Probabilidade Estatística e Processos Estocásticos

Probabilidade

Prof. André Wüst Zibetti
Departamento de Informática e Estatística (INE)
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

2017

Probabilidade

Introdução

Este material foi preparado utilizando como o base a seguinte bibliografia:

- Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros - Montogmery, Runger (2017) 6º edição

Figure 1: Livro

- O livro pode ser acessado gratuitamente através do link da BU-UFSC - **Minha Biblioteca (virtual) - link**

Leitura obrigatória

- Capítulo 2, seções: 2-1 a 2-8
- Exercícios de fixação deste tópico: Todos do capítulo 2
- Material de apoio extra (**website** - **link**) com simulação (códigos em R), exemplos resolvidos e conteúdo adicional

Probabilidade

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos
5. Interpretar e calcular probabilidade condicional

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos
5. Interpretar e calcular probabilidade condicional
6. Determinar independencia e usar independencia para calcular probabilidades

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos
5. Interpretar e calcular probabilidade condicional
6. Determinar independencia e usar independencia para calcular probabilidades
7. Entender o teorema de Bayes' e quando usa-lo

Objetivos

Após um estudo cauteloso deste capítulo, você estará habilitado a:

1. Entender e descrever espaços amostrais e eventos (experimento aleatório)
2. Interpretar probabilidades e calcular a probabilidade de um evento
3. Usar permutações e combinações para contar resultados
4. Calcular a probabilidade de eventos conjuntos
5. Interpretar e calcular probabilidade condicional
6. Determinar independencia e usar independencia para calcular probabilidades
7. Entender o teorema de Bayes' e quando usa-lo
8. Entender variáveis aleatórias

Espaço amostral e eventos

Experimento aleatório (ε)

Experimento aleatório (ε)

1. Um experimento é um procedimento que é realizado sob condições controladas, é executado para descobrir um resultado
2. Um experimento em que se obtêm diferentes resultados mesmo quando repetido toda a vez de uma mesma forma, é um experimento aleatório

Experimento aleatório (ε)

1. Um experimento é um procedimento que é realizado sob condições controladas, é executado para descobrir um resultado
2. Um experimento em que se obtêm <u>diferentes resultados</u> mesmo quando repetido toda a vez de uma mesma forma, é um experimento aleatório

Espaço amostral (Ω)

Espaço amostral (Ω)

1. O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, Ω
2. Ω é **discreto** se consiste de um conjunto finito ou infinito **contável** de resultados - **fruto de contagem**.
3. Ω é **contínuo** se contem um intervalo de números reais - **fruto de mensuração**.

Espaço amostral (Ω)

1. O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, Ω
2. Ω é **discreto** se consiste de um conjunto finito ou infinito **contável** de resultados - **fruto de contagem**.
3. Ω é **contínuo** se contem um intervalo de números reais - **fruto de mensuração**.

Espaço amostral (Ω)

1. O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, Ω
2. Ω é **discreto** se consiste de um conjunto finito ou infinito **contável** de resultados - **fruto de contagem**.
3. Ω é **contínuo** se contem um intervalo de números reais **- fruto de mensuração**.

Espaço amostral, definindo Ω

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \mathbb{R}^+ = \{x|x > 0\}$, números reais positivos.

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \mathbb{R}^+ = \{x|x > 0\}$, números reais positivos.
2. Suponha que é conhecido que todos os tempos de reciclo estão entre 1.5 e 5.0 segundos. Então

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$, números reais positivos.
2. Suponha que é conhecido que todos os tempos de reciclo estão entre 1.5 e 5.0 segundos. Então
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \{x | 1.5 < x < 5.0\}$, é contínuo.

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:
   - Espaço amostral, $\Omega = \mathbb{R}^+ = \{x|x > 0\}$, números reais positivos.
2. Suponha que é conhecido que todos os tempos de reciclo estão entre 1.5 e 5.0 segundos. Então
   - Espaço amostral, $\Omega = \{x|1.5 < x < 5.0\}$, é contínuo.
3. É conhecido que tempo de reciclo tem somente três valores (low, medium ou high). Então:

Espaço amostral, definindo Ω

1. Selecione aleatóriamente uma camera e grave o tempo de reciclo do flash:
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \mathbb{R}^+ = \{x|x > 0\}$, números reais positivos.
2. Suponha que é conhecido que todos os tempos de reciclo estão entre 1.5 e 5.0 segundos. Então
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \{x|1.5 < x < 5.0\}$, é contínuo.
3. É conhecido que tempo de reciclo tem somente três valores (low, medium ou high). Então:
   - Ω Espaço amostral, $\Omega = \{low, medium, high\}$, é discreto.

Espaço amostral definido como **diagrama de árvore**

Mensagens são classificadas como ontime(o) ou late(l). Classifique as próximas 3 mensagens.

$\Omega = \{ooo, ool, olo, oll, loo, lol, llo, lll\}$

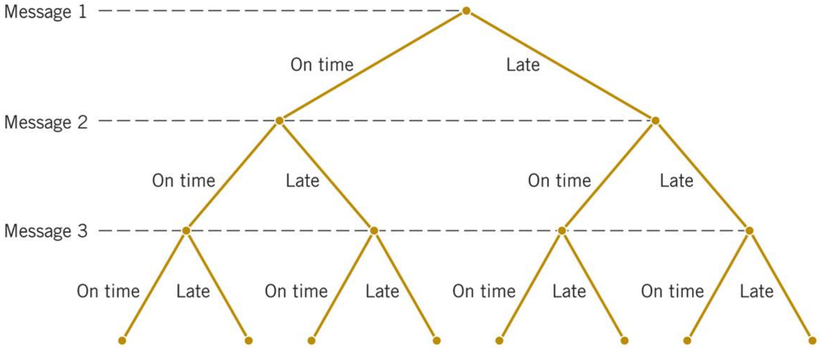
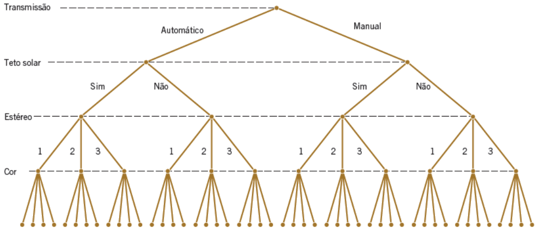


Figure 2: Diagrama de árvore

Espaço amostral definido como **diagrama de árvore**

Um fabricante de automóveis fornece veículos equipados com opcionais selecionados. Cada veículo é encomendado

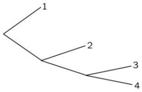
- Com ou sem transmissão automática
- Com ou sem teto solar
- Com uma das três escolhas de um sistema estéreo
- Com uma de quatro cores exteriores



Espaço amostral: exercício

Paulo verifica a previsão do tempo. Se a previsão é boa, Paulo vai sair para uma caminhada. Se a previsão for ruim, então Paulo vai querer ficar ou ir para fora de casa. Se ele sair, ele pode lembrar ou esquecer o seu guarda-chuva.

No diagrama de árvore abaixo, identifique a folha que corresponde ao caso em que a previsão é ruim e Paulo fica em casa.



Eventos: conjuntos de resultados

Um evento (E) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Combinação de eventos

Eventos: conjuntos de resultados

Um evento (E) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Combinação de eventos

1. A **União** de dois eventos consiste em todos os resultados que estão contidos em um evento ou no outro, denotado como $E_1 \cup E_2$.

Eventos: conjuntos de resultados

Um evento (E) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Combinação de eventos

1. A **União** de dois eventos consiste em todos os resultados que estão contidos em um evento ou no outro, denotado como $E_1 \cup E_2$.
2. A **Interseção** de dois eventos consiste de todas os resultados que estão contidos em um evento e no outro, denotado como $E_1 \cap E_2$.

Eventos: conjuntos de resultados

Um evento (E) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Combinação de eventos

1. A **União** de dois eventos consiste em todos os resultados que estão contidos em um evento ou no outro, denotado como $E_1 \cup E_2$.
2. A **Interseção** de dois eventos consiste de todas os resultados que estão contidos em um evento e no outro, denotado como $E_1 \cap E_2$.
3. O **Complemento** de um evento é o conjunto de resultados do espaço amostral que não está contido no evento, denotado como E^c ou E'.

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$
- Suponha, E_2 denote um evento nenhuma câmera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$
- Suponha, E_2 denote um evento nenhuma câmera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$
- Suponha, E_3 denote um evento evento que ao menos uma câmera não está nas especificações, então $E_3 = \{yn, ny, nn\}$,

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$
- Suponha, E_2 denote um evento nenhuma câmera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$
- Suponha, E_3 denote um evento evento que ao menos uma câmera não está nas especificações, então $E_3 = \{yn, ny, nn\}$,
- Assim, $E_1 \cup E_3 = \Omega$

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$
- Suponha, E_2 denote um evento nenhuma câmera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$
- Suponha, E_3 denote um evento evento que ao menos uma câmera não está nas especificações, então $E_3 = \{yn, ny, nn\}$,
- Assim, $E_1 \cup E_3 = \Omega$
- $E_1 \cap E_3 = \{yn, ny\}$

Eventos discretos

Suponha-se que os tempos de reciclo de duas câmeras são gravados. Considerar apenas se devem ou não as câmeras estarem em conformidade com as especificações do fabricante.

Abreviamos sim e não como y e n.

O espaço amostral é $\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$.

- Suponha, E_1 denote um evento que ao menos uma câmera está nas especificações, então $E_1 = \{yy, yn, ny\}$
- Suponha, E_2 denote um evento nenhuma câmera está dentro das especificações, então $E_2 = \{nn\}$
- Suponha, E_3 denote um evento evento que ao menos uma câmera não está nas especificações, então $E_3 = \{yn, ny, nn\}$,
- Assim, $E_1 \cup E_3 = \Omega$
- $E_1 \cap E_3 = \{yn, ny\}$
- $E_1^c = \{nn\}$

Eventos contínuos

As medidas de espessura de uma peça são modeladas com o espaço amostra:

$\Omega = \mathbb{R}^+$

Seja $E_1 = \{x|10 \leq x < 12\}$

Seja $E_2 = \{x|11 < x < 15\}$

Então:

- $E_1 \cup E_2 = \{x|10 \leq x < 15\}$

Eventos contínuos

As medidas de espessura de uma peça são modeladas com o espaço amostra:

$\Omega = \mathbb{R}^+$

Seja $E_1 = \{x|10 \leq x < 12\}$

Seja $E_2 = \{x|11 < x < 15\}$

Então:

- $E_1 \cup E_2 = \{x|10 \leq x < 15\}$
- $E_1 \cap E_2 = \{x|11 < x < 12\}$

Eventos contínuos

As medidas de espessura de uma peça são modeladas com o espaço amostra:

$\Omega = \mathbb{R}^+$

Seja $E_1 = \{x|10 \leq x < 12\}$

Seja $E_2 = \{x|11 < x < 15\}$

Então:

- $E_1 \cup E_2 = \{x|10 \leq x < 15\}$
- $E_1 \cap E_2 = \{x|11 < x < 12\}$
- $E_1^c = \{x|0 < x < 10 ex \geq 12\}$

Eventos contínuos

As medidas de espessura de uma peça são modeladas com o espaço amostra:

$\Omega = \mathbb{R}^+$

Seja $E_1 = \{x|10 \leq x < 12\}$

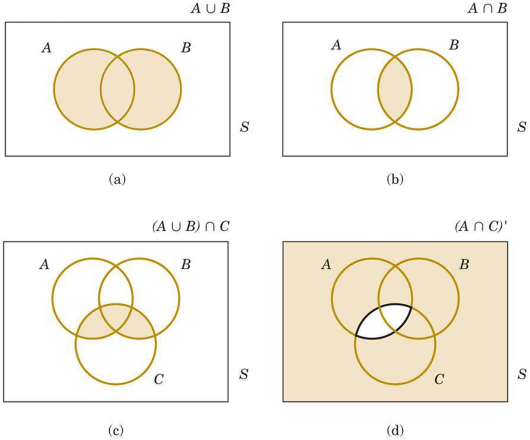
Seja $E_2 = \{x|11 < x < 15\}$

Então:

- $E_1 \cup E_2 = \{x|10 \leq x < 15\}$
- $E_1 \cap E_2 = \{x|11 < x < 12\}$
- $E_1^c = \{x|0 < x < 10 e x \geq 12\}$
- $E_1^c \cap E_2 = \{x|12 \leq x < 15\}$

Diagrama de Venn

Eventos A e B contém seus respectivos resultados. As regiões preenchidas indicam as relações dos eventos de cada diagrama.

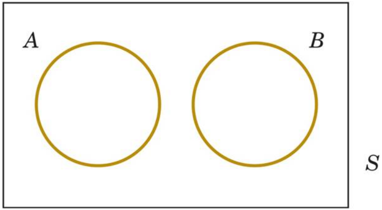


Eventos **mutuamente exclusivos**

Os eventos A e B são mutuamente exclusivos pois não compartilham resultados.

A ocorrência de um evento exclui a ocorrência do outro.

Simbolicamente, $A \cap B = \emptyset$



Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Lei associativa (como em algebra):

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Lei associativa (como em algebra):
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Conjuntos: Leis

- Lei comutativa (a ordem dos eventos não importa):
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- Lei distributiva (como em algebra):
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Lei associativa (como em algebra):
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Lei de **DeMorgan's**

O complemento da união é a interseção dos complementos.

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

O complemento a interseção é a união dos complementos.

Lei do complemento

Lei de **DeMorgan's**

O complemento da união é a interseção dos complementos.

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

O complemento a interseção é a união dos complementos.

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lei do complemento

Lei de **DeMorgan's**

O complemento da união é a interseção dos complementos.

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

O complemento a interseção é a união dos complementos.

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lei do complemento

- $(A^c)^c = A$

Técnicas de Contagem

Existem três regras especiais, ou técnicas de contagem, usado para determinar o número de resultados em eventos. São:

- Multiplicação
- Permutação
- Combinação

Cada um tem o seu propósito especial que deve ser aplicado corretamente - a ferramenta certa para o trabalho certo.

Técnicas de contagem: **Multiplicação**

Multiplicação

Seja uma operação que consiste de k etapas e existem,

- n_1 formas de completar a etapa 1
- n_2 formas de completar a etapa 2
- e ...
- n_k formas de completar a etapa k

Então, o número total de formas para efetuar os k passos é:

$$n_1 \cdot n_2 \dots n_k$$

Técnicas de contagem: **Multiplicação** - Exemplo

Na concepção de um site, podemos optar por usar entre

- 4 cores,
- 3 fonts, e
- 3 posições para uma imagem.

Quantos projetos são possíveis?

Resposta via regra da multiplicação:

$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Técnicas de contagem: **Permutação**

Permutações são os arranjos de elementos em que se tem em conta a ordem (ordem importa) com que são tomados.

Com a permutação sabemos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n, de uma população com tamanho N.

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Se temos sub-populações $n_1, n_2, ..., n_k$ tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, então

$$P_n = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Técnicas de contagem: **Combinação**

Combinações são arranjos que não consideram a ordem dos elementos (ordem não importa).

Se queremos ter amostras sem elementos repetidos, temos:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Se queremos ter amostras com elementos repetidos, temos:

$$C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Técnicas de contagem: Mini-resumo

Ordem			
Importa		Não Importa	
Repete	Não Repete	Repete	Não Repete
Multiplicação	Permutação	Combinação	
$n_1 \cdot n_2 ... n_k$	$P_n = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Técnicas de contagem: Exemplo

Suponha que temos uma população com $N = 6$ elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Vamos considerar as seguintes maneiras de sorteio:

1. Com ordem e repetição
2. Com ordem e sem repetição
3. Sem ordem e com repetição
4. Sem ordem e sem repetição
5. Somente repetição

Técnicas de contagem: Exemplo caso 1

1. Com ordem (ordem importa) e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Técnicas de contagem: Exemplo caso 2

2. Se queremos a amostra com ordem (ordem importa) e sem repetições, temos,

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{(4)!} = 30$$

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

Técnicas de contagem: Exemplo caso 3

3. Se queremos a amostra sem ordem (ordem não importa) e com repetições, temos,

$$C(n+k-1,k) = \binom{6+2-1}{2} = \frac{(7)!}{(5)!2!} = 21$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Técnicas de contagem: Exemplo caso 4

4. Se queremos a amostra sem ordem (ordem não importa) e sem repetições, temos,

$$C(n, k) = \binom{6}{2} = \frac{(6)!}{(4)!2!} = 15$$

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

Técnicas de contagem: Exercício 1

Exercício 1: Em uma caixa com 50 peças contém 3 defeituosas e 47 sem defeito.

Uma amostra de 6 peças é selecionado dentre o 50, sem reposição.

Quantas amostras de tamanho 6 pode conter exatamente 2 peças defeituosas?

Técnicas de contagem: Exercício 1 - resolução

Informações importantes:

- A ordem das peças não importa: ou seja não faz diferença aqui se a peça defeituosa 1 sair antes que a peça defeituosa 2, ou vice-versa.

Técnicas de contagem: Exercício 1 - resolução

Informações importantes:

- A ordem das peças não importa: ou seja não faz diferença aqui se a peça defeituosa 1 sair antes que a peça defeituosa 2, ou vice-versa.
- A amostragem é sem reposição: isso implica em que as peças não se repetem.

Técnicas de contagem: Exercício 1 - resolução

Informações importantes:

- A ordem das peças não importa: ou seja não faz diferença aqui se a peça defeituosa 1 sair antes que a peça defeituosa 2, ou vice-versa.
- A amostragem é sem reposição: isso implica em que as peças não se repetem.
- O problema apresenta várias restrições: o que faz com que tenhamos que resolve-lo em partes

Técnicas de contagem: Exercício 1 - resolução

Resolver o problema em partes:

- De quantas formas as peças defeituosas (duas) podem aparecer na amostra: (combinação, não importa a ordem e não se repete)

$$C(n,k) = \binom{3}{2} = \frac{(3)!}{(1)!2!} = 3$$

- De quantas formas as peças boas (quatro) podem aparecer na amostra: (combinação, não importa a ordem e não se repete)

$$C(47,4) = \binom{47}{4} = \frac{(47)!}{(43)!4!} = 178365$$

- De quantas formas amostras de tamanho 6 pode conter exatamente 2 peças defeituosas?

$$3 \cdot 178365 = 535095$$

Técnicas de contagem: Exercício 1 - resolução

Continuando com o **exercício 1**, de quantas formas possíveis uma amostra de tamanho 6 daquela população $N = 50$, pode ocorrer (espaço amostral Ω) ?

- Ordem não importa e não se repetem (combinação):

$$C(50,6) = \binom{50}{6} = \frac{(50)!}{(44)!6!} = 15890700$$

- Qual é a frequência relativa de que amostras de tamanho 6 com 2 peças defeituosas dessa população ocorra?

$$f_r = \frac{535095}{15890700} = 0.03367$$

Técnicas de contagem: Exercício 2

Exercício 2: Na concepção de um produto eletromecânico, 12 componentes devem ser empilhados em uma caixa cilíndrica de forma a minimizar o impacto de choques. Uma extremidade da caixa é designada como a parte inferior e a outra extremidade é a parte superior.

1. Se todos os componentes forem diferentes, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Técnicas de contagem: Exercício 2

Exercício 2: Na concepção de um produto eletromecânico, 12 componentes devem ser empilhados em uma caixa cilíndrica de forma a minimizar o impacto de choques. Uma extremidade da caixa é designada como a parte inferior e a outra extremidade é a parte superior.

1. Se todos os componentes forem diferentes, quantos projetos diferentes serão possíveis?
2. Se sete componentes forem todos idênticos, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Técnicas de contagem: Exercício 2

Exercício 2: Na concepção de um produto eletromecânico, 12 componentes devem ser empilhados em uma caixa cilíndrica de forma a minimizar o impacto de choques. Uma extremidade da caixa é designada como a parte inferior e a outra extremidade é a parte superior.

1. Se todos os componentes forem diferentes, quantos projetos diferentes serão possíveis?
2. Se sete componentes forem todos idênticos, quantos projetos diferentes serão possíveis?
3. Se três componentes forem de um tipo, mas idênticos entre si, e quatro componentes forem de outro tipo, mas idênticos entre si, porém os outros sendo diferentes, quantos projetos diferentes são possíveis?

Técnicas de contagem: Exercício 2 - resolução

1. Se todos os componentes forem diferentes, quantos projetos diferentes serão possíveis?

$$12! = 479001600$$

Técnicas de contagem: Exercício 2 - resolução

1. Se todos os componentes forem diferentes, quantos projetos diferentes serão possíveis?

$$12! = 479001600$$

2. Se sete componentes forem todos idênticos, quantos projetos diferentes serão possíveis?

$$P_n = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{12!}{7!1!1!1!1!1!} = 95040$$

Técnicas de contagem: Exercício 3

Exercício 3: plásticos produzidos por uma operação de moldagem por injeção são verificados em relação a conformidades relativas a certas especificações.

Cada ferramenta contém 12 cavidades, em que os itens são produzidos. Esses itens caem em um transportador quando a prensa se abre.

Um inspetor escolhe aleatoriamente três itens dentre os 12. Duas cavidades são afetadas por um mau funcionamento do controlador de temperatura, que resulta em itens que não obedecem às especificações.

1. De quantas formas o inspetor pode encontrar exatamente um item não conforme na amostra?

Técnicas de contagem: Exercício 3

Exercício 3: plásticos produzidos por uma operação de moldagem por injeção são verificados em relação a conformidades relativas a certas especificações.

Cada ferramenta contém 12 cavidades, em que os itens são produzidos. Esses itens caem em um transportador quando a prensa se abre.

Um inspetor escolhe aleatoriamente três itens dentre os 12. Duas cavidades são afetadas por um mau funcionamento do controlador de temperatura, que resulta em itens que não obedecem às especificações.

1. De quantas formas o inspetor pode encontrar exatamente um item não conforme na amostra?
2. De quantas formas o inspetor pode encontrar no mínimo um item não conforme na amostra?

Técnicas de contagem: Exercício 3 - resolução

1. De quantas formas o inspetor pode encontrar exatamente um item não conforme na amostra?

A quantidade é resolvida em etapas (multiplicação), primeira etapa é de quantas formas 2 das 10 peças boas pode aparecer na amostra, e a segunda etapa é de quantas formas 1 das 2 peças com defeito pode aparacer na amostra, ordem não importa e não se repete (combinação).

$$C(10,2) = \binom{10}{2} = \frac{(10)!}{(8)!2!} = 45$$

$$C(2,1) = \binom{2}{1} = 2$$

$$2 \cdot 45 = 90$$

Técnicas de contagem: Exercício 3 - resolução

2. De quantas formas o inspetor pode encontrar no mínimo um item não conforme na amostra?

Aqui, devemos considerar que 1 item não conforme na amostra, bem como dois itens não conformes.

Temos que para 1 conforme dentre os 10, temos

$$C(10,1) = \binom{10}{1} = \frac{(10)!}{(9)!1!} = 10$$

Assim, temos:

$$10 + 90 = 100$$

3. Qual é o tamanho do espaço amostral desse experimento?

$$C(12,3) = \binom{12}{3} = \frac{(12)!}{(9)!3!} = 220$$