组合优化 **作业 - 4 + 5**

姓名：刘建东 学号：201700130011

班级：2017 级菁英班 日期：2020 年 3 月 24 日

题目 1

某厂生产 A,B 两种产品，每件产品均要在甲、乙、丙各台设备上加工。每件第 j 种产品在第 i 台设备上加工消耗工时为 $a_{ij}, i = 1,2,3; j = 1,2$。现在各台设备可用于生产这两种产品的工时分别为 $b_i, i = 1,2,3$。每件第 j 种产品可以提供利润 $c_j, j = 1,2$。根据需要 A, B 产品的生产量不能少于 $k_j > 0$ 件，$j = 1,2$。而生产的 A,B 产品数量必须取整数。问如何安排生产能使该厂利润最大？试建立该问题的数学模型。

解答：设第 j 种产品的生产量为 $x_j, j = 1,2$，则上述问题可以等价于下述数学模型。

$$\begin{cases} \max \quad \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,3 \\ \qquad x_j \ge k_j, j = 1,2 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

题目 2

（指派问题）设有 n 项任务要完成，恰有 n 个人都有能力去完成任何一项任务。第 i 个人完成第 j 项任务需要的时间为 $c_{ij}, i = 1,...,n; j = 1,...,n$。试写出一个使总花费时间最少的人员分配工作方案的数学模型。

解答：设置变量 $x_{ij}, i = 1,...,n; j = 1,...,n$，$x_{ij}$ 取值范围为 0,1。$x_{ij} = 1$ 表示分配第 j 项任务给第 i 个人；$x_{ij} = 0$ 则表示不分配，因此我们可以建立下述的数学模型。

$$\begin{cases} \min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,...,n \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,...,n \\ \qquad x_{ij} \ge 0, i = 1,...,n; j = 1,...,n \\ \qquad x_{ij} \le 1, i = 1,...,n; j = 1,...,n \\ \qquad x_{ij} \text{为整数}, i = 1,...,n; j = 1,...,n \end{cases}$$

题目 3

给定 ILP 问题如下，用割平面算法求解。

$$\begin{cases} \min \quad z = x_1 - 5x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 \le 8 \\ \qquad\quad x_1 - x_2 \ge 4 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

解答：根据上述问题，我们可以得到 LP_0，转化为标准型后，如下所示。

$$\begin{cases} \min \quad z = x_1 - 5x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \qquad\quad x_1 - x_2 - x_4 = 4 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

根据上述标准型，进行初等行变换，可以得到下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	4	0	-1	4
x_3	0	3	1	1	4
x_1	1	-1	0	-1	4

由于在上述单纯形表中 $\zeta > 0$，因此我们继续变换单纯性表，可以得到下述结果。

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$

可以发现松弛问题 LP_0 的最优可行解为 $x = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0)^T$，非整数解。因此我们根据下述割平面条件公式得到本题的割平面条件。

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{lj} - \lfloor \bar{a}_{lj} \rfloor) x_j \ge \bar{b}_l - \lfloor \bar{b}_l \rfloor$$

$$\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \ge \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \ge \frac{1}{3}}$$

算的不对

因此我们得到下述的割平面方程。

$$-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + s_1 = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + s_2 = -\frac{1}{3}$$

加入割平面方程，即可得到松弛问题 LP_1 的单纯性表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{16}{3}$
s_1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$

通过对偶单纯形法求解上述单纯表，可得到如下最终结果。

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	0	0	0	0	−5	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	0	0	0	1	5
x_4	0	0	0	1	−1	1	0
x_3	0	0	1	0	−2	−1	1

由此我们可以得到 LP_1 的最优解 $x = (5, 1, 1, 0, 0, 0)^T$, 为整数解。因此原问题 ILP 的最优解为 $x = (5, 1)^T$, 最优值为 0。

题目 4

用分枝定界法解下述 ILP 问题。

$$\begin{cases} \min & z = -11x_1 - 4x_2 \\ s.t. & -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

解答：求解 LP_0，最优解为 $x^0 = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3})^T$，最优值 $z^0 = -\frac{104}{3}$。因此我们在 x_1^0 上进行分枝，得到两个约束：$x_1 \leq 2$ 和 $x_1 \geq 3$。添加约束至 LP_0 中，即可得到下述的 LP_1 和 LP_2。

$$LP_1 = \begin{cases} \min & z = -11x_1 - 4x_2 \\ s.t. & -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases} \qquad LP_2 = \begin{cases} \min & z = -11x_1 - 4x_2 \\ s.t. & -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

求解 LP_1，可得最优解为 $x^1 = (2, 3)^T$，为整数解，最优值为 $z^1 = -34$。因此更新 ILP 最优解为 $x^* = (2, 3)^T$，$z^* = -34$。

求解 LP_2，可发现此种情况无解。因此最终答案为 $x^* = (2, 3)^T$，$z^* = -34$。

题目 5

写出下述问题的数学规划模型。

将机床用来加工产品 A，6 小时可加工 100 箱。若用机床加工产品 B，5 小时可加工 100 箱。设产品 A 和产品 B 每箱占用生产场地分别是 10 和 20 个体积单位，而生产场地（包括仓库）允许 15000 个体积单位的存储量。若机床每周加工时数不超过 60 小时，产品 A 生产 x_1 (百箱) 的收益为 (600-5x_1)x_1 元，产品 B 生产 x_2 (百箱) 的收益为 $(80-4x_2)x_2$ 元，又由于收购部门的限制，产品 A 的生产量每周不能超过 800 箱。试制定最优的周生产计划，使机床生产获最大收益。

解答：

$$\begin{cases} \max \quad (60-5x_1)x_1+(80-4x_2)x_2 \\ \quad s.t. \quad 6x_1+5x_2\le 60 \\ \qquad\quad 10x_1+20x_2\le 150 \\ \qquad\quad x_1\le 8 \\ \qquad\quad x_1,x_2\ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

题目 6

判别下述函数哪些是凸的，哪些是凹的，哪些是非凸非凹的。

(1) $f(x_1,x_2)=60-10x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$

(2) $f(x_1,x_2)=-x_1^2-5x_2^2+2x_1x_2+10x_1-10x_2$

解答：

(1) 选取任意 $\alpha\in(0,1)$，任意 $x_1,x_2,x_3,x_4\in R$，令

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha f(x_1,x_2)+(1-\alpha)f(x_3,x_4)-f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_3,\alpha x_2+(1-\alpha)x_4]$$

代入原有函数式中，化简后可得如下式子

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha(1-\alpha)[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2-(x_1-x_3)(x_2-x_4)]$$

令 $X=(x_1-x_3),Y=(x_2-x_4)$，$G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 可替换为 $\alpha(1-\alpha)(X^2+Y^2-XY)$。接下来我们来考虑 (X^2+Y^2-XY) 的正负。

- 假设 $XY\le 0$，则 $X^2+Y^2-XY\ge 0$ 成立。
- 假设 $XY\ge 0$，则 $X^2+Y^2-XY\ge 2XY-XY=XY\ge 0$ 成立。

因此，$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha(1-\alpha)(X^2+Y^2-XY)\ge 0$，即 $f(x_1,x_2)$ 是 R 上的凸函数。

(2) 选取任意 $\alpha\in(0,1)$，任意 $x_1,x_2,x_3,x_4\in R$，令

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha f(x_1,x_2)+(1-\alpha)f(x_3,x_4)-f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_3,\alpha x_2+(1-\alpha)x_4]$$

代入原有函数式中，化简后可得如下式子

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\alpha(1-\alpha)[(x_1-x_3)^2+5(x_2-x_4)^2-2(x_1-x_3)(x_2-x_4)]$$

令 $X=(x_1-x_3),Y=(x_2-x_4)$，$G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 可替换为 $-\alpha(1-\alpha)(X^2+5Y^2-2XY)$。接下来我们来考虑 (X^2+5Y^2-2XY) 的正负。

- 假设 $XY \le 0$，则 $X^2+Y^2-XY \ge 0$ 成立。
- 假设 $XY \ge 0$，则 $X^2+5Y^2-2XY \ge 2\sqrt{5}XY-2XY = 2(\sqrt{5}-1)XY \ge 0$ 成立。

因此，$G(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\alpha(1-\alpha)(X^2+Y^2-XY) \le 0$，即 $f(x_1,x_2)$ 是 R 上的凹函数。

题目 7

用 0.618 法求以下问题的近似解。

$$\min_{t\ge 0} \varphi(t) = -2t^3+21t^2-60t+50$$

已知函数的单谷区间 $[0.5,3.5]$，要求最后区间精度 $\varepsilon = 0.8$。

解答：根据下述的 0.618 法程序可得到如下计算过程。

	a	t_1	t_2	b	φ_1	φ_2
0	0.500000	1.646000	2.354000	3.500000	-0.783432	-0.960880
1	1.646000	2.354000	2.791772	3.500000	-0.960880	2.649398
2	1.646000	2.083685	2.354000	2.791772	-1.938144	-0.960880
3	1.646000	1.916456	2.083685	2.354000	-1.936017	-1.938144

最后输出答案 $t_1 = 1.916456$，最优值 $\varphi_1 = -1.936017$。

```
double func(double t){
    return -2 * t * t * t + 21 * t * t - 60 * t + 50;
}

double find(double a, double b, double eps){
    double t1 = a + 0.382 * (b - a), f1 = func(t1);
    double t2 = a + 0.618 * (b - a), f2 = func(t2);
    while(b - a > eps){
        if(f1 < f2){
            b = t2, t2 = t1, f2 = f1;
            t1 = a + 0.382 * (b - a), f1 = func(t1);
        }
        else{
            a = t1, t1 = t2, f1 = f2;
            t2 = a + 0.618 * (b - a), f2 = func(t2);
        }
    }
    return t1;
}
```

题目 8

用 Newton 法求以下问题的近似最优解，给定 $t_1 = 6, \varepsilon = 10^{-3}$。

$$\min \varphi(t) = t^4 - 4t^3 - 6t^2 - 16t + 4$$

解答：根据下述的 Newton 法程序可得到如下计算过程。

k	t_k	$\varphi'(t_k)$	$1/\varphi''(t_k)$
1	6.000000	344.000000	0.003623
2	4.753623	85.462547	0.006893
3	4.164536	14.813443	0.010398
4	4.010504	0.886353	0.011798
5	4.000047	0.003946	0.011904
6	4.000000	0.000000	0.011905

最后输出答案 $t_k = 4$，最优值为 $\varphi(t_k) = -156$。

```
double func1(double t){
    return 4 * t * t * t - 12 * t * t - 12 * t - 16;
}

double func2(double t){
    return 12 * t * t - 24 * t - 12;
}

double Newton(double t1, double eps){
    double t2, tmp1, tmp2;
    while((tmp1 = func1(t1)) >= eps){
        if((tmp2 = func2(t1)) == 0) return -1;
        else t2 = t1 - tmp1 / tmp2;
        if(abs(t2 - t1) < eps) return t2;
        t1 = t2;
    }
}
```