第3章 整数线性规划

3.1 整数规划问题举例

3.2 割平面法

整数（线性）规划

- 整数规划问题与模型
- 整数规划算法

背包问题

- 实例：一个背包，容量为W。
- n 件物品，物品 i 容量（重量）为 w_i，价值 v_i。

- 询问：选择一些物品装入背包，使其总容量 ≤ W，总价值最大。

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	200	350	500	430	320	120	700	420	250	100
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

问题分析（建模）

- 变量x_i – 是否选择物品 i。
- 整数规划（**0-1规划**）：

$$\max \ \sum_i v_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_i w_i x_i \le W$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

集合覆盖（Set Cover）问题

- 实例：基础集合$U = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，集合族$C = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$，每一个集合$S_i$是$U$的一个子集。
- 询问：最小数目的子集的集合族$C' \subseteq C$，使得C'中子集的“并”包含（覆盖）U中的所有元素。

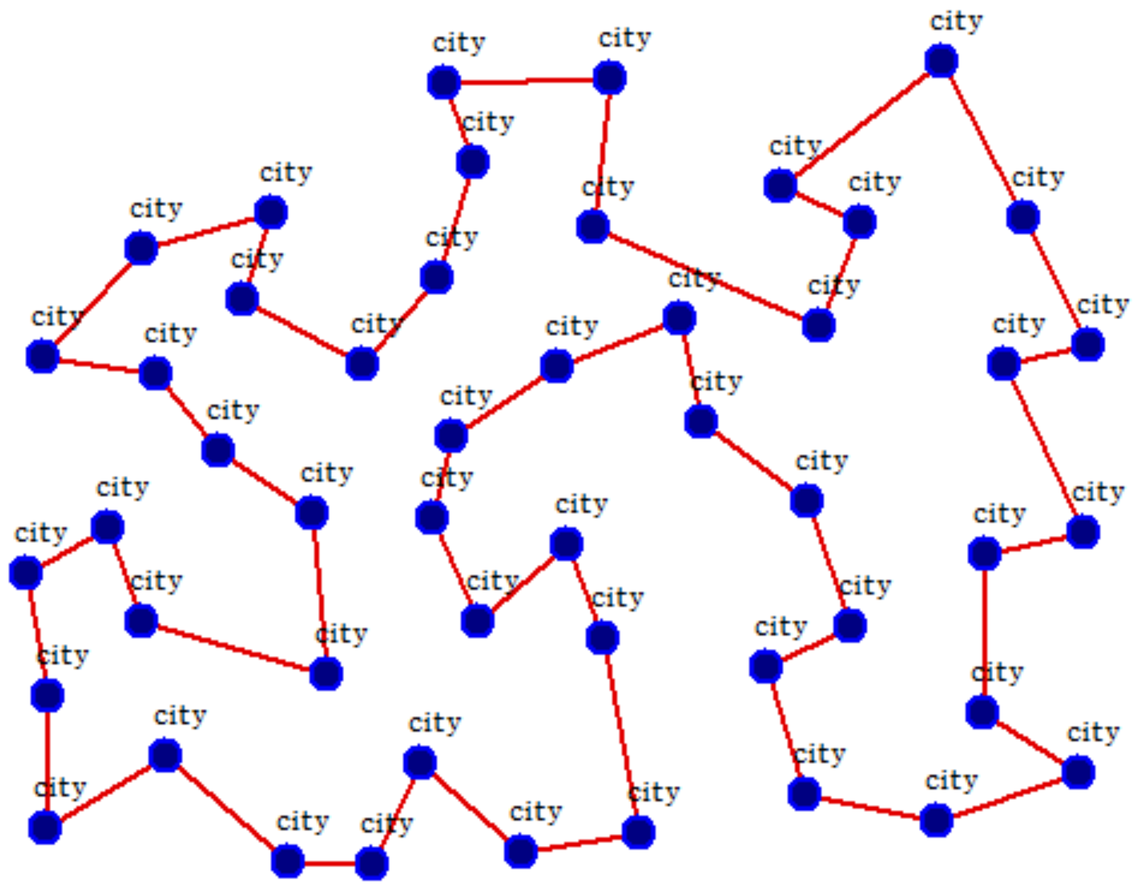
- 整数规划（**0-1规划**）：
- 定义判定变量x_i，$x_i = 1$表示集合S_i被选取，$x_i = 0$表示集合S_i未被选取。

$$
\begin{aligned}
\min\ & \textstyle\sum_i x_i \\
\text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{S_i:\, e \in S_i} x_i \geq 1, \quad \forall e \in U \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

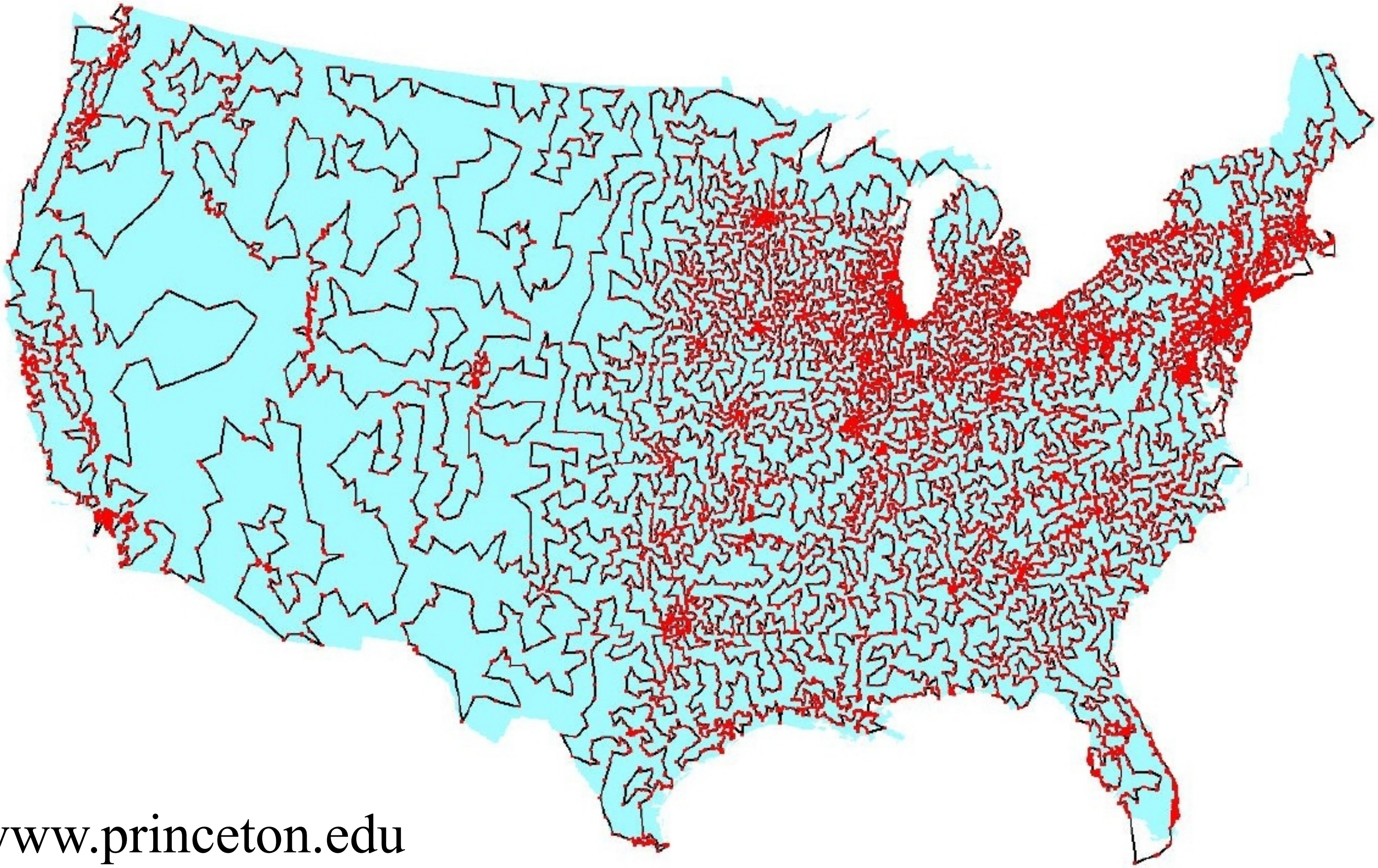
旅行售货员（TSP）问题

- 实例：给定 n+1 个城市，任两个城市 v_i 和 v_j 之间有一个距离 $c_{ij} \geq 0$（$c_{ij} = c_{ji}, c_{ii} = 0$）。一个旅行售货员，从城市 v_0 出发，走遍所有的城市，再回到 v_0。
- 询问：售货员应该怎样走，才能使走过的总距离最短？

TSP实例


city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city
city

TSP实例



www.princeton.edu

建模

- 变量 x_{ij}：是否使用从城市 v_i 到城市 v_j 的路径。
- 约束
  - 每个城市只能到达一次、离开一次。
  - 所走过的路径构成一个圈（不能多于一个圈）。

TSP的整数规划

$$\min \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 0,1,2,\cdots,n$$

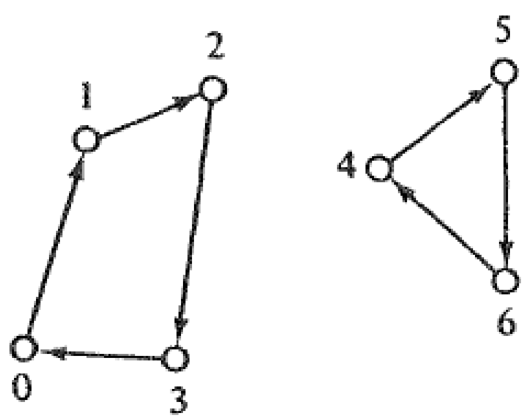
$$\sum_{i \in S,\, j \notin \bar{S}} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset \{0,1,2,\cdots n\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 0,1,2,\cdots,n$$

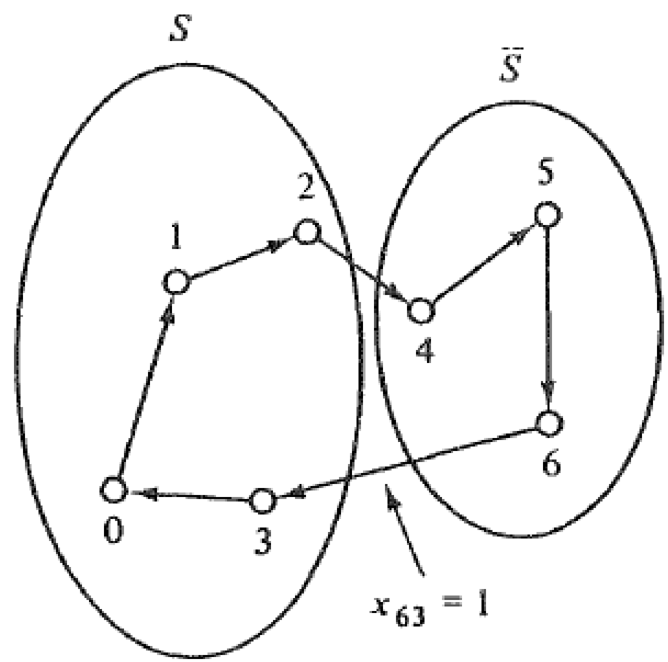
强制路径构成仅一个圈

使用如下约束：

$$\sum_{i \in S,\, j \in \overline{S}} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset \{0,1,\cdots,n\}$$



(a)



(b)

整数线性规划的特征、模型

- 特征—变量整数性要求
  - 问题本身的要求
  - 引入的逻辑变量的需要
- 性质—可行域是离散点的集合

- 整数线性规划的常见模型：
  - 一般整数规划模型——变量取值为整数。
  - **0-1**整数规划模型——变量取值为**0**或**1**。
  - 混合整数规划模型——部分变量取值为整数，部分变量取值为实数。

整数规划与线性规划的关系

整数规划

$$\min c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0，\ x_i\text{为整数} \end{cases}$$

线性规划

$$\min c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 线性规划是整数规划的放松。
- 整数规划的可行解是对应的放松问题的可行解。
- 放松的线性规划的最优值 ≤ 整数规划的最优值。

解整数规划

对整数规划的几点说明：

- 对放松问题的最优解进行简单的舍入（如，四舍五入）不能得到整数规划的最优解。这样的整数解对于原整数规划甚至是不可行的。
- 整数可行解的数目可呈爆炸性增长，简单的枚举法不可取。

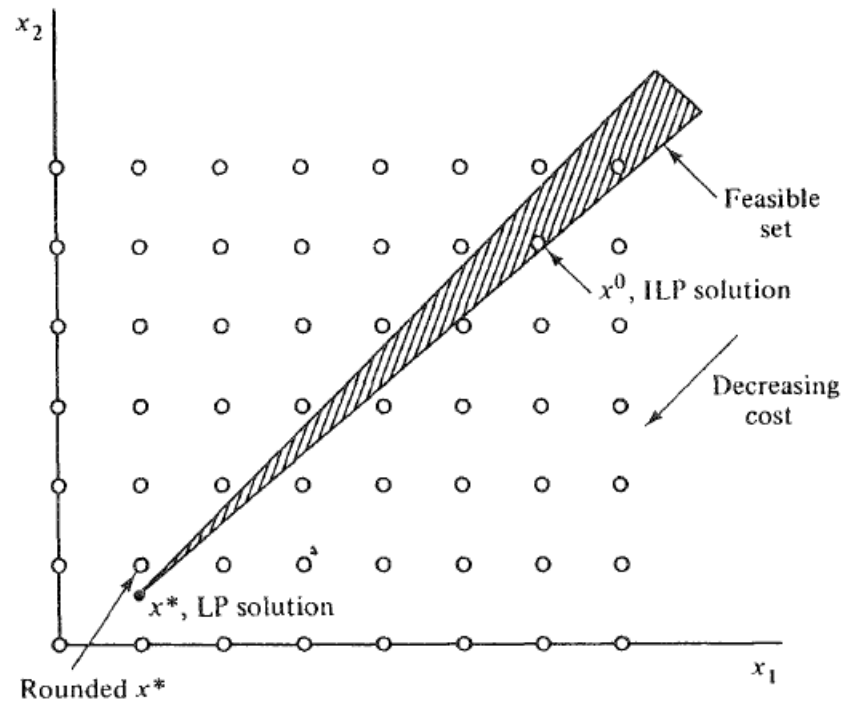


Figure 14–1 A hypothetical ILP with optimum $x°$ and its relaxation with optimum x^*.

算法

求精确解：

- 割平面算法
- 分枝定界算法

求近似解：

- 舍入法
- 原始-对偶方法

割平面算法[Gomory, 1959]

基本思想

- 用单纯形法解松弛问题(P_0)，求到最优解x^0。
- 若x^0是整数向量，则x^0是ILP问题(P)的最优解，计算结束。
- 否则，根据x^0设法对(P_0)增加一个约束条件，称为割平面条件。这个割平面条件将(P_0)的可行域割掉一块，且x^0在被割掉的区域中，而原ILP的任何一个整数可行解都没有被割掉。
- 记增加了约束条件的问题为(P_1)。对(P_1)继续上述过程，直到求到一个整数最优解为止。

说明

- 如果在增加约束的过程中，得到的LP没有可行解，则原ILP没有可行解。
- 如果得到的LP问题无界，则原ILP问题或者无界，或者没有可行解。

割平面生成方法

- 给定整数规划问题 ILP$_0$，A, b, c 中的元素均为整数。
- 设它的松弛问题为 LP$_0$。用单纯形算法解 LP$_0$，设求得的最优 bfs 为 x^0，它的基为 $B=(A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)})$。
- 为简便，记非基变量下标的集合为 N。最后一张单纯形表所表示的 LP$_0$ 的典式为：

$$z+\sum_{j\in N}\zeta_j x_j = z_0$$

$$x_{B(i)}+\sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j=\bar{b}_i,\quad i=1,\cdots,m$$

- 为简便记，令 $x_{B(0)}=z$，$\bar{a}_{0j}=\zeta_j$，$\bar{b}_0=z_0$。上式将统一记为 $x_{B(i)}+\sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j=\bar{b}_i,\ i=0,\cdots,m$。

割平面生成方法

- 若 $\bar{b}_i$ 全为整数（$0 \le i \le m$），则 x^0 为原问题 ILP$_0$ 的最优解。
- 否则假设 $\bar{b}_l$ 不是整数（$0 \le l \le m$）。$\bar{b}_l$ 所对应的约束为：

$$x_{B(l)} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{lj} x_j = \bar{b}_l 。 \qquad \textbf{(1)}$$

- 因为 $\forall j, x_j \ge 0$，可知 $\sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{lj} \rfloor x_j \le \sum_{j \in N} \bar{a}_{lj} x_j$。因此有

$x_{B(l)} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{lj} \rfloor x_j \le \bar{b}_l$。由于所要求的 x 为整数向量，该不等式可加强到

$$x_{B(l)} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{lj} \rfloor x_j \le \lfloor \bar{b}_l \rfloor 。 \qquad \textbf{(2)}$$

割平面生成方法

- (1) – (2)，得：$\sum_{j\in N}\left(\bar{a}_{lj}-\lfloor \bar{a}_{lj}\rfloor\right)x_j \geq \bar{b}_l-\lfloor \bar{b}_l\rfloor$。将该式记为

$$\sum_{j\in N} f_{lj}x_j \geq f_l, \qquad (3)$$

其中 $0 \leq f_{lj} < 1, \forall j$；$0 < f_l < 1$，称为割平面条件。

- 割平面条件(3)式是一个新的约束。将它加到 LP_0 中，得到更紧的松弛问题 LP_1。
- 将(3)式两端乘以–1，再引入松弛变量 s，得到

$$-\sum_{j\in N} f_{lj}x_j + s = -f_l$$，称为割平面方程。

- 这样就得到 LP_1 的一个基本（不可行）解和其对偶的一个可行解，从而可使用对偶单纯形算法继续求解 LP_1。

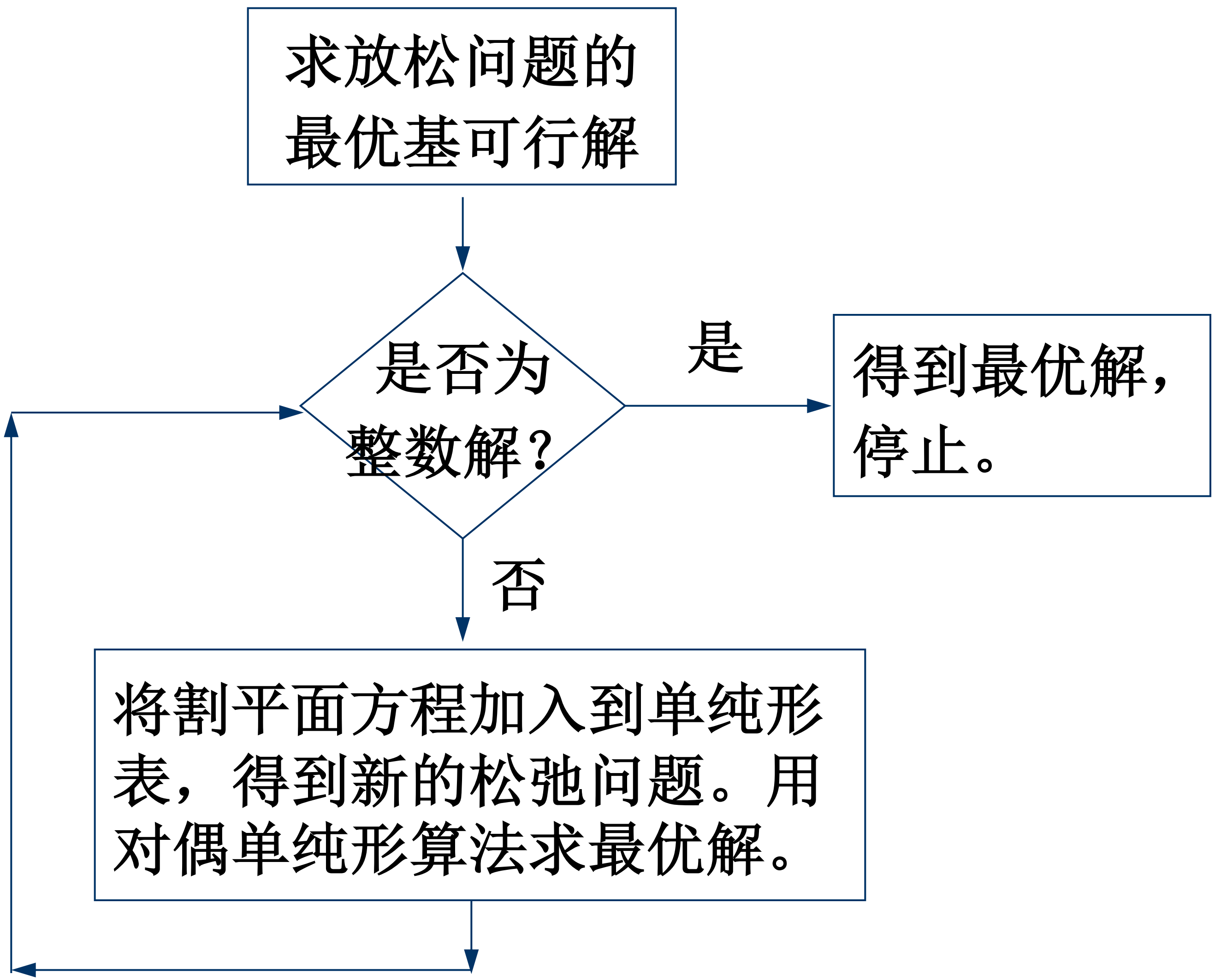
注意

- 在割平面条件 $\sum_{j\in N} f_{lj}x_j \ge f_l$ 中，有 $f_{lj}=\bar{a}_{lj}-\lfloor \bar{a}_{lj}\rfloor$ 和 $f_l=\bar{b}_l-\lfloor \bar{b}_l\rfloor$。
- 当 $\bar{a}_{lj}>0$（以及 $\bar{b}_l>0$）时，f_{lj}（以及 f_l）为 $\bar{a}_{lj}$（以及 $\bar{b}_l$）的小数部分。

  例：$\bar{a}_{lj}=1.25$，$f_{lj}=1.25-\lfloor 1.25\rfloor=1.25-1=0.25$。
- 当 $\bar{a}_{lj}<0$ 时，f_{lj} 等于 **1 –“$|\bar{a}_{lj}|$ 的小数部分”**。（$\bar{b}_l$ 总是 **0**）

  例：$\bar{a}_{lj}=-1.25$，$f_{lj}=-1.25-\lfloor -1.25\rfloor=-1.25+2=0.75$。

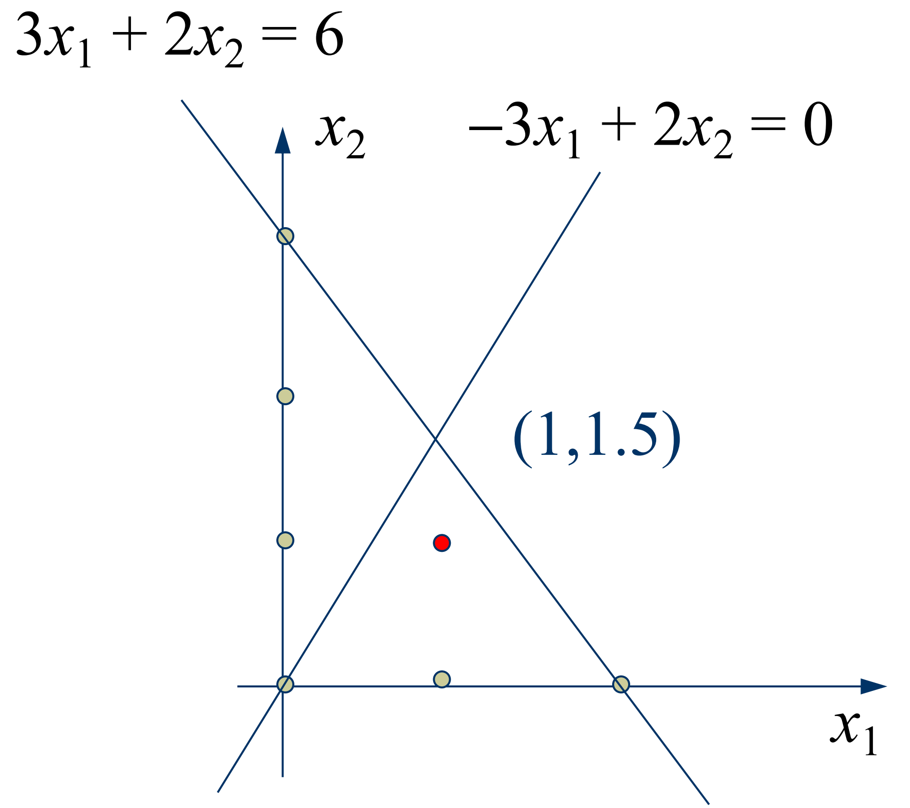
Gomory割平面算法



算例

$$\max \ x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$



得到松弛问题LP_0

将松弛问题化为标准型：

$$\min \quad -x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=6 \\ -3x_1+2x_2+x_4=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{cases},$$

使用单纯形算法求解：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	6
x_4	–3	2	0	1	0

解松弛问题LP_0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	3/2	0	0	–1/2	0
x_3	6	0	1	–1	6
x_2	–3/2	1	0	1/2	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	–1/4	–1/4	–3/2
x_1	1	0	1/6	–1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2

$$\sum_{j\in N} f_{lj}x_j \geq f_l$$

求到松弛问题 LP_0 的最优 bfs，不是整数解。

第 2 行生成的割平面条件为：$\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$，

得到松弛问题LP_1

割平面方程为： $-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+s_1=-\frac{1}{2}$ **。加入割平面方程，得到松弛问题 LP_1 的单纯形表：**

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
z	0	0	–1/4	–1/4	0	–3/2
x_1	1	0	1/6	–1/6	0	1
x_2	0	1	1/4	1/4	0	3/2
s_1	0	0	–1/4	–1/4	1	–1/2

应用对偶单纯形算法继续求解 LP_1。

解松弛问题LP$_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
z	0	0	0	0	–1	–1
x_1	1	0	0	–1/3	2/3	2/3
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	–4	2

LP$_1$ 的最优解为 x = (2/3, 1, 2, 0, 0)，仍然不是整数解。

第 1 行生成的割平面条件为： $\frac{2}{3}x_4+\frac{2}{3}s_1\geq\frac{2}{3}$。

对应的割平面方程为： $-\frac{2}{3}x_4-\frac{2}{3}s_1+s_2=-\frac{2}{3}$。

得到松弛问题LP_2

加入割平面方程，得到松弛问题 **LP_2**：

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
z	0	0	0	0	–1	0	–1
x_1	1	0	0	–1/3	2/3	0	2/3
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	1	–4	0	2
s_2	0	0	0	–2/3	–2/3	1	–2/3

继续用对偶单纯形算法求解。

解松弛问题LP_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
z	0	0	0	0	-1	0	-1
x_1	1	0	0	0	1	$-1/2$	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	0	-5	$3/2$	1
x_4	0	0	0	1	1	$-3/2$	1

得到 LP_2 的最优解 $x = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$，是整数解。

因此原问题 IP_0 的最优解为 $x^* = (1, 1)$。

对割平面的解释

- 第 1 次切割，割平面条件为 $\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$。**(1)**
- 由问题 **LP$_0$**，可知 $x_3=6-3x_1-2x_2$，　　**(2)**

$x_4=3x_1-2x_2$　　**(3)**

- 将(2)、(3)代入(1)，得到与(1)等价的割平面条件：

$x_2\leq 1$。

- 第 1 次切割，加入的割平面方程为 $-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+s_1=-\frac{1}{2}$。**(4)**
- 将(2) 、(3)代入(4)，可将 s_1 写成 x_1 和 x_2 的线性组合：

$s_1=-x_2+1$。　　**(5)**

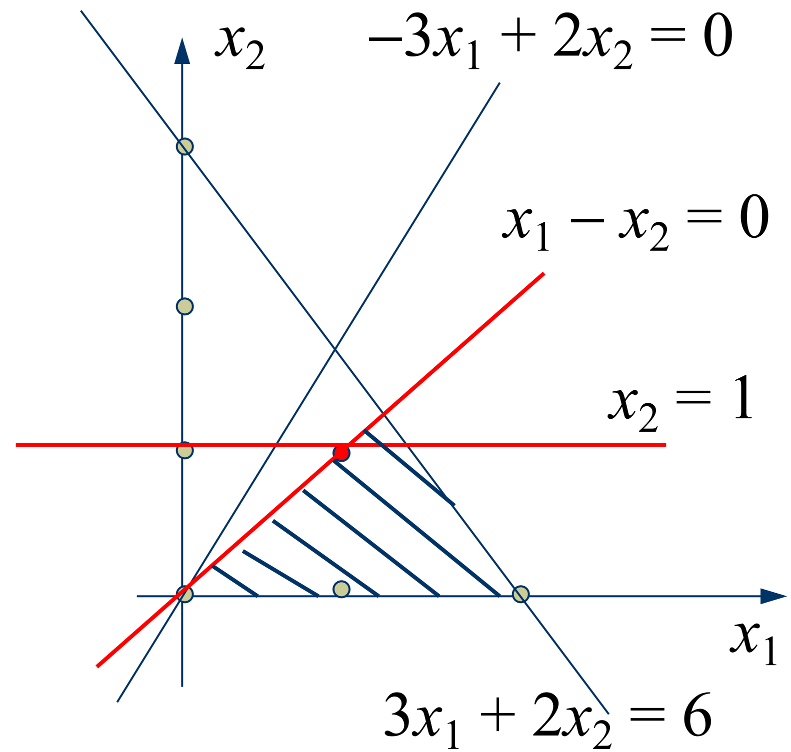
对割平面的解释

- 第 2 次切割，割平面条件为 $\frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}s_1 \geq \frac{2}{3}$。(6)
- 将(3)、(5)代入(6)，得到与(6)等价的割平面条件：

$$x_1 - x_2 \geq 0$$。

$$\max \ x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$



谢谢大家