组合优化
第一章 绪论

山东大学 计算机学院
任课老师：于东晓
助教：窦金峰
dxyu@sdu.edu.cn
办公室：N3楼326

个人简介

- 山东大学计算机学院，智能计算研究所
- 个人主页：

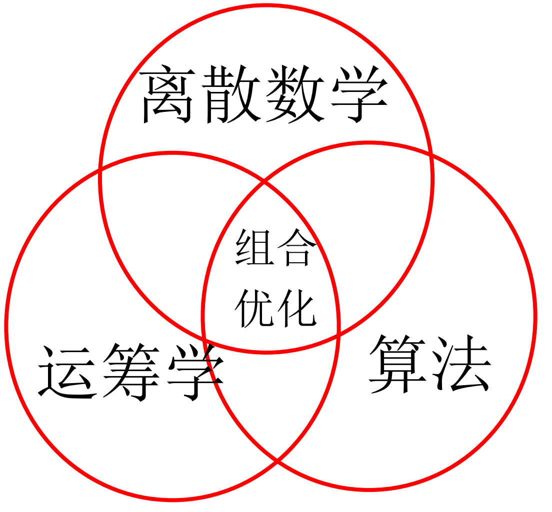
  https://www.cs.sdu.edu.cn/info/1070/2799.htm（学校）

  http://www.iic.sdu.edu.cn/detailpages/teachers/teacherdetail_ydx.html （实验室）

  邮箱：dxyu@sdu.edu.cn

组合优化（Combinatorial Optimization）

- 有限个可行解的集合中找出**最优解**的一类优化问题称为组合优化问题
- 是优化问题的一种
- 最早脱胎于运筹学
- 是计算机科学的支撑性学科



组合优化的基本形式

目标：解决各种优化问题。试图系统地研究全局性的优化问题。

- 模型要素
  - 变量(Variables)—可控因素
  - 目标(Objective)—优化的动力和依据
  - 约束(Constraints)—内部条件和外部约束

建模 → 概念 → 最优性条件 → 算法 → 灵敏度分析

例 线性规划模型

实例：某公司生产混合饲料，该饲料由 3 种营养成分组成。现有 4 种原材料，每单位原材料可提供营养成分如下表所示。

	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	成分需求
价格	10	12	8	10	
成分 1	21	25	7	15	100
成分 2	51	51	37	15	110
成分 3	18	32	21	6	200

在单位饲料中，3 种营养成分的需求分别是 100、110 和 200。

每单位原材料的价格分别是 10、12、8、10。

询问：怎样配置原材料，才能使得生产单位饲料的费用最小？

建模分析

可控因素：x_j——单位饲料中第 j 种原材料的数量。

目标：总费用达到最小

费用函数为：$10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 10x_4$

约束条件：单位饲料中必须保证第 i 种营养成分至少为 b_i。

$$21x_1 + 25x_2 + 7x_3 + 15x_4 \geqslant 100$$

$$51x_1 + 51x_2 + 37x_3 + 15x_4 \geqslant 110$$

$$18x_1 + 32x_2 + 21x_3 + 6x_4 \geqslant 200$$

线性规划（Linear Program）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 10x_4 \\
\text{s.t.} \quad & 21x_1 + 25x_2 + 7x_3 + 15x_4 \geqslant 100 \\
& 51x_1 + 51x_2 + 37x_3 + 15x_4 \geqslant 110 \\
& 18x_1 + 32x_2 + 21x_3 + 6x_4 \geqslant 200 \\
& x_i \geqslant 0 \qquad\qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant 4
\end{aligned}
$$

关于课程

1. 线性规划
2. 整数规划
3. 非线性规划
4. 动态规划
5. 图和网络优化

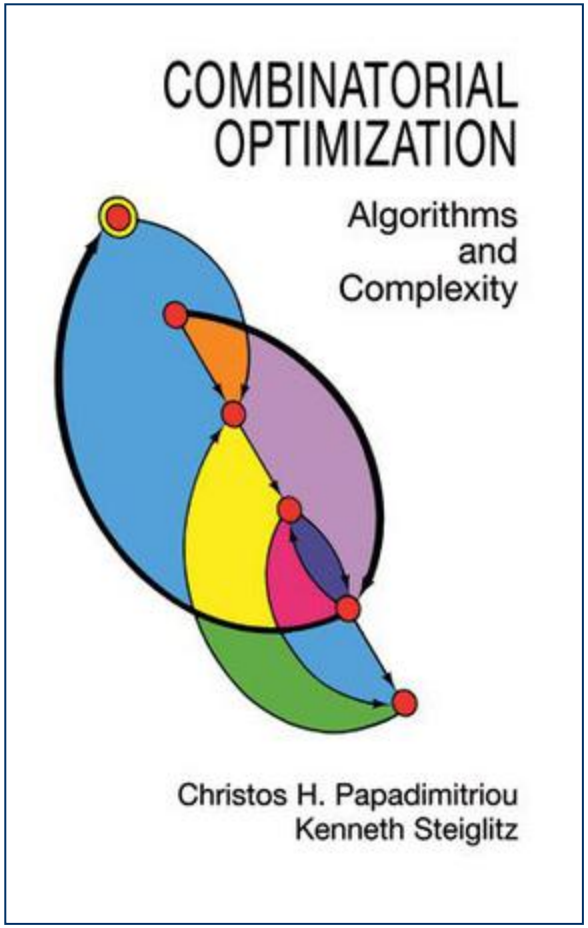
内容

1. **平时成绩30%（包括课堂表现、课下作业）**
2. **期末考试70%**

考核

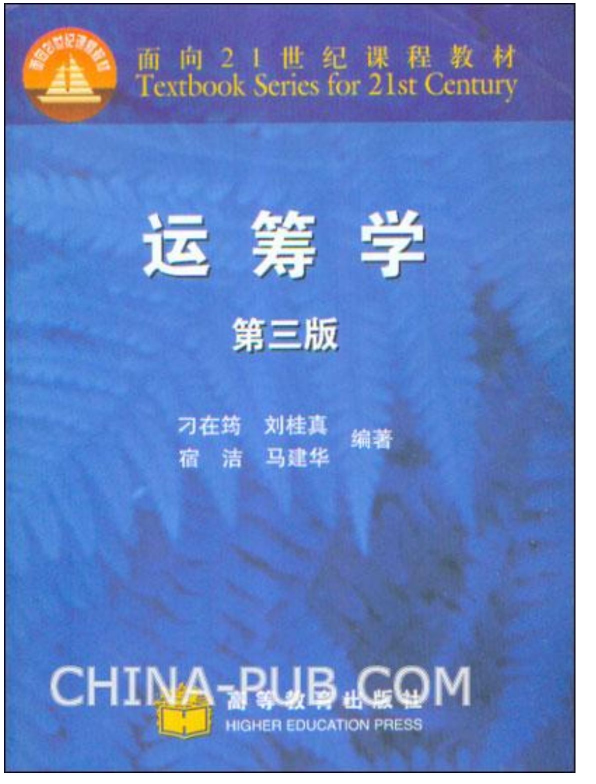
参考教材

Christos Papadimitriou, Kenneth Steiglitz: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Publications, Inc., 1998.



参考教材

- 刁在筠，刘桂真，戎晓霞，王光辉：《运筹学》。
  高等教育出版社，
  第4版，2016。



参考教材

- 《运筹学》教材编写组：
  运筹学。
  清华大学出版社，
  第2版， 1990。
  第3版，2005。

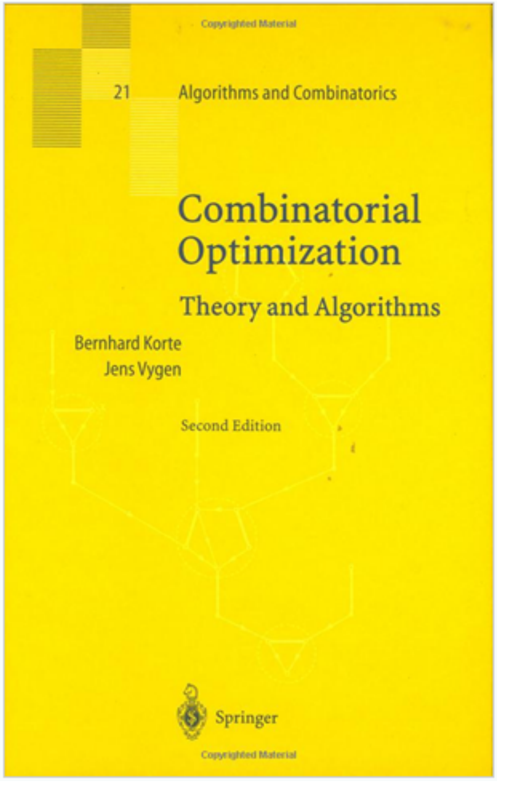
参考教材

Bernhard Korte, Jens Vygen.

Combinatorial Optimization,

Theory and Algorithms.

Springer, 2000.



参考教材

Combinatorial Optimization(组合优化)

William J. Cook et al.著

李学良、史永堂译

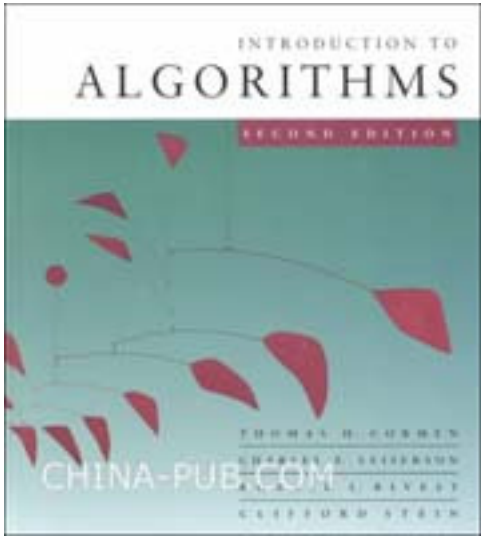
高等教育出版社，2011

参考教材

Introduction to Algorithms
(算法导论)

Thomas H. Cormen et al.著

MIT press，2009



第2章 线性规划

模型与基本定理

第2章 线性规划

- 线性规划问题
- 可行区域与基本可行解
- 单纯形算法
- 初始可行解和两阶段法
- 对偶理论和对偶单纯形法
- 灵敏度分析

§2.1 线性规划问题

1. 线性规划实例
   1. 生产计划问题
   2. 运输问题
2. 线性规划模型
   1. 一般形式
   2. 规范形式
   3. 标准形式
   4. 形式转换
   5. 概念

生产计划问题

某工厂用三种原料生产三种产品，给定三种原料的可用量，试制订总利润最大的生产计划

单位产品所需原料数量（公斤）	产品Q1	产品Q2	产品Q3	原料可用量（公斤/日）
原料P1	2	3	0	1500
原料P2	0	2	4	800
原料P3	3	2	5	2000
单位产品的利润（千元）	3	5	4	

问题分析

可控因素：每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3。
目标：每天的生产利润最大。利润函数 $3x_1 + 5x_2 + 4x_3$。
受制条件：

- 每天原料的需求量不超过可用量：
  - 原料 1： $2x_1 + 3x_2 \le 1500$
  - 原料 2： $2x_2 + 4x_3 \le 800$
  - 原料 3： $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 2000$
- 蕴含约束：产量为非负数 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

线性规划模型(LP)

$$\max \quad 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 \le 1500$$

$$2x_2 + 4x_3 \le 800$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 2000$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

运输问题（Hitchcock问题）

实例：(1)一个制造厂要把若干单位的同一种产品从两个仓库 $A_i; i=1,2$ 发送到零售点 $B_j; j=1,2,3,4$ 。

(2)仓库 A_i 能供应的产品数量为 $a_i; i=1,2$ ，零售点 B_j 所需要的产品的数量为 $b_j; j=1,2,3,4$ 。

(3)假设总供给量 $\sum_{i=1}^{2} a_i$ 和总需求量 $\sum_{j=1}^{4} b_j$ 相等，且已知从仓库 A_i 运一个单位产品往 B_j 的运价为 c_{ij} 。

询问：应如何组织运输才能使总运费最小？

问题分析

可控因素：从仓库 A_i 运往 B_j 的产品数量设为 x_{ij}, $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le 4$。

目标：总运费最小。费用函数 $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

约束条件：从每个仓库运出总量不超过其可用总量，运入每个零售点的数量不低于其需求量。

由于总供给量等于总需求量，所以都是等号。即

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = a_i; i = 1,2$$

$$x_{1j} + x_{2j} = b_j; j = 1,2,3,4$$

蕴含约束：数量非负 $x_{ij} \ge 0; i = 1,2, j = 1,2,3,4$

运输问题的LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=a_i, && i=1,2 \\
& x_{1j}+x_{2j}=b_j, && j=1,2,3,4 \\
& x_{ij}\geqslant 0, && i=1,2,\ j=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

说明：当变量为整数变量、a_i 和 b_j 都等于1时，运输问题即变为二分图上的最小权重匹配问题，称为Assignment（指派）问题。

LP的一般形式

目标函数（**Objective function**）

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i & i = 1,2,\ldots,p \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geq b_i & i = p+1,\ldots,m \\
& x_j \geq 0 & j = 1,2,\ldots,q \\
& x_j \text{无限制} & j = q+1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

约束条件（**Constraints**）

LP中各项的名称

$x_j; j=1,2,\ldots,n$ 为待定的决策变量，

$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为价值向量（或费用向量），

$c_j; j=1,2,\ldots,n$ 为价值系数（或费用系数），

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ 为右端向量，

矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 为系数矩阵。

LP的规范型和标准型

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

规范形式

Canonical form

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

标准形式

Standard form

基本概念

可行解：满足所有约束条件的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$ 。

可行域：所有的可行解的全体 $D=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$ 。

最优解：在可行域中目标函数值最大（或最小）的可行解。

最优值：最优解的目标函数值 $z^*=c^{\mathrm{T}}x^*$，其中 $\boldsymbol{x}^*$为一个最优解。

模型转换

LP的三种形式实际上是相互等价的，因为它们之间可以进行相互转换。下面介绍转换的方法。

- 目标转换

求最大可以等价成求负的最小：

$$\max\ c^{\mathrm{T}}x \Leftrightarrow \min\ -c^{\mathrm{T}}x$$

- 去掉无限制变量

令无限制变量 $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j^+ - \boldsymbol{x}_j^-$**，其中** $\boldsymbol{x}_j^+, \boldsymbol{x}_j^-$ **为非负变量。**

等式约束变不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geq b_i$$

不等式约束变等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \le b_i$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n + \boxed{s_i} = b_i, s_i \ge 0$$

松弛变量

slack variable

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \ge b_i$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n - \boxed{s_i} = b_i, s_i \ge 0$$

剩余变量

surplus variable

不等式约束变不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \le b_i$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \ge -b_i$$

或

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \ge b_i$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \le -b_i$$

例2.1.3 将LP由一般型转为标准型

$$
\begin{aligned}
\max\quad & -x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2\text{无限制}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\quad & x_1 - (x_3 - x_4) \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - (x_3 - x_4) - x_5 = -2 \\
& x_1 - 2(x_3 - x_4) + x_6 = 2 \\
& x_1 + (x_3 - x_4) + x_7 = 5 \\
& \forall 1 \leq i \leq 7, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

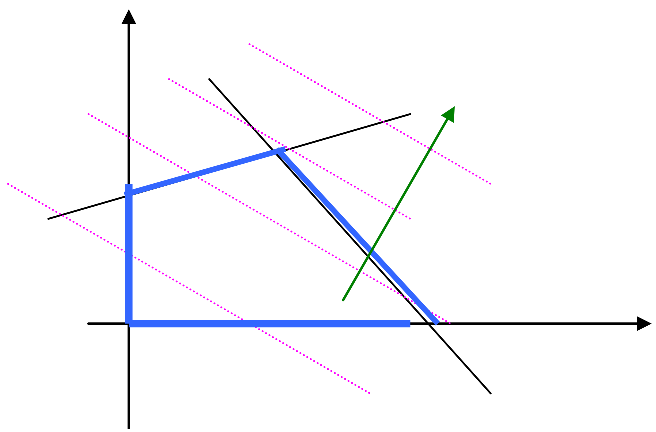
§2.2 可行区域与基本可行解

- 图解法
- 可行域的几何结构
- 基本可行解与基本定理

图解法

对于只有两个变量的线性规划问题可以用图解法求解：

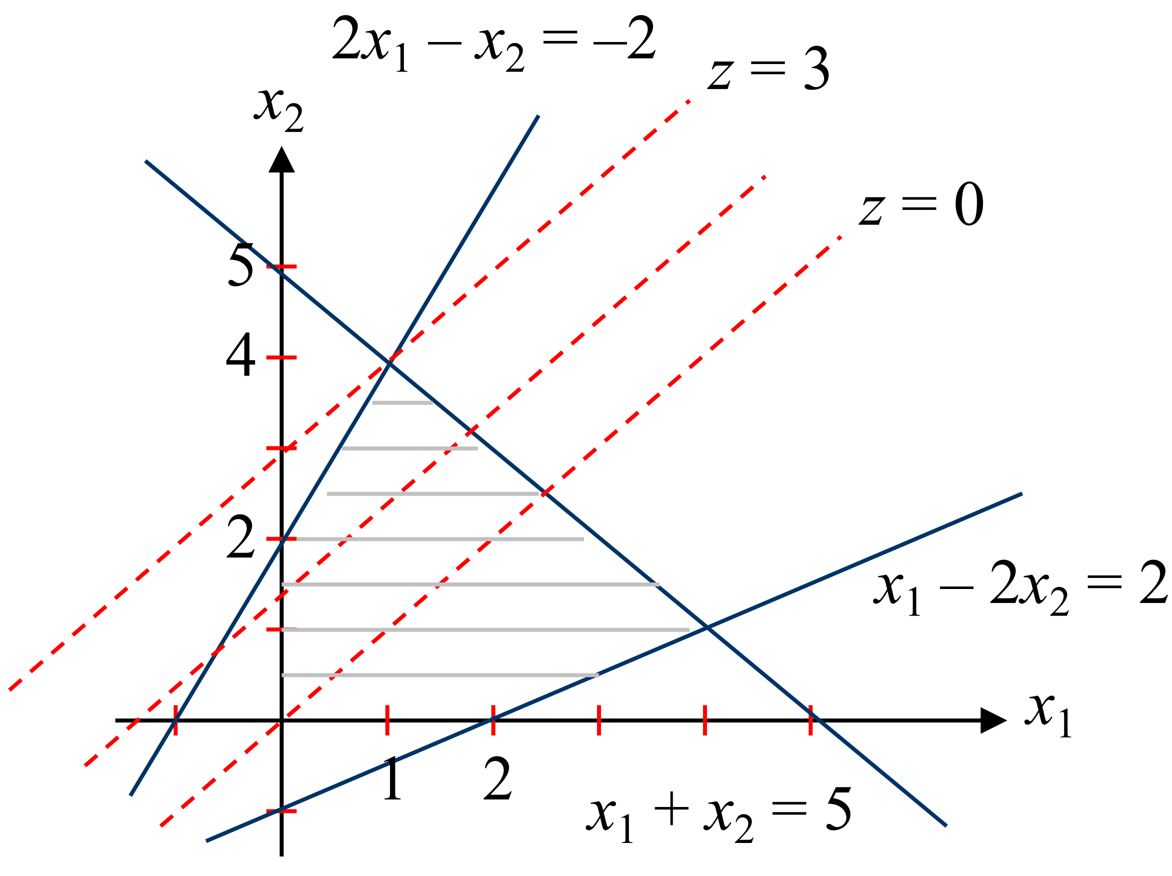
1. 变量用直角坐标系中的点表示。
2. 约束条件用坐标系中的半空间或直线表示。
3. 可行区域是若干半空间的交，即一个凸多面体。
4. 目标函数用一组等值线表示，沿着增加或减少的方向移动，与可行域最后的交点就是最优解。



例2.2.1 解线性规划

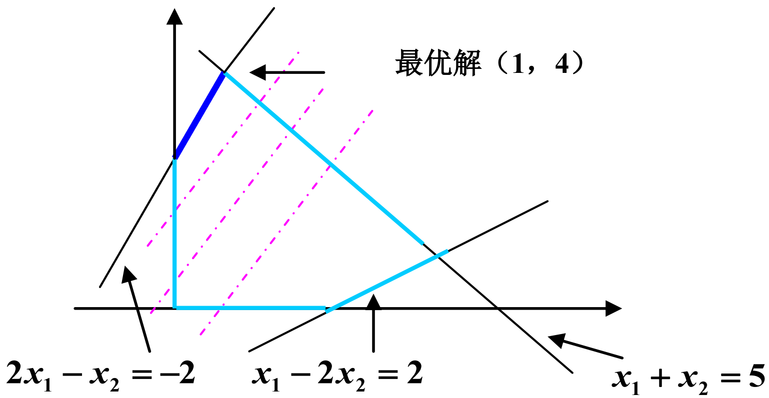
$$\max \quad z = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$



图解法说明

如果等值线与某个约束对应的函数直线平行，则该函数直线上的所有可行解都是最优解。



线性规划是否有解的几种情形

可能出现的情况：

1. 可行域是空集($D=\varnothing$)，称问题无解或不可行。
2. 可行域$D\neq\varnothing$，但目标函数在可行域上无界，此时称该问题无界（无最优解，有可行解）。
3. 可行域$D\neq\varnothing$，且目标函数在可行域上有界（有有限的最优值），此时称该问题有最优解。
   - 最优解存在且唯一，则一定在顶点上达到。
   - 最优解存在且不唯一，一定存在顶点是最优解。

解线性规划问题的难点

可行解的无限性

可行解的无限性

可行解的无限性

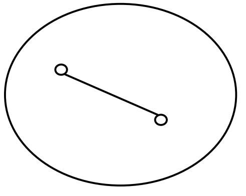
可行域的几何结构

- 基本假设
- 凸集
- 可行域的凸性

凸组合和凸集

凸组合： 设 $S \subset \mathrm{R}^n$ 是 n 维欧氏空间的点集，$x, y \in S$ 为 S 中的两个点，数 $\lambda \in [0, 1]$。则 $\lambda x + (1-\lambda)y$ 称为 x 与 y 的一个凸组合。

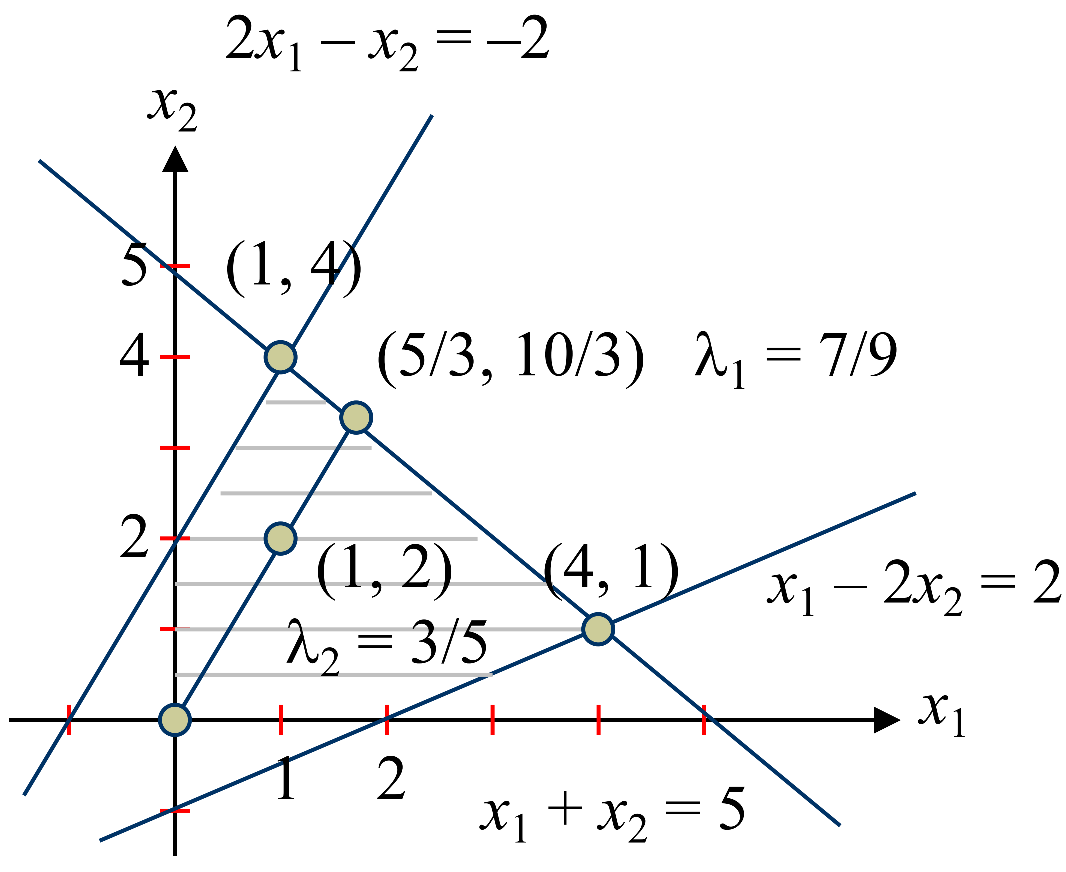
凸集： 设 $S \subset \mathrm{R}^n$ 是 n 维欧氏空间的点集，若对任意的 $x, y \in S$ 和任意的 $\lambda \in [0, 1]$，都有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$，就称 S 是一个凸集。



定理 2.2.2 任意多个凸集的交还是凸集。

凸组合

- 点 a 与 b 的一个凸组合构成 a 与 b 之间的一条线段。



线性规划的可行域是凸集

定理 2.2.1 线性规划的可行域 $D = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 是凸集。

- 证：按定义证明。
- 任取 $x, y \in D$，$\lambda \in [0, 1]$。令 $w = \lambda x + (1 - \lambda)y$。
- 由于 $x \geq 0, y \geq 0, \lambda \geq 0$，故 $w \geq 0$。 (1)
- $$\begin{aligned} Aw &= \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \\ &= \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= b。 \end{aligned} \qquad (2)$$
- (1), (2) $\Rightarrow w \in D$。■

可行域的凸性

超平面： $H=\{x\in R^n \mid a^{\mathrm{T}}x=b\}$

半空间： $H^+=\{x\in R^n \mid a^{\mathrm{T}}x\ge b\}$； $H^-=\{x\in R^n \mid a^{\mathrm{T}}x\le b\}$

多面凸集（**Polyhedron**）：

$$S=\{x\in R^n \mid a_i^{\mathrm{T}}x=b_i, 1\le i\le p; a_i^{\mathrm{T}}x\ge b_i, p+1\le i\le p+q\}$$

多面体（**Polytope**）：非空有界的多面凸集。

顶点：设 S 为凸集，$x\in S$，如果对任意 $y, z\in S$ 和 $0<\lambda<1$，都有 $x\neq\lambda y+(1-\lambda)z$，则称 x 为 S 的顶点。

基本可行解及线性规划基本定理

- 基本可行解（bfs）的定义
- 线性规划的两个基本定理
- 使用代数的方法解LP，需要解决的问题

基本假设

考虑线性规划的标准形式：
$$\min\ c^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\x\ge 0\end{cases}$$

其中 $x,c\in R^n, b\in R^m, A\in R^{m\times n}$，并且假定：

(1)可行域 $D=\{x\in R^n \mid Ax=b, x\ge 0\}$ 不空，

(2)系数矩阵 A 是行满秩的，$r(A)=m$，否则的话可以去掉多余约束。因此，可知 $m\le n$。

(3)若 $m=n$，则线性方程组有唯一解，从而解 LP 变为解线性方程组的问题。因此，一般地，可假设 $m<n$。

一种特殊形式的x

（1）分块，令 $A=(B,N)$，其中 B 为满秩方阵。x 对应划分为 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$。则 $Ax=b$ 可写为 $Bx_B+Nx_N=b$。

（2）左乘 B^{-1}，得到 $x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$，即 $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$。

（3）令 $x_N=0$，得到一种特殊形式的“解” $x=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

（注：这样得到的 x 不一定是可行解）。

基本可行解（bfs）的定义

定义 2.2.5： 设 B 是秩为 m 的约束矩阵 A 的一个 m 阶满秩子方阵，则称 B 为一个基；B 中的列向量称为基向量（共 m 个，线性无关）。

变量 x 中与基向量对应的 m 个分量称为基变量，其余的变量为非基变量。

令所有的非基变量取值为 0，得到的解 $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为相应于 B 的基本解。

当 $B^{-1}b \geq 0$ 时，称基本解 x 为基本可行解（basic feasible solution），这时对应的基矩阵 B 为可行基。

退化与非退化

如果 bfs x 其所有的基变量都是正的（$B^{-1}b>0$），则称该基可行解为**非退化的**，否则称为**退化的**。

如果一个线性规划的所有基本可行解都是非退化的，则该规划称为非退化的，否则称为退化的。

例子

问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\
& x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
& \forall 1 \le i \le 5, x_i \ge 0
\end{aligned}
$$

系数矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

例子

（1）基矩阵（123） $B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-1&1&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}4&1&9&0&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，**bfs**。

（2）基矩阵（124） $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\-1&1&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}1&4&0&9&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，**bfs**。

例子

（3）基矩阵（125） $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 9\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，不可行。

（4）基矩阵（134） $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\ 12\\ -3\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}5 & 0 & 12 & -3 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，不可行。

例子

（5）基矩阵（135） $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}b=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}2&0&6&0&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，**bfs**。

（6）基矩阵（145） $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}b=\begin{pmatrix}-1\\3\\6\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}-1&0&0&3&6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，不可行。

例子

（7）基矩阵（234） $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 12\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3 & 12 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，不可行。

（8）基矩阵（235） $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$，$B^{-1}b=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 6\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，不可行。

例子

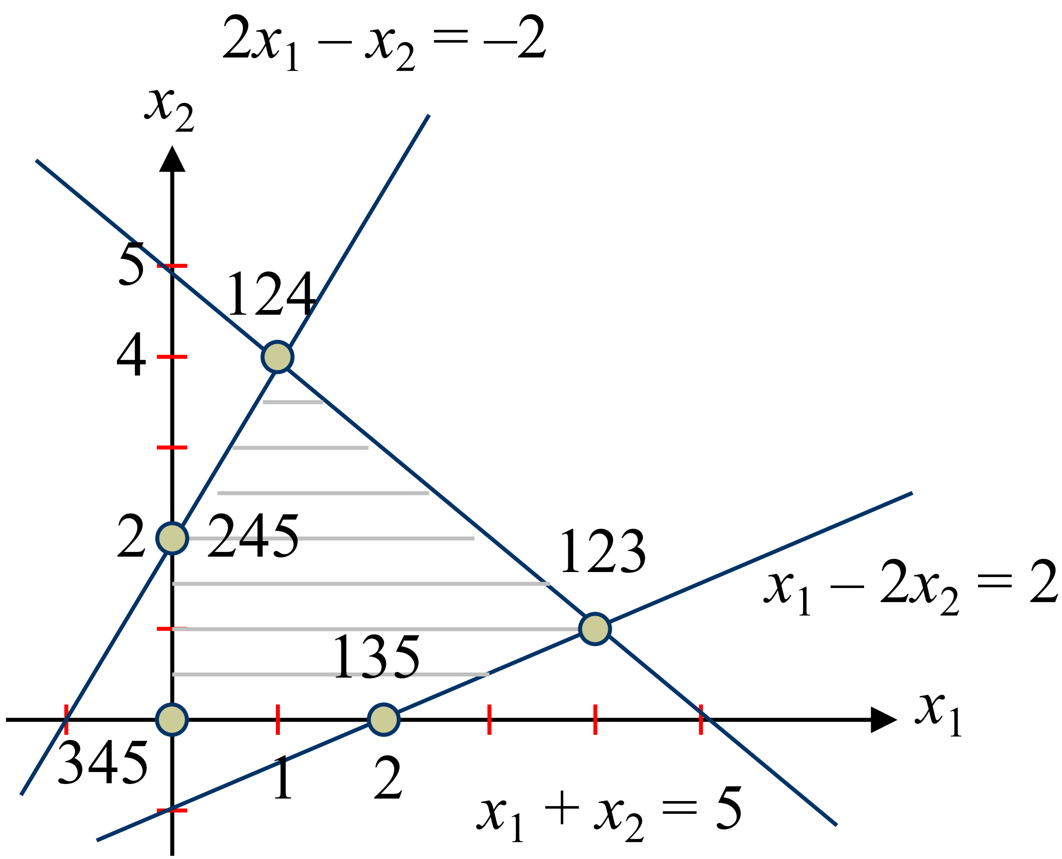
（9）基矩阵（245） $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}b=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}0&2&0&6&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，**bfs**。

（10）基矩阵（345） $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $B^{-1}b=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}0&0&2&2&5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，**bfs**。

例子



基本定理

定理 2.2.3 设 x 为可行解。则，x 是 bfs $\Leftrightarrow$ x 的正分量所对应的矩阵 A 中的列向量线性无关。

定理 2.2.4 x 是 bfs $\Leftrightarrow$ x 是可行域 D 的顶点。

定理 2.2.5（线性规划基本定理一）

LP 若有可行解，则至少有一个基本可行解。

定理 2.2.6（线性规划基本定理二）

一个 LP，若其目标函数在可行域 D 上有界，则一定存在一个 bfs 是最优解。

基本定理的启示

- 如果有解，必然有基本可行解
- 如果有最优解，在基本可行解中存在最优解
- 只需要搜索基本可行解就可找到最优解
- 基本可行解的个数**有限**

定理2.2.3

定理 设 x 为可行解。则，

x 是 bfs $\Leftrightarrow$ x 的正分量所对应的 A 中的列线性无关。

- 证明：设 x 的前 k 个分量为正分量。即，

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T,\quad x_j > 0,\quad 1 \le j \le k。$$

对应的列：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

- $(\Rightarrow)$ 由于 x 是 bfs，只有基变量可能取正值。因此 $x_1, \ldots, x_k$ 均为基变量。
- 因此，$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是 x_B 的基 B 的组成部分，必线性无关。
- $(\Leftarrow)$ 由于 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 线性无关，且 $r(A) = m$，可知 $k \le m$。
- 若 $k = m$，则令 $B = (A_1\ A_2 \ldots A_k)$，$B$ 是 m 阶满秩方阵。令 $N = (A_{k+1}\ A_{k+2} \ldots A_n)$。于是 $A = (B\ N)$。

证明

- 令 $\boldsymbol{x_B} = (\boldsymbol{x_1}\ \boldsymbol{x_2}\ \ldots\ \boldsymbol{x_k})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x_N} = (\mathbf{0}\ \ldots\ \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$，则 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$。
- 由于 $\boldsymbol{x}$ 可行，因此 $b = Ax = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = Bx_B$，

  于是 $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B^{-1}b}$。
- 因此 $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$，即，$\boldsymbol{x}$ 是 **bfs**。
- 若 $\boldsymbol{k < m}$，则由于 $\boldsymbol{r(A) = m}$，必定可从 $\boldsymbol{A}$ 中余下的 $\boldsymbol{n - k}$ 列中挑选出 $\boldsymbol{m - k}$ 列，设为 $\boldsymbol{A_{k+1}, \ldots, A_m}$，使得 $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_m}$ 线性无关。

证明

- 令 $B = (A_1 \ldots A_k\ A_{k+1} \ldots A_m)$，$N = (A_{m+1} \ldots A_n)$，
  $x_B = (x_1 \ldots x_k\ 0 \ldots 0)$, $x_N = (0 \ldots 0)$。
  由与 $k = m$ 时相同的证明，可知 $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$。即，$x$ 是 bfs。■

推论 若$(0\ 0 \ldots 0)^T$可行，则其为 bfs。

定理 2.2.4

定理　x 是 bfs $\Leftrightarrow$ x 是可行域 D 的顶点。

证明：

- 设 x 的前 k 个分量取正值，其对应的列分别为 $A_1, A_2, \ldots, A_k$。即，$x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k\ 0\ \ldots\ 0)^T$

  $A_1\ A_2\ \ldots\ A_k$
- $(\Leftarrow)$由定理 2.2.3，只需要证明 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 线性无关。
- 反证。假设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 线性相关，则存在非零向量$\delta = (\delta_1\ \delta_2\ \ldots\delta_k\ 0\ \ldots\ 0)^T$，使得$\Sigma_{j=1..k}\, \delta_j A_j = 0$。
- 由 x 是可行解，可知$\Sigma_{j=1..k}\, x_j A_j = b$。
- 因此，$\forall\varepsilon > 0$，有$\Sigma_{j=1..k}\, (x_j \pm \varepsilon\delta_j) A_j = b$。
- 令 $x^1 = x_j + \varepsilon\delta_j$，$x^2 = x_j - \varepsilon\delta_j$，则有 $Ax^1 = b$ 及 $Ax^2 = b$。

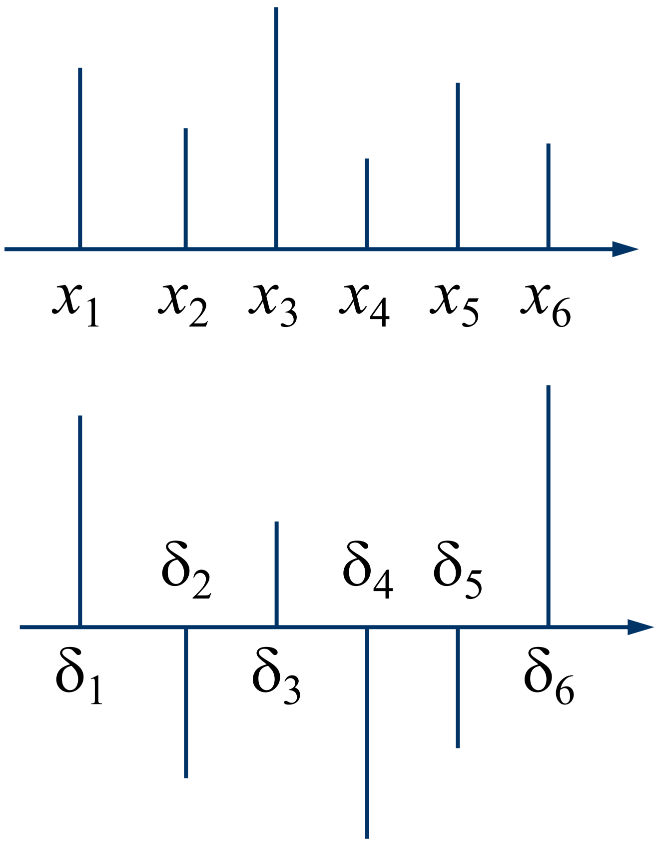
证明

- 因为$\forall 1 \le j \le k$，$x_j \ge 0$，因此当$\varepsilon > 0$取到充分小的时候，就有 $x^1 \ge 0$ 以及 $x^2 \ge 0$。
- 这表明 $x^1 \in D$，$x^2 \in D$（可行）。
- 由于$\delta \ne 0$，$x^1 \ne x^2$。
- 由 x^1 和 x^2 的构造，$x = 1/2\, x^1 + 1/2\, x^2$。这表明 x 可以写成两个不相等的可行解的凸组合，与 x 是 D 的顶点矛盾。
- ($\Rightarrow$)只需要证 bfs x 不能写成两个不相等的可行解的凸组合。
- 反证。假设$\exists x^1 \in D$，$x^2 \in D$，$x^1 \ne x^2$，$\lambda \in (0, 1)$，使得 $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$。
- 当 $j \ge k + 1$ 时，因为 $x_j = 0$，$x^1{}_j \ge 0$，$x^2{}_j \ge 0$，故有 $x^1{}_j = x^2{}_j = 0$。

证明

- 由 $Ax^1 = b$，$Ax^2 = b$，可知 $A(x^1 - x^2) = 0$。
- 因此，$\Sigma_{j=1..k}\,(x^1{}_j - x^2{}_j)\,A_j = 0$。
- 又因为 $x^1 \neq x^2$，$x^1{}_j - x^2{}_j$不全为 0。因此，$A_1, \ldots, A_k$ 线性相关。
- 由定理 2.2.3 可知，x 不是 bfs，矛盾。 ■

定理2.2.4



- 选一个充分小的$\varepsilon > 0$，使得 $\forall j, \varepsilon|\delta_j| \le x_j$。
- 任取一个 j，考虑 $x_j + \varepsilon\delta_j$。
- 若$\delta_j \ge 0$，则 $x_j + \varepsilon\delta_j \ge 0$。
- 若$\delta_j < 0$，则 $x_j + \varepsilon\delta_j = x_j - \varepsilon|\delta_j| \ge 0$。
- 任取一个 j，考虑 $x_j - \varepsilon\delta_j$。
- 若$\delta_j \le 0$，则 $x_j - \varepsilon\delta_j \ge 0$。
- 若$\delta_j > 0$，则 $x_j - \varepsilon\delta_j = x_j - \varepsilon|\delta_j| \ge 0$。

定理 2.2.5

定理 （线性规划基本定理之一）

LP 若有可行解，则至少有一个基本可行解。

证明：

- 设 x 是 LP 的任意一个可行解。
- 若 $x = (0\ 0\ \ldots\ 0)^T$，则由定理 2.2.3 之推论，x 为 bfs，得证。
- 否则，设 x 的非零分量为前 k 个，其对应的列分别为 $A_1, A_2, \ldots A_k$。即，$x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k\ 0\ \ldots\ 0)^T$

  $A_1\ A_2\ \ldots\ A_k$
- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 线性无关，则由定理 2.2.3，x 为 bfs，得证。
- 否则（$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 线性相关），存在非零向量 $\delta = (\delta_1\ \delta_2\ \ldots\delta_k\ 0\ \ldots\ 0)^T$，使得 $\Sigma_{j=1..k}\ \delta_j A_j = 0$。

证明

- 由于$\forall 1 \le j \le k$，$x_j > 0$，可取适当小的正数ε，使得

$$x_j \pm \varepsilon\delta_j \ge 0, \qquad 1 \le j \le k$$

且上述诸式（$2k$ 个）中至少有一个取等号。

- 由于 $A(x \pm \varepsilon\delta) = Ax \pm \varepsilon A\delta = Ax = b$，可知 $x + \varepsilon\delta$ 和 $x - \varepsilon\delta$ 均为 LP 的可行解。
- 于是在 $x + \varepsilon\delta$ 和 $x - \varepsilon\delta$ 中就有一个解是 LP 的可行解，且其非零分量的数目比 x 至少少一个。
- 在这个解上继续上述证明过程，得到一系列的非零分量数目逐步减少的可行解。
- 最后总可以在一个全 0 或非零分量对应的列向量线性无关的可行解上结束，这样的解必为 bfs。证毕。

定理 2.2.6

定理 （线性规划基本定理之二）

LP 若其目标函数在非空可行域上有界，则一定存在一个 bfs 是最优解。

证明：

- 因为可行域非空且目标函数有界，故 LP 存在最优解。
- 设 x^*是 LP 的一个最优解。
- 若 x^*为全 0 或非零分量对应的列向量线性无关，则 x^*是 bfs，定理得证。
- 否则，可按定理 2.2.5 证明之方法构造两个可行解 $x^* + \varepsilon\delta$ 和 $x^* - \varepsilon\delta$，且其中至少有一个解其非零分量的个数比 x^*少。

证明

- 由于 x^*为最优解，因此

$$c^{\mathrm{T}}x^* \le c^{\mathrm{T}}(x^* + \varepsilon\delta) = c^{\mathrm{T}}x^* + \varepsilon c^{\mathrm{T}}\delta \quad \Rightarrow \quad c^{\mathrm{T}}\delta \ge 0,$$

$$c^{\mathrm{T}}x^* \le c^{\mathrm{T}}(x^* - \varepsilon\delta) = c^{\mathrm{T}}x^* - \varepsilon c^{\mathrm{T}}\delta \quad \Rightarrow \quad c^{\mathrm{T}}\delta \le 0,$$

  因此 $c^{\mathrm{T}}\delta = 0$，从而 $c^{\mathrm{T}}(x^* \pm \varepsilon\delta) = c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$。
- 这表明 $x^* + \varepsilon\delta$ 和 $x^* - \varepsilon\delta$ 都是最优解。
- 从 $x^* + \varepsilon\delta$ 和 $x^* - \varepsilon\delta$ 的非零分量数目少的那个解上，继续上述证明过程，得到一系列的非零分量数目逐步减少的最优解。
- 最后总可以在一个全 0 或非零分量对应的列向量线性无关的最优解上结束。这样的最优解必为 bfs。证毕。

要点

- 基本可行解不一定都是最优解，最优解不一定都是基本可行解。
- 如果有两个基本可行解是最优解，则它们的凸组合也是最优解。
- 如果最优解不唯一，则会有多个基本可行解是最优解，它们必然在同一个面上。
- **bfs**个数有限，可以在**bfs**中寻找最优解。
  - 剩余的问题是如何判断一个**bfs**是最优解？
  - 如果不是，则如何从一个**bfs**转到另一个**bfs**？

谢谢大家