

Exercícios

A entrega desta tarefa deverá ser até o dia 22 de novembro, via SIGAA.

Questão 0

O modelo denominado SIR, ou Suscetíveis-Infectados-Recuperados, é um modelo matemático amplamente utilizado na epidemiologia para descrever a propagação de doenças infecciosas em uma população. Ele é uma ferramenta fundamental para entender e prever o curso de epidemias.

Quando um indivíduo suscetível é exposto a um indivíduo infectado, ele pode ou não adoecer imediatamente. Isso porque muitas infecções virais apresentam um período de incubação em que uma pessoa é exposta, mas não ainda contagiante. Isto é aparentemente verdade para o vírus SARS-CoV-2 associado a Pandemia do Covid19. Alguns estudos, como o de Ferguson et al. (2020) aponta um período de incubação de 5,1 dias com infecciosidade começando em 4,6 dias. Com isso em mente, podemos estender o modelo SIR introduzindo uma nova classe E de indivíduos expostos ao modelo SIR . O novo modelo, chamado de modelo **SEIR** (Suscetível-Exposto-Infectado-Recuperado), consiste nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \kappa E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \kappa E - \nu I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I - \mu R\end{aligned}\tag{1}$$

Um modelo da pandemia de Covid 19

Considere agora uma extensão do modelo SEIR, usado por autoridades da saúde da Noruega para prever a propagação da pandemia de Covid19 de 2020.

Para descrever o Covid 19, o modelo SEIR apresentado acima é modificado para incorporar duas características importantes da doença:

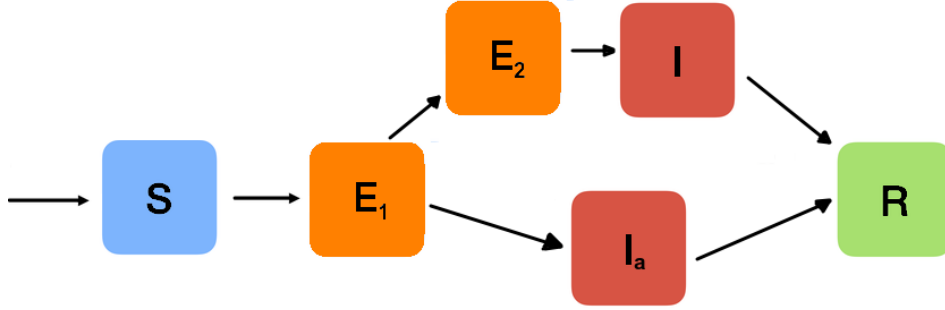
- Um certo número de pessoas infectadas com a Covid 19 não apresentam sintomas. Essas pessoas assintomáticas ainda podem infectar outras pessoas, mas com uma infecciosidade menor do que o grupo sintomático, e precisam ser tratadas como categoria separada.
- Um grande número de infecções ocorre antes que o infectante apresente sintomas, o que sugere uma categoria exposta adicional onde as pessoas são infecciosas, mas ainda não apresentam sintomas.

Essas características podem ser modeladas adicionando mais categorias ao SEIR modelo apresentado anteriormente. São incluídas duas categorias expostas

E_1 e E_2 , sendo o primeiro não infeccioso e o segundo capaz de infectar outros. A categoria I também é dividida em duas; um I sintomático e um I_a assintomático.

O fluxo de S para E_1 será semelhante ao modelo SEIR, mas de pessoas E_1 seguirá uma das duas trajetórias possíveis. Alguns passarão para a E_2 e depois em I e finalmente R , enquanto outros se movem diretamente para I_a e depois para R , de acordo com o modelo ilustrado na Figura 4.4.

Figure 1: Ilustração do modelo epidêmico Covid19, com duas doenças alternativas trajetórias.



A derivação das equações do modelo é semelhante aos modelos mais simples considerado acima, mas haverá mais equações, bem como mais termos em cada equação. A extensão mais importante dos modelos é que esse ultimo possui três categorias de pessoas infecciosas; E_2 , I e I_a . Todos estes interagem com a categoria S para criar novas infecções, e modelamos cada uma dessas interações exatamente como fizemos acima. Em um intervalo de tempo Δt , temos as seguintes contribuições para o fluxo de S para E_1 :

- Infectado por pessoas em I : $\Delta t \beta SI / N$
- Infectado por pessoas em I_a : $\Delta t r_{ia} \beta SI_a / N$
- Infectado por pessoas em E_2 : $\Delta t r_{e2} \beta SE_2 / N$

Permite-se que a infecciosidade seja diferente entre as três categorias, incorporadas através de um parâmetro de infecciosidade principal β e dois parâmetros r_{ia} , r_{e2} que dimensionam a infecciosidade para os dois respectivos grupos. Considerando todas as três contribuições, e seguindo os mesmos passos acima para construir uma equação de diferença e depois uma EDO, obtém-se a seguinte equação para o categoria S .

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} - r_{ia}\beta \frac{SI_a}{N} - r_{e2}\beta \frac{SE_2}{N} \quad (2)$$

Quando as pessoas são infectadas, elas passam de S para E_1 , então os mesmos três termos deve aparecer na equação para E_1 , com sinais opostos. Além disso, as pessoas em E_1 passará para E_2 ou I_a . Tem-se então

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} + r_{ia}\beta \frac{SI}{N} + r_{e2}\beta \frac{SE_2}{N} - \lambda_1(1-p_a)E_1 - \lambda_1 p_a E_1 \\
&= \frac{\beta SI}{N} + r_{ia}\beta \frac{SI}{N} + r_{e2}\beta \frac{SE_2}{N} - \lambda_1 E_1
\end{aligned} \tag{3}$$

Aqui, p_a é um parâmetro que descreve a proporção de pessoas infectadas que nunca desenvolvem sintomas, enquanto $1/\lambda_1$ é a duração média do período não infeccioso período de incubação. O termo $\lambda_1(1-p_a)E_1$ representa pessoas se mudando para E_2 , e $\lambda_1 p_a E_1$ são pessoas que se mudam para I_a . Na equação para E_1 pode-se combinar esses dois fluxos em um único termo, mas eles devem ser considerados separadamente nas equações para E_2 e I_a . A categoria E_2 terá um fluxo de pessoas do E_1 e uma saída de pessoas passando para a categoria I de infectados, enquanto recebe um influxo do E_2 e um fluxo para R . As EDOs para essas duas categorias tornam-se,

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \lambda_1(1-p_a)E_1 - \lambda_2 E_2 \\
\frac{dI}{dt} &= \lambda_2 E_2 - \mu I
\end{aligned} \tag{4}$$

onde, $1/\lambda_2$ e $1/\mu$ são as durações médias das fases E_2 e I , respectivamente.

O modelo para a trajetória da doença assintomática é um pouco mais simples, com I_a recebendo um influxo de E_1 e perdendo pessoas diretamente para R . Tem-se,

$$\frac{dI_a}{dt} = \lambda_1 p_a E_1 - \mu I_a \tag{5}$$

onde assumimos que a duração do período I_a é a mesma que para I , i.e. $1/\mu$. Por fim, a dinâmica da categoria recuperada é governada por

$$\frac{dR}{dt} = \mu I + \mu I_a \tag{6}$$

Observe que não consideramos o fluxo da categoria R de volta para S , então assumiram efetivamente imunidade ao longo da vida. Essa suposição provavelmente não está correto para o Covid19, mas como a duração da imunidade ainda é em grande parte desconhecido, e estamos principalmente interessados na propagação precoce da epidemia, negligenciamos a perda de imunidade. Para

resumir, o sistema EDO completo deste modelo pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{SI}{N} - r_{ia}\beta \frac{SI_a}{N} - r_{e2}\beta \frac{SE_2}{N} \\
\frac{dE_1}{dt} &= \beta \frac{SI}{N} + r_{ia}\beta \frac{SI_a}{N} + r_{e2}\beta \frac{SE_2}{N} - \lambda_1 E_1 \\
\frac{dE_2}{dt} &= \lambda_1(1 - p_a)E_1 - \lambda_2 E_2 \\
\frac{dI}{dt} &= \lambda_2 E_2 - \mu I \\
\frac{dI_a}{dt} &= \lambda_1 p_a E_1 - \mu I_a \\
\frac{dR}{dt} &= \mu(I + I_a)
\end{aligned} \tag{7}$$

No contexto da pandemia de COVID-19, ele pode ser usado para simular a propagação do vírus levando em consideração diferentes categorias de indivíduos expostos e infectados. As categorias consideradas são:

- Suscetíveis (S): Indivíduos que ainda não foram infectados pela doença e são suscetíveis à infecção.
- Expostos 1 (E1): Indivíduos que foram expostos ao vírus, mas ainda não são infecciosos. Nesta categoria, estão incluídos aqueles que podem desenvolver sintomas no futuro.
- Expostos 2 (E2): Indivíduos que foram expostos ao vírus e se tornaram infecciosos, mas ainda não apresentam sintomas.
- Infectados (I): Indivíduos infectados que desenvolvem sintomas.
- Infectados assintomáticos (Ia): Indivíduos infectados que não apresentam sintomas.
- Removidos (R): Indivíduos que se recuperaram da doença

Os parâmetros considerados neste modelo são os seguintes:

- β : Taxa de transmissão do vírus, que representa a probabilidade de um indivíduo suscetível ser infectado quando entra em contato com um indivíduo infeccioso.
- r_{ia} : Fração do termo de transmissão entre suscetíveis e infectados assintomáticos em relação aos infectados sintomáticos.
- r_{e2} : Fração do termo de transmissão entre suscetíveis e expostos infecciosos em relação aos infectados sintomáticos.
- λ_1 : Taxa de transição dos expostos 1 (E1) para os expostos 2 (E2).
- λ_2 : Taxa de transição dos expostos 2 (E2) para os infectados (I).

- p_a : Fração dos expostos infecciosos que se tornam infectados assintomáticos.
- μ : Taxa de remoção, que representa a taxa de recuperação ou mortalidade dos indivíduos infectados.

Esses parâmetros desempenham um papel importante na dinâmica da propagação da doença, influenciando as taxas de transmissão, o tempo de incubação, a proporção de indivíduos assintomáticos e a taxa de recuperação ou mortalidade.

É importante ressaltar que os valores dos parâmetros podem variar para diferentes populações e contextos epidemiológicos. Os valores utilizados aqui são apenas ilustrativos e não refletem necessariamente a realidade da COVID-19.

Considere o sistema apresentado na Eq. 7, resolva-o utilizando o método de Runge Kutta de quarta ordem.

- Considere os seguintes parâmetros: $\beta = 0.5$, $r_{ia} = 0.1$, $r_{ea} = 1.15$, $\lambda_1 = 0.33$, $\lambda_2 = 0.5$, $p_a = 0.4$ e $\mu = 0.2$. Esses parâmetros são baseados na fase inicial do surto de COVID 19 e pode nos dizer um pouco sobre a dinâmica da doença. Considere ainda que $S(0) = 5e6$, $I(0) = 1$ e $R(0) = 0.0$

Apresente, além do código computacional, os resultados em forma de gráficos e apresente a interpretação dos dados.

Questão 1

Implementar em Python os códigos do método Preditor-Corretor

1. Adams Basforth 2 passos e Moulton 2 passos.
2. Adams Basforth 3 passos e Moulton 4 passos.
3. Adams Basforth 4 passos e Moulton 4 passos.

Considere, para a resolução, a seguinte EDO.

$$y' = f(t, y) = (t - 3.2)y + 8te^{\left(\frac{(t-3.2)^2}{2}\right)} \cos(4t^2)$$

cujas solução analítica é dada por

$$E = y_0 e^{\left(\frac{(t-3.2)^2}{2}\right)} - \sin(4t_0^2)$$

$$y = e^{\left(\frac{(t-3.2)^2}{2}\right)} (\sin(4t^2) + E)$$

Considere ainda $y_0 = 0.75$; $t_0 = 0$; $t_f = 6$ e $N = 300$.

Questão 2

Para determinar a raiz da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, aplicando o Método da Secante, inicie com duas estimativas iniciais, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Utilize um critério de parada, como o valor absoluto da diferença entre duas iterações consecutivas menor que 10^{-6} .

Questão 3

Considere o problema de transferência de calor por condução, transiente, em um meio bidimensional com propriedades térmicas dependentes da temperatura, e condições de contorno de primeiro tipo (Dirichlet). A formulação matemática deste problema é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right) + g(x, y, t) = \rho c_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} \quad (8)$$

em $0 < x < a$, $0 < y < b$, para $t > 0$.

$T(x, 0, t) = T_1$, em $y = 0$, para $t > 0$

$T(a, y, t) = T_2$, em $x = a$, para $t > 0$

$T(x, b, t) = T_3$, em $y = b$, para $t > 0$

$T(0, y, t) = T_4$, em $x = 0$, para $t > 0$

$T(x, y, t) = T_0$, em $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, para $t = 0$, onde T representa a temperatura, g o termo fonte, k a condutividade térmica, ρ a massa específica e c_p o calor específico.

Obtenha a solução deste problema empregando aproximações por diferenças finitas. Varie todos os parâmetros e propriedades térmicas.

Com a equação discretizada em diferenças finitas, considere:

$T_{i,j}^{n+1}$ é a temperatura no ponto (i, j) no tempo $n + 1$.

$T_{i,j}^n$ é a temperatura no ponto (i, j) no tempo n .

Δt é o passo de tempo.

$k(T^n)$ é a condutividade térmica dependente da temperatura.

Δx e Δy são os intervalos de discretização em x e y , respectivamente.

Δx^2 e Δy^2 são os intervalos de discretização ao quadrado em x e y , respectivamente.

$g_{i,j}$ é o termo fonte.

ρ é a massa específica.

c_p é o calor específico.

Questão 4

Considere um material que está sendo submetido a processos de aquecimento e resfriamento, onde uma fonte de calor está localizada internamente. Apresente a resolução numérica da equação do calor bidimensional com uma fonte interna, mostrando como a temperatura se distribui ao longo do material e do tempo.

Parâmetros a serem considerados

$L_x = 10.0cm$ (Comprimento da placa na direção x)

$L_y = 10.0cm$ (Comprimento da placa na direção y)

$T = 2.0h$ (Tempo total)

$\alpha = 0.01cm^2/s$ (Difusividade térmica)

$nx = 100$ (Número de pontos na direção x)

$ny = 100$ (Número de pontos na direção y)

$nt = 400$ (Número de passos de tempo)

$$dx = \frac{L_x}{nx - 1}$$

$$dy = \frac{L_y}{ny - 1}$$

$$dt = \frac{T}{nt}$$

Condições Iniciais/Contornos:

$u[i, j = 0] = 0$ (Condições de Contorno na base)

$u[i, j = N_y - 1] = 0$ (Condições de Contorno no topo)

$u[0, j] = u_{\text{heat}}[N_x - 1, j] = 0$ (Condições de Contorno nas laterais)

$u[i, j = 0.5N_y] = 1$ (Fonte no centro da base)

onde i é o índice do espaço x , j é o índice do espaço y e N_x , N_y são o número de pontos na direção x e y , respectivamente.

Equação a ser resolvida: A equação do calor bidimensional com fonte é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S(x, y, t)$$

onde $S(x, y, t)$ é a fonte.

Faça uma mudança nas condições iniciais/Contorno e adote:

$u[i, j] = 25.0$ (Temperatura inicial da placa)

$S[i, j] = 100.0$ em $[i, j] = \left(\frac{nx}{4}, \frac{ny}{4} \right)$ (Fonte interna de calor)

Questão 5

A equação do momento na forma vetorial para um campo de velocidade \vec{v} é dada por:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (9)$$

Isso representa três equações escalares, uma para cada componente de velocidade (u, v, w)

Partindo da Equação 9, temos a seguir um sistema de equações diferenciais: duas equações para os componentes de velocidade u , v e uma equação para pressão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

O problema a seguir consiste em analisar a simulação de fluxo de fluido em uma cavidade quadrada 2D usando o método de diferenças finitas e simula o comportamento do fluido na cavidade sob condições de movimento de uma tampa.

A condição inicial é $u, v, p = 0$ em todos os lugares, e as condições de contorno são:

$u = 1$ em $y = 2$ (a "tampa");

$u, v = 0$ nas fronteiras restantes;

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ em $y = 0$;

$p = 0$ em $y = 2$

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ em $x = 0$ e $x = 2$

Os demais parâmetros utilizados na simulação: Número de etapas de tempo $nt = 700$, número de iterações para a Pressão de Poisson $nit = 50$, densidade do Fluido: $\rho = 1$, viscosidade Cinemática do Fluido: $\nu = 0.1$, intervalo de tempo por etapa: $dt = 0.001$.

Questão 6

Reproduzir a modelagem do Anexo 1, em python. Apresente os gráficos correspondentes.