组合优化 **作业 - 2 + 3**

姓名：刘建东 学号：201700130011
班级：2017 级菁英班 日期：2020 年 3 月 12 日

题目 1

用单纯性法求解下列线性规划问题：

(1)

$$\begin{cases} \min \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s.t. \quad -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ \qquad x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \min \quad z = x_1 - x_2 + x_3 + x_5 - x_6 \\ s.t. \quad 3x_3 + x_5 + x_6 = 6 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ \qquad -x_1 + x_6 = 0 \\ \qquad x_3 + x_6 + x_7 = 6 \\ \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, ..., 7 \end{cases}$$

解答：

(1) 根据题干中的标准型，我们可以得到下述的初始单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	-3	-1	-1	-1	0
x_3	-2	2	1	0	4
x_4	3	1	0	1	6

我们选取 x_3、x_4 为基变量，进行行初等变换后可以得到下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	-2	2	0	0	10
x_3	-2	2	1	0	4
x_4	3	1	0	1	6

由于 $\zeta_2 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_2 为入基变量。并且 $\theta = \min\{\frac{4}{2}, \frac{6}{1}\} = 2$，

因此取第一个约束对应的基变量 x_3 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	0	-1	0	6
x_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	2
x_4	4	0	$-\frac{1}{2}$	1	4

可以发现,此时检验数都小于等于 0,因此当前基可行解就是最优解,对应的最优解为 $x^* = (0,2,0,4)^T$,最优值为 $z^* = 6$。

(2) 根据题干中的标准型，我们可以得到下述的初始单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-1	1	-1	0	-1	1	0	0
x_5	0	0	3	0	1	1	0	6
x_2	0	1	2	-1	0	0	0	10
x_1	-1	0	0	0	0	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	1	1	6

我们选取 x_1、x_2、x_5、x_7 为基变量，进行行初等变换后可以得到下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	0	0	0	1	0	1	0	-4
x_5	0	0	3	0	1	1	0	6
x_2	0	1	2	-1	0	0	0	10
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	1	1	6

不难发现，$\zeta_4 > 0, \overline{A_4} \leq 0$，因此此 LP 无界。

题目 2

用两阶段法求解下列问题:

(1)

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30 \\ \qquad 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 0 \\ \qquad x_2 \geq 4 \\ \qquad x_j \geq 0, \ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases}\max \quad z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ \ s.t. \quad x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ \qquad\quad - x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4\end{cases}$$

解答:

(1) 首先将原问题化为标准型，具体形式如下。

$$\begin{cases}\min \quad z = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 16 \\ \ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26 \\ \qquad\quad 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = -24 \\ \qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, ..., 6\end{cases}$$

接下来我们需要令 $b \geq 0$，因此我们进行行变换使得 $b \geq 0$，具体得到的形式如下。

$$\begin{cases}\min \quad z = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 16 \\ \ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26 \\ \qquad\quad 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ \qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, ..., 6\end{cases}$$

接下来引入人工变量，形成如下的辅助 LP。

$$\begin{cases}\min \quad z = x_7 + x_8 \\ \ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 26 \\ \qquad\quad 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 2 \\ \qquad\quad x_j \geq 0,\ j = 1, ..., 8\end{cases}$$

由上述的原 LP 以及辅助 LP，可以得到下述的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	3	4	2	0	0	0	0	0	-16
g	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_7	1	1	1	1	1	0	1	0	26
x_8	4	7	2	-1	1	1	0	1	2

以人工变量 x_7、x_8 为基变量，通过行变换将 x_7、x_8 对应的检验数消为 0，得到如下的新的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	3	4	2	0	0	0	0	0	-16
g	5	8	3	0	2	1	0	0	28
x_7	1	1	1	1	1	0	1	0	26
x_8	4	7	2	-1	1	1	0	1	2

由于 $\zeta_2 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_2 为入基变量。并且 $\theta = \dfrac{2}{7}$，因此取第二个约束对应的基变量 x_8 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{120}{7}$
g	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{8}{7}$	$\frac{180}{7}$
x_7	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{180}{7}$
x_2	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

又由于 $\zeta_4 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_4 为入基变量。并且取第一个约束对应的基变量 x_7 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-30
g	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{2}$
x_2	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{2}$

至此，第 1 阶段结束，得到辅助问题的最优基可行解 $x^* = (0, \dfrac{7}{2}, 0, \dfrac{45}{2}, 0, 0, 0, 0)^T$，且人工变量 x_7、x_8 都不在基中。因此我们在上述单纯形表中去掉辅助 LP 的检验数行和人工变量对应的列，开始第 2 阶段的单纯形算法。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	-30
x_4	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{2}$
x_2	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{2}$

由于 $\zeta_1 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_1 为入基变量。并且取第二个约束对应的基变量 x_2 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	-0.8	0.2	0	-1.2	-0.6	-32.8
x_4	0	-0.6	0.4	1	0.6	-0.2	20.4
x_1	1	1.6	0.6	0	0.4	0.2	5.6

由于 $\zeta_3 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_3 为入基变量。并且取第二个约束对应的基变量 x_1 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{104}{3}$
x_4	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{50}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{28}{3}$

可以发现,此时检验数都小于等于 0,因此当前基可行解就是最优解,对应的最优解为 $x^* = (0, 4, \frac{28}{3}, \frac{50}{3})^T$，最优值为 $z^* = \frac{104}{3}$。

(2) 引入人工变量 x_5、x_6，可形成如下的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	2	-4	5	-6	0	0	0
g	0	0	0	0	-1	-1	0
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1

以人工变量 x_7、x_8 为基变量，通过行变换将 x_7、x_8 对应的检验数消为 0，得到如下的新的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	2	-4	5	-6	0	0	0
g	0	6	1	12	0	0	3
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1

分别经过 $x_4 \to x_5$，$x_3 \to x_6$ 两次基变换后，得到了下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	$\frac{65}{16}$	-1	0	0	$\frac{19}{16}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$
g	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0

至此，第 1 阶段结束，得到辅助问题的最优基可行解 $x^* = (0,0,0,\frac{1}{4},0,0)^T$，且人工变量 x_5、x_6 都不在基中。因此我们在上述单纯形表中去掉辅助 LP 的检验数行和人工变量对应的列，开始第 2 阶段的单纯形算法。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	$\frac{65}{16}$	-1	0	0	$\frac{3}{2}$
x_4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0

由于 $\zeta_1 > 0$，且系数矩阵该列中有大于 0 的元素，因此取 x_1 为入基变量。并且取第二个约束对应的基变量 x_4 为出基变量，即可得到一个新的基可行解。对应的单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	-66	0	-130	-31
x_1	1	16	0	32	8
x_3	0	6	1	0	3

可以发现，此时检验数都小于等于 0，因此当前基可行解就是最优解，对应的最优解为 $x^* = (8,0,3,0)^T$，最优值为 $z^* = 31$。

题目 3

写出下面线性规划的对偶规划：

$$\begin{cases} \min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ s.t. \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, ..., n \\ \qquad x_{ij} \geq 0, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

解答：上述线性规划的对偶规划如下：

$$\begin{cases} \max \quad \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j y_{j+m} \\ s.t. \ y_i + y_{j+m} \leq c_{ij}, \ i = 1, 2, ..., m; j = 1, ..., n \\ \qquad y_i, y_{j+m} \text{ 均无限制} \end{cases}$$

题目 4

令下述的线性规划问题为 P

$$\begin{cases} \min \quad x_1 + x_3 \\ s.t. \ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \qquad \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 用单纯形算法解 P

(2) 写出 P 的对偶 D

(3) 写出 P 的互补松紧条件，并利用它们解对偶 D，并通过计算 P 和 D 的最优化值，检查答案

解答：

(1) 首先将原问题化为标准型，具体形式如下。

$$\begin{cases} \min \quad x_1 + x_3 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ \qquad \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad x_i \geq 0, \ i = 1, ..., 4 \end{cases}$$

根据标准型给出初始单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-1	0	-1	0	0
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3

将基本量 x_1 换成 x_2 后即可得到最终单纯形表，具体数值如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

此时检验数都小于等于 0，因此当前基可行解就是最优解，对应的最优解为 $x^* = (0, \dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{4})^T$，最优值为 $z^* = \frac{7}{4}$。

(2) 由 P 得出如下表格，需要将 $x_1 + 2x_2 \leq 5$ 转换为 $-x_1 - 2x_2 \geq 5$。

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	1	0		
1	2	0	1	5	y_1
0	$\frac{1}{2}$	1	0	3	y_2

在根据上述表格即可求出对偶 D，具体如下所示。

$$\begin{cases} \max \quad 5y_1 + 3y_2 \\ \quad s.t. \quad y_1 \leq 1 \\ \qquad\quad 2y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 \leq 0 \\ \qquad\quad y_2 \leq 1 \\ \qquad\quad y_1 \leq 0 \\ \qquad\quad y_i \text{ 无限制}, i = 1, 2 \end{cases}$$

进一步化简可得到最终对偶 D。

$$\begin{cases} \max \quad 5y_1 + 3y_2 \\ \quad s.t. \quad 2y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 \leq 0 \\ \qquad\quad y_1 \leq 0 \\ \qquad\quad y_2 \leq 1 \end{cases}$$

(3) 互补松紧定理如下：x 和 y 分别是原始 LP 和对偶 LP 的最优解，当且仅当下式成立。

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq m,\ y_i(a_i^T x - b_i) = 0 \\ \forall 1 \leq j \leq n,\ (c_j - A_j^T y)x_j = 0 \end{cases}$$

互补松紧定理推论如下：设 x 和 y 分别为原始 LP 和对偶 LP 的最优解，则

- $y_i > 0 \Rightarrow a_i^T x = b_i, a_i^T x > b_i \Rightarrow y_i = 0$
- $x_j > 0 \Rightarrow A_j^T y = c_j, A_j^T y < c_j \Rightarrow x_j = 0$

因此我们可以得到此题的互补松紧条件如下:

$$\begin{cases} y_1(x_1 + 2x_2 + x_4 - 5) = 0 \\ y_2(\frac{1}{2}x_2 + x_3 - 3) = 0 \\ x_1(1 - y_1) = 0 \\ x_2(-2y_1 - \frac{1}{2}y_2) = 0 \\ x_3(1 - y_2) = 0 \\ x_4(0 - y_1) = 0 \end{cases}$$

又由于我们之前求出的最优解 $x = (0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0)^T$, 因此我们可以得到 $y = (-\frac{1}{4}, 1)^T$, 对偶 D 的最优值仍然为 $\frac{7}{4}$, 验证结果成立, 前述推导正确。

题目 5

设 $b_i > 0, i = 1, ..., m; c_j \geq 0, j = 1, ..., n(m < n)$, 写出下面线性规划的对偶问题, 证明对偶问题有唯一最优解, 并找出对偶问题的这一最优解。

$$\begin{cases} \min \quad \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ \ s.t.\ x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, ..., m \\ \qquad x \geq 0,\ j = 1, ..., n \end{cases}$$

解答: 上述线性规划的对偶问题如下所示。

$$\begin{cases} \max \quad \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \quad s.t.\ \ y_i \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j,\ j = m+1, ..., n \end{cases}$$

根据已知条件, 我们可知 $b_i > 0$ 且 $c_j \geq 0$。又根据对偶式中 $y_i \leq 0$ 可知, $\max(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i) = 0$ 当且仅当 $y_i = 0$ 时成立。因此下述结论显而易见。

- 上述对偶问题有唯一最优解
- 唯一最优解为 $y_i = 0,\ i = 1, ..., m$

题目 6

用对偶单纯形法求解下列线性规划问题:

$$\begin{cases} \min \ \ 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4 \\ s.t. \ x_1+2x_2+3x_3+x_4 \geq 2 \\ \qquad -2x_1+x_2-x_3+3x_4 \leq -3 \\ \qquad x_j \geq 0, \ j=1,2,3,4 \end{cases}$$

解答：上述线性规划问题转换为标准型如下。

$$\begin{cases} \min \ \ 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4 \\ s.t. \ x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=2 \\ \qquad -2x_1+x_2-x_3+3x_4+x_6=-3 \\ \qquad x_j \geq 0, \ j=1,...,6 \end{cases}$$

根据标准型得到初始单纯形表如下。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	-2	-3	-5	-6	0	0	0
x_5	-1	-2	-3	-1	1	0	-2
x_6	-2	1	-1	3	0	1	-3

可以看到上述单纯形表中 $b<0$，则该基本解对于原始 LP 来说不可行。又因为 $\zeta \leq 0$，即对于对偶 LP 可行，因此我们使用对偶单纯形法来进行求解。根据 $r = arg/\min\{\overline{b_i}|i=1,2,...,m\}$ 与 $k = arg/\min\{\frac{\zeta_j}{a_{rj}}|\overline{a_{rj}}<0, j=1,2,...,n\}$，我们可以确定第一次旋转中，$r=2, k=1$。旋转变换后得到下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	-4	-4	-9	0	-1	3
x_5	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

由于 $b_2<0$，因此我们进行第二次旋转，$r=1, k=2$，旋转变换后所得单纯形表如下所示。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	0	0	-5	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{19}{5}$
x_2	0	1	1	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_1	1	0	1	-1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$

至此，$b \geq 0$，即当前解 $x^*=(\frac{8}{5},\frac{1}{5},0,0)^T$ 为原始 LP 的最优解，最优值为 $z^*=\frac{19}{5}$。

题目 7

令下述线性规划问题为 P，试利用解问题 P 所得到的最优单纯形表继续求解下述两个问题。

$$\begin{cases} \min \quad x_1 + x_3 \\ s.t.\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ \qquad \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

(1) C_1 由 1 变成 $-\dfrac{5}{4}$，C_3 由 1 变成 2

(2) b 由 $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答：上述线性规划问题最优单纯形表如下所示。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

(1) 先执行 c_1 由 1 变成 $-\dfrac{5}{4}$，由于 x_1 是非基变量，因此只有 ζ_1' 发生了变化，$\zeta_1' = \zeta_1 + c_1 - c_1' = 1$，由于 $\zeta_1' > 0$，因此我们重新进行基变换，得到下述单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	-2	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{4}$
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	3

再执行 c_3 由 1 变成 2，因为 x_3 是基变量，因此 x_3 对应行需要乘 $(2-1)$ 加到第 0 行，再令 $\zeta_3' = 0$，即得到下述的最优单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	3

即最优解为 $x^* = (5, 0, 3)^T$，最优值为 $z^* = -\dfrac{1}{4}$。

(2) 由于 x_2、x_3 是基变量，因此基阵 B 以及 B^{-1} 为

$$B = (A_2\ A_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

因此，$\overline{b'} = B^{-1}b' = (-1\ \dfrac{3}{2})^T$，$z_0' = c_B^T B^{(-1)} b' = \dfrac{3}{2}$，因此我们可以得到如下新的单纯形表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

由于 $b_1 < 0$, 我们将采用对偶单纯形法来进行计算。根据上述矩阵, 我们可以确定 $r = 1$, 但是 $\overline{a_{rj}} \geq 0$, 即该问题无可行解。因此本题更换 b 向量后，将无可行解。