第2章 线性规划

2.5 对偶理论

对偶理论

- 对偶规划
- 对偶理论
- 对偶单纯形算法

一般型的LP和它的标准型

$$
\begin{array}{llcll}
\min & c^{\mathrm{T}} x & & & (P) \\
\text{s.t.} & a_i^{\mathrm{T}} x & = & b_i & i = 1,2,\ldots,p \\
 & a_i^{\mathrm{T}} x & \geq & b_i & i = p+1,\ldots,m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1,2,\ldots,q \\
 & x_j & \gtrless & 0 & j = q+1,\ldots,n
\end{array}
$$

-->

$$
\begin{array}{llcl}
\min & \hat{c}^{\mathrm{T}} \hat{x} & & (\hat{P}) \\
\text{s.t.} & \hat{A}\hat{x} & = & b \\
 & \hat{x} & \geq & 0
\end{array}
$$

$\hat{A}$	x_1	$\ldots$	x_q	x^+_{q+1}	x^-_{q+1}	$\ldots$	x^+_n	x^-_n	x^s_1	$\ldots$	x^s_{m-p}
1	a_{11}	$\ldots$	a_{1q}	$a_{1,q+1}$	$-a_{1,q+1}$	$\ldots$	a_{1n}	$-a_{1n}$	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$
p	a_{p1}	$\ldots$	a_{pq}	$a_{p,q+1}$	$-a_{p,q+1}$	$\ldots$	a_{pn}	$-a_{pn}$	0	$\ldots$	0
$p+1$	$a_{p+1,1}$	$\ldots$	$a_{p+1,q}$	$a_{p+1,q+1}$	$-a_{p+1,q+1}$	$\ldots$	$a_{p+1,n}$	$-a_{p+1,n}$	-1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	-1	$\vdots$
m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mq}	$a_{m,q+1}$	$-a_{m,q+1}$	$\ldots$	a_{mn}	$-a_{mn}$	0	$\ldots$	-1

导出对偶规划

设 $\hat{x}^*$ 是单纯形算法在 **LP** $(\hat{P})$ 上求到的最优 **bfs**，$\hat{B}$ 是 $\hat{x}^*$ 的基矩阵，ζ 是 $\hat{x}^*$ 的检验数向量。由单纯形算法，必有 $\zeta^{\mathrm{T}} = \hat{c}_{\hat{B}}^{\mathrm{T}} \hat{B}^{-1} \hat{A} - \hat{c}^{\mathrm{T}} \le 0$。

令 $\tilde{y}^{\mathrm{T}} = \hat{c}_{\hat{B}}^{\mathrm{T}} \hat{B}^{-1}$，则有 $\tilde{y}^{\mathrm{T}} \hat{A} \le \hat{c}^{\mathrm{T}}$，即 $\hat{A}^{\mathrm{T}} \tilde{y} \le \hat{c}$。

目标函数 $\hat{c}^T x = \hat{c}_{\hat{B}}^T \hat{B}^{-1} b - \zeta^T x = \hat{c}_{\hat{B}}^T \hat{B}^{-1} b = \tilde{y}^T b = b^T \tilde{y}$

因此 $\tilde{y}$ 是如下 **LP** 的一个可行解：

$$
\begin{array}{lll}
\max & b^T y & (\hat{D}) \\
s.t. & \hat{A}^T y \le \hat{c} & \\
 & y \lesseqgtr 0 &
\end{array}
$$

LP $(\hat{D})$ 称为 **LP** $(\hat{P})$ 的对偶规划。

导出对偶规划

$\hat{A}^{\mathrm{T}}$	y_1	$\cdots$	y_p	y_{p+1}	$\cdots$	y_m	
1	a_{11}	$\cdots$	a_{p1}	$a_{p+1,1}$	$\cdots$	a_{m1}	$A_1^{\mathrm{T}} y \le c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
q	a_{1q}	$\cdots$	a_{pq}	$a_{p+1,q}$		a_{mq}	$A_q^{\mathrm{T}} y \le c_q$
$q+1$	a_{1q+1}	$\cdots$	$a_{p,q+1}$	$a_{p+1,q+1}$	$\cdots$	$a_{m,q+1}$	$A_{q+1}^{\mathrm{T}} y \le c_{q+1}$
$q+1$	$-a_{1q+1}$		$-a_{p,q+1}$	$-a_{p+1,q+1}$	$\cdots$	$-a_{m,q+1}$	$-A_{q+1}^{T} y \le -c_{q+1} \Rightarrow A_{q+1}^{\mathrm{T}} y = c_{q+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	a_{1n}	$\cdots$	a_{pn}	$a_{p+1,n}$	$\cdots$	a_{mn}	$A_n^{\mathrm{T}} y \le c_n$
n	$-a_{1n}$		$-a_{pn}$	$-a_{p+1,n}$	$\cdots$	$-a_{mn}$	$-A_n^{\mathrm{T}} y \le -c_n \Rightarrow A_n^{\mathrm{T}} y = c_n$
s_1	0	$\cdots$	0	-1	$\cdots$	0	$-y_{p+1} \le 0 \Rightarrow y_{p+1} \ge 0$
$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	-1	$\vdots$	
s_{m-p}	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	-1	$-y_m \le 0 \Rightarrow y_m \ge 0$

LP和它的对偶

$$
\begin{array}{llllll}
\min & c^{\mathrm{T}}x & & & & (P) \\
\text{s.t.} & a_i^{\mathrm{T}}x & = & b_i & i=1,2,\ldots,p & \\
& a_i^{\mathrm{T}}x & \geq & b_i & i=p+1,\ldots,m & \\
& x_j & \geq & 0 & j=1,2,\ldots,q & \\
& x_j & \pm & 0 & j=q+1,\ldots,n &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\max & b^{\mathrm{T}}y & & & (D) \\
\text{s.t.} & y_i & \pm & 0 & \\
& y_i & \geq & 0 & \\
& A_j^{\mathrm{T}}y & \leq & c_j & \\
& A_j^{\mathrm{T}}y & = & c_j &
\end{array}
$$

一般型　　　　和它的　　　　对偶

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^{\mathrm{T}}x & \max & b^{\mathrm{T}}y \\
\text{s.t.} & Ax \geq b & \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}y \leq c \\
& x \geq 0 & & y \geq 0
\end{array}
$$

规范型　和它的　对偶

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^{\mathrm{T}}x & \max & b^{\mathrm{T}}y \\
\text{s.t.} & Ax = b & \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}y \leq c \\
& x \geq 0 & & y \gtrless 0
\end{array}
$$

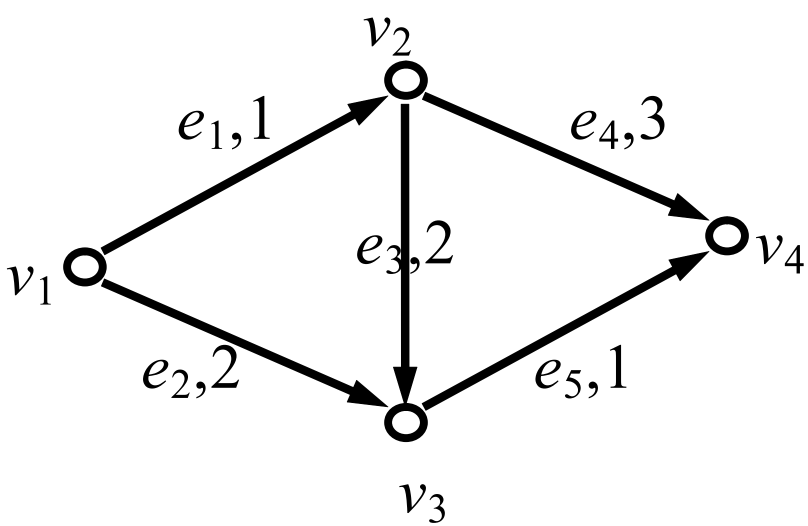
标准型　和它的　对偶

LP和它的对偶

1. 原问题目标是min，对偶问题是max
2. 原问题的变量对应于对偶问题的约束，约束对应于变量

   原问题变量“大于等于”⇨对偶问题约束条件“小于等于”；约束“大于等于”⇨变量“大于等于”；约束“等于”⇨变量“无约束”
3. 系数矩阵转置
4. 价值向量与右侧向量互换

最小费用流问题



$$
\begin{array}{llll}
\min & z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 & & \\
\text{s.t.} & (v_1) \quad x_1 + x_2 & = & 1 \\
 & (v_2) \quad -x_1 + x_3 + x_4 & = & 0 \\
 & (v_3) \quad -x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\
 & (v_4) \quad -x_4 - x_5 & = & -1 \\
 & \qquad\quad x_i \geq 0 & & \forall i
\end{array}
$$

最短路问题LP的对偶

$$
\begin{array}{ccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & y_2 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & y_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\max & z = y_1 - y_4 & & \\
\text{s.t.} \quad (e_1) & y_1 - y_2 & \le & 1 \\
(e_2) & y_1 - y_3 & \le & 2 \\
(e_3) & y_2 - y_3 & \le & 2 \\
(e_4) & y_2 - y_4 & \le & 3 \\
(e_5) & y_3 - y_4 & \le & 1 \\
 & y_j \text{无限制} & & \forall j
\end{array}
$$

例，顶点覆盖问题

- □□ □□□ $G = (V, E)$
- V □□□□□□□□□□□□ V' □□ V'□□ E □□□
  □□□□□□□□□ □□“□□”□□□

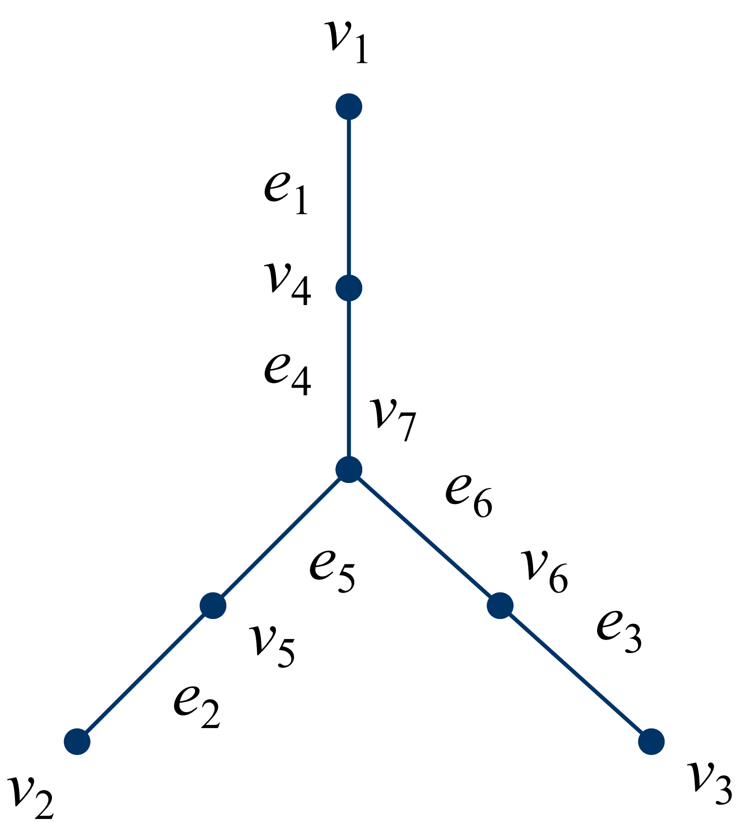
□□□□

$$\begin{array}{llll}
\min & \sum_{v\in V} x_v & & \\
\text{s.t.} & x_u + x_v & \geq 1 & \forall (u,v)\in E \\
 & x_v & \geq 0 & \forall v \in V
\end{array}$$

□□□□

$$\begin{array}{llll}
\max & \sum_{e\in E} y_e & & \\
\text{s.t.} & \sum_{e\in \delta(v)} y_e & \leq 1 & \forall v\in V \\
 & y_e & \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}$$

顶点覆盖



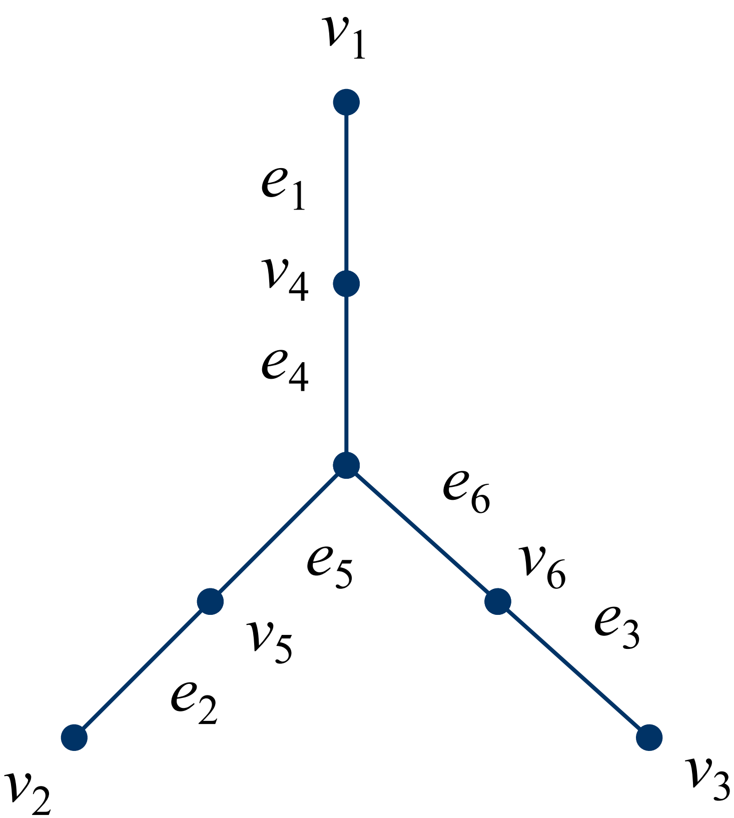
$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_4 & \geq & 1 \\
 & x_2 + x_5 & \geq & 1 \\
 & x_3 + x_6 & \geq & 1 \\
 & x_4 + x_7 & \geq & 1 \\
 & x_5 + x_7 & \geq & 1 \\
 & x_6 + x_7 & \geq & 1 \\
 & x_i & \geq & 0 \quad \forall i
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} = (\mathbf{0, 0, 0, 1, 1, 1, 0})$$

写出对偶规划

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
c	1	1	1	1	1	1	1		
e_1	1	0	0	1	0	0	0	1	y_1
e_2	0	1	0	0	1	0	0	1	y_2
e_3	0	0	1	0	0	1	0	1	y_3
e_4	0	0	0	1	0	0	1	1	y_4
e_5	0	0	0	0	1	0	1	1	y_5
e_6	0	0	0	0	0	1	1	1	y_6
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7		

顶点覆盖LP的对偶



$$
\begin{array}{lrcll}
\max & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 & & & \\
\text{s.t.} & y_1 & \le & 1 & \\
 & y_2 & \le & 1 & \\
 & y_3 & \le & 1 & \\
 & y_1 + y_4 & \le & 1 & \\
 & y_2 + y_5 & \le & 1 & \\
 & y_3 + y_6 & \le & 1 & \\
 & y_4 + y_5 + y_6 & \le & 1 & \\
 & y_j & \ge & 0 & \forall j
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} = (\mathbf{1, 1, 1, 0, 0, 0})$$

对偶理论（一）

定理 2.5.1-1（弱对偶定理）

设 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的可行解，则 $c^{\mathrm{T}}x \geq b^{\mathrm{T}}y$。

定理 2.5.1-2（强对偶定理）

设 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的最优解，则 $c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}y$。

定理 2.5.1-3

设 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的可行解。则 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的最优解当且仅当 $c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}y$。

定理 2.5.2

LP 问题的对偶的对偶是原始的 LP 问题。

弱对偶定理

定理 2.5.1-1 设 x 和 y 分别为原始 LP 和对偶 LP 的可行解，则 $c^{\mathrm{T}}x \geq b^{\mathrm{T}}y$。

- 证：不失一般性，设原始 LP 为标准型。
- 由于 x 为原始 LP 的可行解，因此 $Ax = b$。即，$b^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。
- 两边乘以 y，得到：$b^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y$。
- 由于 y 为对偶 LP 的可行解，因此 $A^{\mathrm{T}}y \leq c$。
- 于是，$b^{\mathrm{T}}y \leq x^{\mathrm{T}}c = c^{\mathrm{T}}x$。

强对偶定理

定理 2.5.1-2 设 x^*和 y^*分别为原始 LP 和对偶 LP 的最优解，则 $c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*$。

- 证：不妨设 x^*为单纯形算法求到的一个最优 bfs，B 为 x^* 的基矩阵。
- 令 $\tilde{y} = (B^{-1})^T c_B$。由于 x^*的检验数向量有 $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A - c^{\mathrm{T}} \le 0$，因此 $\tilde{y}$ 是对偶 LP 的一个可行解。
- 由于 $b^{\mathrm{T}}\tilde{y} = b^{\mathrm{T}}\left(B^{-1}\right)^{\mathrm{T}} c_B = \left(B^{-1}b\right)^{\mathrm{T}} c_B = \left(x_B^*\right)^{\mathrm{T}} c_B = c^{\mathrm{T}}x^*$，二者目标函数值相等。
- 由弱对偶定理，可知对对偶 LP 的任意可行解 y，都有 $c^{\mathrm{T}}x^* \ge b^{\mathrm{T}}y$。因此 $\tilde{y}$ 是对偶 LP 的一个最优解。定理得证。

强对偶定理的逆也成立

定理 2.5.1-3 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为原始 LP 和对偶 LP 的可行解。若 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为原始 LP 和对偶 LP 的最优解。

- 证：对原始 LP 的任意可行解 x'，和对偶 LP 可行解 $\boldsymbol{y}$，由弱对偶定理，都有 $c^{\mathrm{T}}x' \geq b^{\mathrm{T}}y$。
- 现有原始 LP 的可行解 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，因此 $\boldsymbol{x}$ 为原始 LP 的最优解。
- 对对偶 LP 的任意可行解 y'，和原始 LP 可行解 $\boldsymbol{x}$，由弱对偶定理，都有 $b^{\mathrm{T}}y' \leq c^{\mathrm{T}}x$。
- 现有对偶 LP 的可行解 $\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，因此 $\boldsymbol{y}$ 为对偶 LP 的最优解。

原始LP的对偶的对偶，还是原始LP

$$\begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\ \ Ax=b\\&\qquad x\geq 0\end{aligned}\ \xrightarrow{\text{对偶}}\ \begin{aligned}&\max\ b^{\mathrm{T}}y\\&\text{s.t.}\ \ A^{\mathrm{T}}y\leq c\\&\qquad y\text{无限制}\end{aligned}\ \xleftrightarrow{\text{等价}}\ \begin{aligned}&\min\ -b^{\mathrm{T}}y^{+}+b^{\mathrm{T}}y^{-}\\&\text{s.t.}\begin{cases}A^{\mathrm{T}}y^{+}-A^{\mathrm{T}}y^{-}+y^{s}=c\\y^{+},y^{-},y^{s}\geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{对偶}}\ \begin{aligned}&\max\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\ \begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}\\-A^{\mathrm{T}}\\I\end{pmatrix}x\leq\begin{pmatrix}-b\\b\\0\end{pmatrix}\\&\qquad x\text{无限制}\end{aligned}\ \xleftrightarrow{\text{等价}}\ \begin{aligned}&\max\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\begin{cases}Ax\leq -b\\-Ax\leq b\\x\leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\xleftrightarrow{\text{等价}}\ \begin{aligned}&\max\ -c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\begin{cases}-Ax\leq -b\\Ax\leq b\\x\geq 0\end{cases}\end{aligned}\ \xleftrightarrow{\text{等价}}\ \begin{aligned}&\min\ c^{\mathrm{T}}x\\&\text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\x\geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

（定理 2.5.2）

例2.5.1 - 对偶的对偶

$$\min 5x_1 + 21x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0;\ j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

对偶

$$\max 2\omega_1 + \omega_2$$

$$s.t.\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 \le 5 \\ -\omega_1 + \omega_2 \le 0 \\ 6\omega_1 + 2\omega_2 \le 21 \\ -\omega_1 \le 0 \\ -\omega_2 \le 0 \\ \omega_1, \omega_2 \text{无限制} \end{cases}$$

等价

$$\boldsymbol{\max 2\omega_1 + \omega_2}$$

$$\boldsymbol{s.t.\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 \le 5 \\ -\omega_1 + \omega_2 \le 0 \\ 6\omega_1 + 2\omega_2 \le 21 \\ \omega_1 \ge 0 \\ \omega_2 \ge 0 \end{cases}}$$

对偶

$$\min 5x_1 + 21x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0;\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

等价

对偶理论（二）

定理 2.5.3

给定一个原规划和对偶规划，则下面三种情况必有其一：

1.都有最优解；

2.都无可行解；

3.一个无界另一个不可行。

定理 2.5.4（互补松紧性）

若 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的可行解，则 x 和 y 分别是原规划和对偶规划的最优解的充要条件是，

$$\forall 1 \le i \le m,\ y_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) = 0，及$$

$$\forall 1 \le j \le n,\ (c_j - A_j^{\mathrm{T}}y)x_j = 0。$$

原始LP及其对偶LP的可解性的关系

定理 2.5.3 LP 和它的对偶的可解性的关系，如下表所示。

原始 \ 对偶	有最优解	问题无界	无可行解
有最优解	①	×	×
问题无界	×	×	③
无可行解	×	③	②

- **证**：当原始 LP 有最优解时，设单纯形算法求到的最优 bfs 为 x^*，基为 B。由定理 2.5.1-2 之证明，$y^{\mathrm{T}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}$ 是对偶 LP 的一个最优解。因此，(1, 1)成立，(1, 2)不能成立，(1, 3)不能成立。
- 由对称性可知，(2, 1)和(3, 1)也不能成立。

定理2.5.3 证明

- 当原始 LP 无界时，对偶 LP 不可能也是无界。反证。假设原始 LP 无界，对偶 LP 也无界，从而它们都存在可行解。故可假设 x、y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的可行解。由弱对偶定理可知，$c^{T}x \geq b^{T}y$。这立即表明原始 LP 和对偶 LP 都是有界的，矛盾。因此(2, 2)不能成立。
- 已经证明，当原始 LP 无界时，对偶 LP 不能有最优解，也不能无界。即，对偶 LP 不能有可行解。因此，对偶 LP 必无可行解，即，(2, 3)能够成立。
- 由对称性可知，(3,2)也能够成立。

定理2.5.3 证明

- **可举例说明，(3, 3)也能够成立。**

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \ge 1 \qquad \text{(LP)} \\
& x_1 + x_2 \le -1 \\
& x_1, x_2 \text{无限制}
\end{aligned}
$$

□□□□

$$
\begin{aligned}
\max\quad & y_1 + y_2 \\
\text{s.t.}\quad & y_1 - y_2 = 1 \qquad \text{(DP)} \\
& y_1 - y_2 = 0 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

互补松紧性

定理 2.5.4 设 x 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的可行解。则 x 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的最优解，当且仅当

$$\begin{cases} \forall 1 \le i \le m,\ y_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) = 0 \\ \forall 1 \le j \le n,\ (c_j - A_j^{\mathrm{T}}y)x_j = 0 \text{。} \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

- 证：定义 $u = \sum_{i=1}^{m} y_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i)$， $v = \sum_{j=1}^{n} (c_j - A_j^{\mathrm{T}}y)x_j$ 。
- 变量 y_i 和约束 $a_i^{\mathrm{T}}x \ge b_i$ 或 $a_i^{\mathrm{T}}x = b_i$ 对应。
- 由于 x 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的可行解，因此，若 $y_i \ge 0$，则有 $a_i^{\mathrm{T}}x \ge b_i$；若 y_i 无限制，则有 $a_i^{\mathrm{T}}x = b_i$ 。
- 因此 $\forall i, y_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) \ge 0$，且有 $u \ge 0$。
- 同理 $\forall j, (c_j - A_j^{\mathrm{T}}y)x_j \ge 0$，且有 $v \ge 0$。

定理2.5.4 证明

- 由 u 和 v 的定义，

$$
\begin{aligned}
u+v &= \sum_{i=1}^{m} y_i(a_i^T x - b_i) + \sum_{j=1}^{n}(c_j - A_j^T y)x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b^T y + c^T x - \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \\
&= c^T x - b^T y 。
\end{aligned}
$$

- 因此，(1)式成立 $\quad u=0, v=0 \quad u+v=0 \quad c^{\mathrm{T}}x=b^{\mathrm{T}}y \quad x$ 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的最优解。
- 反过来也成立：x 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的最优解。
  $c^{\mathrm{T}}x=b^{\mathrm{T}}y \quad u+v=0 \quad u=0, v=0 \quad$ (1)式成立。

互补松紧性（推论）

定理：设 x 和 y 分别为原始 LP 和对偶 LP 的最优解。则：

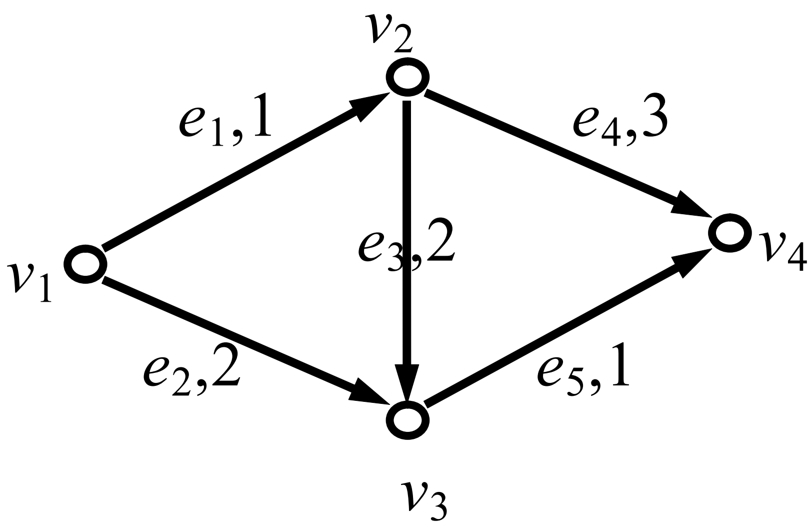
（1）若一个变量严格大于 0，则其对应的约束取等式。

（2）若一个约束以严格不等式成立，则其对应的变量等于 0。

- 证明：由于 x 和 y 分别为原始 LP 和对偶 LP 的最优解，由定理 2.5.4，有 $\begin{cases} \forall 1 \le i \le m,\ y_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) = 0 \\ \forall 1 \le j \le n,\ (c_j - A_j^{\mathrm{T}}y)x_j = 0 \end{cases}$。

- 这立即表明 $y_i > 0 \Rightarrow a_i^{\mathrm{T}}x = b_i$，$a_i^{\mathrm{T}}x > b_i \Rightarrow y_i = 0$；$x_j > 0 \Rightarrow A_j^{\mathrm{T}}y = c_j$，$A_j^{\mathrm{T}}y < c_j \Rightarrow x_j = 0$。

最小费用流问题



$$
\begin{array}{lllcr}
\min & z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 & & & \\
\text{s.t.} & (v_1) & x_1 + x_2 & = & 1 \\
 & (v_2) & -x_1 + x_3 + x_4 & = & 0 \\
 & (v_3) & -x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\
 & (v_4) & -x_4 - x_5 & = & -1 \\
 & & x_i \ge 0 & & \forall i
\end{array}
$$

一个最优解为 $\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} = (\mathbf{0, 1, 0, 0, 1})$，

基矩阵 $B = \begin{pmatrix} A_2 & A_4 & A_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

最小费用流问题的对偶

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = y_1 - y_4 \\
\text{s.t.}\ \ & (e_1)\quad y_1 - y_2 \le 1 \\
& (e_2)\quad y_1 - y_3 \le 2 \\
& (e_3)\quad y_2 - y_3 \le 2 \\
& (e_4)\quad y_2 - y_4 \le 3 \\
& (e_5)\quad y_3 - y_4 \le 1 \\
& \qquad\quad y_j \text{无限制} \quad \forall j
\end{aligned}
$$

最优解 $y^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$。

由于 $x_5 = 1 > 0$，由互补松弛性可知约束(5)取等式，从而 $y_4 = 0$。

对偶单纯形算法的基本思想

- 回忆单纯形算法。从一个bfs出发，不断变换基矩阵，直到当前bfs x的检验数向量 $\zeta^T = c_B{}^T B^{-1} A - c^T \leq 0$时，则求到了原始LP的最优解。
- 由于 $c_B{}^T B^{-1} A - c^T \leq 0$，$y^T = c_B{}^T B^{-1}$是对偶LP的一个可行解。
- 因此，单纯形算法可解释为，从原始LP的可行解出发，保持原始LP的可行性，向着对偶LP可行解的方向迭代。这样的单纯形算法称为原始单纯形算法。
- 同样的想法，可从对偶LP的可行解出发，保持对偶LP的可行性，向原始LP可行解的方向迭代。这样的单纯形算法称为对偶单纯形算法。

对偶单纯形算法

1 找一个原始 LP 的基本解（但是不可行）和对偶 LP 的一个可行解（$\zeta \le 0$），组成初始单纯形表。

2 $r \leftarrow \arg\min\{\bar{b}_i \mid i = 1,2,\ldots,m\}$。

3 若 $\bar{b}_r \ge 0$，则当前解就是原始 LP 的最优解，停止。

4 若 $\forall 1 \le j \le n, \bar{a}_{rj} \ge 0$，则原始问题无可行解，停止。

5 $k \leftarrow \arg\min\left\{\frac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0, j = 1,2,\ldots,n\right\}$。

6 以 $\bar{a}_{rk}$ 为转轴元做一次旋转变换（以 A_k 替代 $\boldsymbol{B_r}$（即 $\boldsymbol{A_{B(r)}}$）得到一个新的基 $\boldsymbol{B}$），转第 2 步。

出基变量$x_{B(r)}$的选取

- 要减少原始解的不可行性，选择这样一个行 r 做为旋转行，它对应的 $\bar{b}_r < 0$ （因为原始 **LP** 要求 $x \geq 0$）。因此有 $r \leftarrow \arg\min\{\bar{b}_i \mid i = 1,2,\ldots,m\}$。
- 通过旋转变换，希望增加目标函数值，且保持对偶解的可行性。当到达了第一个原始基本可行解时，就求到了原始 **LP** 的最优解。
- 假设 $\bar{a}_{rk}$ 为转轴元。则旋转变换后，目标函数值为 $\hat{z} = z - \dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\zeta_k$，新的检验数为 $\hat{\zeta}_j = \zeta_j - \dfrac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\zeta_k$。

换基

	x_1	$\cdots$	$x_{B(r)}$	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
	ζ_1	$\cdots$	0	$\cdots$	ζ_m	ζ_{m+1}	$\cdots$	ζ_k	$\cdots$	ζ_n	z
$x_{B(1)}$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(r)}$	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\bar{b}_m$

进基变量x_k的选取

- 因为$\zeta_k \le 0$，$\bar{b}_r < 0$，要增加z值，则要求转轴元$\bar{a}_{rk} < 0$。
- 要保持对偶解的可行性，则要求$\forall 1 \le j \le n,\ \zeta_j - \dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{rj} \le 0$。
- 若$\bar{a}_{rj} \ge 0$，因为$\zeta_k \le 0$，$\bar{a}_{rk} < 0$，则已有$\zeta_j - \dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{rj} \le 0$。
- 现假设$\bar{a}_{rj} < 0$。要保证$\zeta_j - \dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{rj} \le 0$，即$\zeta_j \le \dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{rj}$，即

  $\dfrac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \ge \dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}}$。因此，$k \leftarrow \arg\min\left\{ \dfrac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0, j = 1,2,\ldots,n \right\}$。

获得初始单纯形表（与单纯形算法相同）

（1）将 LP 转为标准型。

（2）构造表格：

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n$	
$-c^{\mathrm{T}}$	0
A	b

（3）选取 A 中的若干列为基，用初等行变换将这些列变为单位阵，检验数行一同参与变换。得到初始单纯形表：

	$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n$	
	$c_B{}^{\mathrm{T}}B^{-1}A - c^{\mathrm{T}}$	$c_B{}^{\mathrm{T}}B^{-1}b$
x_B	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$

例2.5.4

例： 解下列规划

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

。

首先化为标准形式

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始单纯形表，及迭代1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–1	–1	–1	0	0	0
x_4	–3	–1	–1	1	0	–1
x_5	1	–4	–1	0	1	–2

此时原始 **LP** 有一个基本解，对偶 **LP** 有一个可行解（因为检验数向量（$\zeta \le 0$），因此用对偶单纯形法求解。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–1	–1	–1	0	0	0
x_4	–3	–1	–1	1	0	–1
x_5	1	–4	–1	0	1	–2

迭代2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–5/4	0	–3/4	0	–1/4	1/2
x_4	–13/4	0	–3/4	1	–1/4	–1/2
x_2	–1/4	1	1/4	0	–1/4	1/2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	–6/13	–5/13	–2/13	9/13
x_1	1	0	3/13	–4/13	1/13	2/13
x_2	0	1	4/13	–1/13	–3/13	7/13

此时右端项 $\bar{b} > 0$，求到原始 LP 的最优解。

例2.4.1（2）

用对偶单纯形算法重解例 **2.4.1**：

$$\begin{array}{llcl}
\min & 5x_1 + 21x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 & = & 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 & = & 1 \\
 & x_i & \geq & 0 \quad \forall i
\end{array}$$

列出预备单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–5	0	–21	0	0	0
	1	–1	6	–1	0	2
	1	1	2	0	–1	1

第1次旋转

以 $B = (A_4, A_5)$为基，得到初始单纯形表（典式）：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–5	0	–21	0	0	0
	–1	1	–6	1	0	–2
	–1	–1	–2	0	1	–1

此时 0，对偶 LP 可行；$\bar{b} < 0$，原始 LP 不可行。

使用对偶单纯形算法求解。第一次旋转后：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	–3/2	–7/2	0	–7/2	0	7
x_3	1/6	–1/6	1	–1/6	0	1/3
x_5	–2/3	–4/3	0	–1/3	1	–1/3

第2次旋转

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	–1/2	0	–11/4	–9/4	31/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	1/2

此时 $\bar{b} \geq 0$，原始 LP 可行，得到最优解。

谢谢大家