姓名：刘建东 学号：201700130011
班级：2017 级菁英班 日期：2020 年 4 月 9 日

题目 1

用最速下降法求解以下问题，要求迭代进行三轮：

(1) $\min = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$，取初始点 $x^0 = (3,2)^T$；

(2) $\max = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$，取初始点 $x^0 = (1,1)^T$。

解答：最速下降法伪代码如下所示：

```
x^0 , k = 0
while ‖ ▽f(x^k) ‖> ε do
    p^k = − ▽ f(x^k)
    find t_k, satisfy f(x^k + t_k p^k) = min_{t≥0} f(x^k + t p^k)
    x^{k+1} = x^k + t_k p^k, k = k + 1
endwhile
return x^k
```

(1) $\bigtriangledown f(x) = (\frac{2}{3}x_1, x_2)^T$，具体迭代过程如下表所示：

k	x^k	$\bigtriangledown f(x^k)$	p_k	t_k
0	$(3,2)^T$	$(2,2)^T$	$(-2,-2)^T$	1.2
1	$(0.6,-0.4)^T$	$(0.4,-0.4)^T$	$(-0.4,0.4)^T$	1.2
2	$(0.12,0.08)^T$	$(0.08,0.08)^T$	$(-0.08,-0.08)^T$	1.2
3	$(0.024,-0.016)^T$			

由此可知，迭代三轮后 $x = (0.024, -0.016)^T, f = 0.00032$。

(2) 首先我们对原函数进行一下变换，得到 $\min = -4x_1 - 6x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$，因此 $\bigtriangledown f(x) = (-4 + 4x_1 + 2x_2, -6 + 2x_1 + 4x_2)^T$，具体迭代过程如下表所示：

k	x^k	$\bigtriangledown f(x^k)$	p_k	t_k
0	$(1,1)^T$	$(2,0)^T$	$(-2,0)^T$	0.25
1	$(0.5,1)^T$	$(0,-1)^T$	$(0,1)^T$	0.25
2	$(0.5,1.25)^T$	$(0.5,0)^T$	$(-0.5,0)^T$	0.25
3	$(0.375,1.25)^T$			

由此可知，迭代三轮后 $x = (0.375, 1.25)^T, f(x) = 4.65625$。

题目 2

用 F-R 法求解：

$$\min(1-x_1)^2+2(x_2-x_1^2)^2, \text{取初始点 } x^0=(0,0)^T, \varepsilon=10^{-6}.$$

解答： F-R 法伪代码如下所示：

```
x^0 , k = 0
while ‖ ▽f(x^0) ‖> ε do
    p^0 = − ▽ f(x^0)
    while true do
        find t_k, satisfy f(x^k + t_k p^k) = min_{t≥0} f(x^k + t p^k)
        x^{k+1} = x^k + t_k p^k
        if ‖ ▽f(x^{k+1}) ‖≤ ε then return x^{k+1}
        if k + 1 = n then x^0 = x^n , break
        λ_k = ‖ ▽f(x^{k+1}) ‖^2 / ‖ ▽f(x^k) ‖^2 , p^{k+1} = − ‖ ▽f(x^{k+1}) ‖ +λ_k p^k
        k = k + 1
    endwhile
endwhile
return x^0
```

通过上述伪代码，我们可以得到下述的求解过程。

$$\triangledown f(x)=\begin{pmatrix}8x_1^3-8x_1x_2+2x_1-2\\4x_2-4x_1^2\end{pmatrix}$$

k	x^k	$\triangledown f(x^k)$	$\parallel \triangledown f(x^k) \parallel$	p_k	t_k	λ^k
0	$(0,0)^T$	$(-2,0)^T$	2	$(2,0)^T$	0.25	0.25
1	$(0.5,0)^T$	$(0,-1)^T$	1	$(0.5,1)^T$	1	
2	$(1,1)^T$	$(0,0)^T$	0			

由此可知，迭代三轮后 $x=(1,1)^T, f(x)=0$。

题目 3

写出下列问题的 K-T 条件：

(1)

$$\begin{cases} \min \quad (x_1-3)^2+(x_2-2)^2 \\ s.t. \quad x_1^2+x_2^2-5\le 0 \\ \qquad\quad x_1+2x_2-4=0 \\ \qquad\quad x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \min \quad -(x_1+1)^2-(x_2+1)^2 \\ s.t. \quad x_1^2+x_2^2-2\le 0 \\ \qquad\quad x_2-1\le 0 \end{cases}$$

解答：

$$\begin{cases} \min \quad f(x) \\ s.t. \quad g_i(x)\le 0,\ i=1,...,p \quad , \ I=\{1,...,p\},\ J=\{1,...,q\} \\ \qquad\quad h_j(x)=0,\ j=1,...,q \end{cases}$$

上述式子的 K-T 条件如下：

$$\begin{cases} \bigtriangledown f(x^*)+\sum_{i\in I}\lambda_i^*\bigtriangledown g_i(x^*)+\sum_{j\in J}u_j^*\bigtriangledown h_j(x^*)=0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*)=0,\ i\in I \\ \lambda_i^*\ge 0,\ i\in I \\ \boxed{z+c<a+x+b+y}\ \text{X} \end{cases}$$

根据上述公式，我们可以得到此题的 K-T 条件。

(1)

X

$$\begin{cases} 2(x_1-3)+2\lambda_1 x_1\boxed{-\lambda_2}+u_1=0 \\ 2(x_2-2)+2\lambda_1 x_2\boxed{-\lambda_3}+2u_1=0 \\ \lambda_1(x_1^2+x_2^2-5)=0 \\ \lambda_2 x_1=0 \\ \lambda_3 x_2=0 \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ge 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} -2(x_1+1)+2\lambda_1 x_1=0 \\ -2(x_2+1)+2\lambda_1 x_2+\lambda_2=0 \\ \lambda_1(x_1^2+x_2^2-2)=0 \\ \lambda_2(x_2-1)=0 \\ \lambda_1,\ \lambda_2\ge 0 \end{cases}$$

题目 4

用 Wolfe 法求以下问题:

$$\begin{cases} \min & f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ s.t. & x_1+x_2\le 2 \\ & x_1+5x_2\le 5 \\ & x_j\ge 0,\ j=1,2 \end{cases}$$

取 $x^0=(0,0)^T,\varepsilon=10^{-6}$.

解答：首先将上述问题转化为标准式。

$$\begin{cases} \min & f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ s.t. & x_1+x_2+x_3=2 \\ & x_1+5x_2+x_4=5 \\ & x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4 \end{cases}$$

用 Wolfe 法求该问题的过程如下所示。

k	x^k	I_B^k	p_N^k	p_B^k	t_k
0	$(0,0,2,5)^T$	$\{3,4\}$	$(4,6)^T$	$(-10,-34)^T$	$\frac{5}{34}$
1	$(\frac{10}{17},\frac{15}{17},\frac{9}{17},0)^T$	$\{1,2\}$	$(-\frac{513}{289},0)^T$	$(\frac{2565}{1156},\frac{-513}{1156})^T$	$\frac{68}{279}$
2	$(\frac{35}{31},\frac{24}{31},\frac{3}{31},0)^T$	$\{1,2\}$	$(0,0)^T$	$(0,0)^T$	

$\| p^2 \|=0\le 10^{-6}$，因此 $x^2=(\dfrac{35}{31},\dfrac{24}{31},\dfrac{3}{31},0)^T$ 为初始问题的 K-T 点，由于该问题显然是一个凸规划，因此所求得的 x^2 为其整体最优解，愿问题的整体最优解为 $x^*=(\dfrac{35}{31},\dfrac{24}{31})^T$。

题目 5

用罚函数法求解问题:

$$\begin{cases} \min & (x-1)^2 \\ s.t. & 2-x\le 0 \end{cases}$$

(1) 写出 $c_k=0,1,10$ 时相应的增广目标函数;

(2) 取 $c_k=k-1(k=1,2)$，求出近似最优解的迭代点列;

(3) 利用 (2) 求问题的最优解。

解答:

(1)

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x)\le 0,\ i=1,...,p \\ & h_j(x)=0,\ j=1,...,q \end{cases}$$

上述式子对应的增广目标函数如下：

$$p_{c_k}(x) = c_k \sum_{i=1}^{p} [\max(g_i(x), 0)]^2 + \frac{c_k}{2} \sum_{j=1}^{q} [h_j(x)]^2$$
$$F_{c_k}(x) = f(x) + p_{c_k}(x)$$

由此我们得到本题所对应的增广目标函数。

$$F_{c_k} = \begin{cases} (x-1)^2 + c_k(2-x)^2, & x < 2, \\ (x-1)^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

- $c_k = 0$, 则 $F(x) = x^2 - 2x + 1$.
- $c_k = 1$，则 $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x + 5, & x < 2, \\ x^2 - 2x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$
- $c_k = 10$，则 $F(x) = \begin{cases} 11x^2 - 42x + 41, & x < 2, \\ x^2 - 2x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$

(2)

$$F'_{c_k} = \begin{cases} 2(x-1) + 2c_k(x-2), & x < 2, \\ 2(x-1), & x \geq 2. \end{cases}$$

$c_k = k - 1$，$F'_{c_k}(x) = 0$，代入上述式子即可得到 $x^k = 2 - \dfrac{1}{k}$，$k = 1, 2$。

(3) 由 (2) 不难发现，$k \underset{\lim}{\to} \infty x^k = 2$，因此该问题最优解为 $x^* = 2$。

题目 6

用对数形式的障碍函数法求解问题：

$$\begin{cases} \min & x_1 + 2x_2 \\ s.t. & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

解答：令 $d_k = \dfrac{1}{5k}$，$B_{d_k}(x) = -d_k ln(x_2 - x_1^2) - d_k ln x_1$，即可得到如下式子：

$$F_{d_k}(x) = f(x) + B_{d_x}(x) = x_1 + 2x_2 - \frac{ln(x_2 - x_1^2)}{5k} - \frac{ln x_1}{5k}$$

接下来我们求 $\min F_{d_k}(x)$，即求解下述式子：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{d_k}(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_{d_k}(x)}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{2x_1}{5k(x_2 - x_1^2)} - \dfrac{1}{5kx_1} = 0 \\ 2 - \dfrac{1}{5k(x_2 - x_1^2)} = 0 \end{cases}$$

求解上述式子即可得到下述结果：

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \dfrac{16}{5k}}}{8}, \; x_1' = \frac{-1 - \sqrt{1 + \dfrac{16}{5k}}}{8}$$

当 $k \to \infty$ 时，$x_1 \to 0$，$x_1' \to -\dfrac{1}{4}$，而 $x_1 \geq 0$，因此 $x_1 = 0, x_2 = 0$，即最优解为 $x^* = (0, 0)^T$。