第3章 整数线性规划

3.3 分枝定界法

补充：舍入法

分枝定界法的基本思想

- 将状态空间 *U* 一分为二。——分枝
  - 状态空间可以取 IP 的可行域，或者比其更大。
- 进入一个状态空间 *U'*。若判定在 *U'* 内不可能找到比当前已知解更好的解，则摒弃该搜索空间。——剪枝
- 若在状态空间 *U'* 内能够找到更好的解，则用新的解代替当前的已知解。——定界
- 若在状态空间 *U'* 内已经找到了最好的解，则结束对 *U'* 的搜索。
- 否则对状态空间 *U'* 继续分枝。

整数规划的情形

- 考虑整数规划问题 IP_0，其松弛记为 LP_0：

$$\begin{array}{ll}\min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x\geq 0,\text{整数}\end{array},\quad \begin{array}{ll}\min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x\geq 0\end{array}。$$

- 求 LP_0 的最优解，记为 x^0。若 x^0 为整数解，则已经求到了 IP_0 的最优解。
- 否则设 x_i^0 不为整数。向 IP_0 中分别加入两个约束 $x_i\leq\lfloor x_i^0\rfloor$ 和 $x_i\geq\lceil x_i^0\rceil$，得到两个整数规划问题 IP_1 和 IP_2：

$$\begin{array}{ll}\min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x_i\leq\lfloor x_i^0\rfloor \\ & x\geq 0,\text{整数}\end{array},\quad \begin{array}{ll}\min & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x_i\geq\lceil x_i^0\rceil \\ & x\geq 0,\text{整数}\end{array}。$$

整数规划的情形

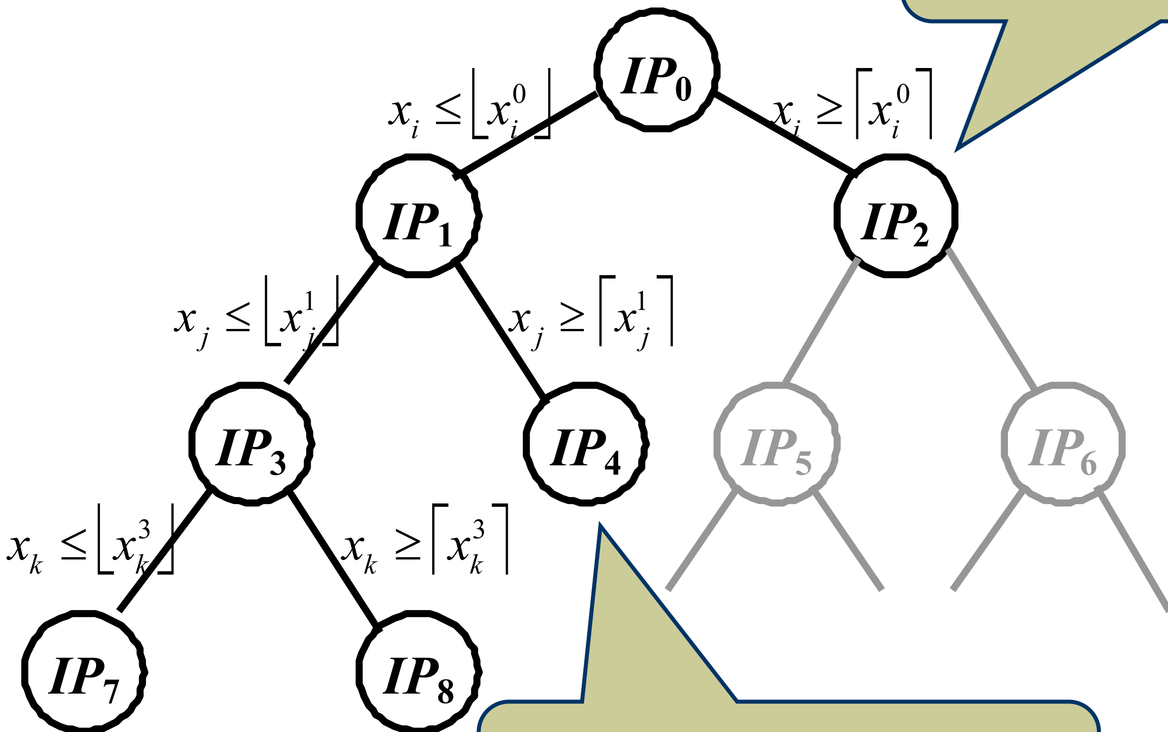
- 显然，若 IP_0 有最优解，则其最优解必定或者在 IP_1 上取得，或者在 IP_2 上取得。
- 解 LP_1，若其最优解不是整数解，则对 IP_1 继续进行分枝……；解 LP_2，若其最优解不是整数解，则对 IP_2 继续进行分枝……。
- 在这个过程中，若对某个 LP_k，其最优解 x^k 为整数解，且解值比当前已知的 IP_0 的整数解 x^* 的解值还要好，则将 x^k 作为 IP_0 的当前已知最好解。
- 若 LP_k 的最优解不是整数解，且其解值 $c^{\mathrm{T}}x^k$ 比当前已知的 IP_0 的最好的整数解的解值 $c^{\mathrm{T}}x^*$ 还要差（即，$c^{\mathrm{T}}x^k \geq c^{\mathrm{T}}x^*$），则放弃对 LP_k 的搜索。

整数规划的情形

- 重复上述过程，当整个状态空间（或者由于求到了整数解，或者由于剪枝）都搜索完毕后，当前已知 IP_0 最好的解 x^* 就是 IP_0 的最优解。

搜索树

解LP_2，得到分数解x^2，$c^{\mathrm{T}}x^2 \geq c^{\mathrm{T}}x^*$，剪枝。



解LP_4，得到整数解x^4，$c^{\mathrm{T}}x^4 \leq c^{\mathrm{T}}x^*$，$x^* = x^4$。

解LP_7，得到整数解x^7，$x^* = x^7$。

例子

解整数规划：
$$\begin{aligned} \min \quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1+2x_2 \le -1 \\ & 4x_1+2x_2 \le 11 \\ & x_2 \ge \frac{1}{2} \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{aligned}$$
。

- 解 $\boldsymbol{LP_0}$，最优解为 $x^0=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，最优解值 $\boldsymbol{z^0 = c^{\mathrm{T}} x^0 = -4}$。
- 在 x_1^0 上进行分枝，得到两个约束：$\boldsymbol{x_1 \le 1}$ 和 $\boldsymbol{x_1 \ge 2}$。

第1次分枝

$$IP_1\quad \begin{aligned} \min \quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1+2x_2 \le -1 \\ & 4x_1+2x_2 \le 11 \\ & x_2 \ge \frac{1}{2} \\ & x_1 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{aligned}\ ，\qquad IP_2\quad \begin{aligned} \min \quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1+2x_2 \le -1 \\ & 4x_1+2x_2 \le 11 \\ & x_2 \ge \frac{1}{2} \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{aligned}\ 。$$

- 解 LP_2，最优解为 $x^2=\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，最优解值 $z^2=c^{\mathrm{T}}x^2=-\frac{7}{2}$。
- 在 x_2^2 上进行分枝，得到两个约束：$x_2 \le 1$ 和 $x_2 \ge 2$。

第2次分枝

$$IP_3\quad \begin{aligned} \min\quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.}\quad & -4x_1+2x_2\le -1 \\ & 4x_1+2x_2\le 11 \\ & \frac{1}{2}\le x_2\le 1 \\ & x_1\ge 2 \\ & x_1,x_2\ge 0,\text{整数} \end{aligned}\quad ,\qquad IP_4\quad \begin{aligned} \min\quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.}\quad & -4x_1+2x_2\le -1 \\ & 4x_1+2x_2\le 11 \\ & x_2\ge 2 \\ & x_1\ge 2 \\ & x_1,x_2\ge 0,\text{整数} \end{aligned}\quad 。$$

- **解 LP_3，最优解为** $x^3=(2.25\quad 1)^{\mathrm{T}}$，**解值** $z^2=c^{\mathrm{T}}x^3=-3.25$ 。
- 在 x_1^3 上进行分枝，得到两个约束：$\boldsymbol{x_1\le 2}$ **和** $\boldsymbol{x_1\ge 3}$。

第3次分枝

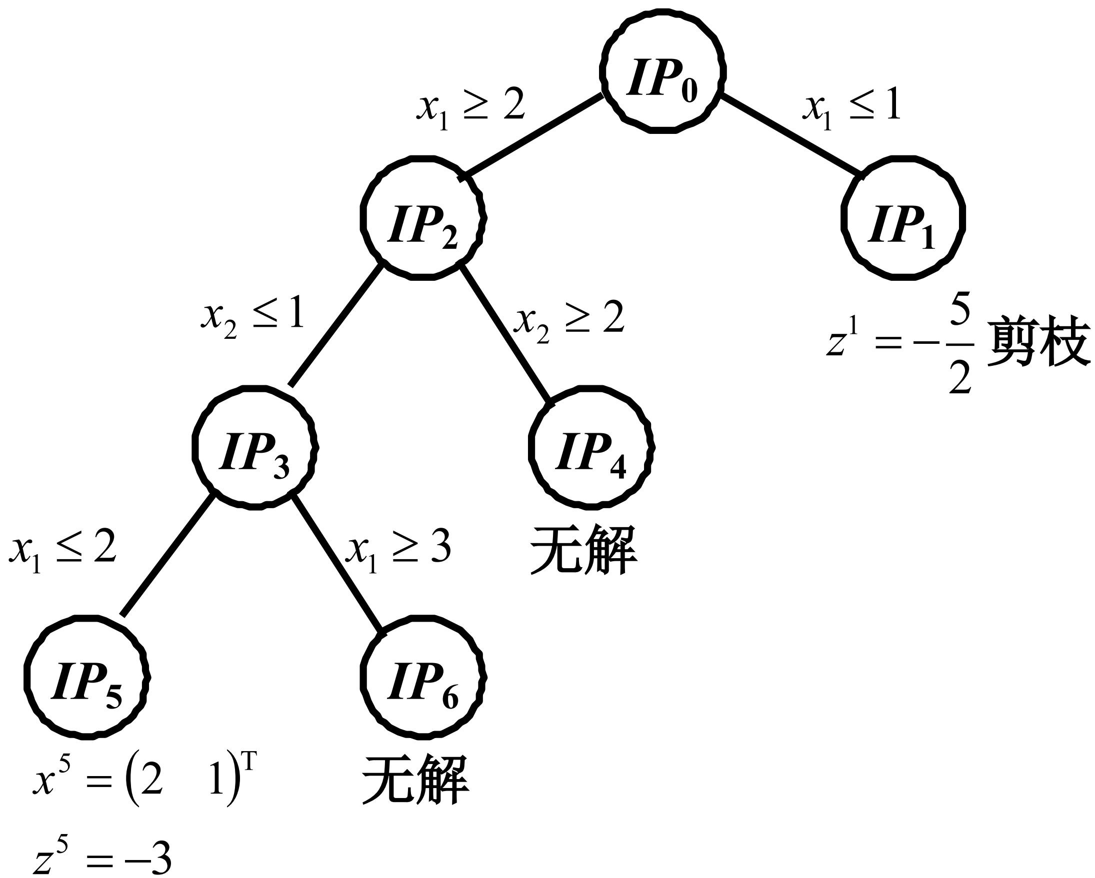
$$IP_5\quad \begin{aligned} \min\quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.}\quad & -4x_1+2x_2\le -1 \\ & 4x_1+2x_2\le 11 \\ & \frac{1}{2}\le x_2\le 1 \\ & x_1=2 \\ & x_1,x_2\ge 0,\text{整数} \end{aligned}\ ,\qquad IP_6\quad \begin{aligned} \min\quad & -(x_1+x_2) \\ \text{s.t.}\quad & -4x_1+2x_2\le -1 \\ & 4x_1+2x_2\le 11 \\ & \frac{1}{2}\le x_2\le 1 \\ & x_1\ge 3 \\ & x_1,x_2\ge 0,\text{整数} \end{aligned}\ 。$$

- 解 LP_5，最优解为 $x^5=(2\quad 1)^{\mathrm{T}}$，最优解值 $z^5=c^{\mathrm{T}}x^3=-3$，将其保存为当前已知 IP_0 的最好的解 $x^*=(2\quad 1)^{\mathrm{T}}$，$z^*=-3$。
- 解 LP_6，无解（到达叶节点）。

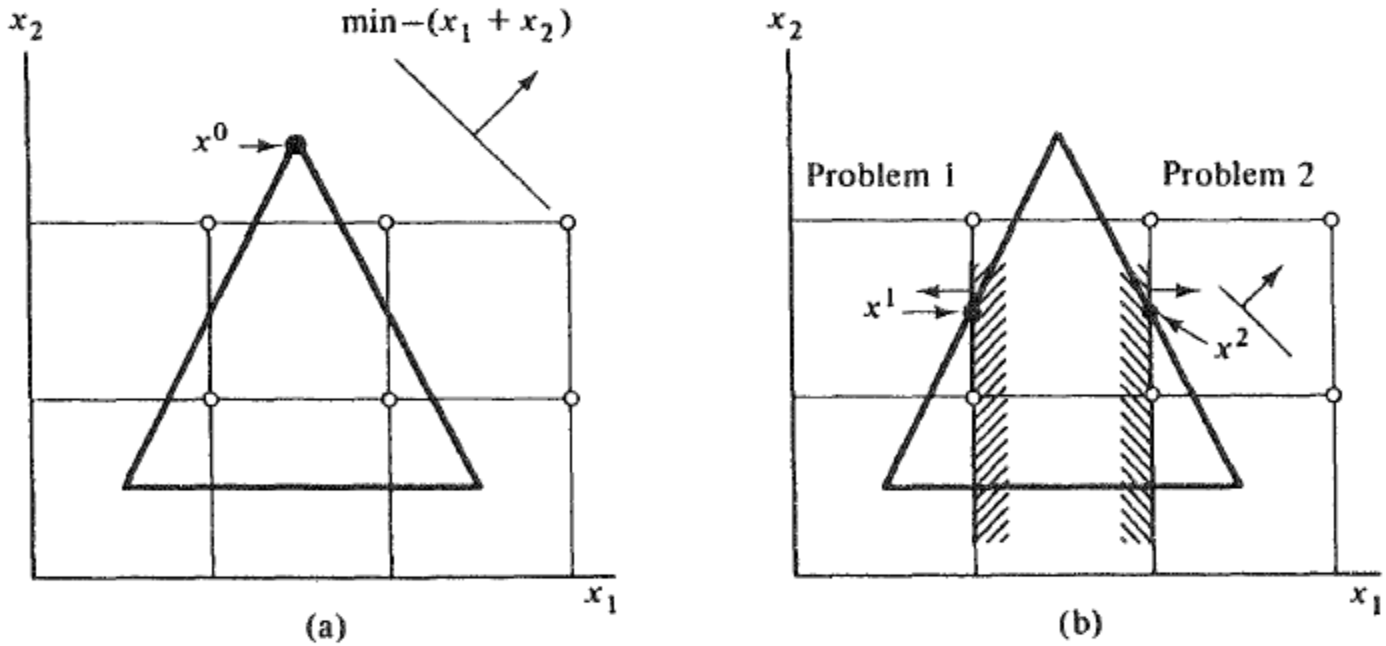
求得最优解

- 解 LP_4，无解（到达叶节点）。
- 解 LP_1，最优解 $x^1=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，解值 $z^1=c^{\mathrm{T}}x^1=-\frac{5}{2}\geq z^*$，剪枝。
- 状态空间搜索完毕，求得最优解 $x^*=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，解值 $z^*=-3$。

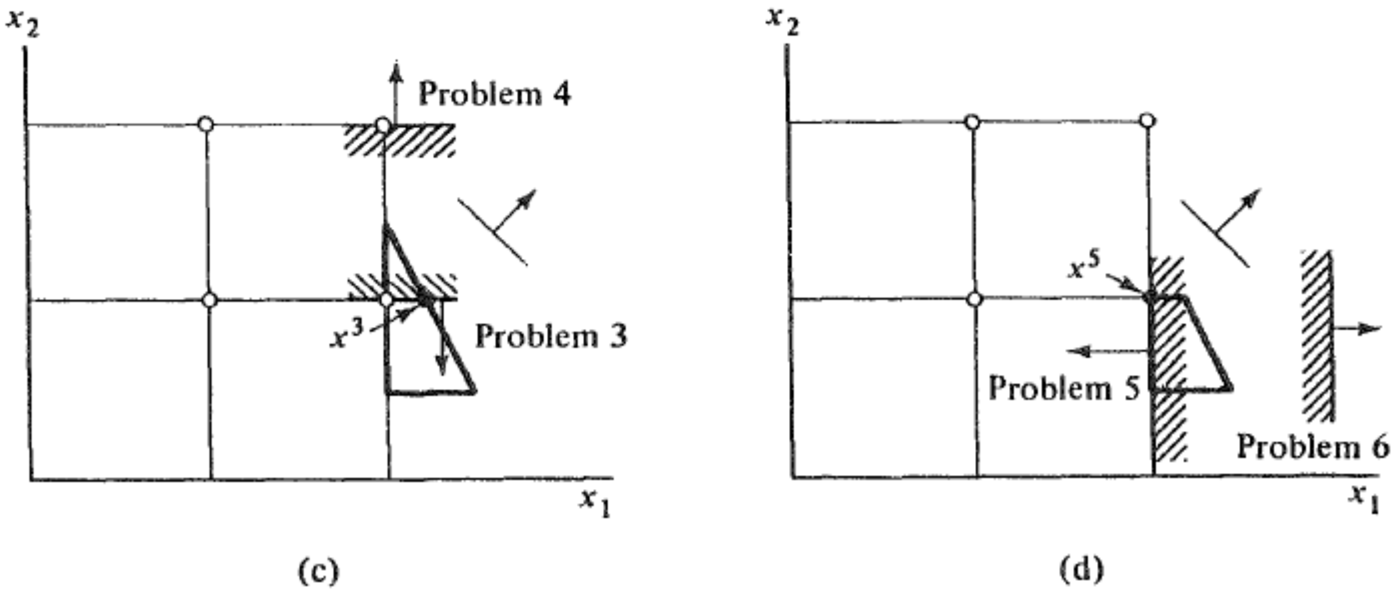
搜索树


IP_0
$x_1 \geq 2$
$x_1 \leq 1$
IP_2
IP_1
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$z^1 = -\frac{5}{2}$ 剪枝
IP_3
IP_4
$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$
无解
IP_5
IP_6
$x^5 = (2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$
无解
$z^5 = -3$

搜索过程



搜索过程



分枝定界法解整数规划

1 活点集合 $A \leftarrow \{IP_0\}$，上界 $U \leftarrow +\infty$，当前最好的整数解 $x^* \leftarrow$ NIL。

2 **while** $A \neq \varnothing$ **do**

3 　从 A 中取出一个问题 IP_k，并将 IP_k 从 A 中删除。

4 　解 LP_k。

5 　**if** 无解 **then** 转 2 **else** 记最优解为 x_k^*，值为 z_k^*。

6 　**if** $z_k^* < U$ **then**

7 　　**if** x_k^* 是整数解 **then** $x^* \leftarrow x_k^*$，$U \leftarrow z_k^*$

　　else 选择 x_k^* 的一个非整数分量，生成 IP_k 的两个后代问题，加入A。

8 　**endif**

9 **endwhile**

分枝定界法解整数规划

if x^* = NIL **then** 输出“IP_0 无解” **else** 输出解 x^*。

return

线性规划舍入法

- 解整数规划的一个方法，是将其放松为线性规划，解线性规划得到分数最优解，再将分数最优解舍入为原整数规划的近似解。
- 没有通用的舍入方法。必须针对具体的问题，设计不同的舍入方法。

顶点覆盖问题

- □□ □□□ $G = (V, E)$
- □□ □ V □□□□□□□□□□□□ □□ V' □□ V'□□ E □□□□□□□□□□□□

□□□□

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall (u,v) \in E \\
& x_v \in \{0,1\} \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

□□□□

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall (u,v) \in E \\
& x_v \geq 0 \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

舍入方法

- **设 x 是顶点覆盖 LP 的最优解。构造整数解 $\bar{x}$如下：**

$$\bar{x}_v = \begin{cases} 1, & x_v \ge \frac{1}{2} \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$ 。

- **分析：$\bar{x}$是一个顶点覆盖。**

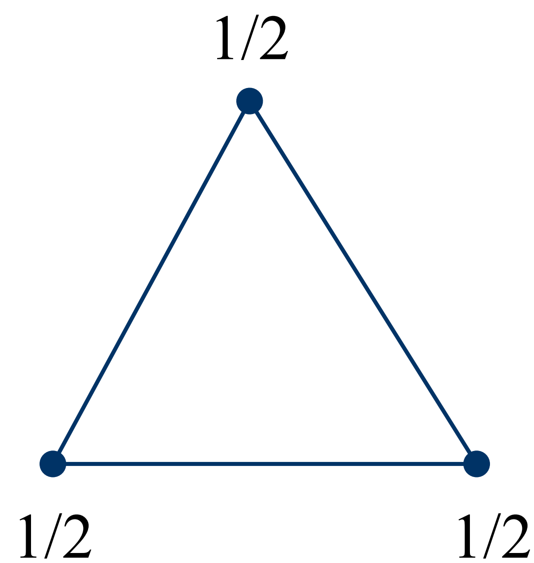
证明：任取一条边 $e = (u, v)$。因为 x 是一个可行解，因此有 $x_u + x_v \ge 1$。这表明 x_u 和 x_v 中必至少有一个 $\ge 1/2$。即，$\bar{x}_u$ 和 $\bar{x}_v$ 中至少有一个为 1。因此，$\bar{x}$是一个顶点覆盖。

- **$\bar{x}$ 的解值 $\mathrm{SOL}(\bar{x})$不超过最优解值 OPT 的 2 倍。**

证明： $$\mathrm{SOL}(\bar{x}) = \sum_{v \in V} \bar{x}_v \le \sum_{v \in V} 2x_v \le 2\mathrm{OPT}$$ 。

例子

- **$\mathrm{OPT}_f = 3/2$**
- **OPT = 2**
- **SOL = 3**
- **SOL ≤2OPT**



谢谢大家