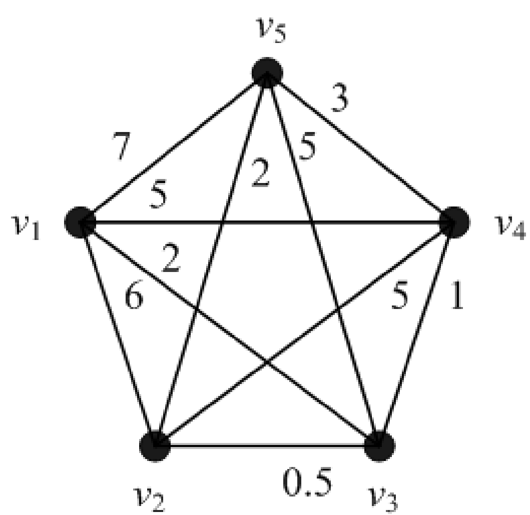
第5章 动态规划

5.4 不定期多阶段决策问题

一般图上的最短路问题

已经考察过多阶段图上从 s 到 t 的最短路问题。现在将其推广到一般图上。

- 实例：无向图 $G = (V, E)$，边 $e \in E$ 上定义有长度 $c(e)$。源顶点 s，目标顶点 t。
- 目标：求从 s 到 t 的最短路。



例 5.4.1，$s = v_1$，$t = v_5$

解（1）

- 因为图上一共有 n 个顶点，从 s 到 t 的最短路上边的数目最多不超过 $n-1$。在允许使用的边数上递推，可用动态规划法解最短 s-t 路问题。
- 定义 $f_k(u, t)$为从 u 到 t 经过 $\leq k$ 条边的最短路长度。则有：

$$f_k(u,t)=\begin{cases}0, & u=t\\ \min\limits_{v\in N(u)}\{c(u,v)+f_{k-1}(v,t)\}, & u\neq t,k\geq 1\\ \infty, & u\neq t,k=0\end{cases}。$$

- 原问题即是求 $f_{n-1}(s, t)$。

动态规划表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0					0
1	7	2	5	3	0
2	7	2	2.5	3	0
3	4.5	2	2.5	3	0
4	4.5	2	2.5	3	0

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0					
1	v_5	v_5	v_5	v_5	
2	v_5	v_5	v_2	v_5	
3	v_3	v_5	v_2	v_5	
4	v_3	v_5	v_2	v_5	

- 左表：从 v_i 到 v_5 边数不超过 k 的最短路的长度。

  右表：从 v_i 到 v_5 边数不超过 k 的最短路上 v_i 的下一个顶点。
- $f_1(v_1,v_5)=c_{15}=7$， $f_1(v_2,v_5)=c_{25}=2$， $f_1(v_3,v_5)=c_{35}=5$，

  $f_1(v_4,v_5)=c_{45}=3$。

计算过程

- $f_2(v_1,v_5)=\min\{7+0,5+3,2+5,6+2\}=7$，
  $f_2(v_2,v_5)=\min\{6+7,2+0,5+3,0.5+5\}=2$，
  $f_2(v_3,v_5)=\min\{0.5+2,6+7,5+0,1+3\}=2.5$，
  $f_2(v_4,v_5)=\min\{1+5,5+2,5+7,3+0\}=3$。
- $f_3(v_1,v_5)=\min\{7+0,5+3,2+2.5,6+2\}=4.5$，
  $f_3(v_2,v_5)=\min\{6+7,2+0,5+3,0.5+2.5\}=2$，
  $f_3(v_3,v_5)=\min\{0.5+2,6+7,5+0,1+3\}=2.5$，
  $f_3(v_4,v_5)=\min\{1+2.5,5+2,5+7,3+0\}=3$。

计算过程

- $f_4(v_1,v_5)=\min\{7+0,5+3,2+2.5,6+2\}=4.5$，
  $f_4(v_2,v_5)=\min\{6+4.5,2+0,5+3,0.5+2.5\}=2$，
  $f_4(v_3,v_5)=\min\{0.5+2,2+4.5,5+0,1+3\}=2.5$，
  $f_4(v_4,v_5)=\min\{1+2.5,5+2,5+4.5,3+0\}=3$。
  （$f_4(u,v_5)$与$f_3(u,v_5)$相同，说明在 $k=3$ 时已经求到了从诸 v_i 到 v_5 的最短路。）
- 计算完 $f_4(v_1, v_5)$后，只需要继续计算 $f_4(v_2,v_5)$, …, $f_4(v_4,v_5)$，就能求到 v_1, …, v_4 各点到 v_5 的最短路。因此导出"单汇点最短路问题"。
- 最后求到的从 v_1 到 v_5 的最短路为 $v_1-v_3-v_2-v_5$，长度为 4.5。

解（2）

- 下面要介绍的最短路动态规划算法由[Floyd 1962]和[Warshall 1962]独自提出，也称为 Flody-Warshall 算法。该算法计算出了所有顶点对之间的最短路。
- 将所有顶点从 1 到 n 编号。（假设 $s = v_1$，$t = v_n$。）
- 将费用函数 c 的定义域从 E 扩展到 $V \times V$：

  对于$(v_i, v_j) \in V \times V$，若 $i = j$，则定义 $c(i, j) = 0$；

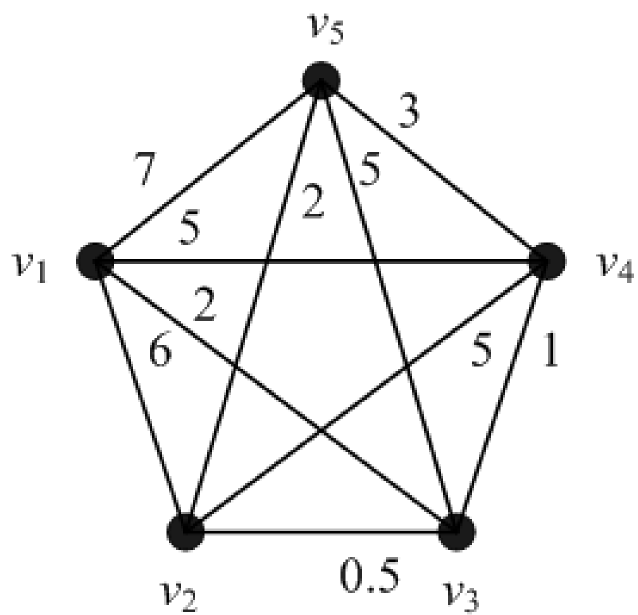
  否则，若$(v_i, v_j) = e \in E$，则定义 $c(i, j) = c(j, i) = c(e)$；

  否则（v_i、v_j之间没有边），定义 $c(i, j) = c(j, i) = +\infty$。
- $c(i, j)$简记为 c_{ij}。

递推方程

- 观测：设 P 为从 v_i 到 v_j 的一条最短路，其上最大的顶点编号（不包括 i 和 j）为 k。则 P 也是从 v_i 到 v_j 中间顶点编号不超过 k 的一条最短路。并且，P 上从 v_i 到 v_k 的路 P_1 也是从 v_i 到 v_k 的中间顶点编号不超过 $k-1$ 的一条最短路；类似地，P 上从 v_k 到 v_j 的路 P_2 也是从 v_i 到 v_k 的中间顶点编号不超过 $k-1$ 的一条最短路。
- 定义 $d_{ij}^{(k)} = d^{(k)}(i,j)$ 为从 v_i 到 v_j 中间顶点编号不超过 k 的最短路长度。则有：$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} c_{ij}, & k=0 \\ \min\left\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right\}, & k \ge 1 \end{cases}$。
- 由于最大的顶点编号为 n，因此任何一条最短路都是中间顶点编号不超过 n 的一条最短路。原问题即是求 $\left\{d_{ij}^{(n)}\right\}$。

一般图上的最短路问题



例 5.4.1，$s = v_1$，$t = v_5$

动态规划表

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 0.5 & 5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 0.5 & 5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 0.5 & 5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 2.5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 2.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 2 & 3 & 4.5 \\ 2.5 & 0 & 0.5 & 1.5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 2.5 \\ 3 & 1.5 & 1 & 0 & 3 \\ 4.5 & 2 & 2.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

动态规划表

$$D^{(4)}=\begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 2 & 3 & 4.5 \\ 2.5 & 0 & 0.5 & 1.5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 2.5 \\ 3 & 1.5 & 1 & 0 & 3 \\ 4.5 & 2 & 2.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}=\begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 2 & 3 & 4.5 \\ 2.5 & 0 & 0.5 & 1.5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & 2.5 \\ 3 & 1.5 & 1 & 0 & 3 \\ 4.5 & 2 & 2.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

（$\boldsymbol{D}^{(3)}=\boldsymbol{D}^{(4)}=\boldsymbol{D}^{(5)}$。）

单汇点最短路问题

- 实例：无向图 $G = (V, E)$，顶点集合 $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$。边$(v_i, v_j) \in E$ 上定义有长度 c_{ij}。
- 目标：从 $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ 各个顶点到顶点 v_n 的最短路？
- 定义 $f(i)$为从顶点 v_i 到顶点 v_n 的距离（最短路的长度）。则有：

$$\begin{cases} f(i) = \min\limits_{1 \le j \le n}\{c_{ij} + f(j)\}, & i = 1..n-1 \\ f(n) = 0, & i = n \end{cases} \quad \text{。} \qquad (5.4.1)$$

- 这是一个函数方程，而不是递推方程。
- 两种解法：函数空间迭代法和策略空间迭代法

（1）函数空间迭代法

例 5.4.1 之前定义的$\{f_k(i)\}$就是函数方程(5.4.1)的一个解。

定理 5.4.1 **由方程(5.4.2)确定的函数列$\{f_k(i)\}$单调下降收敛于函数方程(5.4.1)的解$f(i)$。**

- **证：** $\forall 1 \le i \le n-1$， $\forall k \ge 2$，

  $f_k(i) = \min\limits_{1\le j\le n}\{c_{ij} + f_{k-1}(j)\} \le c_{ii} + f_{k-1}(i) = f_{k-1}(i)$，**因此$\{f_k(i)\}$是单调下降序列。**

- **因为诸$c_{ij} \ge 0$， $f_k(i) \ge \min\{c_{ij}\} = 0$，有下界。所以$\{f_k(i)\}$有极限，设极限为$f(i)$。**

- **由于$f(i)$的定义域仅有有限个 *i*，因此对任意$\varepsilon > 0$，存在正整数 k_0，当$k \ge k_0$时，对所有的 *i*，都有$|f_k(i) - f(i)| < \varepsilon$。**

定理5.4.1

- 因此有$-\varepsilon+f_k(i)<f(i)<\varepsilon+f_k(i)$，

  以及$-\varepsilon+f_{k+1}(i)<f(i)<\varepsilon+f_{k+1}(i)$，其中$k\geq k_0$。

- 因此，$f(i)<\varepsilon+f_{k+1}(i)=\varepsilon+\min\limits_j\{c_{ij}+f_k(j)\}$

  $<\varepsilon+\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)+\varepsilon\}=\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)\}+2\varepsilon$，**(1)**

  以及，$f(i)>f_{k+1}(i)-\varepsilon=\min\limits_j\{c_{ij}+f_k(j)\}-\varepsilon$

  $>\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)-\varepsilon\}-\varepsilon=\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)\}-2\varepsilon$。**(2)**

- 当$\varepsilon\to 0$时，**(1)**、**(2)**都$\to\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)\}$。因此，

  $f(i)=\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)\}$。

（2）策略空间迭代法

- 称 $s:V\setminus\{v_n\}\mapsto V$ 为一个策略，其中 $s(i)$ 表示对于单汇点（$\boldsymbol{v_n}$）最短路问题，从 $\boldsymbol{v_i}$ 到 $\boldsymbol{v_n}$ 的路上顶点 $\boldsymbol{v_i}$ 的下一个顶点（即后继），$i=1..n-1$。
- $\{s(i)\}$ 需要是一个无回路策略，即，从任一个顶点 $\boldsymbol{v_i}$ 出发，经过任意次 $s(i)$ 后继操作，不能再回到 $\boldsymbol{v_i}$。特别地，$s(i)\neq i$。
- 由于 $\boldsymbol{s}$ 是 $V\setminus\{v_n\}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的函数，且 $\boldsymbol{s}$ 是无回路的，以 $\boldsymbol{V}$ 为顶点集，以 $\{(i,s(i))\,|\,i=1..n-1\}$ 为边集，必构成一棵以 $\boldsymbol{v_n}$ 为根的树。

策略空间迭代法

- 给定一个策略 $\{s(i)\}$，解方程组

$$\begin{cases} f_k(i) = c(i, s_k(i)) + f_k(s_k(i)), & i = 1..n-1 \\ f_k(n) = 0, & i = n \end{cases},$$

  得到 $f_k(1), f_k(2), \cdots, f_k(n)$，其中 $f_k(i)$ 表示在策略 s_k 之下，从顶点 v_i 到顶点 v_n 的路的长度。

- 令 $s_{k+1}(i) = \arg\min\limits_{1 \le j \le n, j \ne i} \{c(i, j) + f_k(j)\}$，$i = 1..n-1$，构造下一个策略 s_{k+1}。

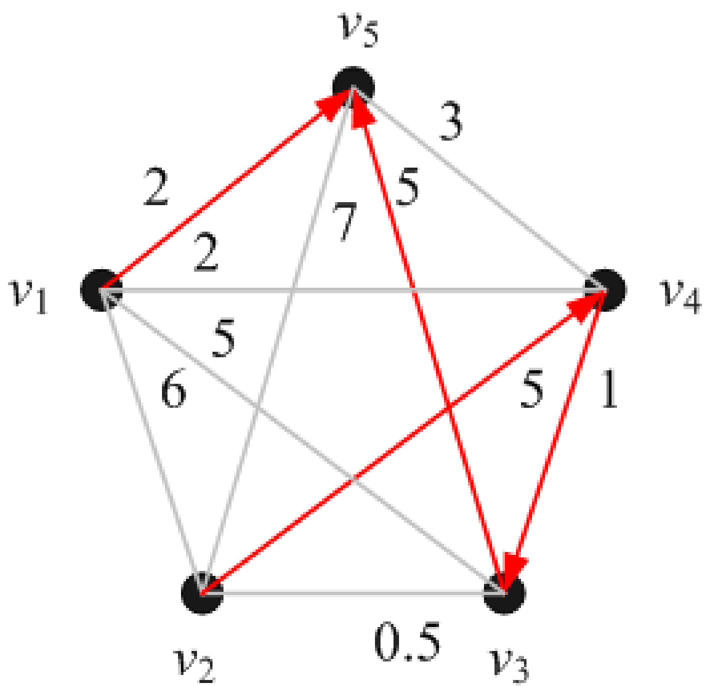
- 从一个初始策略 s_0 开始，重复上述过程，直到相邻的两个策略 s_{k-1} 和 s_k 完全相同，则 s_k 就是最优解，此时 f_k 是函数方程 **(5.4.1)** 的解。

例5.4.1（2）

例 5.4.1(2) 用策略空间迭代法重解最短路问题。

- 初始策略 s_0 为：

$s_0(1)$	$s_0(2)$	$s_0(3)$	$s_0(4)$
5	**4**	**5**	**3**



例5.4.1（2），计算f_0

- 解方程组

$$\begin{cases} f_0(1)=c(1,5)+f_0(5)=2+f_0(5) \\ f_0(2)=c(2,4)+f_0(4)=5+f_0(4) \\ f_0(3)=c(3,5)+f_0(5)=5+f_0(5) \\ f_0(4)=c(4,3)+f_0(3)=1+f_0(3) \\ f_0(5)=0 \end{cases}$$

，得：

$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	$f_0(5)$
2	**11**	**5**	**6**	**0**

例5.4.1（2），构造s_1

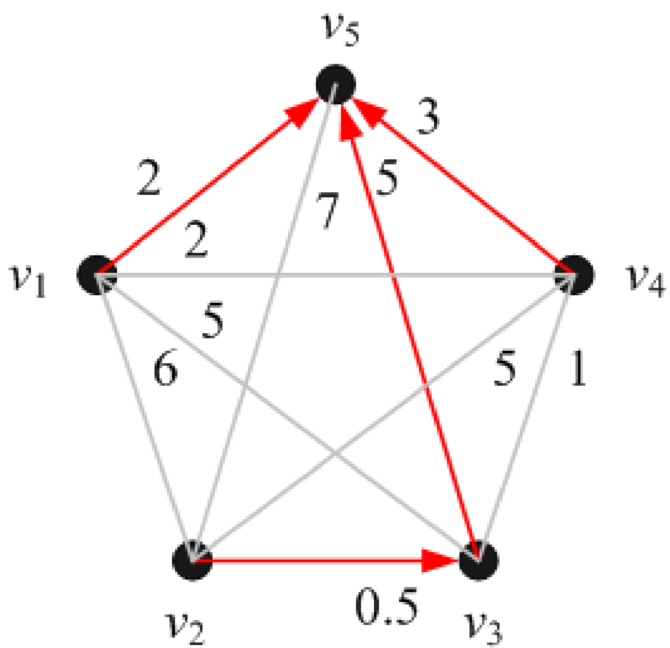
- **构造策略 s_1:**

$$s_1(1) = \text{argmin}\{\text{---}, c_{12} + f_0(2), c_{13} + f_0(3), c_{14} + f_0(4), c_{15} + f_0(5)\}$$
$$= \text{argmin}\{\text{---}, 6 + 11, 5 + 5, 2 + 6, 2 + 0\} = 5。$$
$$s_1(2) = \text{argmin}\{ c_{21} + f_0(1), \text{---}, c_{23} + f_0(3), c_{24} + f_0(4), c_{25} + f_0(5)\}$$
$$= \text{argmin}\{6 + 2, \text{---}, 0.5 + 5, 5 + 6, 7 + 0\} = 3。$$
$$s_1(3) = \text{argmin}\{ c_{31} + f_0(1), c_{32} + f_0(2), \text{---}, c_{34} + f_0(4), c_{35} + f_0(5)\}$$
$$= \text{argmin}\{5 + 2, 0.5 + 11, \text{---}, 1 + 6, 5 + 0\} = 5。$$
$$s_1(4) = \text{argmin}\{ c_{41} + f_0(1), c_{42} + f_0(2), c_{43} + f_0(3), \text{---}, c_{45} + f_0(5)\}$$
$$= \text{argmin}\{2 + 2, 5 + 11, 1 + 5, \text{---}, 3 + 0\} = 5。$$

例5.4.1（2），策略s_1

- **策略 s_1 为:**

$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$
5	**3**	**5**	**5**



例5.4.1（2），计算f_1

- 解方程组

$$\begin{cases} f_1(1)=c(1,5)+f_1(5)=2+f_1(5) \\ f_1(2)=c(2,3)+f_1(3)=0.5+f_1(3) \\ f_1(3)=c(3,5)+f_1(5)=5+f_1(5) \\ f_1(4)=c(4,5)+f_1(5)=3+f_1(5) \\ f_1(5)=0 \end{cases}$$

，得：

$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	$f_1(5)$
2	**5.5**	**5**	**3**	**0**

例5.4.1（2），构造s_2

- **构造策略 s_2:**

$s_2(1) = \text{argmin}\{---, c_{12} + f_1(2), c_{13} + f_1(3), c_{14} + f_1(4), c_{15} + f_1(5)\}$

$= \text{argmin}\{---, 6 + 5.5, 5 + 5, 2 + 3, 2 + 0\} = 5$。

$s_2(2) = \text{argmin}\{ c_{21} + f_1(1), ---, c_{23} + f_1(3), c_{24} + f_1(4), c_{25} + f_1(5)\}$

$= \text{argmin}\{6 + 2, ---, 0.5 + 5, 5 + 3, 7 + 0\} = 3$。

$s_2(3) = \text{argmin}\{ c_{31} + f_1(1), c_{32} + f_1(2), ---, c_{34} + f_1(4), c_{35} + f_1(5)\}$

$= \text{argmin}\{5 + 2, 0.5 + 5.5, ---, 1 + 3, 5 + 0\} = 4$。

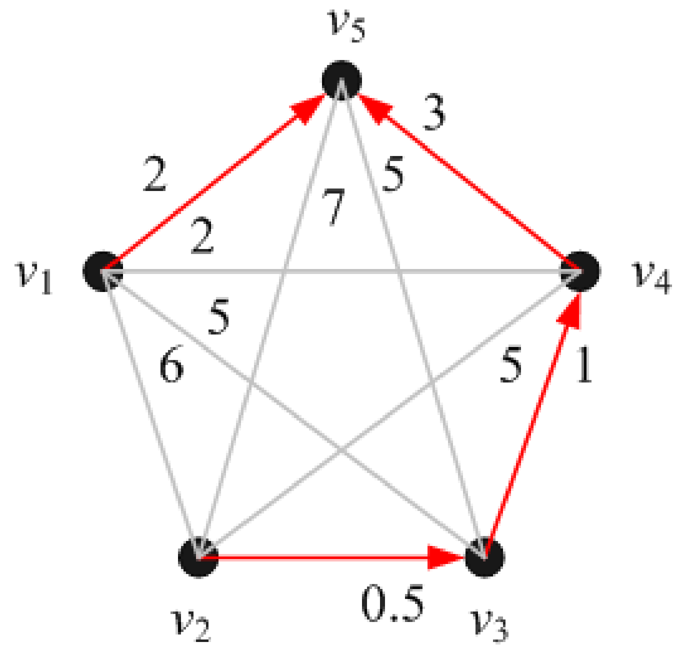
$s_2(4) = \text{argmin}\{ c_{41} + f_1(1), c_{42} + f_1(2), c_{43} + f_1(3), ---, c_{45} + f_1(5)\}$

$= \text{argmin}\{2 + 2, 5 + 5.5, 1 + 5, ---, 3 + 0\} = 5$。

例5.4.1（2），策略s_2

● **策略 s_2 为:**

$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$
5	**3**	**4**	**5**



例5.4.1（2），计算f_2

- 解方程组

$$\begin{cases} f_2(1) = c(1,5) + f_2(5) = 2 + f_2(5) \\ f_2(2) = c(2,3) + f_2(3) = 0.5 + f_2(3) \\ f_2(3) = c(3,4) + f_2(4) = 1 + f_2(4) \\ f_2(4) = c(4,5) + f_2(5) = 3 + f_2(5) \\ f_2(5) = 0 \end{cases}$$

，得：

$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	$f_2(5)$
2	4.5	4	3	0

例5.4.1（2），构造s_3

- **构造策略 s_3：**

$$s_3(1) = \mathrm{argmin}\{\text{---}, c_{12} + f_2(2), c_{13} + f_2(3), c_{14} + f_2(4), c_{15} + f_2(5)\}$$
$$= \mathrm{argmin}\{\text{---}, 6 + 4.5, 5 + 4, 2 + 3, 2 + 0\} = 5。$$

$$s_3(2) = \mathrm{argmin}\{ c_{21} + f_2(1), \text{---}, c_{23} + f_2(3), c_{24} + f_2(4), c_{25} + f_2(5)\}$$
$$= \mathrm{argmin}\{6 + 2, \text{---}, 0.5 + 4, 5 + 3, 7 + 0\} = 3。$$

$$s_3(3) = \mathrm{argmin}\{ c_{31} + f_2(1), c_{32} + f_2(2), \text{---}, c_{34} + f_2(4), c_{35} + f_2(5)\}$$
$$= \mathrm{argmin}\{5 + 2, 0.5 + 4.5, \text{---}, 1 + 3, 5 + 0\} = 4。$$

$$s_3(4) = \mathrm{argmin}\{ c_{41} + f_2(1), c_{42} + f_2(2), c_{43} + f_2(3), \text{---}, c_{45} + f_2(5)\}$$
$$= \mathrm{argmin}\{2 + 2, 5 + 4.5, 1 + 4, \text{---}, 3 + 0\} = 5。$$

- **策略 s_3 与 s_2 相同，计算结束。‖**

例5.4.1（2）计算过程小结

- 动态规划之策略空间迭代法计算过程：

s	v_1	v_2	v_3	v_4
0	5	4	5	3
1	5	3	5	5
2	5	3	4	5
3	5	3	4	5

f	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	2	11	5	6	0
1	2	5.5	5	3	0
2	2	4.5	4	3	0
3	2	4.5	4	3	0

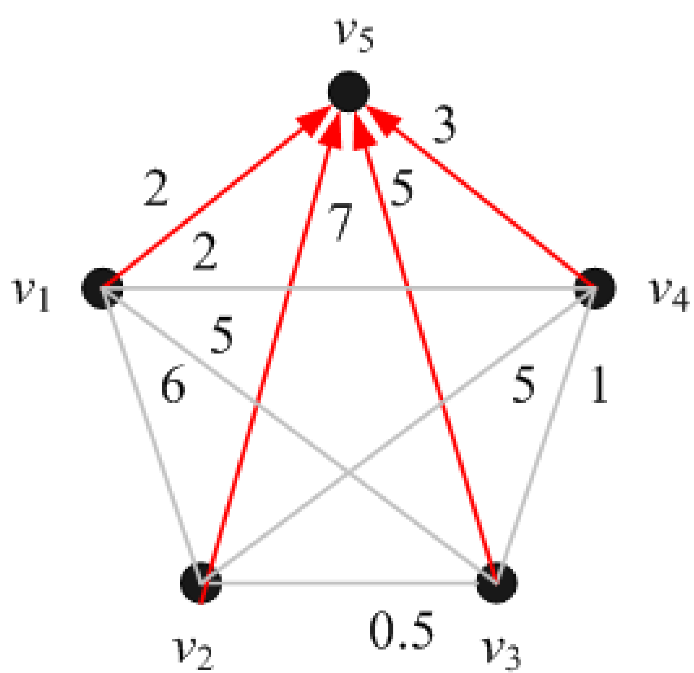
例5.4.1（3）

例 5.4.1(3) 用策略空间迭代法重新看待函数空间迭代法。

- 初始策略 s_0 为：

$s_0(1)$	$s_0(2)$	$s_0(3)$	$s_0(4)$
5	**5**	**5**	**5**

$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	$f_0(5)$
2	**7**	**5**	**3**	**0**



例5.4.1（3），构造s_1

- **构造策略 s_1：**

$s_1(1) = \text{argmin}\{---, c_{12} + f_0(2), c_{13} + f_0(3), c_{14} + f_0(4), c_{15} + f_0(5)\}$

$= \text{argmin}\{---, 6 + 7, 5 + 5, 2 + 3, 2 + 0\} = 5$。

$s_1(2) = \text{argmin}\{ c_{21} + f_0(1), ---, c_{23} + f_0(3), c_{24} + f_0(4), c_{25} + f_0(5)\}$

$= \text{argmin}\{6 + 2, ---, 0.5 + 5, 5 + 3, 7 + 0\} = 3$。

$s_1(3) = \text{argmin}\{ c_{31} + f_0(1), c_{32} + f_0(2), ---, c_{34} + f_0(4), c_{35} + f_0(5)\}$

$= \text{argmin}\{5 + 2, 0.5 + 7, ---, 1 + 3, 5 + 0\} = 4$。

$s_1(4) = \text{argmin}\{ c_{41} + f_0(1), c_{42} + f_0(2), c_{43} + f_0(3), ---, c_{45} + f_0(5)\}$

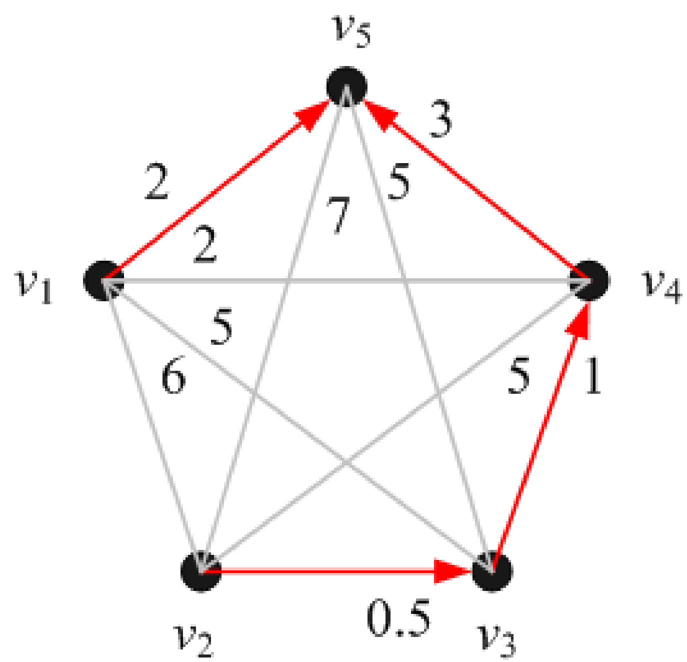
$= \text{argmin}\{2 + 2, 5 + 7, 1 + 5, ---, 3 + 0\} = 5$。

例5.4.1（3）

- 策略 s_1 为：

$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$
5	**3**	**4**	**5**

$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	$f_0(5)$
2	**4.5**	**4**	**3**	**0**



例5.4.1（3）计算过程小结

- 再计算策略 s_2，将与 s_1 相同，求到最优解。
- 动态规划之策略空间迭代法计算过程：

s	v_1	v_2	v_3	v_4
0	5	5	5	5
1	5	3	4	5
2	5	3	4	5

f	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	2	7	5	3	0
1	2	4.5	4	3	0
2	2	4.5	4	3	0

谢谢大家