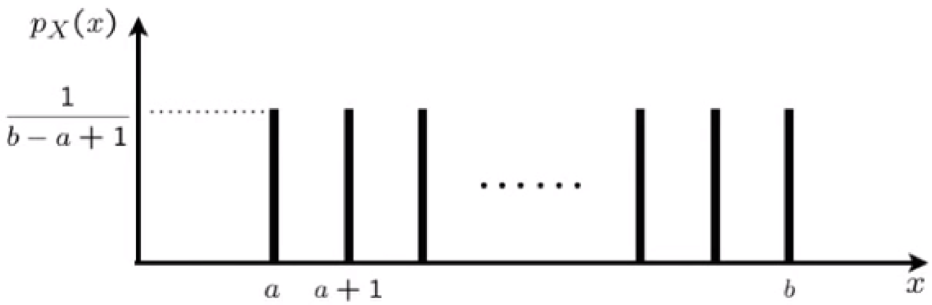
Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Uniforme:

$$E[X] = \frac{n}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{12} \cdot n(n+2)$$



$$E[X] = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Suponha que uma v.a. X tome valores do conjunto $\{0,2,4,6, \ldots, 2n\}$ (inteiros pares entre 0 e 2n, inclusive), com cada valor tento a mesma probabilidade. Qual é a variância de X?
- Dica: Considere a variável aleatória $Y = X/2$ e lembre-se que a variância de uma v.a. uniforme no conjunto $\{0,1,2, \ldots n\}$ é igual a $n(n+2)/12$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Variância – de PMF conhecidas

- Suponha que uma v.a. X tome valores do conjunto $\{0,2,4,6, \dots, 2n\}$ (inteiros pares entre 0 e 2n, inclusive), com cada valor tento a mesma probabilidade. Qual é a variância de X?
- Dica: Considere a variável aleatória $Y = X/2$ e lembre-se que a variância de uma v.a. uniforme no conjunto $\{0,1,2, \dots n\}$ é igual a $n(n+2)/12$

Seguindo a dica $Y = X/2$

A v.a. Y toma os valores no conjunto $\{0,1,2, \dots, n\}$, cada valor tem a mesma probabilidade. Assim, Y é uniforme com variância $n(n+2)/12$.

Assim $X = 2Y$

$$V(X) = V(2Y) = 4V(Y) = \frac{4}{12} n(n+2)$$

Capítulo 3. Variáveis aleatórias discretas

Leitura obrigatória

Hipergeométrica - livro

Binomial negativa - site

Poisson - site

Processo de Poisson – Material extra

https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/