第2章 线性规划

2.6 灵敏度分析

改变价值向量c

设已得到标准型 LP 的最优单纯形表：

	x_B	x_N	RHS
z	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

当价值向量 c 改变为 c'时，在单纯形表里影响的只是检验数和目标函数值，其它没有改变。

因而只需要计算新的检验数向量 $\xi_N' = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N'^{\mathrm{T}}$ **和目标函数值**$c'^{\mathrm{T}} \widetilde{x} = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} b$ **。**

如果检验数向量 $\leq$ 0，则原最优解 x 依然是最优解。否则 x 是基可行解，以此为基础继续进行迭代就可以求出新问题的最优解。

仅改变一个价值系数c_k到c'_k

分两种情况讨论：

- x_k是基变量；
- x_k是非基变量。

x_k是非基变量

非基变量 x_k 的价值系数由 c_k 变为 c'_k 。因为 c_k 是 c_N 中的一个分量，此时只有 ζ_k 发生变化。新的检验数 $\zeta'_k = c_B^{\mathrm{T}}\left(B^{-1}N\right)_{(\cdot k)} - c'_k = c_B^{\mathrm{T}}\left(B^{-1}N\right)_{(\cdot k)} - c_k + c_k - c'_k = \zeta_k + c_k - c'_k$ 。

$$\xi'_N = c'^{\mathrm{T}}_B B^{-1} N - c'^{\mathrm{T}}_N$$

x_k是基变量

基变量 x_k 的价值系数由 c_k 变为 c'_k 。假设基变量 x_k 对应表中第 l 行（即，LP 中第 l 个约束）。由于 c_k 是 c_B^{T} 中的分量，此时 ζ_N^{T} 和目标函数值 z_0 发生变化。新的 $\zeta_N'^{\mathrm{T}}$ 为：

$$\begin{aligned}\zeta_N'^{\mathrm{T}} &= c_B'^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}\\ &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N+\left(c_B'^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}\right)B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}\\ &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}+\left(0,\cdots,0,c'_k-c_k,0,\cdots,0\right)B^{-1}N\\ &= \zeta_N^{\mathrm{T}}+\left(c'_k-c_k\right)\left(B^{-1}N\right)_{(l\cdot)}\end{aligned}$$

。

新的目标函数值为：$z'_0=c_B'^{\mathrm{T}}B^{-1}b=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b+\left(c'_k-c_k\right)\left(B^{-1}b\right)_l$ 。

x_k是基变量

以上两个运算可通过如下操作完成：将单纯形表的第 l 行乘以 $c_k' - c_k$ ，加到第 0 行上，（由于 x_k在基中，这个操作会使得$\zeta_k' = c_k' - c_k$ ，而ζ_k' 应为 0。故应再令ζ_k' 为 0）。

例2.6.1（1）

$$\begin{array}{llcll} \min & 5x_1 + 21x_3 & & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 & = & 2 & \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 & = & 1 & \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i \end{array}$$

（例 2.4.1 的 LP）

（1）变量 x_2 的价值系数由 0 变为 1。

解：该 LP 的最优单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	−1/2	0	−11/4	−9/4	31/4
x_3	0	−1/2	1	−1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	−3/2	1/2

例2.6.1（1）

由于 $\boldsymbol{x_2}$ 是非基变量，故只需要计算

$\zeta_2' = \zeta_2 + c_2 - c_2' = -\dfrac{1}{2} + 0 - 1 = -\dfrac{3}{2}$。新的单纯形表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	–3/2	0	–11/4	–9/4	31/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	1/2

由于检验数向量 $\le \mathbf{0}$，当前解 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (1/2, 0, 1/4, 0, 0)$ 仍是新问题的最优解。

例2.6.1（2）

（2）变量 x_3 的系数由 21 变为 5。

解：由于 x_3 为基变量，将最优单纯形表 x3 对应的第 1 行乘以 5 – 21，加到第 0 行上，再令 ζ_3' 为 0。得到新的单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	15/2	0	5/4	–25/4	15/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	1/2

由于检验数 15/2 > 0，需要继续进行迭代以求得新问题的最优解。

改变右端向量b

设标准型 LP 的最优单纯形表为：

	x_B	x_N	RHS
z	0	$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}$	$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

设右端向量由 b 变为 b'。由最优单纯形表知，只需要修改表格的最右端一列：$\overline{b}'=B^{-1}b'$，$\boxed{z_0'=c_B^{\mathrm{T}}\overline{b}'\text{。}}$ X

若只改变一个右端项 b_s 为 b_s'，则 $\overline{b}'$ 的计算可化简为：

$$\overline{b}'=B^{-1}b'=B^{-1}b+B^{-1}(b'-b)=\overline{b}+(b_s'-b_s)B_{(\cdot s)}^{-1}\text{。}$$

改变右端向量b

如果$\bar{b}' \geq 0$，则原最优解还是可行解；并且，检验数向量没有发生变化，仍然 ≤ 0，因此原最优解仍是最优解。

否则当前解是新问题的一个基本解（但不可行），且单纯形表上蕴含着对偶问题的一个可行解（因为检验数向量≤0）。因此可利用对偶单纯形算法继续求解新问题。

例2.6.2

$$
\begin{array}{llcll}
\min & 5x_1+21x_3 & & & \\
\text{s.t.} & x_1-x_2+6x_3-x_4 & = & 2 & \\
 & x_1+x_2+2x_3-x_5 & = & 1 & \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i
\end{array}
$$

（例 **2.4.1** 的 **LP**）

右端向量由 $b=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 变成 $b'=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$。

解：该 LP 的最优单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	–1/2	0	–11/4	–9/4	31/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	1/2

例2.6.2

由于 x_3 和 x_1 为基变量，所以基阵为 $B=\begin{pmatrix}A_3 & A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$。

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/4\\ -1/2 & 3/2\end{pmatrix}$。所以

$$\bar{b}'=B^{-1}b'=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix},$$

$$z_0'=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b'=\begin{pmatrix}21 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}=-\frac{13}{4}。$$

例2.6.2

得到新问题的单纯形表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	–1/2	0	–11/4	–9/4	–13/4
x_3	0	–1/2	1	–1/4	1/4	–3/4
x_1	1	2	0	1/2	–3/2	5/2

由于右端向量不 $\geq$ **0**，因此下面可用对偶单纯形算法继续求得新问题的最优解。

谢谢大家