第4章 非线性规划

4.5 约束最优化方法

3. 惩罚函数法

- 思想：
  - 将问题中的约束条件转换成适当的带有参数的惩罚函数，
  - 然后在原来的目标函数上加上惩罚函数构造出带参数的增广目标函数，
  - 把带约束的MP问题的求解转换为一系列无约束的MP问题的求解。
- 内容：
  - 罚函数法
  - 障碍函数法

3(1). 罚函数法

罚函数法

- 考虑带一般的（带约束）MP 问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1..p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1..q \end{aligned}$$ 。

- 将其转换为无约束 MP 问题（UMP）的一种想法是，构造一个惩罚函数 $p(x)$，满足：

（1）当 $x \in X$ 时，$p(x) = 0$；

（2）当 $x \notin X$ 时，$p(x) = c$，其中 c 是一个很大的正数。

- 然后将其加大目标函数 $f(x)$上，得到增广目标函数 $F(x)$：

$$F(x) = f(x) + p(x)$$

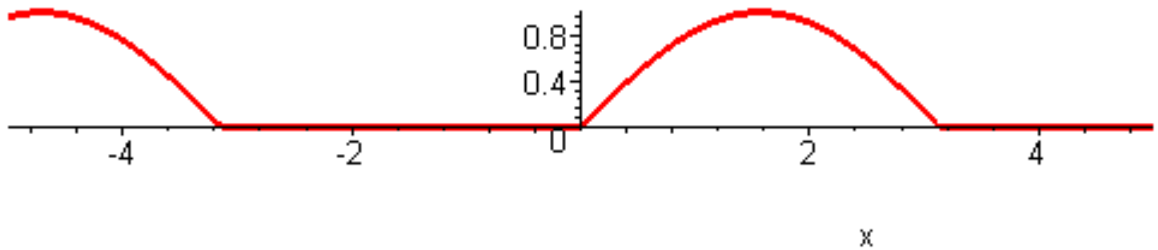
罚函数$p(x)$

- 由性质(1)，对于可行解 x，有 $F(x) = f(x)$；
  由性质(2)，对于不可行解 x，有 $F(x) >> f(x)$。
  因此，在 minimizing 的意义下，$F(x)$与 $f(x)$的最优解是相同的。
- 除了上述性质(1)和(2)，罚函数 $p(x)$还需要是连续的和光滑的（可微），以便于应用已有的无约束最优化方法求解转换得到的 UMP 问题。 (3)
- 满足性质(3)的关键是罚函数 $p(x)$的值在 MP 问题可行域的边界处不能产生跳跃。为此，可选取如下形式的罚函数：

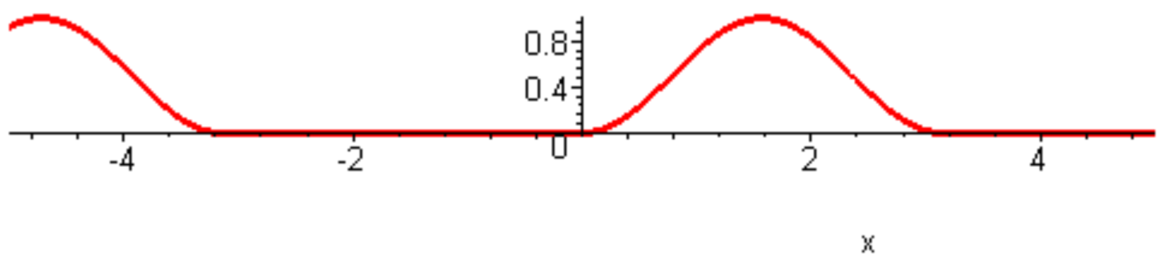
$$p_c(x) = c\sum_{i=1}^{p}\left[\max\left(g_i(x),0\right)\right]^2 + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{q}\left[h_j(x)\right]^2$$。

罚函数的性质

- 当所有的$g_i(x)$和$h_j(x)$都连续可微时，罚函数$p_c(x)$也是连续可微的。



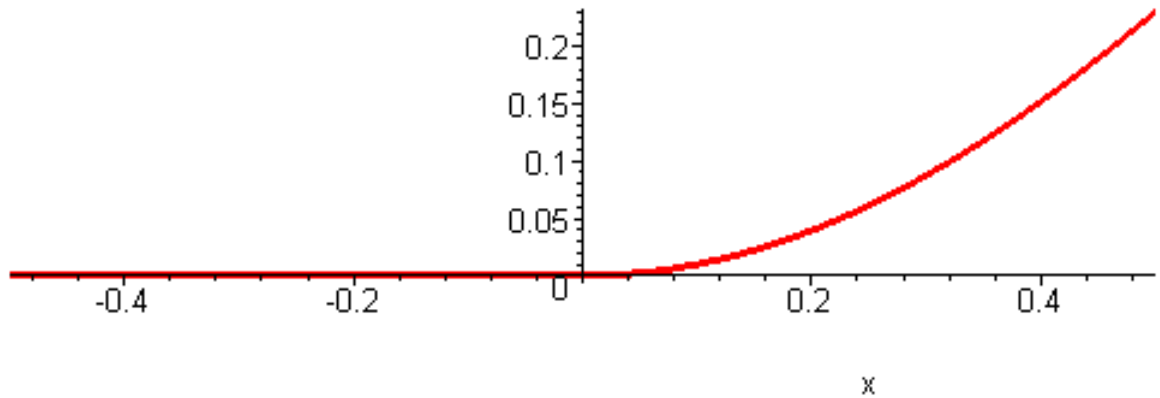
$$y = \max(\sin(x), 0)$$



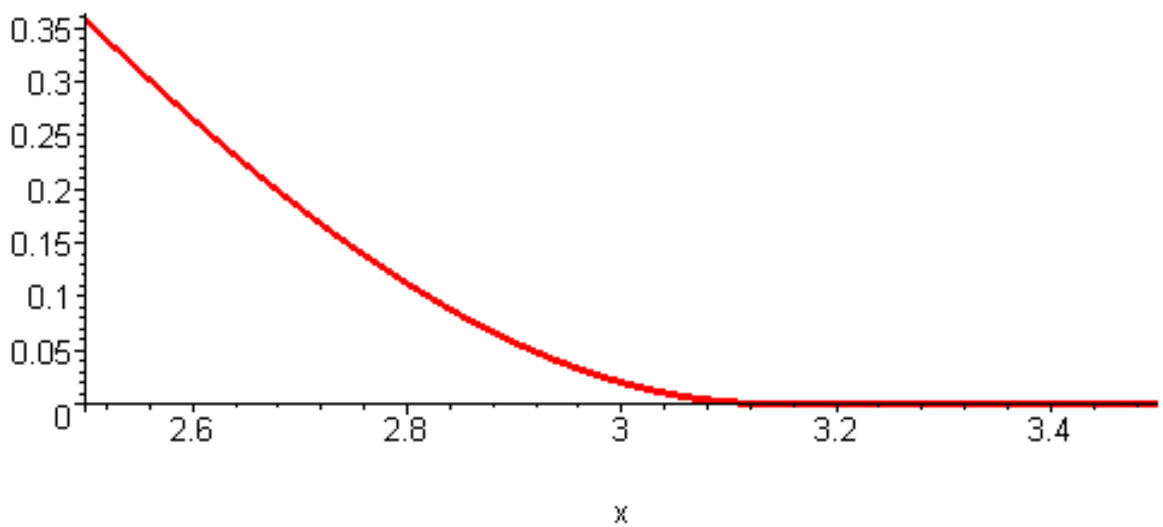
$$y = \max(\sin(x), 0)^2$$

罚函数的性质

$$y = \max(\sin(x), 0)^2$$
$$x = -0.5 \,..\, 0.5$$



$$y = \max(\sin(x), 0)^2$$
$$x = 2.5 \,..\, 3.5$$



转换为一系列的UMP问题

- 惩罚参数 c 通常选取为递增且趋于无穷的数列$\{c_k\}$。
- 随着 k 的增大，罚函数 $p_{c_k}(x)$ 的对不可行解 x 的惩罚值也逐渐增大。
- 相应的增广目标函数为：

$$F_{c_k}(x)=f(x)+p_{c_k}(x),\quad k=1,2,\cdots$$

于是，求解原带约束的 **MP** 问题就转换为一系列的无约束 **MP** 问题的求解。

罚函数法的计算步骤

（$\varepsilon > 0$ 为终止误差。）

1 选取初始点 x^0，确定罚参数序列$\{c_k\}$（$k = 1, 2, \cdots$），

$k \leftarrow 0$;

2 while x^k 未满足终止条件 do

3 $k \leftarrow k + 1$。

4 构造罚函数 $p_{c_k}(x)$ 和增广目标函数 $F_{c_k}(x)$。

5 选用某种无约束最优化方法，以 x^{k-1} 为初始点，

求解 $\min \; F_{c_k}(x)$，得到解 x^k。

6 endwhile

7 return x^k。

罚参数序列和终止条件的选取

- 罚参数序列$\{c_k\}$（$k=1,2,\cdots$）可选取为递增的等差数列或等比数列等。
- 终止条件可选取如下一种：

（1） $\dfrac{1}{c_k}p_{c_k}\left(x^k\right)\le\varepsilon$，

（2） $\max\left\{\max_{1\le i\le p}\left\{g_i\left(x\right)\right\},\max_{1\le j\le q}\left\{\left|h_j\left(x\right)\right|\right\}\right\}\le\varepsilon$ 。

例4.5.3

例 4.5.3 用罚函数法求解 MP：

$$\begin{aligned}&\min \quad x^2\\&\text{s.t.} \quad 1-x\le 0\text{，}\end{aligned}$$

- **解。罚参数序列{c_k}取{1, 2, $\cdots$}。**
- **罚函数为：** $p_{c_k}(x)=c_k[\max(1-x,0)]^2=k[\max(1-x,0)]^2$，

$$F_{c_k}(x)=x^2+k[\max(1-x,0)]^2$$

增广目标函数为：

$$=\begin{cases}x^2+k(1-x)^2 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases}\text{。}$$

例4.5.3

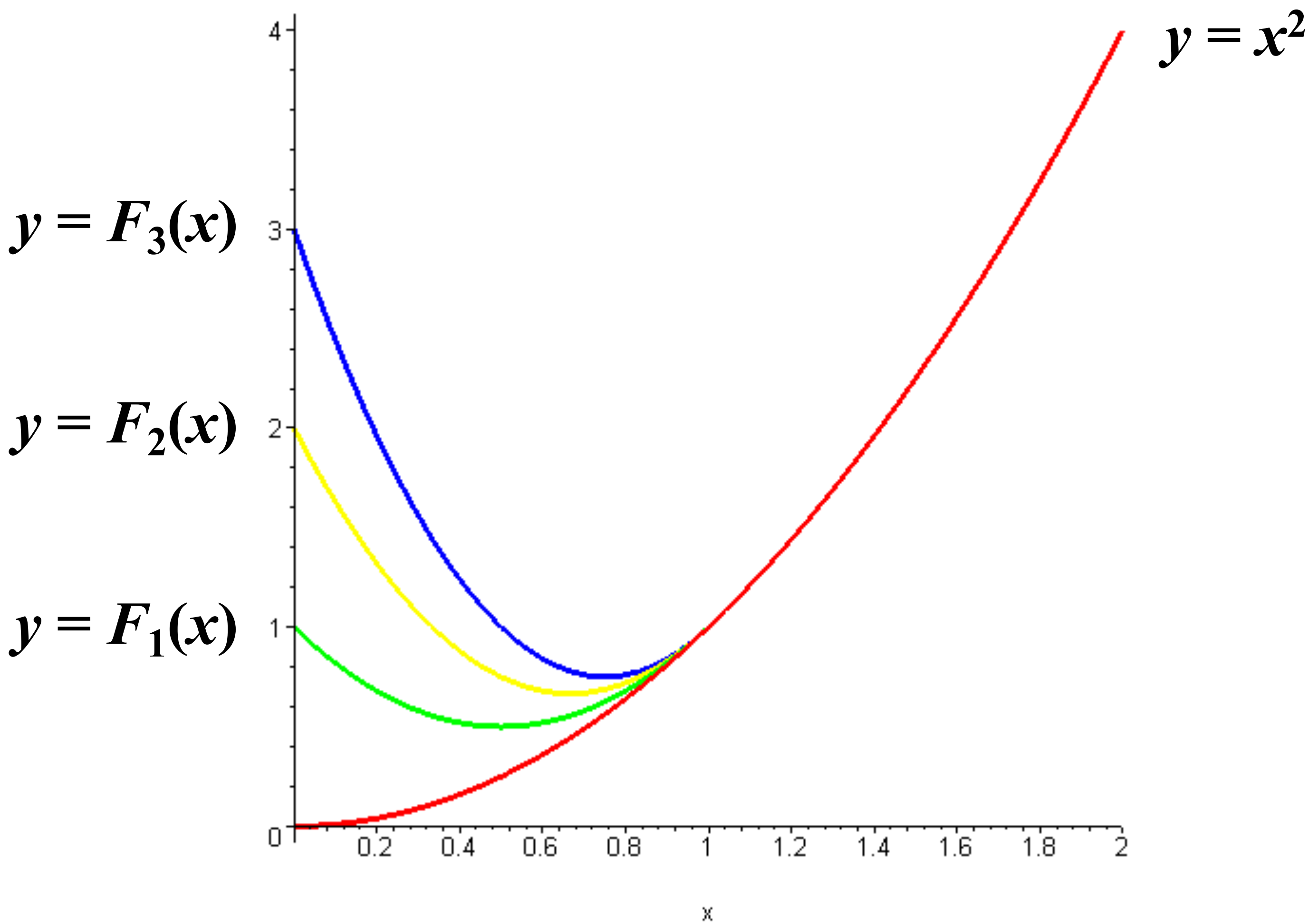
- 用解析法直接解 $\min\ F_{c_k}(x)$。

$$\frac{\mathrm{d}F_{c_k}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}2x-2k(1-x) & x<1\\ 2x & x\geq 1\end{cases}$$，解 $\frac{\mathrm{d}F_{c_k}(x)}{\mathrm{d}x}=0$，得

$$x=\frac{k}{1+k}$$。

- 因此，$x^1=\frac{1}{2}$，$x^2=\frac{2}{3}$，$x^3=\frac{3}{4}$，…。

例4.5.3



罚函数法的一点说明

- 若约束MP问题的最优解在其可行域内部，则可能出现约束MP问题和无约束MP问题的最优解是相同的情形。此时约束MP问题中的约束没有起作用。
- 因此，一般假设约束MP问题的最优解位于其可行域的边界上。
- 此时，采用罚函数法产生的点列$\{x^k\}$总是从可行域的外部趋于MP的最优解。因此，罚函数法也称为外部惩罚法。

3(2). 障碍函数法

障碍函数法

- 罚函数法是从可行域的外部逼近最优解。在这一过程中，会产生一系列逐步逼近最优解的点。但有一个缺点，这些点都是不可行的。
- 障碍函数法采取了与此不同的策略：该方法从可行域的内部逼近最优解，从而避免了上面所提到的缺点。
- 当从可行域内部逼近最优解时，需要在边界上筑起一道“墙”来，防止当前的点脱离可行域。做到这一点的方法是使用障碍函数对目标函数进行增广。

障碍函数和增广目标函数

- **考虑仅带不等式约束的 MP 问题：**

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1..p
\end{aligned}
$$

- **障碍函数构造为：**

（1） $B(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{-g_i(x)} = -\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{g_i(x)}$，**或**

（2） $B(x) = \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{1}{-g_i(x)} = -\sum_{i=1}^{p} \ln(-g_i(x))$。

- **增广目标函数为：** $F(x) = f(x) + B(x)$。

障碍函数

- 记 MP 可行域的内部为 $X^{\circ}=\left\{x\in \mathrm{R}^{n}\mid \forall i, g_{i}(x)<0\right\}$。
- 当点 x 从可行域内部趋于边界时，至少有一个 $g_i(x)$其值趋于 0。因此障碍函数 $B(x)$的值，以及增广目标函数 $F(x)$的值，就会急剧增大，从而迫使点 x 留在可行域的内部。
- 由于最终目的还是要到达可行域边界（当最优解在边界上时），因此要在迭代过程中逐步减弱 $B(x)$对 $F(x)$的影响。
- 这通常是给 $B(x)$乘上一个递减且趋于 0 的正罚参数序列$\{d_k\}$（$k = 1, 2, \cdots$）实现的。即，障碍函数为：

$$B_{d_k}(x)=-d_k\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{g_i(x)}，\text{或 } B_{d_k}(x)=-d_k\sum_{i=1}^{p}\ln(-g_i(x))。$$

障碍函数法的计算步骤

（$\varepsilon > 0$ 为终止误差。）

1 选取初始点 $x^0 \in X^\circ$，确定罚参数序列$\{d_k\}$（$k = 1, 2, \cdots$），

$k \leftarrow 0$;

2 **while** x^k 未满足终止条件 **do**

3 $k \leftarrow k + 1$。

4 构造障碍函数 $B_{d_k}(x)$ 和增广目标函数 $F_{d_k}(x)$。

5 选用某种无约束最优化方法，以 x^{k-1} 为初始点，

求解 $\min\ F_{d_k}(x)$，得到解 x^k。

6 **endwhile**

7 **return** x^k。

罚参数序列和终止条件的选取

- 罚参数序列$\{d_k\}$（$k = 1, 2, \cdots$）可选取为递减的等差数列、等比数列等。
- 终止条件可选取如下一种：

（1） $B_{d_k}\left(x^k\right) \le \varepsilon$，

（2） $\max_{1 \le i \le p}\left\{\left|g_i\left(x\right)\right|\right\} \le \varepsilon$ 。

例4.5.4

例 4.5.4 用障碍函数法求解例 4.5.3 中的 MP：

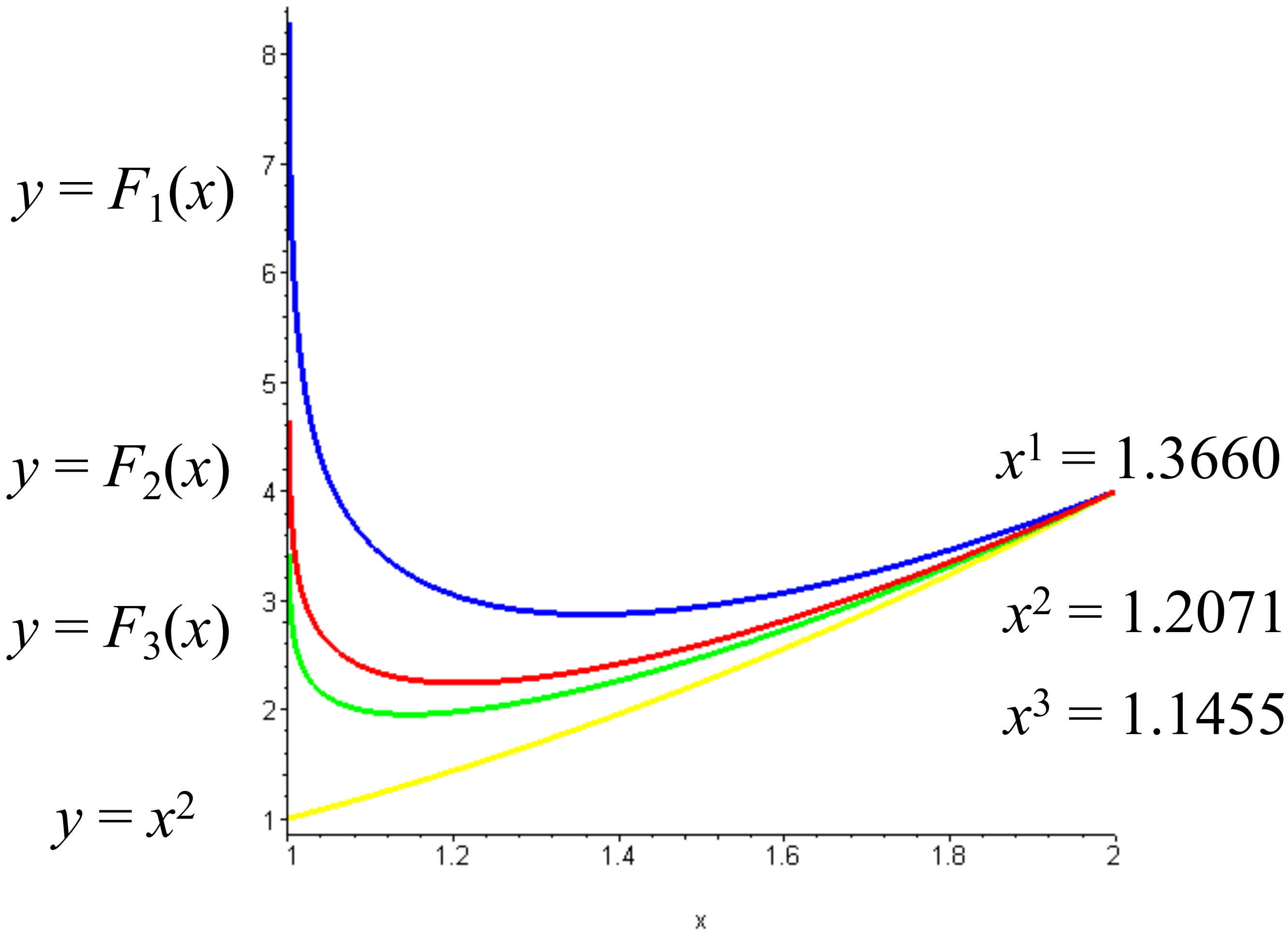
$$\begin{aligned} &\min \quad x^2 \\ &\text{s.t.} \quad 1-x\le 0， \end{aligned}$$

- 解。罚参数序列$\{d_k\}$取$\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$。
- 障碍函数为：$B_{d_k}(x)=-d_k\ln(x-1)$，$x>1$，

  增广目标函数为：$F_{d_k}(x)=x^2-\frac{1}{k}\ln(x-1)$，$x>1$。
- 解析法解$\min\ F_{d_k}(x)$，最优解为$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{k}}$。

例4.5.4

- 当k逐步增大时，x从可行域内部逐步趋于最优解$x^* = 1$。



谢谢大家