第2章 线性规划

2.3 单纯形算法

单纯形算法

- 单纯形法（simplex method）是G.B. Dantzig于1947年提出
- 基本思想：在基本可行解中搜寻最优解
- 涉及到的问题
  - 如何得到一个基本可行解（两阶段法）
  - 如何判别是否是最优解，以及如何迭代（从一个基本可行解得到另一个基本可行解）

单纯形算法

- 理论方法
- 算法步骤
- 单纯形表
- 算例

典式

$$\min\ c^{\mathrm{T}}x$$

观察标准型的 LP $\text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}$。

假设 $B=(A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)})$是一个约束矩阵 A 的一个基（满秩矩阵）。不失一般性，可假设 B 正好由 A 的前 m 个列向量组成，即 $B(i)=i$，$\forall i$。

将向量 x 按照 B 分块为$\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}$**。在等式约束 $Ax=b$ 两端左乘 B^{-1}，则等式约束变为：** $x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$ **（典式），即** $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$。

基本可行解

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{b}=B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$$

检验数向量 ζ

- 于是，目标函数可写为

$$c^{\mathrm{T}}x = c_B^{\mathrm{T}}x_B + c_N^{\mathrm{T}}x_N = c_B^{\mathrm{T}}(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^{\mathrm{T}}x_N$$
$$= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - (c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}})x_N \text{。}$$

- 记 $\zeta_N^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}}$，令 $\zeta_B^{\mathrm{T}} = 0$，即

$$\zeta^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\zeta_B^{\mathrm{T}} & \zeta_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

称为检验数向量。

- 于是，目标函数可进一步写为

$$c^{\mathrm{T}}x = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - (c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}})x_N = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \zeta^{\mathrm{T}}x \text{。}$$

LP相对于基B的等价形式

- 于是原规划 $\min\ z=c^{\mathrm{T}}x$ s.t. $\begin{cases}Ax=b\\x\geq 0\end{cases}$ 等价于 $\min\quad z=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b-\zeta^{\mathrm{T}}x$ s.t. $\begin{cases}x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b\\x\geq 0\end{cases}$，这是在单纯形算法中使用的形式。
- 检验数向量的计算：$\zeta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\zeta_B^{\mathrm{T}} & \zeta_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}B-c_B^{\mathrm{T}} & c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}B & c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_B^{\mathrm{T}} & c_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}\begin{pmatrix}B & N\end{pmatrix}-c^{\mathrm{T}}$$

$$=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A-c^{\mathrm{T}}$$。

理论方法

设$\bar{x}$为 LP 的一个 bfs。特别地，取上面推导中的基 B 为$\bar{x}$的基，则有如下定理成立。

定理 2.3.1（**最优性准则**）如果检验数向量$\zeta \le 0$，则基本可行解$\bar{x}$为原问题的最优解。

定理 2.3.2 如果检验数向量 ζ 的第 k 个分量$\zeta_k > 0$，而和ζ_k对应的列向量$\overline{A}_k = B^{-1}A_k \le 0$，则原问题无界。

定理 2.3.3 对于**非退化的**基本可行解$\bar{x}$，若检验数向量 ζ 的第 k 个分量$\zeta_k > 0$，而向量$B^{-1}A_k$至少有一个正分量，则可以找到一个新的基本可行解$\hat{x}$使得$c^{\mathrm{T}}\hat{x} < c^{\mathrm{T}}\bar{x}$。

基本思路

定理 2.3.3 **对于非退化的基本可行解 $\bar{x}$，若检验数向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$，而向量 $B^{-1}A_k$ 至少有一个正分量，则可以找到一个新的基本可行解 $\hat{x}$ 使得 $c^{\mathrm{T}}\hat{x} < c^{\mathrm{T}}\bar{x}$ 。**

如果在现有的基和基本可行解基础上，定理2.3.3成立，选择一个基变量变成非基变量，同时选择一个非基变量（满足 $\zeta_k > 0$）变成基变量，得到新的可行解，直到定理2.3.1和定理2.3.2中的判定条件出现

单纯形算法 - Simplex

1 找一个初始可行基 $\boldsymbol{B}$。

2 求出典式和检验数向量ζ。

3 令 $k = \arg\max\{\zeta_j \mid j = 1,2,\ldots,n\}$。

4 如果 $\zeta_k \le 0$ 则当前基可行解就是最优解，停止。

5 如果 $\overline{A}_k \le 0$，则问题无界，停止。

$\overline{b} = B^{-1}b$

6 令 $r = \arg\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}} \mid \overline{a}_{ik} > 0, i = 1,2,\ldots,m\right\}$。

7 以 A_k 替代 $\boldsymbol{B}$ 中的第 r 列（即，$\boldsymbol{B}(r) \leftarrow \boldsymbol{k}$），得到一个新的基 $\boldsymbol{B}$，转第 2 步。

（基本的）单纯形表

假设当前的基 $B=\left(A_1, A_2, \cdots, A_m\right)$，则对应的单纯形表为：

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_r & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & \bar{a}_{1k} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_r & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{r,m+1} & \cdots & \bar{a}_{rk} & \cdots & \bar{a}_{rn} & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & \bar{a}_{mk} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}
$$

完整的单纯形表

把目标函数值 z 看成变量，则 $z=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b-\zeta^{\mathrm{T}}x$ 等价于 $z+\zeta^{\mathrm{T}}x=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$。在单纯形表中加上 z 对应的行，同时加上一行描述方程$z+\zeta^{\mathrm{T}}x=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$，则得到新的单纯形表：

	z	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
z	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	ζ_{m+1}	$\cdots$	ζ_k	$\cdots$	ζ_n	$c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$
x_1	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{r,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

目标函数值

- 给定基 ***B***，$\zeta^{\mathrm{T}}x = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$，

  因此 $z = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \zeta^{\mathrm{T}}x = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$。即，单纯形表右上角的 $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$ 就是当前解 ***x*** 的目标函数值。

实际使用的单纯形表

- 在对单纯形表进行行初等变换时，变量 z 所对应的列各元素不会改变，因此可将表格中变量 z 的行去掉，得到新的单纯形表：

	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	
	0	…	0	…	0	ζ_{m+1}	…	ζ_k	…	ζ_n	$c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$
x_1	1	…	0	…	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	…	$\bar{a}_{1k}$	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	0	…	1	…	0	$\bar{a}_{r,m+1}$	…	$\bar{a}_{rk}$	…	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	…	0	…	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	…	$\bar{a}_{mk}$	…	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

总结：获得初始单纯形表

（1）将 LP 转为标准型。

（2）构造表格：

x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_n	
$-c^{\mathrm{T}}$	0
A	b

（3）选取 A 中的若干列为基，用初等行变换将这些列变为单位阵，检验数行一同参与变换。得到初始单纯形表：

	x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_n	
	$c_B{}^{\mathrm{T}}B^{-1}A - c^{\mathrm{T}}$	$c_B{}^{\mathrm{T}}B^{-1}b$
x_B	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$

旋转操作 - x_k进基，x_r出基

- 通过矩阵行初等变换，将 $\bar{a}_{rk}$ 变为 **1**，将第 ***k*** 列其余各元素变为 **0**。
- 换基时，对典式进行的行初等变换也适用于第 **0** 行。这样可以在单纯形表上用统一的格式计算出对应于新基 $\hat{B}$ 的各元素 $\hat{a}_{ij}$、检验数 $\hat{\zeta}_j$ 和目标函数值 $\hat{z}_0$。

	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	ζ_{m+1}	$\cdots$	ζ_k	$\cdots$	ζ_n	$c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{r,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

旋转操作之后

	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	
	0	…	$\hat{\zeta}_r$	…	0	$\hat{\zeta}_{m+1}$	…	0	…	$\hat{\zeta}_n$	$c_B^{\mathrm{T}}\hat{b}$
x_1	1	…	$\hat{a}_{1r}$	…	0	$\hat{a}_{1,m+1}$	…	0	…	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	…	$\hat{a}_{rr}$	…	0	$\hat{a}_{r,m+1}$	…	1	…	$\hat{a}_{rn}$	$\hat{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	…	$\hat{a}_{mr}$	…	0	$\hat{a}_{m,m+1}$	…	0	…	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$

旋转操作之后单纯形表上各元素的值

（1）第 r 行元素都除以了 $\bar{a}_{rk}$：$\hat{a}_{rj}=\dfrac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}$，$\hat{b}_r=\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$。

（2）其余各行受变换的影响，各元素的值均发生了变化。

新的第 i（$i\neq r$）行 = 原第 i 行 + 第 r 行 × $(-\bar{a}_{ik})$。

（2.1）第 0 行：$\hat{\zeta}_j=\zeta_j+\dfrac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(-\zeta_k)$，$c_B^{\mathrm{T}}\hat{b}=c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}+\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}(-\zeta_k)$。

（2.2）除第 0 行和第 r 行外的其余各行（$i\neq 0, r$）：

$\hat{a}_{ij}=\bar{a}_{ij}+\dfrac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(-\bar{a}_{ik})$，$\hat{b}_i=\bar{b}_i+\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}(-\bar{a}_{ik})$。

例2.2.1

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\
 & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
 & \forall 1 \le i \le 5, x_i \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\
x_4 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
x_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

得到初始单纯形表

将第 1 行乘以–1，即得到初始的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	–1	1	0	0	0	0
x_3	–2	1	1	0	0	2
x_4	1	–2	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	5

验证

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (1\ {-1}\ 0\ 0\ 0)$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3\ x_4\ x_5)^{\mathrm{T}} = B^{-1}b = (2\ 2\ 5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1\ x_2)^{\mathrm{T}} = (0\ 0)^{\mathrm{T}}$。

检验数 $\zeta^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A - c^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}B^{-1}A - c^{\mathrm{T}} = -c^{\mathrm{T}}$。

目标函数值 $z = c_B^{T}B^{-1}b = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} = 0$。

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1&0&0\\1&-2&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0&0\\1&-2&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}。$$

迭代1

由于$\zeta_2 = 1 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_2 为入基变量。

计算 $r = \text{argmin}\{2/1, 5/1\} = 1$，所以取第 1 个约束对应的基变量 x_3 为出基变量。

在上表中把 x_2 对应的列变成单位向量，系数矩阵第 1 行对应的元素为 1，则可以得到新的基可行解的单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	–1	0	0	–2
x_2	–2	1	1	0	0	2
x_4	–3	0	2	1	0	6
x_5	3	0	–1	0	1	3

迭代2

由于$\zeta_1 = 1 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵第 $k = 1$ 列有大于 0 的元素，所以取 x_1 为进基变量。

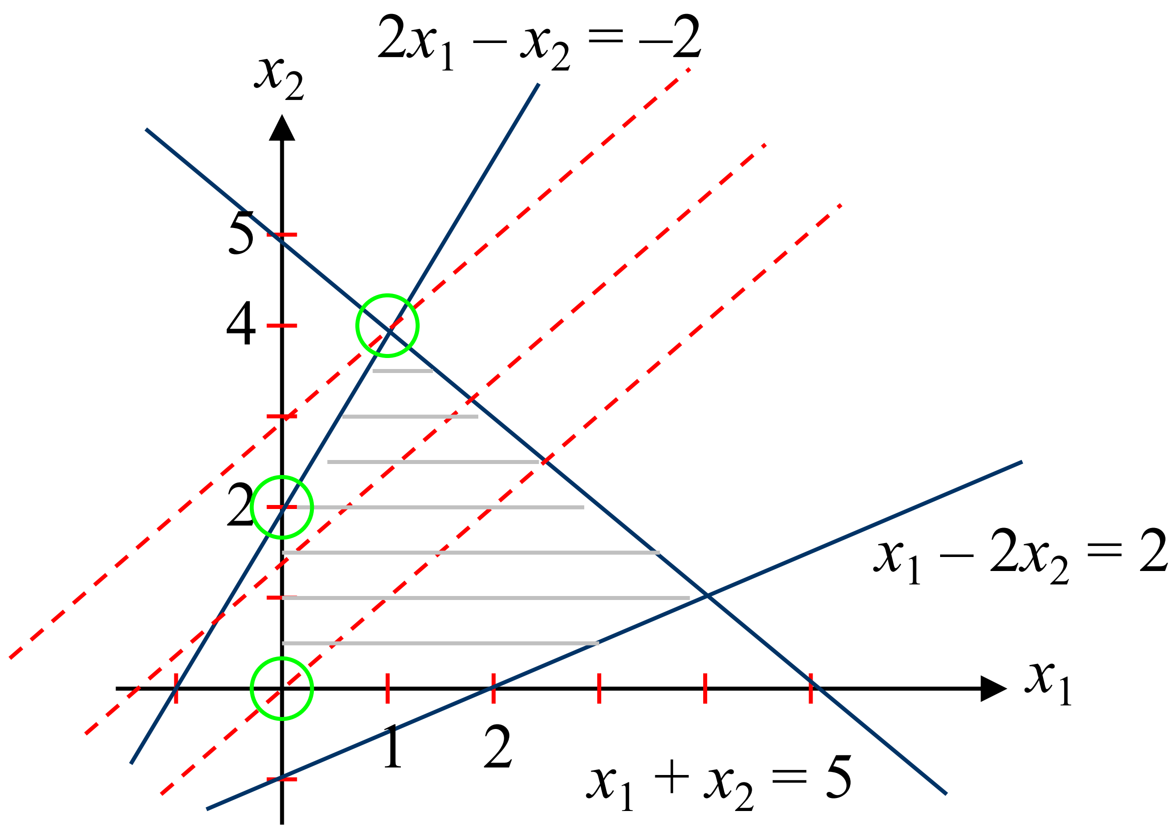
计算 $r = \operatorname{argmin}\{3/3\} = 3$，所以取第 3 个约束对应的基变量 x_5 为出基变量。

在上表中把系数矩阵第 3 行第 1 列对应的元素为 1，x_1 对应的第 1 列变成单位向量，则得到新的单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	−2/3	0	−1/3	−3
x_2	0	1	1/3	0	2/3	4
x_4	0	0	1	1	1	9
x_1	1	0	−1/3	0	1/3	1

结束

由于检验数都小于等于 0，所以该基可行解是最优解，对应的最优解为$(1, 4, 0, 9, 0)^T$，最优值为–3。



例2.3.1

求解问题

$$\min \ z = -x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0; \quad j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

初始单纯形表

以 x_1、x_4 和 x_5 为基变量就可以得到初始基可行解 $(2, 0, 0, 1, 2)^T$，其对应的单纯形表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	1	–2	0	0	0
x_1	1	–2	1	0	0	2
x_4	0	1	–3	1	0	1
x_5	0	1	–1	0	1	2

迭代1

由于$\zeta_2=1>0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_2 为入基变量。

计算$\theta=\min\{\frac{1}{1},\frac{2}{1}\}=1$，所以取第 2 个约束对应的基变量 x_4 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。

在上表中把 x_2 对应的列变成单位向量，系数矩阵第 2 行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	1	–1	0	–1
x_1	1	0	–5	2	0	2
x_2	0	1	–3	1	0	1
x_5	0	0	2	–1	1	2

迭代2

由于$\zeta_3 = 1 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 **0** 的元素，所以取 $\boldsymbol{x_3}$ 为入基变量。

计算$\boldsymbol{\theta = 1/2}$，所以取第 **3** 个约束对应的基变量 $\boldsymbol{x_5}$ 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。

在上表中把 $\boldsymbol{x_3}$ 对应的列变成单位向量，系数矩阵第 **3** 行对应的元素为 **1**，则可以得到该基可行解的单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	–1/2	–1/2	–3/2
x_1	1	0	0	–1/2	5/2	13/2
x_2	0	1	0	–1/2	3/2	5/2
x_5	0	0	1	–1/2	1/2	1/2

结束

由于检验数都小于等于 **0**，所以该基可行解就是最优解，对应的最优解为$\left(\frac{13}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$，最优值为$-\frac{3}{2}$。

注：

1. 单纯形算法在实际应用中非常有效，被广泛采用，但其运行时间在最坏情况下不是多项式的。

2. 现在还有待解决的问题是如何选择初始基，以及出现退化的时候如何处理。

例2.3.2

$$\min \quad z = -x_2 - 2x_3$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_1 \qquad\qquad -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_5 = \frac{13}{2} \\
& \qquad x_2 \qquad -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{5}{2} \\
& \qquad\qquad x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} \\
& x_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq 5
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	1	2	0	0	0
x_1	1	0	0	$-1/2$	$5/2$	$13/2$
x_2	0	1	0	$-1/2$	$3/2$	$5/2$
x_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$

例2.3.2

- 选择约束矩阵 A 的前 3 列为基，使用行初等变换得到初始单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	3/2	−5/2	−7/2
x_1	1	0	0	−1/2	5/2	13/2
x_2	0	1	0	−1/2	3/2	5/2
x_3	0	0	1	−1/2	1/2	1/2

- 由于 $\zeta_4 > 0$，$\overline{A}_4 \le 0$，因此原 LP 无界。

理论方法

设$\bar{x}$为 LP 的一个 bfs。特别地，取上面推导中的基 B 为$\bar{x}$的基，则有如下定理成立。

定理 2.3.1（最优性准则）如果检验数向量$\zeta \le 0$，则基可行解$\bar{x}$为原问题的最优解。

定理 2.3.2 如果检验数向量 ζ 的第 k 个分量$\zeta_k > 0$，而和ζ_k对应的列向量$\overline{A_k} = B^{-1}A_k \le 0$，则原问题无界。

定理 2.3.3 对于非退化的基本可行解$\bar{x}$，若检验数向量 ζ 的第 k 个分量$\zeta_k > 0$，而向量$B^{-1}A_k$至少有一个正分量，则可以找到一个新的基本可行解$\hat{x}$使得$c^{\mathrm{T}}\hat{x} < c^{\mathrm{T}}\bar{x}$。

定理2.3.1 – 判定当前bfs为最优

定理 2.3.1 若检验数向量 $\zeta \le 0$，则对应的 bfs $\bar{x}$ 为最优解。

证明：

- 由 bfs 的定义，$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$。
- $\bar{x}$ 的目标函数值（使用 LP 相对于满秩矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的等价形式）为 $c^{\mathrm{T}}\bar{x} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \zeta^{\mathrm{T}}\bar{x} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \begin{pmatrix}\zeta_B^{\mathrm{T}} & \zeta_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$，因为 $\zeta_B^{\mathrm{T}} = 0$，$\bar{x}_N = 0$。
- 而任给一个可行解 $\boldsymbol{x}$，其目标函数值为 $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \zeta^{\mathrm{T}}x \ge c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$，因为 $\zeta^{\mathrm{T}} \le 0$，$x \ge 0$。

定理2.3.2 – 判定LP无界

定理 2.3.2 如果向量ζ的第 k 个分量$\zeta_k > 0$，而向量$\overline{A}_k = B^{-1}A_k \le 0$，则原问题无界。

证明：

- 不失一般性，假设基 B 由 A 的前 m 列组成。
- 由于$\zeta_B^T = 0$，故 $m+1 \le k \le n$。
- 令$d = \begin{pmatrix} -\overline{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k$，在此 e_k 为第 k 个分量为 1，其余分量都为 0 的 n 维向量。则 $d \ge 0$ 且

$$Ad = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1}A_k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} e_k = -A_k + A_k = 0$$

。

证明

- 设θ > 0 为任一正数。考察向量 $\bar{x}+\theta d$ 。
- 由于 $A\left(\bar{x}+\theta d\right)=A\bar{x}+\theta Ad=b$ 以及 $\bar{x}+\theta d\geq 0$，因此 $\bar{x}+\theta d$ 是一个可行解。
- $$c^{\mathrm{T}}\left(\bar{x}+\theta d\right)=c^{\mathrm{T}}\bar{x}+\theta\left(c_B^{\mathrm{T}}\quad c_N^{\mathrm{T}}\right)\left[\begin{pmatrix}-B^{-1}A_k\\0\end{pmatrix}+e_k\right]$$
$$=c^{\mathrm{T}}\bar{x}+\theta\left(-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_k+c_k\right)$$
$$=c^{\mathrm{T}}\bar{x}-\theta\zeta_k \qquad （因为\ \zeta=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A-c^{\mathrm{T}}）$$
- 因为 $\zeta_k > 0$，当 $\theta\to\infty$ 时，$c^{\mathrm{T}}\left(\bar{x}+\theta d\right)\to-\infty$。□

例

- 对于例 2.3.2 的单纯形表，有 $\boldsymbol{k}=\mathbf{4}$，

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}13/2\\5/2\\1/2\\0\\0\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}-\bar{A}_k\\0\end{pmatrix}+e_k=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1\\0\end{pmatrix}。$$

- $$\bar{x}+\theta d=\begin{pmatrix}13/2+\theta/2\\5/2+\theta/2\\1/2+\theta/2\\\theta\\0\end{pmatrix}。$$

例

- $$c^{\mathrm{T}}\left(\bar{x}+\theta d\right)=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13/2+\theta/2\\ 5/2+\theta/2\\ 1/2+\theta/2\\ \theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\theta-1-\theta=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\theta\text{。}$$

定理2.3.3 – 找下一个更好的bfs

定理 2.3.3 对于非退化的基本可行解 $\bar{x}$，若向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$，而向量 $\bar{A}_k$ 至少有一个正分量，则可以找到一个新的基本可行解 $\hat{x}$ 使得 $c^{\mathrm{T}}\hat{x} < c^{\mathrm{T}}\bar{x}$。

证明：

- 只需要将 $\hat{x}$ 找出来。
- 不失一般性，假设 B 由 A 的前 m 列组成，而 $m+1 \le k \le n$。
- 令 $d = \begin{pmatrix} -\bar{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k$。$e_k$ 为第 k 个分量为 1，其余分量全为 0 的向量。则有：$Ad = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -B^{-1}A_k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} e_k = -A_k + A_k = 0$。

定理2.3.3证明

- 令 $\theta = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid a_{ik} > 0,\ 1 \le i \le m \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$。由于 $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是非退化的，可知 $\bar{b} > 0$，因此 $\theta > 0$。
- 令 $\hat{x} = \bar{x} + \theta d$。则 $A\hat{x} = A\bar{x} + \theta A d = b$。
- 由定义，$\hat{x} = \bar{x} + \theta d = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -\bar{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + \theta e_k = \begin{pmatrix} \bar{b} - \theta \bar{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + \theta e_k$。
- **(1)** $\forall 1 \le i \le m$，若 $\bar{a}_{ik} \le 0$，则 $\hat{x}_i = \bar{b}_i - \theta \bar{a}_{ik} > 0$。
- **(2)** $\forall 1 \le i \le m$，若 $\bar{a}_{ik} > 0$，则 $\hat{x}_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{ik} \ge \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \bar{a}_{ik} = 0$。且，

  $\hat{x}_r = \bar{b}_r - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{rk} = 0$。

	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n	
	ζ_1	$\dots$	0	$\dots$	ζ_m	ζ_{m+1}	$\dots$	ζ_k	$\dots$	ζ_n	z
$\bar{x}_1$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{x}_r$	$\dots$	$\dots$	1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{a}_{rk}$	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{x}_m$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_m$

	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n	
	ζ_1	$\dots$	ζ_r	$\dots$	ζ_m	ζ_{m+1}	$\dots$	0	$\dots$	ζ_n	$z-\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\cdot\zeta_k$
$\hat{x}_1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_i-\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\cdot\bar{a}_{ik}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{x}_k$	$\dots$	$\dots$	$\frac{1}{\bar{a}_{rk}}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	1	$\dots$	$\dots$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{x}_m$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_m-\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\cdot\bar{a}_{mk}$

定理2.3.3证明

- **(3)** $\forall \boldsymbol{m}+1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{k}$，$\hat{x}_i = 0$。
- **(4)** $\hat{x}_k = \theta > 0$。
- **(1)**，**(2)**，**(3)**，**(4)** $\Rightarrow$ $\hat{x} \geq 0$，因此 $\hat{x}$ 是一个可行解。
- 下面证 $\hat{x}$ 是基本可行解。由定理 **2.2.3**，只需证 $\hat{x}$ 的正分量所对应的 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量线性无关。
- 由上述分析，$\hat{x}$ 的正分量只可能出现在 $\hat{x}_1$，…，$\hat{x}_{r-1}$，$\hat{x}_k$，$\hat{x}_{r+1}$，…，$\hat{x}_m$ 中。因此，若能证明列向量 $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_{r-1}, \boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ 线性无关，则 $\hat{x}$ 为 **bfs**。
- 反证。假设它们线性相关。由于 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ 本来是线性无关的(它们是 $\bar{x}$ 的基)，这表明 $\boldsymbol{A}_k$ 可由 $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_{r-1}, \boldsymbol{A}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ 线性表出。

定理2.3.3证明

- 则存在 **$m-1$** 个数 y_i，**$i=1, ..., m, i\neq r$**，使得 $A_k=\sum\limits_{1\le i\le m, i\neq r} y_i A_i$。
- 又由 $\overline{A}_k=B^{-1}A_k$，可知 $A_k=B\overline{A}_k=(A_1,\cdots,A_m)\begin{pmatrix}\bar{a}_{1k}\\ \vdots \\ \bar{a}_{2k}\end{pmatrix}=\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{a}_{ik}A_i$。
- 上述两式后式减前式，得：$\bar{a}_{rk}A_r+\sum\limits_{1\le i\le m, i\neq r}(\bar{a}_{ik}-y_i)A_i=0$。由于 $\bar{a}_{rk}\neq 0$，因此 **$A_1, ..., A_m$** 线性相关，与它们是 $\bar{x}$ 的基矛盾。
- 由定理 **2.3.2** 之证明，$c^{\mathrm{T}}\hat{x}=c^{\mathrm{T}}\bar{x}-\theta\zeta_k$。由于 $\theta>0$，$\zeta_k>0$，目标函数值 $c^{\mathrm{T}}\hat{x}<c^{\mathrm{T}}\bar{x}$。□

例1

- 对于例 2.2.1 的第 1 张单纯形表，$\bar{x}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$，$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{2}$。

- $$d=-\overline{A}_2+e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\hat{x}=\bar{x}+\theta d=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\6\\3\end{pmatrix}。$$

例2

- 对于例 2.2.1 的第 2 张单纯形表，$\bar{x}=(0 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$，$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{2}$。
- $$d=-\bar{A}_2+e_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\3\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\\-3\end{pmatrix},$$

$$\hat{x}=\bar{x}+\theta d=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\9\\0\end{pmatrix}。$$

谢谢大家