组合优化 **作业 - 1**

姓名：刘建东 学号：201700130011

班级：2017 级菁英班 日期：2020 年 2 月 27 日

题目 1

某商业集团公司在 A_1, A_2, A_3 三地设有仓库，它们分别库存 $40, 20, 40$ 个单位产品，而其零售商店分布在地区 $B_i, i = 1, 2, ..., 5$，它们需要的产品数量分别是 $25, 10, 20, 30, 15$ 个单位，产品从 A_i 到 B_j 的每单位运费列于下表。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	55	30	40	50	40
A_2	35	30	100	45	60
A_3	40	60	95	35	30

试建立最少装运费调运方案的数学模型。

解答：令 a_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 运输的产品个数，代入上述的实际数字后，可以得到下述的数学模型。

$$
\begin{cases}
\min & 55x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 50x_{14} + 40x_{15} + \\
 & 35x_{21} + 30x_{22} + 100x_{23} + 45x_{24} + 60x_{25} + \\
 & 40x_{31} + 60x_{32} + 95x_{33} + 35x_{34} + 30x_{35} \\
s.t. & \sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 40 \\
 & \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 20 \\
 & \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 40 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 25 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 10 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 20 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 30 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 15 \\
 & a_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, ..., 5
\end{cases}
$$

题目 2

某企业生产需要 m 种资源，记为 $A_1, ..., A_m$，其拥有量分别为 $b_1, ..., b_m$。现用来生产 n 种产品，记为 $B_1, ..., B_n$，其中产品 B_j 的每个单位的利润为 c_j，生产每单位 B_j 消耗资源 A_i 的量为 a_{ij}，$j = 1, ..., n$，$i = 1, ..., m$。求在现有资源条件下，企业应如何安排生产使得利润最大？要求建立这个资源利用问题的数学模型，然后将其转化为标准形式的线形规划问题。

解答：令 x_j 表示生产产品 B_j 的个数，则可构建如下数学模型。

$$\begin{cases} \max \quad \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ \qquad x_j \ge 0, \ j = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

上述数学模型对应的线性规划标准型如下所示。

$$\begin{cases} \min \quad -\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ \qquad \varepsilon_i, x_j \ge 0, \ i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

题目 3

将下面的线形规划问题转化为标准型。

$$\begin{cases} \max \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \\ s.t. \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ \qquad 2x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \\ \qquad 0 \le x_1 \le 3 \\ \qquad -1 \le x_2 \le 6 \end{cases}$$

（提示：令 $x_2' = x_2 + 1$）

解答：由于 x_3 为自由变量，因此令 $x_4 - x_5 = x_3$，其中 $x_4, x_5 \ge 0$。再令 $x_2^{'} = x_2 + 1$，则可以得到如下的标准型。

$$\begin{cases} \min \quad -x_1 - x_2^{'} - 2(x_4 - x_5) + 1 \\ s.t. \quad x_1 - 2x_2^{'} + 3(x_4 - x_5) - x_6 = 4 \\ \qquad 2x_1 + x_2^{'} - x_3 + x_7 = 4 \\ \qquad x_1 + x_8 = 3 \\ \qquad x_2^{'} + x_9 \le 7 \\ \qquad x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \ge 0 \end{cases}$$

题目 4

某线性规划问题的约束条件是

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1+x_2+x_4=6, \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,3,4. \end{cases}$$

问变量 x_2, x_4 所对应的列向量 A_2, A_4 是否构成可行基？若是，则写出 B, N，并求出 B 所对应的基本可行解。

解答： A_2, A_4 线性无关，且 $B^{-1}b \geq 0$，因此构成可行基。$A=(B,N)$，其中

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可以求出 B^{-1} 及其对应的基本可行解 x，如下所示。

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即 B 所对应的基本可行解为 $x=(0,2,0,4)^T$。

题目 5

对于下面的线形规划问题，以 $B=(A_2,A_3,A_6)$ 为基写出对应的典式。

$$\begin{cases} \min & x_1-2x_2+x_3 \\ s.t. & 3x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ & -2x_1+4x_2+x_5=12 \\ & -4x_1+3x_2+8x_3+x_6=10 \\ & x_j \geq 0, \quad j=1,...,6 \end{cases}$$

解答： $A=(B,N), B=(A_2,A_3,A_6), N=(A_1,A_4,A_5), x=(x_B,x_N)^T$，将 $Ax=b$ 进行如下推导，可得到对应典式。

$$Ax=b$$

$$[B,N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=Bx_B+Nx_N=b$$

$$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$$

即最终含典式的规划应如下所示：

$$\begin{cases} \min & z=c_B^T B^{-1}b-\zeta^T x \\ s.t. & x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

因此我们求得下述各矩阵数值如下：

$$B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\4&0&0\\3&8&1\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}0&0.25&0\\0.5&0.125&0\\-4&-1.75&1\end{bmatrix},x_B=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\\x_6\end{bmatrix},x_N=\begin{bmatrix}x_1\\x_4\\x_5\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}7\\12\\10\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}3&1&0\\-2&0&1\\-4&0&0\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\-\frac{25}{2}&-4&-\frac{7}{4}\end{bmatrix},B^{-1}b=\begin{bmatrix}3\\5\\-39\end{bmatrix}$$

代入上述方程即可得到对应典式。

$$\begin{cases}-0.5x_1+x_2+0.25x_5=3\\1.25x_1+x_3+0.5x_4+0.125x_5=5\\-12.5x_1-4x_4-1.75x_5+x_6=-39\\x_j\geq 0,\ j=1,2,...,6\end{cases}$$

目标函数为 $\min\ z=-1-\dfrac{5}{4}x_1-\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{3}{8}x_5$。