第5章 动态规划

5.5 连续变量多阶段决策问题

资源分配问题

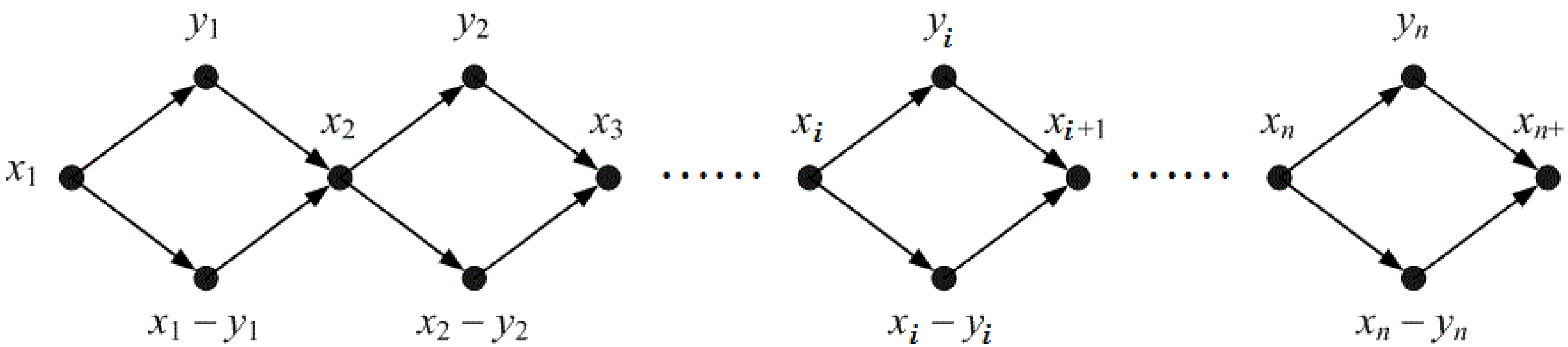
- 设有数量为x的某种资源，将它投入两种生产方式A和B中（或称为投给部门A和部门B）。
- 若投给部门A的数量为z，则可获收益$g(z)$，回收az，其中a（$0 \le a \le 1$）为部门A的回收率。类似地，若投给部门B的数量为z，则可获收益$h(z)$，回收bz，其中b（$0 \le b \le 1$）为部门B的回收率。
- 连续投放n个阶段，问每个阶段如何分配资源才能使总收入最大？

再描述一遍

- 设第k个阶段的资源总数为x_k，投给部门A的资源数量为y_k。则投给部门B的数量为$x_k - y_k$。于是可得到收入$g(y_k) + h(x_k - y_k)$，回收$ax_k + b \cdot (x_k - y_k)$。
- 因此，问题就成为：求$y_1, y_2, \cdots, y_n$，
最大化 $\sum_{1 \le k \le n} g(y_k) + h(x_k - y_k)$，且满足条件

$$x_1 = x$$
$$x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = ay_{n-1} + b(x_{n-1} - y_{n-1})$$
$$y_k \ge 0，\ x_k \ge 0，\quad k = 1..n-1$$

如何求解？（后向优化）



- 令 $f_k(x)$表示当前资源数量为 x，再经过 k 个阶段投放完成系统目标，所得到的最大总收入。
- 则有：$$\begin{cases} f_k(x)=\max\limits_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y))\}, & k\ge 2 \\ f_1(x)=\max\limits_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)\}, & k=1 \end{cases}$$ 。
- 原问题即是求 $f_n(x)$。

连续变量的定期多阶段资源分配问题

- 下面讨论有限资源分配问题，它的递推公式是：

$$\begin{cases} f_k(x) = \max\limits_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y))\}, & k\ge 2 \\ f_1(x) = \max\limits_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)\}, & k=1 \end{cases}$$

- 当 $g(y)$、$h(y)$是一般函数时，这个问题的解不容易找。（但对于离散变量的该问题，有动态规划的办法求到算法解……☺）
- 下面证明，当 $g(y)$、$h(y)$为凸函数，且 $h(0)=g(0)=0$ 时，在每个阶段上 y 的最优决策总是取其端点的值。即上述递推公式可以化简为：

$$\begin{cases} f_k(x) = \max\{h(x)+f_{k-1}(bx), g(x)+f_{k-1}(ax)\}, & k\ge 2 \\ f_1(x) = \max\{h(x), g(x)\}, & k=1 \end{cases}$$

两个引理

引理 5.3.1 设 $g(x)$、$h(y)$是凸函数，则对任何固定的 x，$F(y)=g(y)+h(x-y)$是 y 的凸函数。

- 证明：只需证$h(x-y)$是 y 的凸函数，即，需证：$\forall 0\le\alpha\le 1$，
  $h(x-(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2))\le\alpha h(x-y_1)+(1-\alpha)h(x-y_2)$。
- 而 $h(x-(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2))=h(\alpha x+(1-\alpha)x-(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2))$

$$=h(\alpha(x-y_1)+(1-\alpha)(x-y_2))$$

$$\le\alpha h(x-y_1)+(1-\alpha)h(x-y_2)\text{。}$$

其中最后一步是因为 $h(y)$是 y 的凸函数。‖

引理 5.3.2 设$F_1(x)$、$F_2(x)$是 x 的凸函数，则 $F(x)=\max\{F_1(x),F_2(x)\}$也是 x 的凸函数。‖

定理5.3.1（主要定理）

定理 5.3.1 设 $g(x)$、$h(y)$是凸函数，$g(0) = h(0) = 0$。则 n 阶段资源分配问题每个阶段的最优策略 y 总是在 $0 \le y \le x$ 的端点处取得。

- 证明：先证 $k = 1$ 的情形。
- $f_1(x) = \max\limits_{0 \le y \le x} \{g(y) + h(x-y)\}$。由引理 5.3.1，$g(y)+h(x-y)$是 y 的凸函数，因此$g(y)+h(x-y)$在区间[0, x]上的最大值必定在 $y = 0$ 或 $y = x$ 处取得。即，$f_1(x) = \max\{g(x), h(x)\}$。
- 再用归纳法证 $k \ge 2$ 的情形。

主要定理

- （基本步）$f_2(x)=\max\limits_{0\le y\le x}\{g(y)+h(x-y)+f_1(ay+b(x-y))\}$。由引理 **5.3.2**，$f_1(x)$是 ***x*** 的凸函数。由于$ay+b(x-y)$是 ***y*** 的线性函数，可证$f_1(ay+b(x-y))$是 ***y*** 的凸函数（类似于引理 **5.3.1** 中对 ***h***()函数的证明）。
- 由于$g(y)$、$h(x-y)$、$f_1(ay+b(x-y))$均是 ***y*** 的凸函数，它们的和也是 ***y*** 的凸函数。因此$g(y)+h(x-y)+f_1(ay+b(x-y))$在区间[0, ***x***]上的最大值必定在其中一个端点处取得。即，$f_2(x)=\max\{g(x)+f_1(ax),h(x)+f_1(bx)\}$。由引理 **5.3.2**，$f_2(x)$是 ***x*** 的凸函数。

主要定理

- （假设步）假设 $f_{k-1}(x)=\max\{g(x)+f_{k-2}(ax), h(x)+f_{k-2}(bx)\}$（$k\geq 3$），并且是凸函数。
- （归纳步）下面证 $f_k(x)=\max\{g(x)+f_{k-1}(ax), h(x)+f_{k-1}(bx)\}$，并且是凸函数。
- 由定义，$f_k(x)=\max\limits_{0\leq y\leq x}\{g(y)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y))\}$。由于 $g(y)$、$h(x-y)$、$f_{k-1}(ay+b(x-y))$ 均是 y 的凸函数，因此 $g(y)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y))$ 在区间[0, x]上的最大值必在端点处取得。即，$f_k(x)=\max\{g(x)+f_{k-1}(ax), h(x)+f_{k-1}(bx)\}$。
- 由于 $h(x)+f_{k-1}(bx)$、$g(x)+f_{k-1}(ax)$ 是 x 的凸函数，由引理5.3.2，$f_k(x)$ 也是 x 的凸函数。‖

定理5.3.1的应用

- 当 $g(x)$、$h(x)$满足给定条件时，应用定理 5.3.1，对于离散变量的有限阶段资源分配问题，动态规划表的每个单元格的计算可由计算 $x+1$ 个值（$f_k(x)=\max\limits_{0\le y\le x}\{g(x)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y))\}$）简化至只计算 2 个值（$f_k(x)=\max\{g(x)+f_{k-1}(ax),h(x)+f_{k-1}(bx)\}$）。
- 当 $g(x)$、$h(x)$是给定的满足定理 5.3.1 的凸函数时，可利用函数本身的性质对计算做进一步简化。例如，对连续变量的有限阶段资源分配问题可给出解析解。

例5.1.2

例5.1.2：连续变量的资源分配问题。

- **今有 1000 吨油（$x = 1000$），投放到 A、B 两个部门。**
- **若给部门 A 投放 z 吨油，则产生效益 $g(z) = z^2$，回收 $0.8z$ 吨油（$a = 0.8$）。**
- **若给部门 B 投放 z 吨油，则产生效益 $h(z) = 2z^2$，回收 $0.4z$ 吨油（$b = 0.4$）。**
- **问连续投放 5 年（$n = 5$），每年如何投放，可使 5 年的总收益最大?**

例5.1.2

- 解： $g(x)=x^2$， $h(x)=2x^2$， 显然 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是凸函数且 $g(x)=h(x)=0$， 满足定理 **5.3.1** 的条件。因此，
- $f_1(x)=\max\{g(x),h(x)\}=\max\{x^2,2x^2\}=2x^2$，

$\Rightarrow y_5=0$。

- $f_2(x)=\max\{g(x)+f_1(ax),h(x)+f_1(bx)\}$

$$=\max\{x^2+(2a^2x^2),2x^2+(2b^2x^2)\}$$

$$=\max\{(1+2a^2)x^2,(2+2b^2)x^2\}$$

2.28 **2.32**

$$=(2+2b^2)x^2,$$

$\Rightarrow y_4=0$。

例5.1.2

- $f_3(x)=\max\{g(x)+f_2(ax),h(x)+f_2(bx)\}$

$$=\max\{x^2+(2+2b^2)a^2x^2, 2x^2+(2+2b^2)b^2x^2\}$$

$$=\max\{(1+2a^2+2a^2b^2)x^2, (2+2b^2+2b^4)x^2\}$$

2.4848 **2.3712**

$$=(1+2a^2+2a^2b^2)x^2\text{，}$$

$\Rightarrow y_3=x_3$。

- $f_4(x)=\max\{g(x)+f_3(ax),h(x)+f_3(bx)\}$

$$=\max\begin{Bmatrix} x^2+(1+2a^2+2a^2b^2)a^2x^2, \\ 2x^2+(1+2a^2+2a^2b^2)b^2x^2 \end{Bmatrix}$$

例5.1.2

- $$=\max\left\{\left(1+a^2+2a^4+2a^4b^2\right)x^2,\left(2+b^2+2a^2b^2+2a^2b^4\right)x^2\right\}$$

  2.590272 **2.397568**

  $$=\left(1+a^2+2a^4+2a^4b^2\right)x^2,$$

  $\Rightarrow\ y_2=x_2$。

- $f_5(x)=\max\{g(x)+f_4(ax),h(x)+f_4(bx)\}$

  $$=\max\begin{Bmatrix}x^2+\left(1+a^2+2a^4+2a^4b^2\right)a^2x^2,\\2x^2+\left(1+a^2+2a^4+2a^4b^2\right)b^2x^2\end{Bmatrix}$$

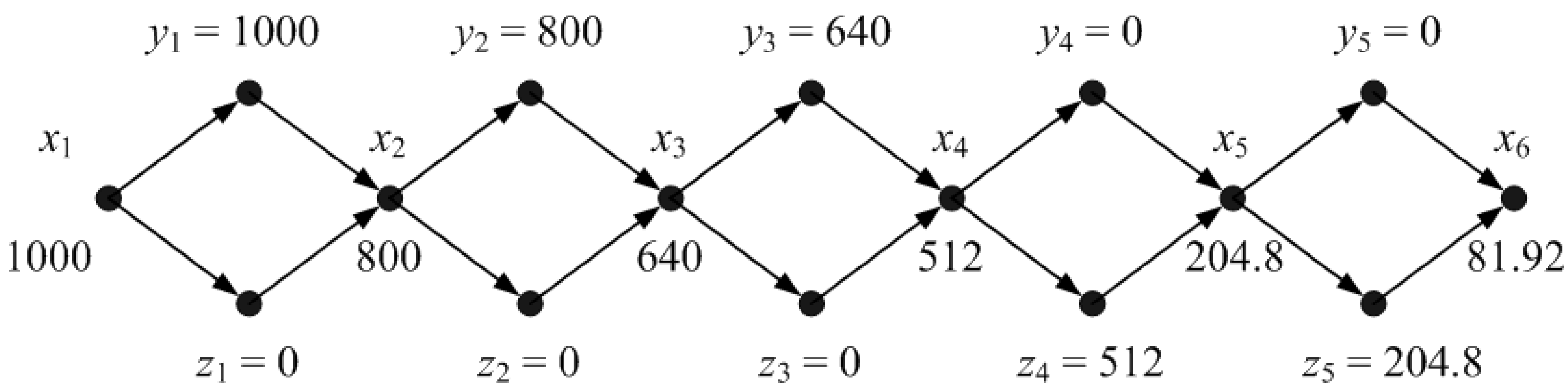
  $$=\max\begin{Bmatrix}\left(1+a^2+a^4+2a^6+2a^6b^2\right)x^2,\\\left(2+b^2+a^2b^2+2a^4b^2+2a^4b^4\right)x^2\end{Bmatrix}$$

  （**2.65777408**，**2.41444352**）

例5.1.2

- $= \left(1 + a^2 + a^4 + 2a^6 + 2a^6 b^2\right) x^2$

  $\Rightarrow\ y_1 = x_1$。



- $i_1 = 1000^2 = 1000000$，$i_2 = 800^2 = 640000$，$i_3 = 640^2 = 409600$，

  $i_4 = 2 \times 512^2 = 524288$， $i_5 = 2 \times 204.8^2 = 83886.08$。

- **总收益 $=$ 2657774.08，即 f_5(1000)的值。**

例5.3.2

例 5.3.2 多阶段有限资源分配问题中，$g(x)=-2cx+x^2$，$h(x)=-cx+x^2$，$0\le x\le c$，$0<a,b<1$且$0<b-a\le 1-b$。求$f_k(x)$。

- **解：$g(x)$、$h(x)$都是凸函数，且 $g(0)=h(0)=0$，满足定理 5.3.1 的条件。**
- $f_1(x)=\max\{-2cx+x^2,-cx+x^2\}=-cx+x^2$。
- $f_2(x)=\max\{g(x)+f_1(ax),h(x)+f_1(bx)\}$

$$
\begin{aligned}
&=\max\{-2cx+x^2-cax+a^2x^2,-cx+x^2-cbx+b^2x^2\}\\
&=\max\{-c(2+a)x+(1+a^2)x^2,-c(1+b)x+(1+b^2)x^2\}\\
&=-c(1+b)x+(1+b^2)x^2,
\end{aligned}
$$

因为$1+b^2>1+a^2$，及$2+a\ge 1+b$（即，需证$b-a\le 1$，由已知可得）。

例5.3.2

- $f_3(x)=\max\{g(x)+f_2(ax),h(x)+f_2(bx)\}$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}-2cx+x^2-c(1+b)ax+(1+b^2)a^2x^2,\\ -cx+x^2-c(1+b)bx+(1+b^2)b^2x^2\end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}-c(2+a+ab)x+(1+a^2+a^2b^2)x^2,\\ -c(1+b+b^2)x+(1+b^2+b^4)x^2\end{array}\right\}$$

$$=-c(1+b+b^2)x+(1+b^2+b^4)x^2,$$

因为$1+b^2+b^4>1+a^2+a^2b^2$，以及$2+a+ab\geq 1+b+b^2$（即，需证$b+b^2-a-ab\leq 1$，需证$b(1+b)-a(1+b)\leq 1$，需证$b-a\leq\frac{1}{1+b}$，由已知确实有$b-a\leq 1-b<\frac{1}{1+b}$）。

例5.3.2

- 归纳可知， $f_k(x)=-c\left(1+b+\cdots+b^{k-1}\right)x+\left(1+b^2+\cdots+b^{2(k-1)}\right)x^2$

$=-\dfrac{1-b^k}{1-b}cx+\dfrac{1-b^{2k}}{1-b^2}x^2$。

（对一般项 $f_k(x)$，需证 $b-a\le\dfrac{1}{1+b+\cdots+b^{k-2}}$，而由已知确实有 $b-a\le 1-b<\dfrac{1}{1+b+\cdots+b^{k-2}}$）。‖

谢谢大家