Introdução à Probabilidade

Roteiro

Probabilidade

medida de incerteza

Objetivos

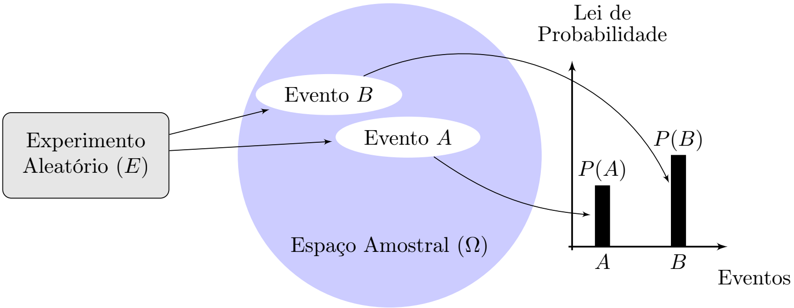
Queremos:

- investigar e descobrir padrões regulares em eventos aleatórios
- descrever incerteza em termos de modelos probabilísticos

Para isso, precisamos...
... descrever a estrutura geral de tais modelos e suas propriedades

Um modelo probabilístico consiste em uma descrição matemática de uma situação de incerteza.

Principais ingredientes:



Experimento Aleatório (E)

- Processo que pode (pelo menos conceitualmente) ser repetido indefinidamente sob condições idênticas.
- Sempre é possível obter um resultado que pertence a um conjunto fixo e conhecido de possibilidades.
- É chamado "aleatório" pois o resultado a ser obtido é desconhecido e imprevisível.

Espaço Amostral (Ω)

- É o **conjunto** de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório.

Exemplos

Evento ($A \subseteq \Omega$)

- É qualquer subconjunto (conjunto de resultados) do Espaço Amostral.

Um evento (A) é especificado por um conjunto de resultados de um experimento aleatório (E) que ***satisfaz determinadas condições***.

- Evento impossível
- Evento intersecção
- Evento união
- Evento complementar
- Eventos mutuamente exclusivos
- Partição do espaço amostral

Lei de probabilidade ($P[A]$)

- Atribui a um determinado evento A um número não negativo que codifica nossa crença na propensão para a ocorrência de A.

Conceito Clássico

$$P_N(A) = \frac{n_A}{N}$$

Premissas:

- Número finito de possíveis resultados
- Hipótese de equiprobabilidade de resultados
- "Princípio da indiferença"

Deficiências:

- Não faz sentido para N infinito
- Conceito de equiprobabilidade de resultados baseado no conceito de probabilidade que queremos definir
- Não é capaz de definir a probabilidade de eventos supostamente não equiprovavéis

$$P_N(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N}$$

Premissas:

- Número "suficientemente" grande de repetições do experimento aleatório
- Condições uniformes para realização do experimento
- Princípio da "Regularidade Estatística"

Deficiências:

- Definição de um número "suficientemente" grande
- Não é capaz de definir a probabilidade de eventos que não podem ser repetidos

Conceito Subjetivo

Premissas:

- Não necessita da hipótese de repetição do experimento
- Probabilidade assinalada a um determinado evento é baseada nas experiências pessoais e informação individual sobre o processo
- Não há aferição do resultado
- Pode ser matematicamente formalizado sob determinadas condições de consistência

Deficiências:

- Humanos são seres inconsistentes e contraditórios
- Não permite chegar a resultados únicos
- A natureza pessoal limita a utilização desse conceito em aplicações científicas e de Engenharia

Álgebra de Eventos ($\mathcal{A}$):
Uma coleção de eventos é $\mathcal{A}$ quando são satisfeitas as seguintes condições:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Se $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Função Probabilidade: (Kolmogorov)
$P : \mathcal{A} \longrightarrow \Re$

1. Se $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow P[A] \geq 0$
2. $P[\Omega] = 1$
3. $A_1, A_2, \ldots,$ eventos tais que $A_i \cap_{i \neq j} A_j = \emptyset$

$$\Longrightarrow P\left[\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

- Definição matemática
- Estabelece conjunto de funções de probabilidade
- Não determina valor de P para um determinado evento conhecido A

Propriedades da Função Probabilidade
(Conseqüências da definição axiomática)

1. $P[\emptyset] = 0$
2. $P\left[\cup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$
   (se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem mutuamente exclusivos)
3. $P[A] + P[A^C] = 1$
4. $0 \leq P[A] \leq 1$
5. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

- outras propriedades
- demonstração através dos axiomas