组合优化 **作业 - 8 + 9**

姓名：刘建东 学号：201700130011

班级：2017 级菁英班 日期：2020 年 4 月 23 日

题目 1

某人外出旅游，需将 n 个物品供他选择装入行李袋，但行李袋的重量不能超过 w，第 i 件物品的重量为 a_i，价值为 c_i，求这人应装哪几件物品使总重量不超过 w 且总价值最大。把这个问题看成多阶段决策问题并利用最优化原理找出递推公式。

解答：设 x_i 表示是否选择第 i 个物品，$f_k(y)$ 表示对于前 k 个物品，选择的总重量小于等于 y 时的最大总价值，即：

$$f_k(y)=\max\{\sum_{i=1}^{k}c_ix_i|\sum_{i=1}^{k}a_ix_i\leq y\},\ y\geq 0,\ x_i=0\text{ 或 }1,\ i=1,...,k$$

由此我们可以得到如下的递推式：

$$\begin{cases}f_k(y)=\begin{cases}f_{k-1}(y),\ y<a_k\\ \max\{f_{k-1}(y-a_kx_k)+c_kx_k\},\ x_k=0\text{ 或 }1,\ a_k\leq y\end{cases}\\ f_1(y)=\begin{cases}c_1,\ a_1\leq y\\ 0,\ a_1>y\end{cases}\end{cases}$$

题目 2

有个畜牧场，每年出售部分牲畜，出售 y 头牲畜可获利 $\varphi(y)$ 元。留下 t 头牲畜再繁殖，一年后可得到 $at(a>1)$ 头牲畜，已知该畜牧场年初有 x 头牲畜，每年应该出售多少，留下多少，使 N 年后还有 z 头牲畜并且获得的收入总和最大，把这个问题当作多阶段决策问题，利用最优化原理找出递推公式。

解答：设 $f_k(i)$ 表示 k 年之后还有 i 头牲畜的最大总收入，递推式如下：

$$\begin{cases}f_k(i)=\max\{f_{k-1}(j)+\varphi(j-\frac{i}{a})\},\ i\leq aj,\ k=1,2...,N\\ f_0(i)=\begin{cases}0,\ i=x\\ -\infty,\ i\neq x\end{cases}\end{cases}$$

最终答案为 $f_N(z)$.

题目 3

给出下列距离矩阵，解下列旅行售货员问题：

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 & 18 & 14 \\ 10 & 0 & 7 & 11 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 6 & 5 \\ 18 & 11 & 6 & 0 & 9 \\ 14 & 4 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

解答：令 $f_k(v_i, V)$ 表示从 v_i 点出发到达 v_0，其中经过 V 中的点各一次的最短距离，$k = |V|$。由此可以得到如下转移式：

$$\begin{cases} f_k(v_i, V) = \min\limits_{v_j \in V} \{f_{k-1}(v_j, V \backslash \{v_j\}) + D_{ij}\},\ k = 1, 2, 3, 4,\ v_0 \notin V \\ f_0(v_i, \emptyset) = D_{i0} \end{cases}$$

因此我们可以得到如下的计算表格，其中 $+\infty$ 表示无穷大即不存在：

V \ v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
$\emptyset$	10	8	18	14
$\{v_1\}$	$+\infty$	17	21	14
$\{v_2\}$	15	$+\infty$	14	13
$\{v_3\}$	29	24	$+\infty$	27
$\{v_4\}$	18	19	23	$+\infty$
$\{v_1, v_2\}$	$+\infty$	$+\infty$	23	19
$\{v_1, v_3\}$	$+\infty$	27	$+\infty$	30
$\{v_1, v_4\}$	$+\infty$	19	23	$+\infty$
$\{v_2, v_3\}$	25	$+\infty$	$+\infty$	23
$\{v_2, v_4\}$	17	$+\infty$	22	$+\infty$
$\{v_3, v_4\}$	31	29	$+\infty$	$+\infty$
$\{v_1, v_2, v_3\}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	29
$\{v_1, v_2, v_4\}$	$+\infty$	$+\infty$	25	$+\infty$
$\{v_1, v_3, v_4\}$	$+\infty$	29	$+\infty$	$+\infty$
$\{v_2, v_3, v_4\}$	27	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

因此最终的答案 $f_4(v_0, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 37$.

题目 4

某单位有资源 100 单位，拟分 4 个周期使用，在每个周期有生产任务 A、B。把资源用于 A 生产任务，每单位能获利 10 元，资源回收率为 $\frac{2}{3}$，把资源用于 B 生产任务，每单位能获利 7 元，资源回收率为 $\frac{9}{10}$。问每个周期应如何分配资源，使总收益最大？

解答：设 $f_k(x)$ 表示当前资源单位为 x，再使用 k 个周期后能获得的最大收益，由此可得到下述的递推式：

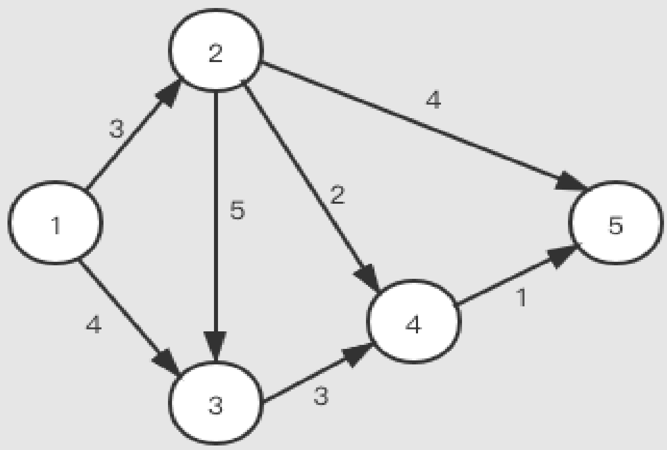
$$\begin{cases} f_k(x) = \max\limits_{0\le y\le x}\{10y + 7(x-y) + f_{k-1}(\frac{9}{10}x - \frac{7}{30}y)\} \\ f_0(x) = 0 \end{cases}$$

求解上述式子可知最大收益为 2680 元，具体分配方案如下：

周期	A	B
1	0	100
2	0	90
3	81	0
4	54	0

题目 5

设有 5 个城市，各城市之间的距离如下图所示，试用函数空间迭代法和策略空间迭代法求各城市到城市 5 的最短路线及最短路长。



解答：

(1) 函数空间迭代法：

设 $f_k(i)$ 为从 i 号点出发至多经过 k 个点到达 5 号点的最短距离，因此可以得到如下递推式，其中若 i 无连向 j 的边，则 $c_{ij} = +\infty$.

$$\begin{cases} f_k(i) = \min\limits_{1\le j\le 5}\{c_{ij} + f_{k-1}(j)\},\ i = 1, 2, ...4 \\ f_k(5) = 0,\ k = 1, 2, ..., 4 \\ f_1(i) = c_{i5},\ i = 1, 2, ..., 4 \end{cases}$$

求解上述递推式，可以得到如下结果：

k \ i	1	2	3	4
1	$+\infty$	4	$+\infty$	1
2	7	3	4	1
3	6	3	4	1
4	6	3	4	1

由此可以得到各城市到城市 5 的最短路线以及路长，如下表所示：

城市	最短路线	最短路长
1	1→ 2→ 4→ 5	6
2	2→ 4→ 5	3
3	3→ 4→ 5	4
4	4→ 5	1

(2) 策略空间迭代法：令 $s(i)$ 为点 i 下一步的位置，取初始策略为 $s_0(1)=2, s_0(2)=4, s_0(3)=4, s_0(4)=5$，由下述方程组可得：

$$\begin{cases} f_0(i)=c_{is_0(i)}+f_0(s_0(i)),\ i=1,2,...4 \\ f_0(5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0(1)=6 \\ f_0(2)=3 \\ f_0(3)=4 \\ f_0(4)=1 \\ f_0(5)=0 \end{cases}$$

再取 $s_1(i)$ 使得，$c_{is_1(i)}+f_0(s_1(i))=\min\limits_j\{c_{ij}+f_0(j)\}$，求得 $s_1(i)=s_0(i)$，$i=1,2,...,4$，因此已求得最优解。最优解如下表所示：

城市	最短路线	最短路长
1	1→ 2→ 4→ 5	6
2	2→ 4→ 5	3
3	3→ 4→ 5	4
4	4→ 5	1