第6章 图与网络分析

6.7 最小费用流问题

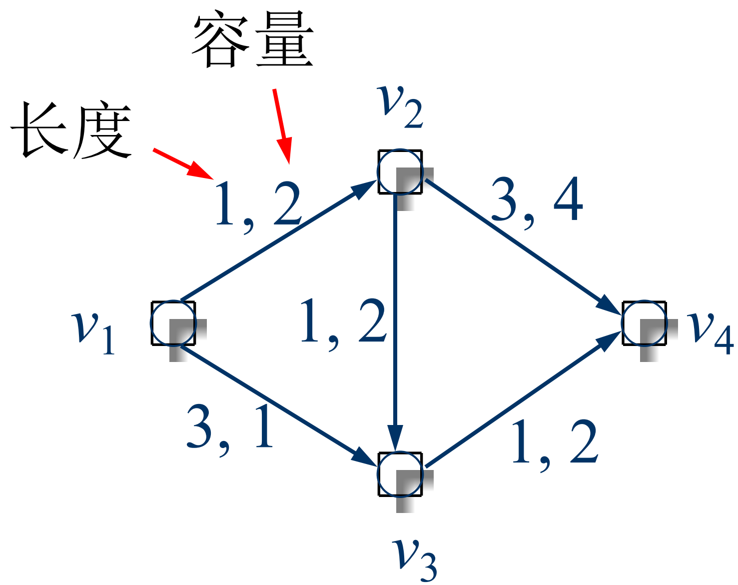
最小费用流问题

- 实例：给定有向图 $G = (V, E)$，源顶点 $s \in V$ 和目的顶点 $t \in V$，以及流值 v。弧 $(i, j) \in E$ 上定义有容量 $c_{ij} \geq 0$ 和费用（长度）$w_{ij} \geq 0$。
- 询问：求一个从 s 到 t，其流值为 v 的流，使流的费用最小。流 $x = \{x_{ij}\}$ 的费用定义为 $\sum_{i,j} w_{ij} x_{ij}$。
- 假设：所有的数（容量、费用、流值 v）均为整数。
- 说明：该问题可能没有解。但通过加入一条费用为 M（不妨令其为原图所有边的费用之和再加 1）的边 (s, t)，可以将该问题转换为必定有解的问题。

最小费用流的LP

$$
\begin{aligned}
&\min && \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij} && && \text{(LP)}\\
&\text{s.t.} && \sum_{j}(x_{js}-x_{sj}) = -v && && (1)\\
& && \sum_{j}(x_{jt}-x_{tj}) = v && && (2)\\
& && \sum_{j}(x_{ji}-x_{ij}) = 0, && i\in V, i\neq s,t && (3)\\
& && x_{ij} \le c_{ij}, && (i,j)\in E && (4)\\
& && x_{ij} \ge 0, && (i,j)\in E && (5)
\end{aligned}
$$

例子（图6.7.1）



每条弧上的第一个数表示弧的长度，第二个数表示弧的容量。

图6.7.1

	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{34}		
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)		
价	2	1	2	4	2	右	
v_1	–1	–1	0	0	0	$-v$	p_1
v_2	1	0	–1	–1	0	0	p_2
v_3	0	1	1	0	–1	0	p_3
v_4	0	0	0	1	1	v	p_4
(1, 2)	–1	0	0	0	0	–1	r_{12}
(1, 3)	0	–1	0	0	0	–3	r_{13}
(2, 3)	0	0	–1	0	0	–1	r_{23}
(2, 4)	0	0	0	–1	0	–3	r_{24}
(3, 4)	0	0	0	0	–1	–1	r_{34}

LP的对偶规划

$$
\begin{array}{lll}
\max & p_t v - p_s v - \sum\limits_{(i,j)\in E} c_{ij} r_{ij} & & \text{(DP)} \\
\text{s.t.} & p_j - p_i - r_{ij} \le w_{ij}, & (i,j)\in E & (6) \\
 & r_{ij} \ge 0, & (i,j)\in E & (7) \\
 & p_i \text{无限制}, & i\in V & (8)
\end{array}
$$

互补松紧条件

- **原始和对偶最优解的互补松紧条件为：**

  $\left(p_j - p_i - r_{ij} - w_{ij}\right)x_{ij} = 0$，$\forall(i,j) \in E$，**以及**

  $r_{ij}\left(x_{ij} - c_{ij}\right) = 0$，$\forall(i,j) \in E$。

- **该条件等价于：**

  $p_j - p_i - r_{ij} < w_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0$，$\forall(i,j) \in E$，**以及**

  $r_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = c_{ij}$，$\forall(i,j) \in E$。

- **给定一组 p_i，定义** $r_{ij} = \max\{0, p_j - p_i - w_{ij}\}$，　　**(6.7.3)**

  则 $\{p_i, r_{ij}\}$ 是对偶的一组可行解。（由 r_{ij} 的定义，r_{ij}　$p_j - p_i - w_{ij}$，满足约束(6)。）

互补松紧条件

- 由 r_{ij} 的定义，可以证明：

  $p_j - p_i - r_{ij} < w_{ij} \Leftrightarrow p_j - p_i < w_{ij}$，以及

  $r_{ij} > 0 \Leftrightarrow p_j - p_i > w_{ij}$。

- 因此互补松紧条件又等价于：

  $p_j - p_i < w_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0$，$\forall (i, j) \in E$，以及 **(6.7.4)**

  $p_j - p_i > w_{ij} \Rightarrow x_{ij} = c_{ij}$，$\forall (i, j) \in E$。 **(6.7.5)**

- 因此，只要$\{x_{ij}\}$、$\{p_i, r_{ij}\}$满足(6.7.3～5)，则它们就分别是原始规划 LP 和对偶规划 DP 的最优解。

证明

$p_j - p_i - r_{ij} < w_{ij} \Leftrightarrow p_j - p_i < w_{ij}$ 。

- 证：(⇐)。若 $p_j - p_i < w_{ij}$，由于 r_{ij} 0，显然有 $p_j - p_i - r_{ij} < w_{ij}$。
- (⇒)。若 $p_j - p_i - r_{ij} < w_{ij}$，即 $r_{ij} > p_j - p_i - w_{ij}$，由于 $r_{ij} = \max\{0, p_j - p_i - w_{ij}\}$，可知 $r_{ij} = 0$，因此 $p_j - p_i < w_{ij}$。

$r_{ij} > 0 \Leftrightarrow p(j) - p(i) > w_{ij}$ 。

- 证：由定义，$r_{ij} = \max\{0, p_j - p_i - w_{ij}\}$。
- 若 $r_{ij} > 0$，则 $p_j - p_i - w_{ij} > 0$，即 $p_j - p_i > w_i$。反之，若 $p_j - p_i > w_i$，则 $r_{ij} = p_j - p_i - w_{ij} > 0$。

算法的基本思想

- 一个流可以分解成若干不可分流（**unsplittable flow**）的叠加。
- 一个流是最小费用流，当且仅当它在满足容量约束的条件下，它的每一个不可分流都是费用最小的，即“路长”最短的。
- 因此，最小费用流算法的核心思想是：总是在费用最小的增广路上增加流值，直到流值达到 v。

如何增加流？

- 从$\{p_i = 0\}$（对偶可行）和$\{x_{ij} = 0\}$（原始不可行）开始。
- 根据 (6.7.3) 计算出 $\{r_{ij}\}$。
- 当前的 $\{p_i, r_{ij}\}$ 是对偶规划的可行解。
- 当前的 $\{x_{ij}\}$ 满足约束 (3)(4)(5)，不满足 (1)(2)。
- $\{p_i\}$ 和 $\{x_{ij}\}$ 满足互补松弛条件 (6.7.4) 和 (6.7.5)。
- 设流 $\{x_{ij}\}$ 的值为 v'。则当前的 $\{p_i, r_{ij}\}$ 和 $\{x_{ij}\}$ 分别是对偶规划和原始规划相对于流值v'的最优解。
- 若$v' < v$，则需要找 s-t增广路增加 x 的流值。
- 为了保证新的解仍是增加后的流值上的最小费用流问题的最优解，找增广路时不能违反条件 (6.7.4) 和 (6.7.5)。

找一条增广路（1）

- 首先尝试在不改变当前$\{p_i\}$值的情形下找增广路。
- 考察互补松紧条件(6.7.4)、(6.7.5)。若$p_j - p_i < w_{ij}$，则$x_{ij} = 0$；若$p_j - p_i > w_{ij}$，则$x_{ij} = c_{ij}$。因此，若$p_j - p_i \neq w_{ij}$，则x_{ij}的值就是固定的，不能增加或减小。
- 所以，只能在$p_j - p_i = w_{ij}$的弧上找增广路。由增广路的定义，这样的弧又需要满足$x_{ij} < c_{ij}$（前向弧）或$x_{ij} > 0$（后向弧）的条件。于是，定义

  $I = \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij}且x_{ij} < c_{ij}\}$，

  $R = \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij}且x_{ij} > 0\}$。

  称$I \cup R$为允许弧（admissible arc）的集合。
- 在不改变当前$\{p_i\}$值的情形下找增广路，就是在$I \cup R$中找增广路。

p_i的解释

- p_i的直观含义是顶点i的“势”，也可理解为“高度”。初始时，所有的顶点的势都为0。顶点s的势固定为0，不会改变。
- 顶点i所处的势是对从s到i在允许弧集合中的增广路长度（前向弧的长度之和 – 后向弧的长度之和）的估计。当估计不准确时，p_i的值做加1调整。
- 因此，若在允许弧集合中能够找到s-t增广路P，由于 p_i 每次都只增加1，路P实际上是所有的增广路中费用最小的。

找一条增广路（2）

- 若在允许弧集合中找不到 s-t增广路，表明当前网络上没有费用为$l=p_t$的增广路。这时就需要对$\{p_i\}$的值做出调整：将从 s 出发通过增广路不能到达的顶点的 p_i 值加 **1**，尝试找费用为 $l+1$的增广路。
- 在找到的增广路上增加流量。重复上述过程，直到 x 的流值达到 v。

Successive Shortest Path Algorithm

$\forall (i,j)\in E$， $x_{ij}\leftarrow \mathbf{0}$； $v'\leftarrow \mathbf{0}$； $\forall i\in V$， $p_i\leftarrow \mathbf{0}$。

while 流 x 的值 $v' < v$ **do**

　　确定哪些弧可以改变流量。

　　　$I\leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij}\text{且}x_{ij} < c_{ij}\}$，

　　　$R\leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij}\text{且}x_{ij} > \mathbf{0}\}$。

　　在 $\boldsymbol{I}\cup \boldsymbol{R}$ 上找一条从 s-t 增广路 P。

　　if 能找到 **then**

　　　　$\delta\leftarrow \mathbf{min}\{\delta(P), v - v'\}$。

　　　　沿路 P 增加流量δ。

　　　　$v'\leftarrow v' + \delta$。

　　else

Successive Shortest Path Algorithm

10 记 T 为第 4 步找增广路时未获得标号的顶点的集合。

11 T 中点的 p_i 值全部加 1。

12 endif

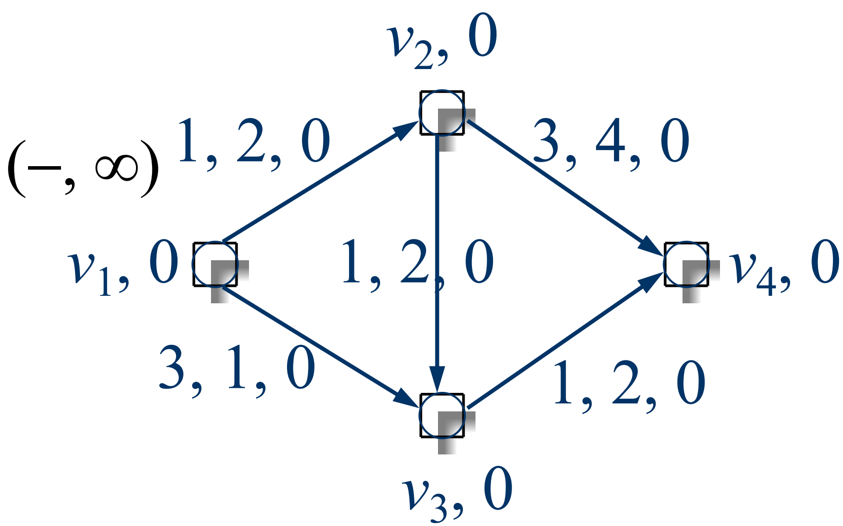
13 endwhile

14 return $\{x_{ij}\}$。

（以上算法来源于[Jewell, 1958]，[Iri, 1960]和[Busacker, Gowen, 1961]给出的基本定理。）

例

从s到t的v=3的最小费用流



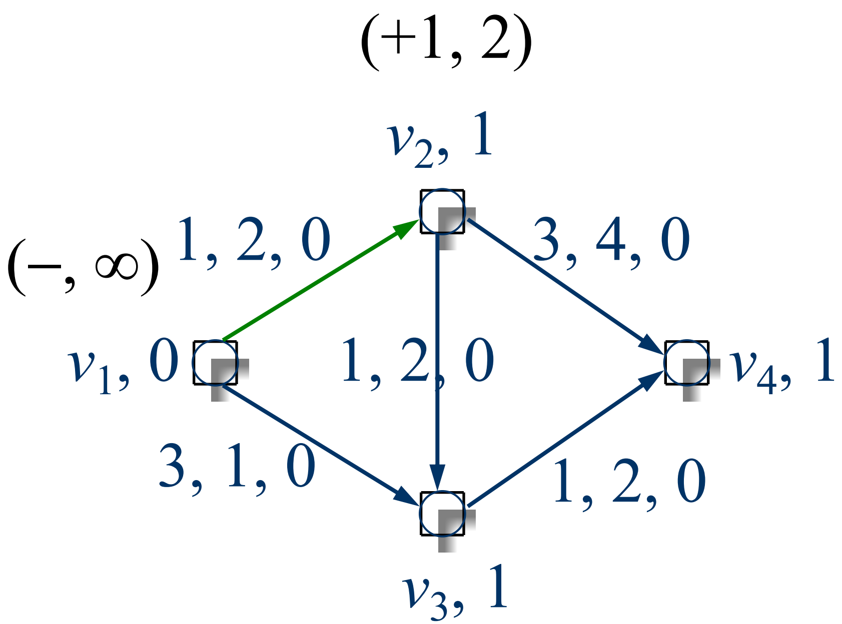
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	0	0	0	0	0
I	-	-	-	-	-
R	-	-	-	-	-

$$I \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

$I = \varnothing$，$R = \varnothing$。在$I \cup R$上找s-t增广路，不能到达t。

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	0	0	0	0	0
I	√	-	-	-	-
R	-	-	-	-	-

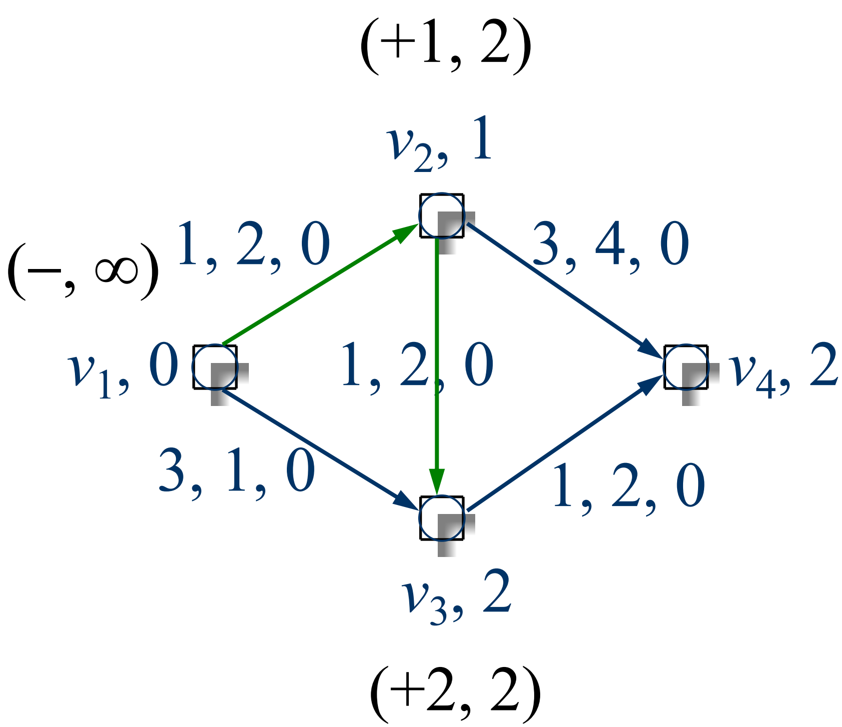
$$I \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

v_2, v_3, v_4的p_i值加1。绿边：I 中的边。

在$I \cup R$上找s-t增广路，不能到达t。

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	0	0	0	0	0
I	√	-	√	-	-
R	-	-	-	-	-

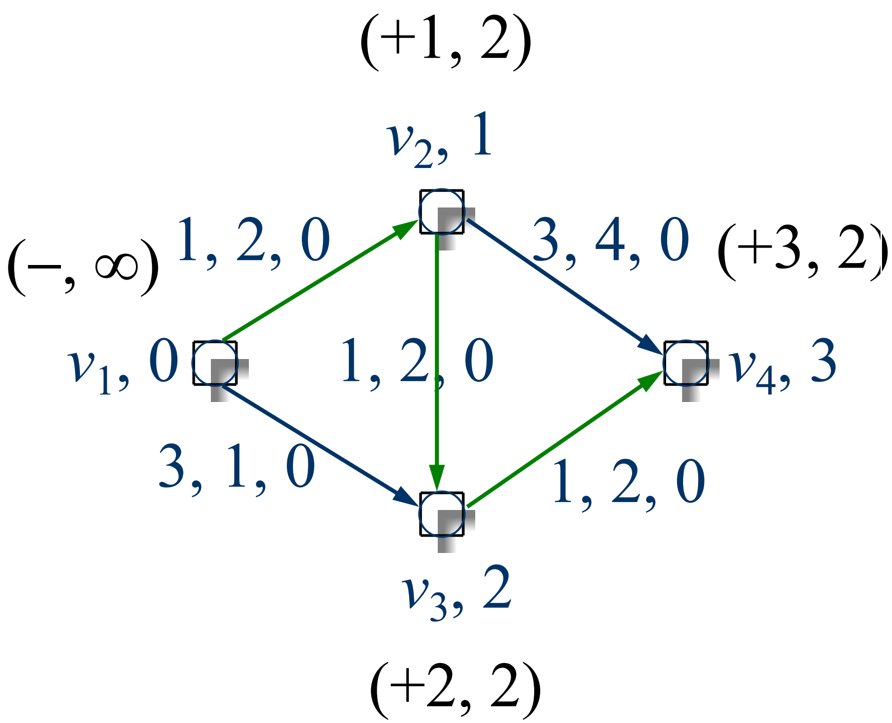
$$I \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

v_3, v_4的p_i值加1。

在$I \cup R$上找s-t增广路，不能到达t。

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	0	0	0	0	0
I	√	-	√	-	√
R	-	-	-	-	-

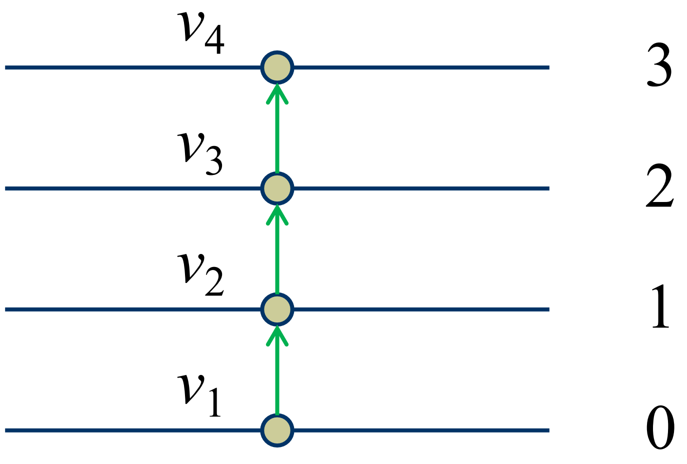
$$I \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

v_4的p_i值加1。

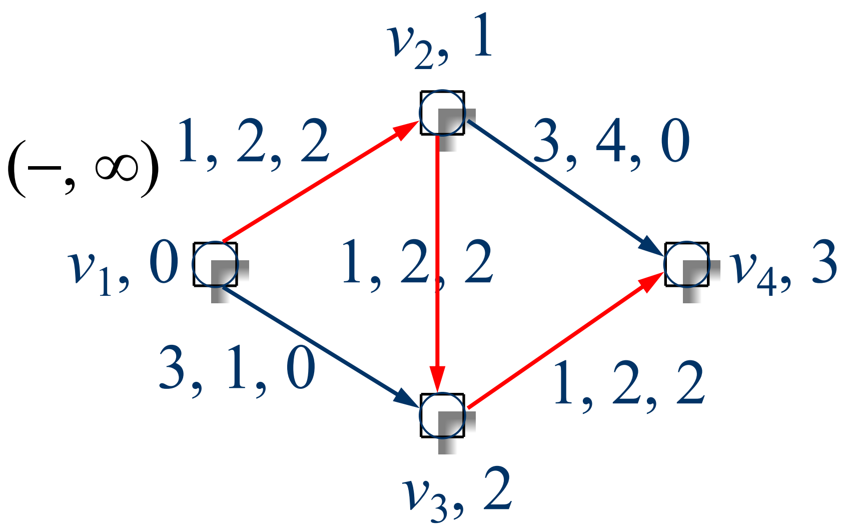
在$I \cup R$上找s-t增广路（绿边），可以到达 t，$\delta = 2$。

第1条增广路



长度：$1 + 1 + 1 = 3$

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	0	0	0	0	0
I	-	-	-	-	-
R	√	-	√	-	√

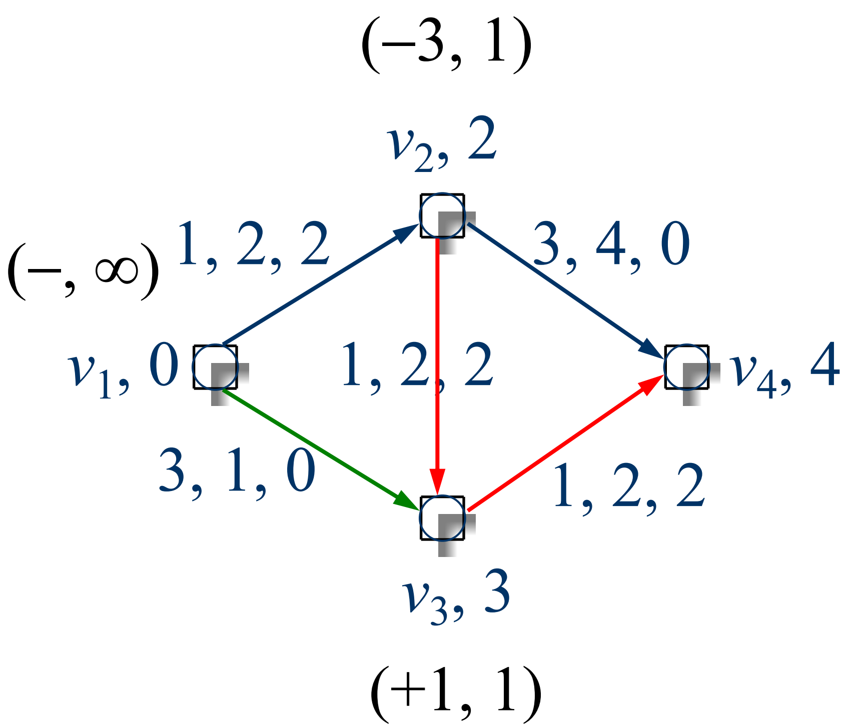
$$I \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij}\text{且}x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij}\text{且}x_{ij} > 0\}$$

红边：***R*** 中的边。

在$I \cup R$上找***s-t***增广路，不能到达 ***t***。

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	1	0	0	0	0
I	-	√	-	-	-
R	-	-	√	-	√

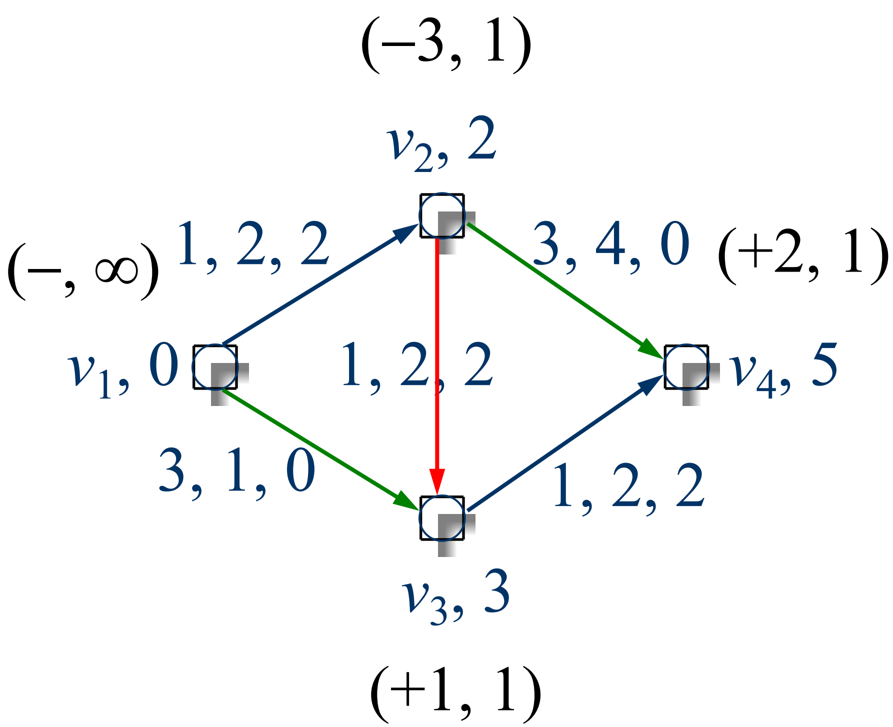
$$I \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

v_2, v_3, v_4的p_i值加1。

在$I \cup R$上找s-t增广路，不能到达t。

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	1	0	0	0	1
I	-	√	-	√	-
R	-	-	√	-	-

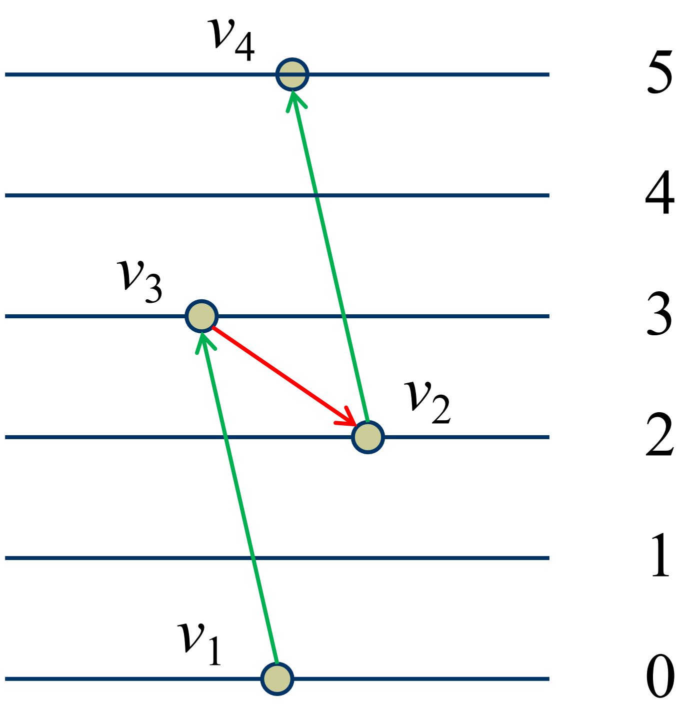
$$I \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i,j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

v_4的p_i值加1。

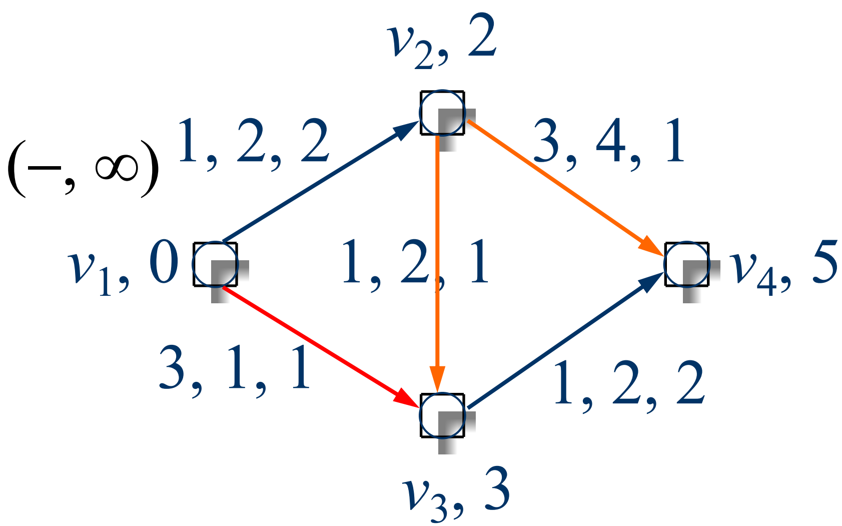
在$I \cup R$上找s-t增广路，可以到达t，$\delta = 1$。

第2条增广路



长度：$3 - 1 + 3 = 5$

例



	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	1	0	0	0	1
I			√	√	
R		√	√	√	

$$I \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} < c_{ij}\}$$

$$R \leftarrow \{(i, j) \mid p_j - p_i = w_{ij} \text{且} x_{ij} > 0\}$$

橙边：既在 I 中，又在 R 中的边。

流值到达$v = 3$，结束。

最小费用流的原始规划

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum\limits_{(i,j)\in E} w_{ij}x_{ij} & \text{(LP)} \\
\text{s.t.} & -x_{12}-x_{13}=-3, & i=1 \\
& x_{24}+x_{34}=3, & i=4 \\
& x_{12}-x_{23}-x_{24}=0, & i=2 \\
& x_{13}+x_{23}-x_{34}=0, & i=3 \\
& x_{ij}\le c_{ij}, & (i,j)\in E \\
& x_{ij}\ge 0, & (i,j)\in E
\end{array}
$$

	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
x_{ij}	2	1	1	1	2
c_{ij}	2	1	2	4	2

$r_{12}=1>0$　　　　$r_{34}=1>0$

LP的对偶规划

$$
\begin{array}{lll}
\max & p_4 \cdot 3 - p_1 \cdot 3 - \left(2r_{12} + r_{13} + 2r_{23} + 4r_{24} + 2r_{34}\right) & (\mathrm{DP}) \\
\text{s.t.} & p_2 - p_1 - r_{12} \le 1 & (1,2) \\
 & p_3 - p_1 - r_{13} \le 3 & (1,3) \\
 & p_3 - p_2 - r_{23} \le 1 & (2,3) \\
 & p_4 - p_2 - r_{24} \le 3 & (2,4) \\
 & p_4 - p_3 - r_{34} \le 1 & (3,4) \\
 & r_{ij} \ge 0, & (i,j) \in E \\
 & p_i \text{无限制}, & i \in V
\end{array}
$$

	1	2	3	4
p_i	0	2	3	5

	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
r_{ij}	1	0	0	0	1

x_{ij}全部大于0，(DP)中的5个约束全部取等式。

时间复杂度

- 设网络的点数为 n，弧数为 m，弧的最大费用为 w。
- 找允许弧需要 $O(m)$时间，寻找的次数为 mw，故花费在找允许弧的时间为 $O(m^2w)$。
- 一个顶点的 p_i 值修正的次数最多为 mw 次，总共有 n 个顶点，因此修改所有的 p_i 值的总花费为 $O(nmw)$。
- 流值为 v，则流增广最多进行 v 次，每次增广需要花费 $O(m)$时间，所以修改 x_{ij} 的总花费为 $O(mv)$。
- 所以，总的计算量为$O(m^2w+mv)$。

谢谢大家