第2章 线性规划

2.4 两阶段单纯形算法

两阶段法

- 两阶段法解决如何找到单纯形算法的第一个基本可行解（即初始解）的问题。
- 该方法的第一个阶段找一个初始解，第二阶段运行基本的单纯形算法，故称为“两阶段法”。

辅助问题

设原问题为
$$\min\ z=c^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}$$
。不妨假设$\boldsymbol{b}\geq\mathbf{0}$。

考虑如下问题（辅助问题）

$$\min\ g=\sum_{i=n+1}^{n+m}x_i$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}Ax+x_a=b\\ x\geq 0,\quad x_a\geq 0\end{cases},$$

其中$\boldsymbol{x}_a=(\boldsymbol{x}_{n+1},\boldsymbol{x}_{n+2},\dots,\boldsymbol{x}_{n+m})^{\mathrm{T}}$。

基本思想

引理 记原 LP 的可行域为 D，辅助 LP 的可行域为 D'。则有：

$D \neq \phi \Leftrightarrow g^* = 0$，其中 g*是辅助问题的最优解

证明：

- (⇒) $D \neq \phi \Rightarrow \exists x, Ax = b, x \geq 0$。令 $x' = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $Ax + 0 = b$，$x' \geq 0$，因此 $x' \in D'$。
- 由 $g(x') = 0$，又因为 $g(.) \geq 0$，可知 $g^* = 0$。
- (⇐)不妨令使 $g^* = 0$ 的解为 $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_a \end{pmatrix}$。由于 $g\left(\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_a \end{pmatrix}\right) = 0$，可知 $\tilde{x}_a = 0$。因此，$A\tilde{x} = b$，即 $\tilde{x} \in D$。□

求辅助LP的最优解得到原LP的bfs

1．如果原 LP 有可行解，则辅助 LP 的最优值为 0，反之亦然。

2．由于 $b \geq 0$，所以以 $x_a = (x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ 为基变量，就可以得到辅助 LP 的初始基本可行解$(0, b^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 。

3．由于辅助 LP 有可行解，且 $g(.) \geq 0$，即目标函数有下界，所以辅助 LP 一定有最优解。

求辅助LP的三种情况

使用单纯形法，解辅助 LP，得其最优基可行解 $(\tilde{x}, \tilde{x}_a)$。

（1）$g^* = 0$ 且所有人工变量均为非基变量，则此时 $\tilde{x}$ 是原 LP 的基本可行解。

由于最优值为 0，可知 $\tilde{x}_a = 0$，所以 $\tilde{x}$ 是原 LP 的可行解。

由于 $(\tilde{x}, \tilde{x}_a)$ 是辅助 LP 的基本可行解，所以其非零分量（均在 $\tilde{x}$ 中）对应系数矩阵的列向量线性无关，所以 $\tilde{x}$ 是原 LP 的基本可行解。

（2）$g^* = 0$ 但某些人工变量为基变量。

（3）$g^* > 0$，则原 LP 没有可行解。

$g^* = 0$，但存在人工变量为基变量

- 设第一阶段的最优单纯形表如下：

	x_1	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	$x_{B(r)}$	$\cdots$	x_{n+m}	
	μ_1	$\cdots$	μ_s	$\cdots$	μ_n	μ_{n+1}	$\cdots$	$\mu_{B(r)}$	$\cdots$	μ_{n+m}	0
$x_{B(1)}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(r)}$	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_m$

- 设人工变量 $x_{B(r)}$是一个基变量（$n+1 \le B(r) \le n+m$）。
- 考察第 r 行原变量所对应的前 n 个元素，即 $\bar{a}_{r1},\cdots,\bar{a}_{rn}$ 。
- 有两种情况：（1）它们不全为 0。（2）它们全为 0。

两种情况（1）

（1）$\bar{a}_{r1}$, .., $\bar{a}_{rn}$ 不全为 **0**。

- 不妨设 $\bar{a}_{rs} \neq 0$。以 $\bar{a}_{rs}$ 为转轴元进行一次旋转变换，使人工变量 $x_{B(r)}$ 出基，原变量 x_s 进基，则在基变量中减少了一个人工变量。
- 注：此时不要求 $\bar{a}_{rs} >$ **0**。并且，在变换之前人工变量 $x_{B(r)}$ 为基变量，由于 $g^* = 0$，因此 $\bar{b}_r = 0$，于是 $\theta = 0$，因此该旋转变换不会改变最优解值，即旋转之后的解仍然是最优解。

两种情况（2）

（2）$\bar{a}_{r1}$, .., $\bar{a}_{rn}$ 全为 0。

- 这表明 $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$ 中第 r 行为全 0，即 $r(\bar{A}) < m$ 。
- 因此 $r(A) = r(\bar{A}) < m$，即第 r 个约束方程是多余的，将其删去即可。人工变量 $x_{B(r)}$ 自然出基，当前的基余下的列构成新的基。

重复以上过程（1）（2），直到基变量中没有人工变量，则获得了原 LP 的一个基本可行解。

两阶段单纯形算法

1 原问题化为标准型。行变换，使 $b \geq 0$。

2 添加人工变量，得到辅助问题。

3 使用人工变量作为初始的基，构造辅助问题的初始单纯形表。在该表中同时也包含原问题的检验数行。

4 使用单纯形算法求解辅助问题。（第一阶段）

5 若求得辅助问题最优解值 $g^* > 0$，则原问题无可行解，结束。

6 （否则 $g^* = 0$。）若某些人工变量为基变量，则调整，直到没有人工变量为基变量。

两阶段单纯形算法

7　去掉当前单纯形表上的辅助问题的检验数行和人工变量对应的列，得到原问题的单纯形表。此时已有一个初始的基可行解。

8　（第二阶段）运行单纯形算法，解原问题。最后或判断得原问题无界，或求到最优解。

例2.4.1

求解 $$\min\ z = 5x_1 + 21x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0; \quad \forall j \end{cases}$$
。

首先引入人工变量，考虑辅助 LP

$$\min\ z = x_6 + x_7$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0; \quad \forall j \end{cases}$$
。

第1阶段

将约束矩阵、右端向量、原 LP 的价值向量、辅助 LP 的价值向量组织在单纯形表中：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	1	-1	6	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1

以人工变量 x_6、x_7 为基变量，通过行变换将 x_6、x_7 对应的检验数消为 0，得到新的单纯形表。

第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	−5	0	−21	0	0	0	0	0
g	2	0	8	−1	−1	0	0	3
x_6	1	−1	6	−1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	−1	0	1	1

下面运行第一阶段的单纯形算法，求辅助问题的最优解。此时注意的是两行检验数都参与旋转变换。

第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	–3/2	-7/2	0	-7/2	0	21/6	0	7
g	2/3	4/3	0	1/3	–1	–4/3	0	1/3
x_3	1/6	–1/6	1	–1/6	0	1/6	0	1/3
x_7	2/3	4/3	0	1/3	–1	–1/3	1	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	1/4	0	0	–21/8	–21/8	21/8	21/8	63/8
g	0	0	0	0	0	–1	–1	0
x_3	1/4	0	1	–1/8	–1/8	1/8	1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	–3/4	–1/4	3/4	1/4

第2阶段

- 第 1 阶段结束，得到辅助问题的最优基可行解 $x^* = (0, 1/4, 3/8, 0, 0, 0, 0)^T$，且人工变量 x_6、x_7 都不在基中。
- 在单纯形表中去掉辅助 LP 的检验数行和人工变量对应的列，开始第 2 阶段的单纯形算法。

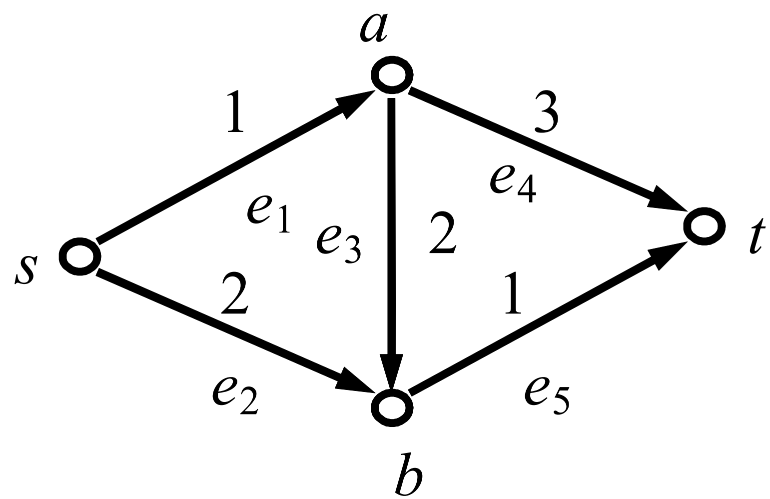
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	1/4	0	0	−21/8	−21/8	63/8
x_3	1/4	0	1	−1/8	−1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	−3/4	1/4

第2阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	–1/2	0	–11/4	–9/4	31/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	–1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	1/2

求到最优解 $x^* = (1/2, 0, 1/4, 0, 0)^T$，最优解值为 31/4。

例，最小费用流问题



- 离开 s 的流量为 1，进入 t 的流量为 1；
- 除 s、t 外，其余每个顶点上都流守恒，即进入的流量和流出的流量相等；
- 在边 e_i 上定义变量 x_i，表示在该边上（沿边的方向）的流量。

最小费用流问题的LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\
\text{s.t.} \quad & (s) \quad x_1 + x_2 = 1 \\
& (a) \quad -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\
& (b) \quad -x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\
& (t) \quad -x_4 - x_5 = -1 \\
& \qquad x_i \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$

解（1），第1阶段

- 当所有 n 个顶点都流守恒时，其中一个顶点的流守恒约束可以去掉。因此，将顶点 t 的行去掉。
- 由于约束矩阵第 **4** 列、第 **5** 列已经是单位矩阵的列，因此只增加一个人工变量。
- 得辅助问题的 **LP**（标准型）如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	–1	–2	–2	–3	–1	0	0
g	0	0	0	0	0	–1	0
x_6	1	1	0	0	0	1	1
x_4	–1	0	1	1	0	0	0
x_5	0	–1	–1	0	1	0	0

解（1），第1阶段

- **将基变量的列的检验数消为 0：**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	–4	–3	0	0	0	0	0
g	1	1	0	0	0	0	1
x_6	1	1	0	0	0	1	1
x_4	–1	0	1	1	0	0	0
x_5	0	–1	–1	0	1	0	0

解（1），第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	0	1	0	0	0	4	4
g	0	0	0	0	0	–1	0
x_1	1	1	0	0	0	1	1
x_4	0	1	1	1	0	1	1
x_5	0	–1	–1	0	1	0	0

- **第 1 阶段求到辅助 LP 的最优解，解值为 0，且没有人工变量是基变量。**
- **删除辅助问题的检验数行和人工变量列，开始第 2 阶段。**

解（1），第2阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	1	0	0	0	4
x_1	1	1	0	0	0	1
x_4	0	1	1	1	0	1
x_5	0	−1	−1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	−1	0	0	0	0	3
x_2	1	1	0	0	0	1
x_4	−1	0	1	1	0	0
x_5	1	0	−1	0	1	1

求到原问题的最优解，最小费用流为(0，1，0，0，1)，最小费用为 3。

解（2），第1阶段

- 不删除多余的行，将顶点 t 的行乘以–1，使其右端项变为 **1**。
- 增加 **4** 个人工变量。得辅助问题的 **LP**（标准型）如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	–1	–2	–2	–3	–1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	–1	0
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_7	–1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
x_8	0	–1	–1	0	1	0	0	1	0	0
x_9	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

解（2），第1阶段

- **将基变量对应的检验数消为 0：**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	−1	−2	−2	−3	−1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_7	−1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
x_8	0	−1	−1	0	1	0	0	1	0	0
x_9	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

解（2），第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	–4	–2	1	0	–1	0	3	0	0	0
g	2	0	–2	0	2	0	–2	0	0	2
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_4	–1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
x_8	0	–1	–1	0	1	0	0	1	0	0
x_9	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1	1

解（2），第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	0	2	1	0	–1	4	3	0	0	4
g	0	–2	–2	0	2	–2	–2	0	0	0
x_1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_4	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
x_8	0	–1	–1	0	1	0	0	1	0	0
x_9	0	–1	–1	0	1	–1	–1	0	1	0

（选择出基变量时应用了 Bland 法则。）

解（2），第1阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	0	1	0	0	0	4	3	1	0	4
g	0	0	0	0	0	–2	–2	–2	0	0
x_1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_4	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
x_5	0	–1	–1	0	1	0	0	1	0	0
x_9	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	1	0

- 求到辅助问题的最优解，$g^* = 0$。
- 人工变量 x_9 是基变量，但其所对应的行的前 n 列为全 0，因此将 x_9 的行和列去掉。
- 剩下的表格中没有人工变量是基变量，因此将辅助 LP 的检验数行和人工变量列全都删除，开始第 2 阶段。

解（2），第2阶段，与解（1）相同

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	1	0	0	0	4
x_1	1	1	0	0	0	1
x_4	0	1	1	1	0	1
x_5	0	–1	–1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–1	0	0	0	0	3
x_2	1	1	0	0	0	1
x_4	–1	0	1	1	0	0
x_5	1	0	–1	0	1	1

求到原问题的最优解，最短 s-t 路为(e_2, e_5)，长度为 3。

退化问题的处理

- 一个基可行解，若存在基变量为 **0**，则称该 **bfs 为退化的**。
- 一个 **LP** 问题，若存在退化的 **bfs**，则称该**问题为退化的**。

- 对于退化的 **LP** 问题，在应用单纯形算法时，有可能会出现 $\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = 0$ 的情形，从而进行迭代时不能使当前解值减小。
- 若连续出现不能使最优值减小的迭代，则就有可能退回到原来出现过的基，从而出现称为“循环”的情况。

Bland反循环法则

Bland 反循环法则（1977）：

（1）选择进基变量 x_k 时，选择所有 $\zeta_j > 0$ 中下标最小的那一个，即 $k = \min\{j \mid \zeta_j > 0\}$（选择编号最小的列进基）；

（2）选择出基变量 $x_{B(r)}$ 时，若有多个 $\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{jk}}$ 同时达到最小，则选择下标 $B(j)$ 最小的那一个，即

$$B(r) = \min\left\{B(j) \mid \forall 1 \le i \le m, \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{jk}} \le \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}\right\}$$

（选择编号小的列出基）。

谢谢大家