第4章 非线性规划

一维搜索方法

一维搜索方法

目标函数为单变量的非线性规划问题称为一维搜索问题（又称为线性搜索问题）。

$$\min_{\substack{t\geq 0\\(0\leq t\leq t_{max})}} \varphi(t)$$ ，其中 $t\in R$。

解决一维搜索 MP 问题的方法统称为一维搜索方法。主要有：

- 精确一维搜索方法：（1）0.618 法，（2）Newton 法。
- 非精确一维搜索方法：（1）Goldstein 法，（2）Armijo 法。

0.618法

0.618法的基本思想

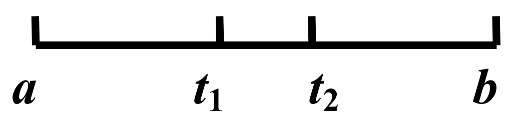
- $\varphi(t)$是一个函数。如果存在一个 $t^* \in [a, b]$，使得$\varphi(t)$在$[a, t^*]$上严格递减，在$[t^*, b]$上严格递增，则称函数$\varphi(t)$在$[a, b$上是单谷的，区间$[a, b]$称为$\varphi(t)$的单谷区间。
- 以单谷区间$[a, b]$为初始搜索空间。首先按照某种方法确定$[a, b]$内两个探索点 t_1, t_2。
- 观测：若$\varphi(t_1) \le \varphi(t_2)$，则 $t^* \in [a, t_2]$。
  若$\varphi(t_1) \ge \varphi(t_2)$，则 $t^* \in [t_1, b]$。
- 然后以$[a, t_2]$（或$[t_1, b]$）为新的搜索区间，确定新的探索点，继续进行搜索。
- 如何使搜索区间宽度逐次递减?

使搜索区间宽度逐次递减

- 在搜索过程中，既有可能以$[a, t_2]$为新的搜索区间，也有可能以$[t_1, b]$为新的搜索区间。因此令二者宽度相等，即$t_2 - a = b - t_1$。
- 希望搜索区间宽度能按比例递减。于是，令

$$\omega = \frac{t_2 - a}{b-a} = \frac{b - t_1}{b-a}, \qquad \textbf{(1)}$$

因此，$t_1 = a + (1-\omega)(b-a)$，$t_2 = a + \omega(b-a)$。 **(2)**



- 假设以$[a, t_2]$为新的搜索区间（$[t_1, b]$的情形与此对称）。

使搜索区间宽度逐次递减

- 设$[a, t_2]$中的新的探索点为t_1'和t_2'。
- 由于搜索区间宽度要按相同比例递减，因此

$$\frac{t_2'-a}{t_2-a}=\frac{t_2-t_1'}{t_2-a}=\omega 。\qquad \textbf{(3)}$$

- 并且，希望在新一轮的搜索中，上次的探索点能够被重复利用（以减少计算）。
- **Case 1**: 不妨设重复利用 t_1 为新的探索点t_1'，而t_2'重新选择（$t_1'<t_2'$）。
- 因此，$t_2-t_1'=t_2-t_1=\omega(t_2-a)=\omega^2(b-a)$。（由(1)）
- 由(2)，$t_2-t_1=(2\omega-1)(b-a)$。

使搜索区间宽度逐次递减

- 于是，$\omega^2 = 2\omega - 1$。但这将得到 $\omega = 1$，搜索区间不能递减。这表明将 t_1 用作 t_1' 不合适。
- Case 2: 将 t_1 用作 t_2' 。
- (3), (1) $\Rightarrow$ $t_1 - a = \omega(t_2 - a) = \omega^2(b-a)$。
- (2) $\Rightarrow$ $t_1 - a = (1-\omega)(b-a)$。
- 于是，$\omega^2 + \omega - 1 = 0$。解二次方程，得 $\omega = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$（另一个根舍弃）。
- 这就是 0.618 法的由来。

0.618法

（$\varepsilon > 0$ 为输入参数，表示最后区间精度。）

1 确定单谷区间$[a, b]$为初始搜索区间。

2 探索点 t_1, t_2赋初值：$t_1 \leftarrow a + 0.382(b - a)$，$\varphi_1 \leftarrow \varphi(t_1)$；

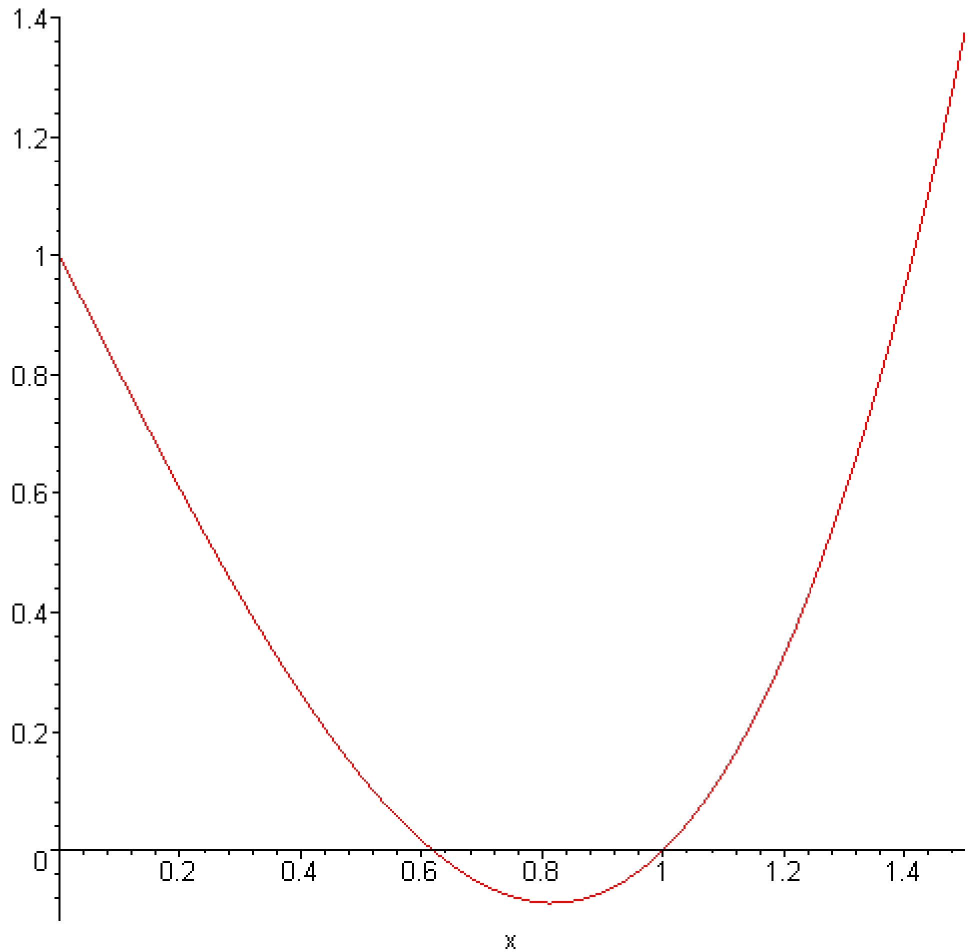
$t_2 \leftarrow a + 0.618(b - a)$，$\varphi_2 \leftarrow \varphi(t_2)$。

0.618法

```
while b – a > ε do
    if φ1 < φ2 then
        b ← t2, t2 ← t1, φ2 ← φ1。
        t1 ← a + 0.382(b – a)，φ1 ← φ(t1)。
    else
        a ← t1, t1 ← t2, φ1 ← φ2。
        t2 ← a + 0.618(b – a)，φ2 ← φ(t2)。
    endif
endwhile
return t1, φ1 作为最后求到的最小值估计。
```

例4.3.1

用 0.618 法解 $\min\limits_{t\geq 0}\ \varphi(t)=t^3-2t+1$**，搜索区间宽度到ε = 0.5。**



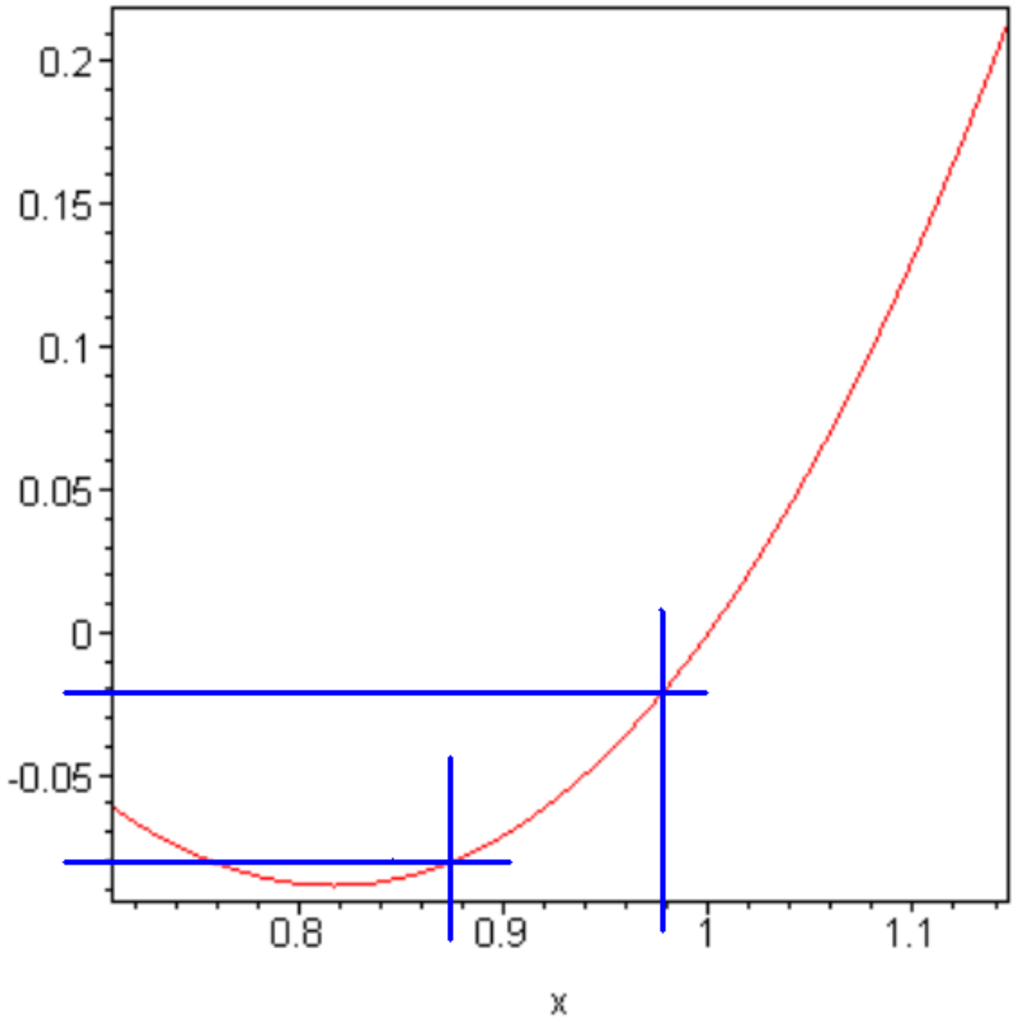
例4.3.1

- 解：根据经验，选择初始搜索区间为[0, 3]（单谷区间）。
- 计算过程：

	a	t_1	t_2	b	φ_1	φ_2
0	0	1.146	1.854	3	0.2131	3.6648
1	0	0.708	1.146	1.854	–0.0611	0.2131
2	0	0.438	0.708	1.146	0.2082	–0.0611
3	0.438	0.708	0.876	1.146	–0.0611	–0.0798
4	0.708	0.876	0.979	1.146	–0.0798	–0.0197

最后输出 $t_1 = 0.876$。

最后一次迭代



0.618法

- 优点：迭代规则简单，迭代计算快速
- 缺点：只适用于单谷区间，应用范围有限

Newton法

Newton法的基本思想

- 考虑如下的一维搜索问题：

$\min \ \varphi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 二次可微，且 $\varphi''(t) \neq 0$。

- 首先根据经验估计一个探索点 t_k。
- φ(t)在点 t_k 处的二阶 Taylor 展开式为：

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \varphi'(t_k)(t - t_k) + \frac{\varphi''(t_k)}{2}(t - t_k)^2 + o\left((t - t_k)^2\right)。$$

- 记 $g(t) = \varphi(t_k) + \varphi'(t_k)(t - t_k) + \frac{\varphi''(t_k)}{2}(t - t_k)^2$，使用 $g(t)$近似代替 φ(t)。
- 因此，下一个探索点 t_{k+1} 选择使得 $g'(t) = 0$ 的点 t。

Newton法的基本思想

- 由 $g'(t)=\varphi'(t_k)+\varphi''(t_k)(t-t_k)=0$，求得 $t=t_k-\dfrac{\varphi'(t_k)}{\varphi''(t_k)}$，这就是新的探索点 t_{k+1}。
- 重复上述过程，直到 $|g'(t_k)|=|\varphi'(t_k)|\le\varepsilon$，算法停止。
  （$|g'(t_k)|=|\varphi'(t_k)|\le\varepsilon$ 表明已经非常接近于 $g'(t)=0$ 的点 t。）

Newton法

（$\varepsilon > 0$ 为搜索精度。）

$k \leftarrow 1$，选择初始探索点 t_1。

while $|\varphi'(t_k)| \geq \varepsilon$ **do**

  if $\varphi''(t_k) = 0$ **then** 解题失败，停止。

  $t_{k+1} \leftarrow t_k - \dfrac{\varphi'(t_k)}{\varphi''(t_k)}$，$k \leftarrow k + 1$。

  if $|t_{k+1} - t_k| < \varepsilon$ **then** 退出循环。

endwhile

return t_{k+1}。

例4.3.2

用 **Newton** 法求 $\min \ \varphi(t)=\int_0^t \arctan x \, \mathrm{d}x$ 的最优解。

● **解：** $\varphi'(t)=\arctan t$ ，$\dfrac{1}{\varphi''(t)}=1+t^2$ ，$t_{k+1}=t_k-\varphi'(t_k)\dfrac{1}{\varphi''(t_k)}$ 。

● **选择 $t_1=1$，开始计算，搜索精度取 $\varepsilon=0.01$。**

k	t_k	$\varphi'(t_k)$	$1/\varphi''(t_k)$
1	**1**	**0.7854**	**2**
2	**–0.5708**	**–0.5187**	**1.3258**
3	**0.1169**	**0.1164**	**1.0137**
4	**–0.0011**	**–0.0011**	

用一阶导数判断

最后输出 $t_k=-0.0011$。

接近最优解 t*=0。

例4.3.2

用 **Newton** 法求 $\min \ \varphi(t)=\int_0^t \arctan x \, \mathrm{d}x$ 的最优解。

- **解：** $\varphi'(t)=\arctan t$ ， $\dfrac{1}{\varphi''(t)}=1+t^2$ ， $t_{k+1}=t_k-\varphi'(t_k)\dfrac{1}{\varphi''(t_k)}$ 。
- **选择 $t_1=2$，开始计算，搜索精度取 $\varepsilon=0.01$。**

k	t_k	$\varphi'(t_k)$	$1/\varphi''(t_k)$
1	2	1.1071	5
2	-3.5357	−1.2952	13.50
3	13.95		

无法趋近最优解。

例4.3.1

用 **Newton** 法求 $\min\limits_{t\ge 0}\ \varphi(t)=t^3-2t+1$ 的最优解。

- **解：** $\varphi'(t)=3t^2-2$， $\varphi''(t)=6t$， $t_{k+1}=t_k-\dfrac{\varphi'(t_k)}{\varphi''(t_k)}$。
- **选择 $t_1=0.5$，开始计算，搜索精度取 $\varepsilon=0.01$。**

k	t_k	$\varphi'(t_k)$	$1/\varphi''(t_k)$
1	**0.5**	**–1.25**	**3**
2	**0.9167**	**0.5210**	**5.5002**
3	**0.8219**	**0.0266**	**4.9314**
4	**0.8165**	**0.0000(…)**	

最后输出 $t_k=0.8165$。

Newton法

- 优点：求局部最优解收敛快速

- 缺点：只有局部收敛性；依赖于起始搜索，只适用于起始搜索充分接近于最优解的情况；要求二阶可导。

谢谢大家