图算法思考题 PART2

by 吕瑞

22-4 可达性

22-4 （可到达性） 设 $G=(V, E)$ 为一个有向图，且每个结点 $u\in V$ 都标有一个唯一的整数值标记 $L(u)$，$L(u)$ 的取值为集合 $\{1, 2, \cdots, |V|\}$。对于每个结点 $u\in V$，设 $R(u)=\{v\in V: u\rightsquigarrow v\}$ 为从结点 u 可以到达的所有结点的集合。定义 $\min(u)$ 为 $R(u)$ 中标记为最小的结点，即 $\min(u)$ 为结点 v，满足 $L(v)=\min\{L(w): w\in R(u)\}$。请给出一个时间复杂度为 $O(V+E)$ 的算法来计算所有结点 $u\in V$ 的 $\min(u)$。

> 基本图算法：BFE,DFS,有向无环图的拓扑排序，强连通分量算法. 他们都是 O(V+E) 的算法;

答:

1. 调用强连通分量算法，找出所有 loop， 每个 loop 都缩成一个点，得到新图 G‘
2. 对 G’ 拓扑排序（DFS的应用），得到一个序列 P;
3. 逆序遍历 P 中的顶点，根据前驱关系，向前更新顶点的 key 值（L(u)）;
4. 若仍有未设置过 key 值的顶点（图中不止一个连通片），P 中删除已经遍历过的顶点，重复（3）。

23-3 瓶颈生成树

23-3 （瓶颈生成树） 无向图 G 的**瓶颈生成树** T 是 G 的一棵生成树，其最大边的权重是 G 的所有生成树中最小的。我们称瓶颈生成树 T 的值是 T 中最大权重边的权重。

a. 证明：最小生成树是瓶颈生成树。

本题的(a)部分显示，找出一棵瓶颈生成树并不比找出一棵最小生成树更难。在本题余下的部分，我们就来演示如何在线性时间内找到一棵瓶颈生成树。

b. 请给出一个线性时间的算法，在给定图 G 和整数 b 的情况下，能够判断瓶颈生成树的值是否最大不超过 b。

c. 使用本题(b)部分的算法，设计一个瓶颈生成树问题的线性时间算法，该算法将以(b)部分的算法作为子程序。（提示：考虑使用一个子程序来对边的集合进行收缩，就如思考题 23-2 中所描述的 MST-REDUCE 算法一样。）

a：

反证：若 MST 不是瓶颈生成树，则有一棵瓶颈生成树 T’

- MST 中权值最大的边 e 的值大于 T’ 中权值最大的 e’，即 e 大于T’ 中所有边的权值。
- 删除 MST 中的 e，MST 变为两个连通片。此时 T’ 中必然存在一条边 e_0，能连接这两个连通片，形成一棵新的生成树 T_0
- w(e_0) < w(e)， 所以 w(T_0) < w(MST)， 这与前提矛盾。

综上，原命题得证。

b：

- 删除图中所有权值超过 b 的边，有新图 G’;
- DFS(G) 直到图中没有白色点，搜索树的树边就是一棵边权值不超过 b 的瓶颈生成树。