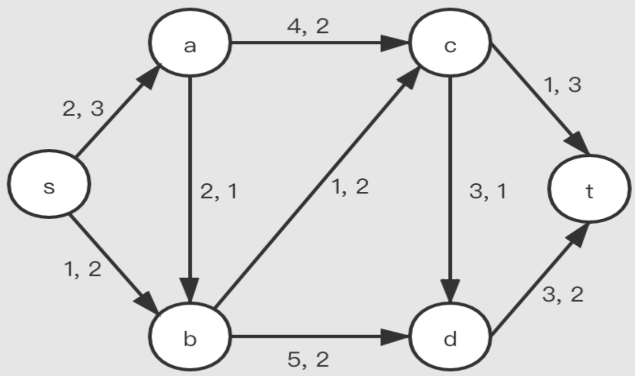
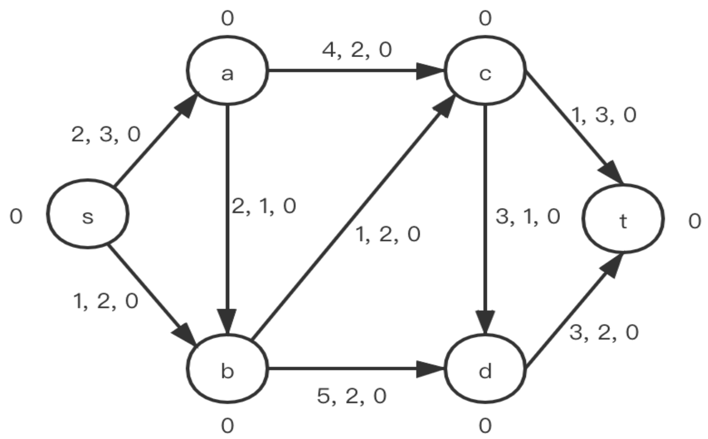
题目 1

用对偶算法求下图所示有向网络中从 s 到 t 其值为 3 的最小费用流。



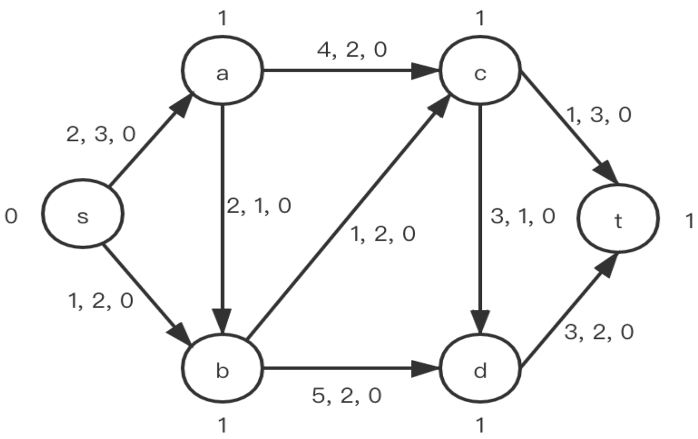
解答：初始原始可行解 x_{ij} 赋值为 0，初始对偶可行解 $p(i)$ 也赋值为 0，即如下图所示。(边上三个参数从左到右分别表示 w_{ij}, c_{ij}, x_{ij}，即费用、容量、流量)



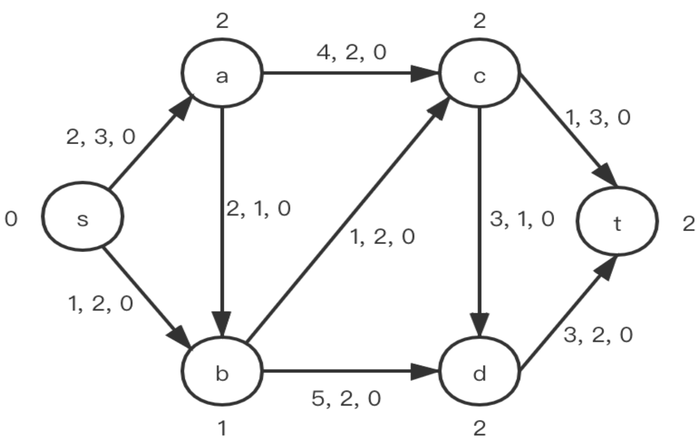
根据下述公式，可以确定集合 I=R=$\emptyset$。

$$I: p(j) - p(i) = w_{ij},\ x_{ij} < c_{ij}$$
$$R: p(j) - p(i) = w_{ij},\ x_{ij} > 0$$

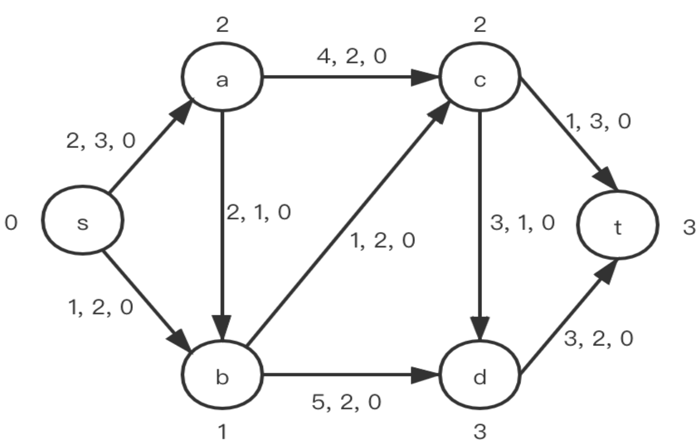
由此可以将 s 标号为 $(-, \infty)$，并得到标号集合 S={s}，未标号集合 T={a,b,c,d,t}。将 T 中点的 p(i) 加 1，可以得到如下的网络图。



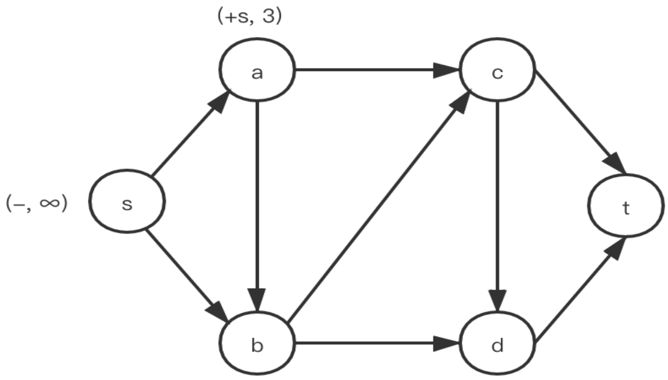
继续标号找增广路，I={(s,b)},R=$\emptyset$，将 b 标号为 $(+s,2)$，得到 S={s,b}，T={a,c,d,t}。继续修改对偶变量，可得到下述网络图。



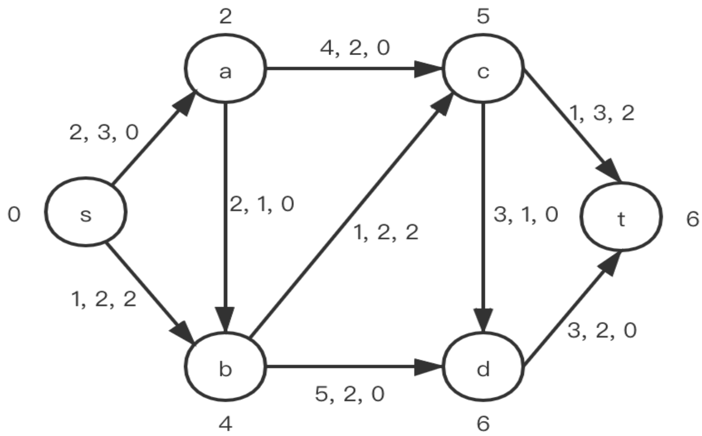
在此基础上找增广路,I={(s,a),(s,b),(b,c)},R=$\emptyset$,将 a 标号为 $(+s,3)$,c 标号为 (+b,2),得到 S={s,a,b,c},T={d,t}。继续修改对偶变量，可得到下述网络图。



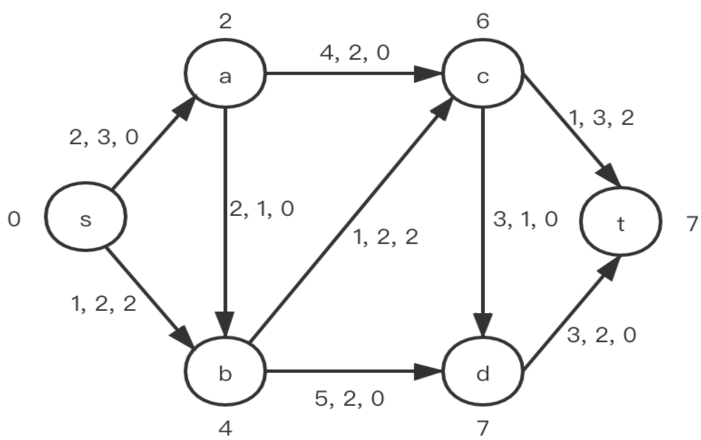
此时 I={(s,a),(s,b),(b,c),(c,t)}，R=∅，找到增广路 $s \to b \to c \to t$，增加流量为 2 的流值。流量增广之后，得到 I={(s,a),(c,t)}，R={(s,b),(b,c),(c,t)}，再次标号找增广，得到如下所示的标号图。



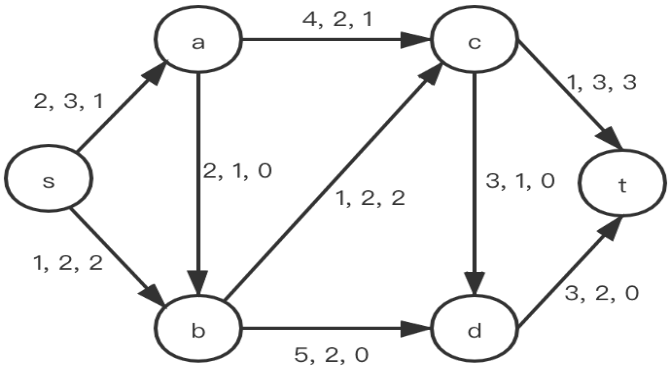
由此可以得到 S={s,a}，T={b,c,d,t}。持续修改对偶变量，直到 S、T 发生变化，可得到下述网络图。



此时 I={(s,a),(a,b),(c,t)}，R={(b,c),(c,t)}，将 b 标号为 $(+a, 1)$，得到 S={s,a,b}，T={c,d,t}。继续修改对偶变量，可得到下述网络图。



此时 I={(s,a),(a,b),(a,c),(c,t)}，R={(b,c),(c,t)}，将 c 标号为 (+a,2)，t 标号为 (+c,1)。由此可以找到增广路 $s \to a \to c \to t$，增加流量为 1，因此总流量达到了 3，达到最小费用。最终流量网络图如下所示。



最小费用流为 $x_{sa}=1, x_{sb}=2, x_{ac}=1, x_{bc}=2, x_{ct}=3$，其它 $x_{ij}=0$，流量大小为 3，总费用为 13。