



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

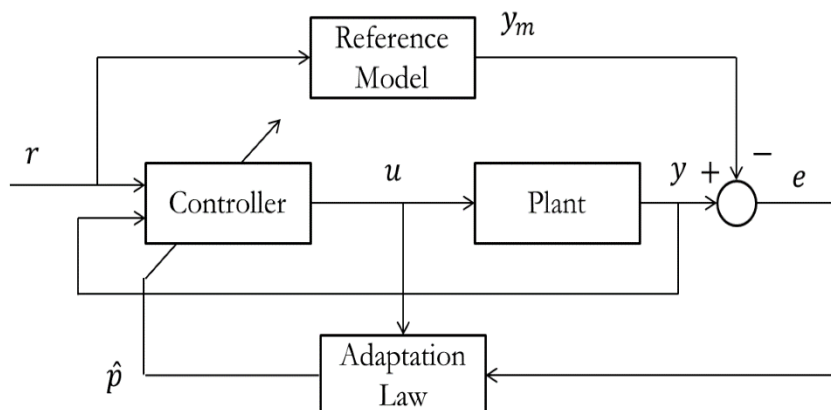
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Προσαρμοστικός, Σθεναρός και Ιεραρχικός Έλεγχος

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208



ΑΘΗΝΑ,

2023

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων	3
Άσκηση – 1 ^η	4
Άσκηση – 2 ^η	6
Άσκηση – 3 ^η	8
Άσκηση – 4 ^η	16
Άσκηση – 5 ^η	20
Άσκηση – 6 ^η	25
Βιβλιογραφία	40

Κατάλογος Σχημάτων

ΣΧΗΜΑ 1. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	11
ΣΧΗΜΑ 2. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.....	12
ΣΧΗΜΑ 3. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.....	12
ΣΧΗΜΑ 4. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΙΝΑΚΑ Α.	13
ΣΧΗΜΑ 5. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ Β.....	13
ΣΧΗΜΑ 6. ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.	14
ΣΧΗΜΑ 7. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.....	14
ΣΧΗΜΑ 8. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.	14
ΣΧΗΜΑ 9. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΙΝΑΚΑ Α.	15
ΣΧΗΜΑ 10. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ Β.....	15
ΣΧΗΜΑ 11. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ ΜΑΖΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ.	16
ΣΧΗΜΑ 12. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΚΛΙΣΗΣ.	19
ΣΧΗΜΑ 13. ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.....	19
ΣΧΗΜΑ 14. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ FIXED Σ - MODIFICATION ΓΙΑ ΧΑΜΗΛΗ Ω.	24
ΣΧΗΜΑ 15. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ FIXED Σ - MODIFICATION ΓΙΑ ΥΨΗΛΗ Ω.	24
ΣΧΗΜΑ 16. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	28
ΣΧΗΜΑ 17. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	29
ΣΧΗΜΑ 18. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	29
ΣΧΗΜΑ 19. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	30
ΣΧΗΜΑ 20. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	30
ΣΧΗΜΑ 21. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 0$).	31
ΣΧΗΜΑ 22. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	31
ΣΧΗΜΑ 23. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	32
ΣΧΗΜΑ 24. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	32
ΣΧΗΜΑ 25. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	33
ΣΧΗΜΑ 26. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($m = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	33
ΣΧΗΜΑ 27. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($m = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 1$).	34
ΣΧΗΜΑ 28. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	34
ΣΧΗΜΑ 29. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	35
ΣΧΗΜΑ 30. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($m = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	35
ΣΧΗΜΑ 31. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	36
ΣΧΗΜΑ 32. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	36
ΣΧΗΜΑ 33. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 10$).	36
ΣΧΗΜΑ 34. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	37
ΣΧΗΜΑ 35. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	37
ΣΧΗΜΑ 36. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	38
ΣΧΗΜΑ 37. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.1$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	38
ΣΧΗΜΑ 38. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	39
ΣΧΗΜΑ 39. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ Σ MODIFICATION ($\mu = 0.01$ ΚΑΙ $\omega = 100$).	39

Άσκηση – 1^η

(α) Έχουμε ένα σύστημα το οποίο θέλουμε να εκτιμήσουμε την παράμετρό του, σύμφωνα με τον προσαρμοστικό νόμο

$$\dot{\theta} = \gamma \varepsilon \varphi$$

με αρχική συνθήκη $\theta(0) = \theta_0$. Τώρα, για να έχουμε γρήγορη εκθετική σύγκλιση της παρακάτω σχέσης, θα πρέπει να περιοριστεί το κλάσμα $\frac{\varphi}{m_s}$ έτσι ώστε να είναι persistently exciting (P.E.). Δηλαδή να για κάποιο $a_0 > 0$ να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 d\tau \geq a_0$$

Έχουμε ότι ισχύει $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^* \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} = \gamma \varepsilon \varphi$. Επομένως,

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{\theta^* \varphi - \hat{\theta} \varphi}{m_s^2} = \frac{(\theta^* - \hat{\theta}) \varphi}{m_s^2} \Leftrightarrow \varepsilon = -\frac{\tilde{\theta} \varphi}{m_s^2}$$

Έτσι, αντικαθιστούμε στο σφάλμα εκτίμησης και θα προκύψει η εξής σχέση

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 \tilde{\theta}$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$, θα προκύψει ότι:

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-\gamma \int_0^t \frac{\varphi^2}{m_s^2} d\tau} \tilde{\theta}(0)$$

Για να ισχύει το PE και να έχουμε εκθετική σύγκλιση, τότε θα πρέπει να ισχύει το εξής:

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq M e^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0$$

και κατ' επέκταση να ισχύει μία σχέση της μορφής

$$\int_0^t \frac{\varphi^2}{m_s^2} d\tau \geq kt + c, k > 0, c \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$$

Αυτό που θα κάνουμε είναι να τμηματοποιήσουμε το ολοκλήρωμα σε n ίσα χρονικά διαστήματα πλήθους T . Επομένως, καθώς ολοκληρώνουμε σε $n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$, τότε θα ισχύει ότι:

$$\int_0^t \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 d\tau = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^{iT} \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 d\tau + \int_{nT}^t \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 d\tau \geq nTa_0 + \int_{nT}^t \left(\frac{\varphi}{m_s} \right)^2 d\tau$$

Με βάση την συνάρτηση floor γνωρίζουμε ότι το $t \geq nT$. Έτσι θα προκύψει πως το ολοκλήρωμα που προκύπτει $\int_{nT}^t \left(\frac{\varphi}{m_s}\right)^2 d\tau \geq 0$. Έτσι, θα προκύψει:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\varphi}{m_s}\right)^2 d\tau &\geq \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T a_0 \geq \left(\frac{t}{T} - 1\right) T a_0 = a_0 t - a_0 T \\ &\Rightarrow \int_0^t \left(\frac{\varphi}{m_s}\right)^2 d\tau \geq kt + c \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανίσωση προέκυψε από την ανίσωση $\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \leq \frac{t}{T} \leq \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor + 1$. Τέλος, η συνθήκη που καταλήξαμε αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να προκύψει εκθετική σύγκλιση. Συνεπώς, καθώς έχει αποδειχθεί και ότι το $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ γιατί το $\frac{\varphi}{m_s}$ είναι φραγμένο σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, τότε θα έχουμε γρήγορη εκθετική σύγκλιση.

(β) Για να έχουμε PE θα πρέπει το φ να είναι φραγμένο. Ωστόσο, το φ καθορίζεται από το σήμα εισόδου u . Έτσι, με το γνωστό θεώρημα θα αποδείξουμε ότι αν είναι το σήμα φραγμένο, τότε θα είναι PE το φ .

(i) Έχουμε ότι το $u = c_0 \neq 0$, όπου είναι μια σταθερά. Έτσι, θα ισχύει ότι

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau = \int_t^{t+T} c_0^2 d\tau = \frac{c_0^2}{T} (t + T - t) = c_0^2 > 0$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως βγαίνει ένα θετικό πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Συνεπώς το φ είναι PE και επίσης ισχύει $\frac{\varphi^2}{m_s^2} \in \mathcal{L}_2$.

(ii) Έχουμε ότι το $u = \sin t$. Καθώς το σήμα είναι ημιτονοειδές με μία διακριτή συχνότητα ω και είναι ικανά πλούσιο τάξης $n = 2$, τότε θα έχουμε ότι είναι το σήμα PE.

(iii) Έχουμε ότι το $u = \sin t + \cos 2t$. Επειδή έχουμε ένα ημιτονοειδές σήμα με δύο συχνότητες διαφορετικές μεταξύ τους και το σήμα είναι ικανά πλούσιο τάξης $n = 4$, τότε θα έχουμε ότι το φ θα είναι PE.

(iv) Έχουμε ότι το σήμα εισόδου είναι $u = \frac{1}{1+t}$. Άρα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{(1+\tau)^2} d\tau = -\frac{1}{T} \left(\frac{1}{1+t+T} - \frac{1}{1+t} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau = \frac{1}{(1+t)(1+t+T)} \end{aligned}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει πως το σήμα δεν είναι PE, καθώς όσο το t αυξάνεται το ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ένα θετικό και σταθερό κάτω φράγμα. Οπότε, δεν θα είναι ούτε το φ PE.

(v) Έχουμε ότι το σήμα εισόδου είναι $u = e^{-t}$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{-2\tau} d\tau = \frac{e^{-2t}}{2T} (1 - e^{-2T})$$

Από το ολοκλήρωμα διαπιστώνουμε πως όσο θα μεγαλώσει το t αυτό θα μηδενίζεται. Οπότε δεν είναι PE.

(vi) Έχουμε ότι το σήμα εισόδου είναι $u = \frac{1}{(1+t)^{1/2}}$. Άρα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{1+\tau} d\tau = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{1+t+T}{1+t} \right)$$

Από το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος διαπιστώνουμε πως δεν θα είναι PE, καθώς όσο αυξάνεται ο χρόνος τόσο το ολοκλήρωμα θα συγκλίνει στο μηδέν. Οπότε, δεν θα προκύψει ένα θετικό κάτω φράγμα.

(γ) Από τα σήματα του ερωτήματος (β) διαπιστώσαμε πως τα τρία δεν είναι PE. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε πως από αυτά τα τρία υπάρχει κάποιο σήμα το οποίο βοηθά στην σύγκλιση του διανύσματος παραμέτρων $\theta(t)$ στο θ^* . Το σήμα αυτό είναι το $u = \frac{1}{(1+t)^{1/2}}$.

Αυτό το διαπιστώνουμε μέσω του ολοκληρώματος $\int_0^\infty u^2(t) dt$. Έχουμε ότι προκύπτει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u^2(\tau) d\tau = \infty$$

Με βάσει το παραπάνω αποτέλεσμα και μέσω προσομοίωσης, καταλαβαίνουμε πως θα προκύψει ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος της παραμέτρου στο 0. Το ίδιο δεν μπορούμε να πούμε ότι ισχύει, καθώς θα συγκλίνουν σε σταθερές.

Άσκηση - 2^η

Έχουμε το στατικό παραμετρικό μοντέλο της μορφής $z = \theta^T \varphi$ και την ολοκληρωτική συνάρτηση κόστους

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t) \varphi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} d\tau, \theta(0) = \theta_0$$

όπου το $m_s^2 = 1 + \varphi^T \varphi$.

(α) Καθώς κάνουμε χρήση του gradient αλγόριθμου για την εύρεση του προσαρμοστικού νόμου, τότε

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta)$$

Πριν ξεκινήσουμε του υπολογισμούς, θα πρέπει να θεωρήσουμε τον πίνακα Γ να είναι τετραγωνικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Οπότε παραγωγίσουμε την συνάρτηση κόστους ως προς την παράμετρο θ . Έτσι, θα προκύψει ότι:

$$\nabla J(\theta) = - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\varphi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau$$

Αντικαθιστούμε το διάνυσμα στον νόμο προσαρμογής και προκύπτει:

$$\dot{\theta} = \Gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\varphi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \theta(0) = \theta_0$$

(β) Παίρνουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) και το αναλύουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\varphi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= -\Gamma \left(- \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\theta^T(t)\varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right) \\ &= -\Gamma \left(- \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\varphi^T(\tau)\theta(t)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right) \\ &= -\Gamma \left(- \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \theta(t) \right) \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= -\Gamma \left(\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \theta(t) - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)}{m_s^2(\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

Φτάσαμε σε μία μορφή όπου μπορούμε να ορίσουμε τα ολοκληρώματα ως χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις. Επομένως, θα έχουμε τις εξής ποσότητες:

$$R(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau$$

$$Q(t) = - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)\varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau$$

Άρα, αυτό που θα προκύψει θα είναι ο εξής προσαρμοστικός νόμος:

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma(R(t)\theta(t) + Q(t)), \theta(0) = \theta_0$$

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε και τις διαφορικές εξισώσεις για τα R, Q . Παρατηρούμε πως για $t = 0$ τα παραπάνω ολοκληρώματα μηδενίζονται. Επομένως, αποδείξαμε τις αρχικές συνθήκες των διαφορικών εξισώσεων. Παραγωγίζουμε πρώτα την σχέση του $R(t)$. Οπότε, θα προκύψει ότι:

$$\begin{aligned} e^{\beta t} R(t) &= \int_0^t e^{\beta \tau} \frac{\varphi(\tau) \varphi^T(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \\ \Rightarrow \beta e^{\beta t} R(t) + e^{\beta t} \dot{R}(t) &= e^{\beta t} \frac{\varphi(t) \varphi^T(t)}{m_s^2(t)} \\ \Rightarrow \dot{R}(t) &= -\beta R(t) + \frac{\varphi(t) \varphi^T(t)}{m_s^2(t)}, R(0) = 0 \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον νόμο προσαρμογής για το διάνυσμα $Q(t)$. Οπότε, έχουμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} e^{\beta t} Q(t) &= - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau) \varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \\ \Rightarrow \beta e^{\beta t} Q(t) + e^{\beta t} \dot{Q}(t) &= -e^{\beta t} \frac{z(\tau) \varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)} \\ \Rightarrow \dot{Q}(t) &= -\beta Q(t) - \frac{z(\tau) \varphi(\tau)}{m_s^2(\tau)}, Q(0) = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση – 3η

(α) Έχουμε το σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Rightarrow \dot{x} = A_p x + B_p u$$

Καθώς γνωρίζουμε από την εκφώνηση πως τα μεγέθη x, u είναι μετρήσιμα και ότι το $u \in \mathcal{L}_\infty$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε πως το $x \in \mathcal{L}_\infty$ και κατ' επέκταση και το $\dot{x} \in \mathcal{L}_\infty$. Οπότε, θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την μεθοδολογία *SSPM*. Τώρα θα ορίσουμε έναν τετραγωνικά συμμετρικό πίνακα A_m διάστασης ίδιας με τον A . Άρα έχουμε τον εξής πίνακα

$$A_m = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

όπου η τιμή $a > 0$. Έτσι, θα μπορέσουμε να εκφράσουμε το σύστημα στην παραμετρική του μορφή ως:

$$\dot{x} = A_m x + (A_p - A_m)x + B_p u$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_{11} + a & a_{12} \\ a_{21} & a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

Το επόμενο βήμα αποτελεί την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος'. Έστω ότι έχουμε την εξής παραμετρική μορφή:

$$\dot{x} = A_m \hat{x} + (\hat{A}_p - A_m)x + \hat{B}_p u = A_m(\hat{x} - x) + \hat{A}_p x + \hat{B}_p u$$

Τότε, θα ορίσουμε το εξής σφάλμα εκτίμησης:

$$\varepsilon = x - \hat{x}$$

Για να έχουμε κανονικοποίηση και φραγμένα σήματα, τότε θα πρέπει να ορίσουμε το n_ε^2 . Επειδή ξέρουμε ότι η κατάσταση και η είσοδος είναι φραγμένες, τότε μία ικανή σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι

$$n_\varepsilon^2 = 0$$

Καθώς ο πίνακας A_p είναι ευσταθής και το σήμα $u \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα, τώρα θα βγάλουμε μία σχέση για την εκτίμηση του σφάλματος. Οπότε, ισχύει ότι

$$\tilde{A}_p = \hat{A}_p - A_p$$

$$\tilde{B}_p = \hat{B}_p - B_p$$

Με τους παραπάνω ορισμούς θα κατασκευάσουμε την εξίσωση κατάστασης του σφάλματος.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A_m \varepsilon - \tilde{A}_p x - \tilde{B}_p u$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, θα ορίσουμε την εξής συνάρτηση σφάλματος

$$V(\varepsilon, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p) = \varepsilon^T P \varepsilon + tr \left(\frac{\tilde{A}_p^T P \tilde{A}_p}{\gamma_1} \right) + tr \left(\frac{\tilde{B}_p^T P \tilde{B}_p}{\gamma_2} \right)$$

όπου ο πίνακας $P = P^T > 0$. Επίσης, έχουμε ότι τα $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Για την συνάρτηση V προκύπτει ότι είναι θετική και ακτινικά μη φραγμένη. Επιπλέον, καθώς γνωρίζουμε πως ο πίνακας A_m είναι Hurwitz από τον ορισμό της, τότε $\forall Q = Q^T > 0$, ισχύει η εξίσωση Lyapunov

$$P A_m + A_m^T P = -Q$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τους προσαρμοστικούς νόμους για την παραπάνω σχέση. Οπότε, θα διαφορίσουμε την συνάρτηση ως εξής

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\varepsilon, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p) &= \varepsilon^T P \varepsilon + \varepsilon^T P \dot{\varepsilon} + \text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{A}}_p^T P \tilde{A}_p}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}_p^T P \dot{\tilde{A}}_p}{\gamma_1} \right) + \text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{B}}_p^T P \tilde{B}_p}{\gamma_1} + \frac{\tilde{B}_p^T P \dot{\tilde{B}}_p}{\gamma_1} \right) \\
&= (A_m \varepsilon - \tilde{A}_p x - \tilde{B}_p u)^T P \varepsilon + \varepsilon^T P (A_m \varepsilon - \tilde{A}_p x - \tilde{B}_p u) + \text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{A}}_p^T P \tilde{A}_p}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}_p^T P \dot{\tilde{A}}_p}{\gamma_1} \right) \\
&\quad + \text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{B}}_p^T P \tilde{B}_p}{\gamma_1} + \frac{\tilde{B}_p^T P \dot{\tilde{B}}_p}{\gamma_1} \right) \\
&= \varepsilon^T (A_m P + A_m^T P) \varepsilon - 2\varepsilon^T P \tilde{A}_p x - 2\varepsilon^T P \tilde{B}_p u + 2\text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{A}}_p^T P \tilde{A}_p}{\gamma_1} \right) + 2\text{tr} \left(\frac{\dot{\tilde{B}}_p^T P \tilde{B}_p}{\gamma_2} \right) \\
\dot{V}(\varepsilon, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p) &= -\varepsilon^T Q \varepsilon + 2\text{tr} \left(\frac{1}{\gamma_1} (\dot{\tilde{A}}_p - \gamma_1 \varepsilon x^T) P \tilde{A}_p \right) + 2\text{tr} \left(\frac{1}{\gamma_2} (\dot{\tilde{B}}_p - \gamma_2 \varepsilon u) P \tilde{B}_p \right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να έχουμε ευστάθεια στο σύστημα, θα πρέπει να ισχύουν οι εξής προσαρμοστικοί νόμοι:

$$\frac{1}{\gamma_1} (\dot{\tilde{A}}_p - \gamma_1 \varepsilon x^T) P \tilde{A}_p = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{A}}_p = \gamma_1 \varepsilon x^T$$

και

$$\frac{1}{\gamma_2} (\dot{\tilde{B}}_p - \gamma_2 \varepsilon u) P \tilde{B}_p = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{B}}_p = \gamma_2 \varepsilon u$$

Έτσι, θα προκύψει ότι

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p) = -\varepsilon^T Q \varepsilon \leq 0$$

Οπότε η παράγωγος θα είναι φθίνουσα και επίσης και κάτω φραγμένη από τις ελάχιστες ιδιοτιμές των πινάκων Q, P . Δηλαδή:

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p) \leq -|\varepsilon|^2 \lambda_{\min}(Q)$$

$$\Rightarrow V(0) - V_\infty \geq \lambda_{\min}(Q) \int_0^\infty |\varepsilon|^2 dt$$

Καθώς η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη, τότε η συνάρτηση V είναι φθίνουσα και θα συγκλίνει σε μια σταθερά V_∞ . Συνεπώς, προκύπτει ότι $V, \hat{A}_p, \hat{B}_p, \varepsilon \in \mathcal{L}_\infty$ και $\varepsilon \in \mathcal{L}_2$. Επίσης, από την διαφορική του σφάλματος προκύπτει ότι και το $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα

από το λήμμα Barbalat ισχύει ότι το σφάλμα μηδενίζεται. Οπότε αυτό που προκύπτει είναι ότι θα έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων στις επιθυμητές τιμές και μάλιστα εκθετική. Οπότε, οι προσαρμοστικοί νόμοι που θα προκύψουν θα είναι:

$$\dot{\hat{a}}_{11} = \gamma_1(x_1 - \hat{x}_1)x_1$$

$$\dot{\hat{a}}_{12} = \gamma_1(x_1 - \hat{x}_1)x_2$$

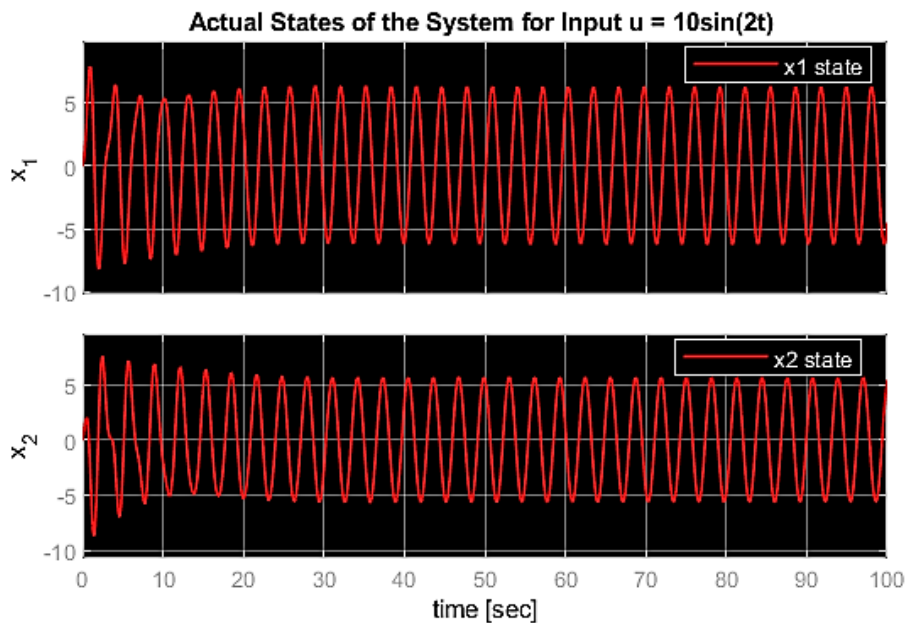
$$\dot{\hat{a}}_{21} = \gamma_1(x_2 - \hat{x}_2)x_1$$

$$\dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2(x_1 - \hat{x}_1)u$$

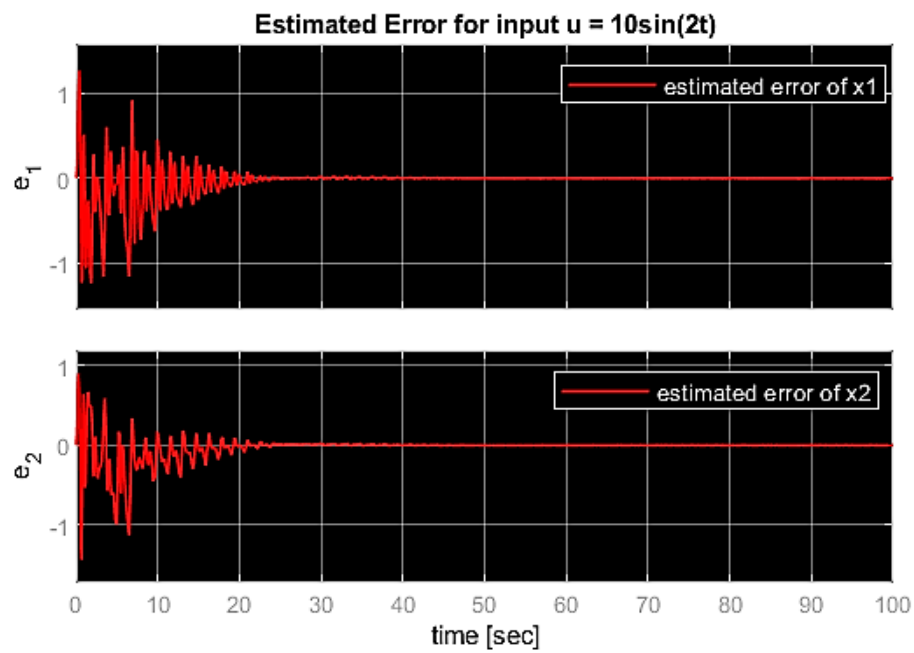
$$\dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2(x_2 - \hat{x}_2)u$$

Επίσης, η παραπάνω σχεδίαση έχει νόημα για τον δοσμένο πίνακα A_m και με επιλογή του $Q = -A_m$ θα προκύψει από την εξίσωση Lyapunov ότι το $P = \frac{1}{2}I_2$.

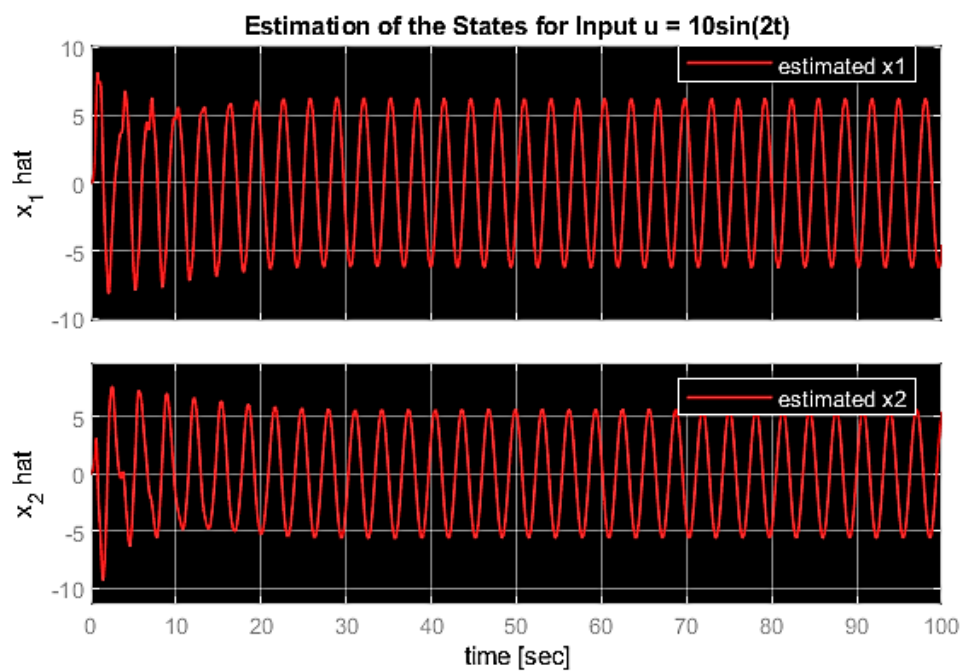
(β) Το σύστημα προσομοιώθηκε με τις τιμές $\alpha_{11} = -0.25, \alpha_{12} = 3, \alpha_{21} = -5, b_1 = 1, b_2 = 2.2$. Κατά την προσομοίωση επαληθεύτηκαν όλες οι παραπάνω ιδιότητες σχετικά με τα σήματα και τις παραμέτρους του συστήματος. Κατά την προσομοίωση εφαρμόστηκαν δύο διαφορετικά ημιτονοειδή σήματα. Για την πρώτη είσοδο $u = 10 \sin(2t)$ εξασφαλίζεται ότι το $\varepsilon \rightarrow 0$ παρόλο που οι παράμετροι δεν συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές. Αυτό οφείλεται στην ίδια την είσοδο, καθώς είναι PE . Πρέπει να διαθέτει πάνω από $n/2$ διακριτές συχνότητες. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στα παρακάτω διαγράμματα.



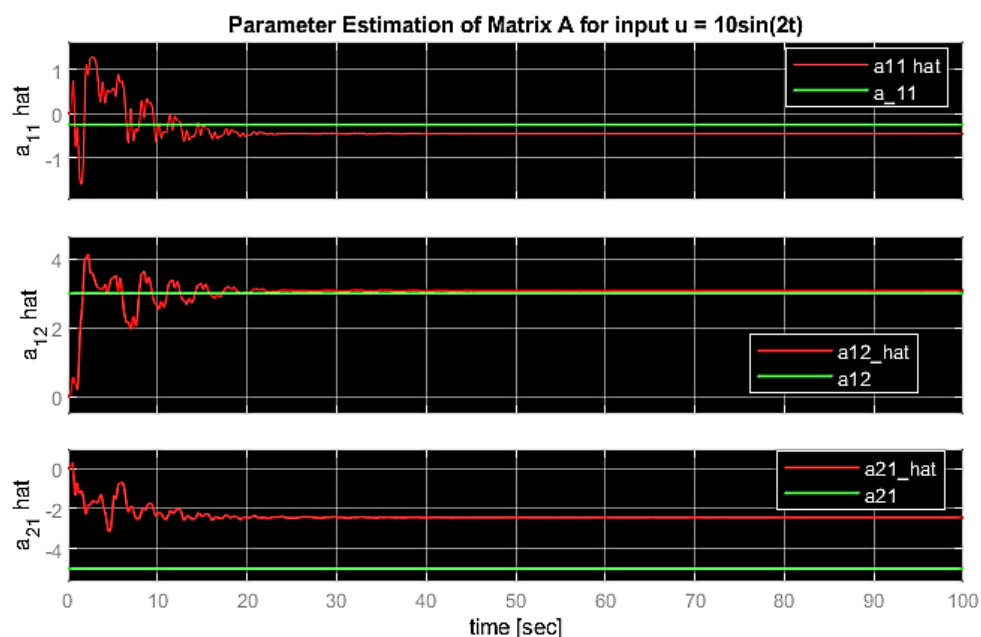
Σχήμα 1. Πραγματικές καταστάσεις συστήματος.



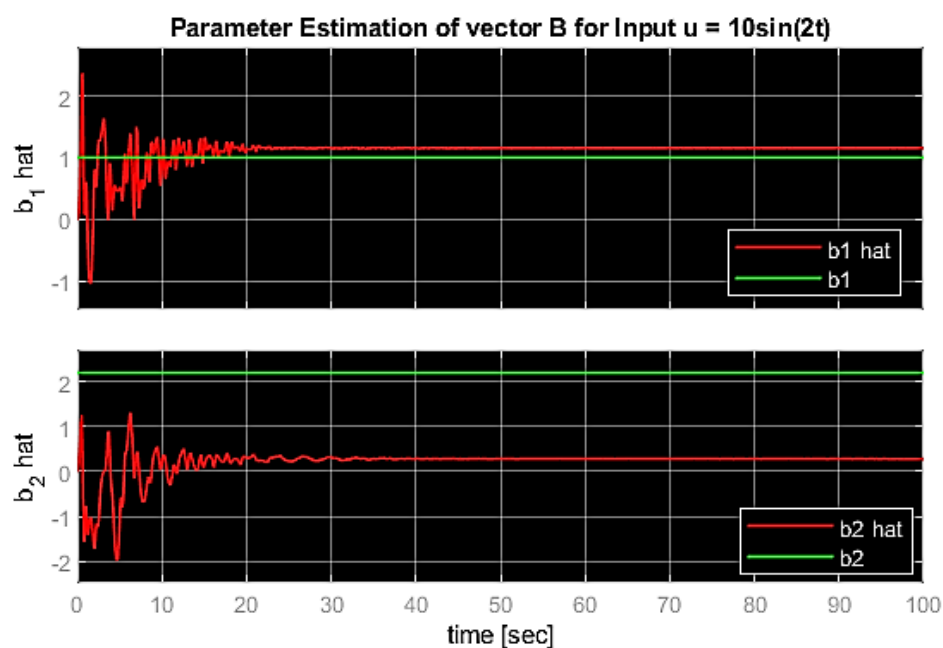
Σχήμα 2. Σφάλματα εκτιμήσεων καταστάσεων.



Σχήμα 3. Εκτιμήσεις κατάστασης.

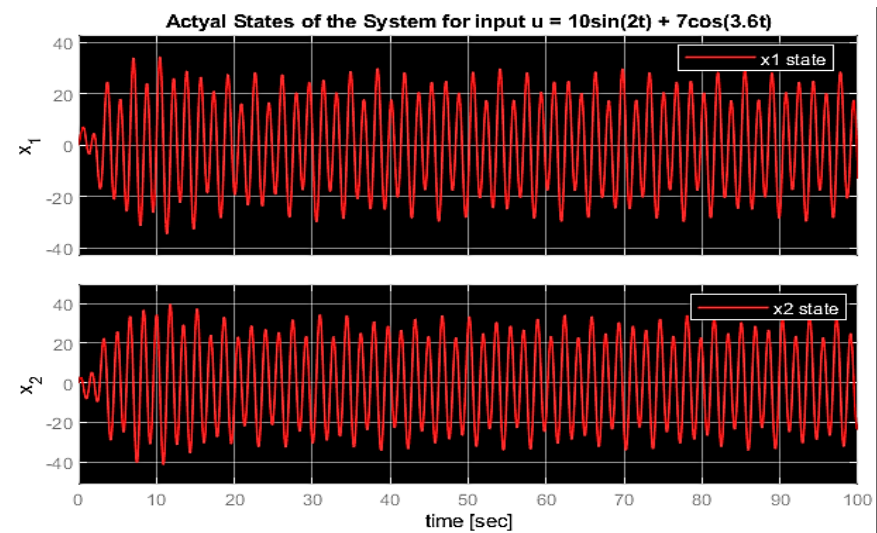


Σχήμα 4. Εκτιμήσεις παραμέτρων πίνακα A.

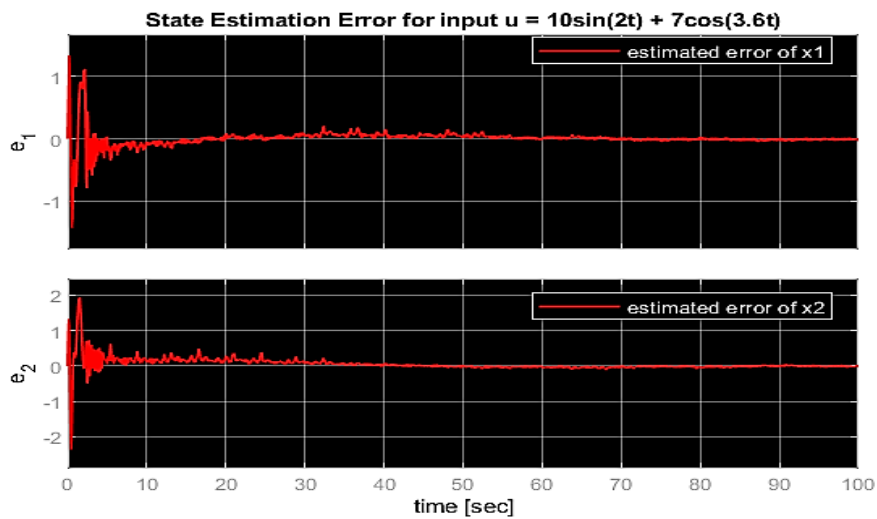


Σχήμα 5. Εκτιμήσεις παραμέτρων διανύσματος B.

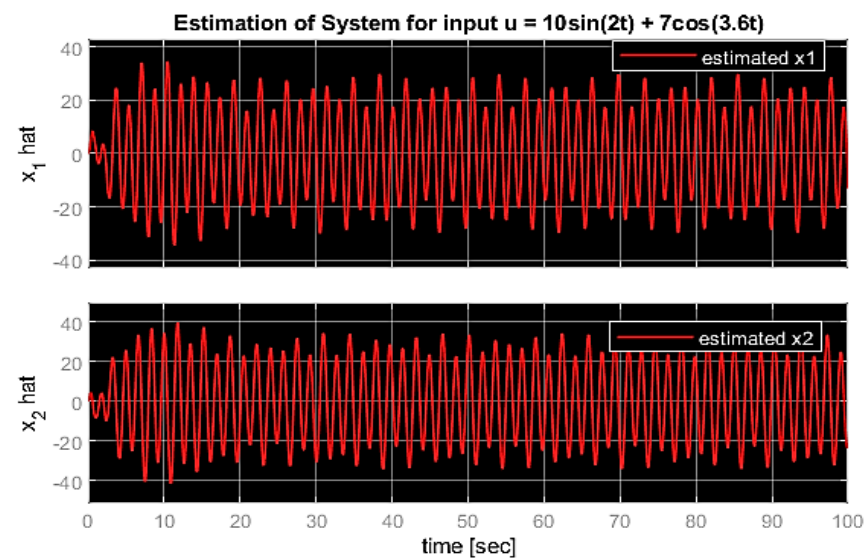
Το παρών σύστημα προσομοιώθηκε και με μια δεύτερη είσοδο. Η είσοδος είναι η $u(t) = 10\sin(2t) + 7\cos(3.6t)$. Παρατηρούμε πως και με την δεύτερη είσοδο το $\varepsilon \rightarrow 0$, ενώ ταυτόχρονα οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές. Η σύγκλιση των εκτιμήσεων είναι αναμενόμενη στις πραγματικές τιμές λόγω των πορισμάτων την θεωρητικής ανάλυσης. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δεύτερης εισόδου.



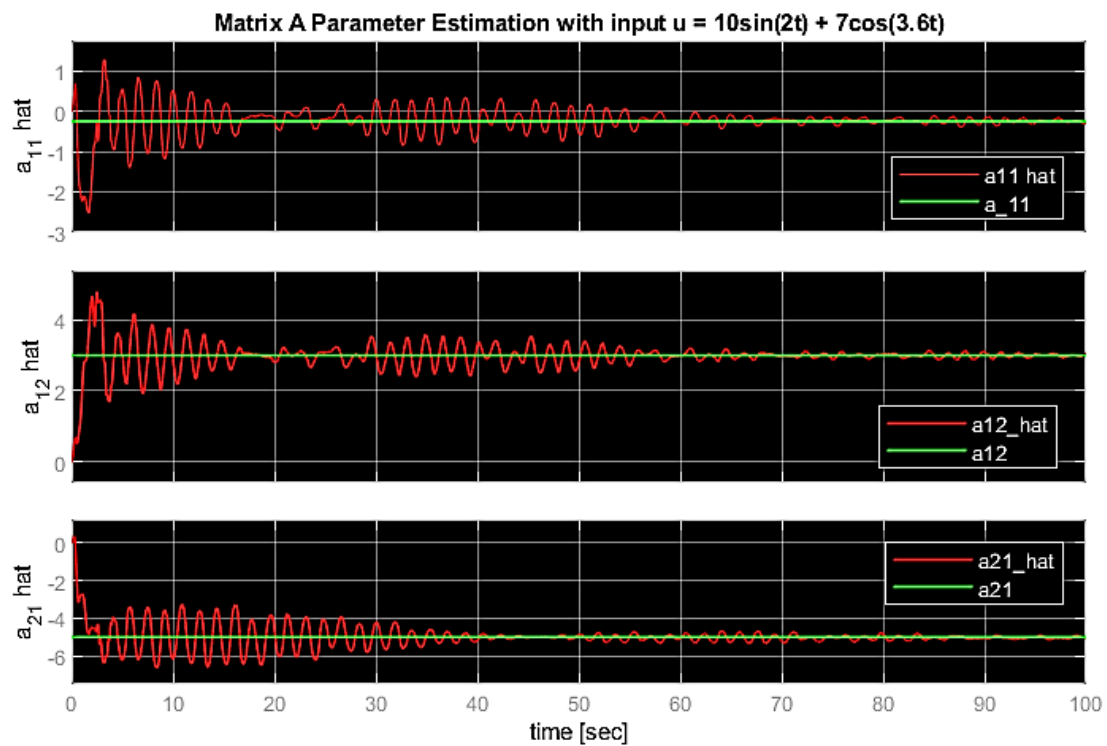
Σχήμα 6. Καταστάσεις συστήματος.



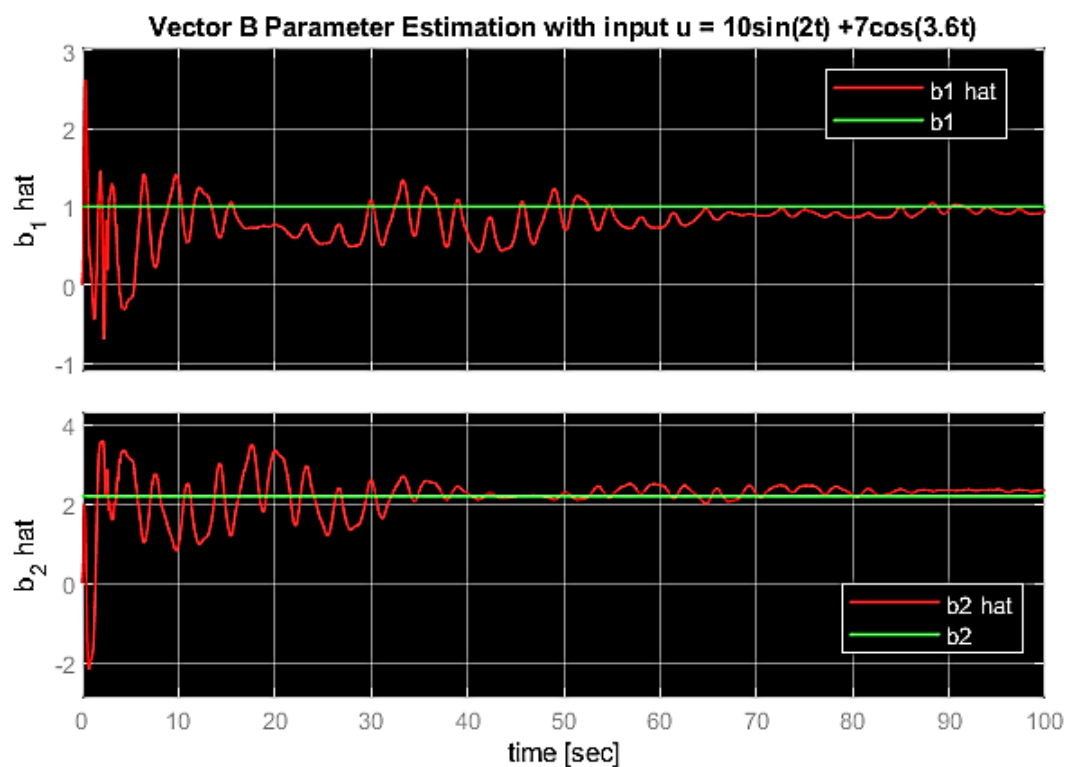
Σχήμα 7. Σφάλματα εκτιμήσεων καταστάσεων.



Σχήμα 8. Εκτιμήσεις καταστάσεων συστήματος.



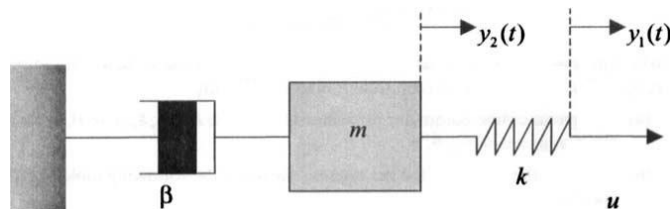
Σχήμα 9. Εκτιμήσεις παραμέτρων πίνακα A.



Σχήμα 10. Εκτιμήσεις παραμέτρων διανύσματος B.

Άσκηση – 4^η

(α) Έχουμε το παρακάτω σύστημα ελατήριο αποσβεστήρα μάζας. Με την εφαρμογή του δεύτερου νόμου Newton θα προκύψει ότι:



Σχήμα 11. Σύστημα ελατήριο μάζας αποσβεστήρα.

$$F - \beta \dot{y}_2 = m \ddot{y}_2 \Rightarrow F = m \ddot{y}_2 + \beta \dot{y}_2$$

Επίσης, από τον νόμο του Hooke προκύπτει ότι:

$$F = k(y_1 - y_2)$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε την δύναμη F ως είσοδο στο σύστημα u , τότε θα προκύψουν οι εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$k(y_1 - y_2) = u$$

$$k(y_1 - y_2) = m \ddot{y}_2 + \beta \dot{y}_2$$

(β) Καθώς οι έξοδοι και η είσοδος του συστήματος είναι μετρήσιμα μεγέθη, τότε θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος. Έτσι, ακολουθώντας την σχεδίαση του στατικού παραμετρικού μοντέλου (SPM). Επειδή έχουμε δύο διαφορετικές εξισώσεις κίνησης, η αναγνώριση θα γίνει με την χρήση ενός σχήματος gradient αλγόριθμου. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$k(y_1 - y_2) = u$$

$$u = m \ddot{y}_2 + \beta \dot{y}_2$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε ένα ευσταθές φίλτρο δευτέρας τάξης $\Lambda(s)$ το οποίο θα έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\Lambda(s) = (s + \lambda_1)^2$. Έτσι, θα προκύψει ότι

$$\frac{1}{\Lambda(s)} u = m \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2 + \beta \frac{s}{\Lambda(s)} y_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Lambda(s)} u = [m \quad \beta] \begin{bmatrix} \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2 \\ \frac{s}{\Lambda(s)} y_2 \end{bmatrix}$$

Έτσι, θα μπορέσουμε να το φέρουμε στην μορφή $\mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}^* \boldsymbol{\Phi}$, όπου το $\theta_1^* = k$ και $\theta_2^* = [m \quad \beta]^T$ και τα $\varphi_1 = y_1 - y_2$, $\varphi_2 = \left[\frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2 \quad \frac{s}{\Lambda(s)} y_2 \right]^T$. Το επόμενο βήμα είναι να εκτιμήσουμε το σφάλμα της εκτίμησης. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\hat{z} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}$$

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{z - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}}{m_s^2}$$

Όπου το m_s είναι ένα κανονικοποιημένο σήμα ώστε το $\frac{\varphi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$. Το σήμα κανονικοποίησης θα είναι το $m_s^2 = 1 + \alpha \varphi^T \varphi, \alpha > 0$.

Για το πρώτο υποσύστημα θα έχουμε ότι το σήμα κανονικοποίησης θα είναι $m_s^2 = 1$. Θεωρούμε ότι η είσοδος F είναι γνωστή και φραγμένη, δηλαδή $u \in \mathcal{L}_\infty$, τότε ο νόμος προσαρμογής θα είναι:

$$\dot{\hat{k}} = \gamma_1 \varepsilon_1 \varphi_1$$

όπου το γ_1 είναι μια θετική σταθερά και το $\varepsilon_1 = z_1 - \hat{z}_1$ αποτελεί το σφάλμα. Άρα θα έχουμε ότι $\varepsilon_1 = z_1 - \hat{k} \varphi_1$. Με τον νόμο που προέκυψε παρατηρούμε ότι όλα τα σήματα είναι φραγμένα. Επίσης γνωρίζουμε ότι και το σήμα φ_1 είναι φραγμένο καθώς τα $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα, για να έχουμε σύγκλιση της παραμέτρου στην πραγματική, θα πρέπει το σήμα φ_1 να είναι PE .

Τώρα θα εξετάσουμε τον νόμο προσαρμογής για το δεύτερο υποσύστημα. Καθώς έχουμε ορίσει ένα φίλτρο το οποίο πολλαπλασιάζεται με όλες τα στοιχεία της εξίσωσης, τότε θα πρέπει να επιλέξουμε ως σήμα κανονικοποίησης το $m_s^2 = 1 + \varphi_2^T \varphi_2$. Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε φραγμένη είσοδο ακόμα και όταν ξέρουμε ότι το $u \in \mathcal{L}_\infty$. Οπότε, ο νόμος προσαρμογής για αυτό το υποσύστημα θα είναι

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma \varepsilon_2 \varphi_2$$

όπου ο πίνακας $\Gamma = \Gamma^T > 0$ και το σφάλμα εκτίμησης θα είναι $\varepsilon_2 = \frac{z_2 - \theta_2^T \varphi_2}{m_s^2}$. Επιπλέον, για να έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων στις πραγματικές τιμές, τότε το σήμα φ_2 πρέπει να είναι PE . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να εισάγεται ένα σήμα πλήρους τάξης $n = 2$.

Επιλέγοντας τον πίνακα $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, με όλα τα κέρδη $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, τότε θα προκύψουν οι εξής νόμοι εκτίμησης:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= \gamma_1(z_1 - \hat{k}\varphi_1)\varphi_1 \\ \dot{\hat{m}} &= \gamma_2 \frac{z_2 - [\hat{m} \quad \hat{b}]\varphi_2}{m_s^2} \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2 \\ \dot{\hat{\beta}} &= \gamma_3 \frac{z_2 - [\hat{m} \quad \hat{b}]\varphi_2}{m_s^2} \frac{s}{\Lambda(s)} y_2\end{aligned}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν κάποια φράγματα για τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Η μεθοδολογία που μπορεί να ακολουθεί σε αυτή την περίπτωση είναι αυτή της προβολής. Συνεπώς, με την χρήση των ανισώσεων

$$0 \leq \beta \leq 1$$

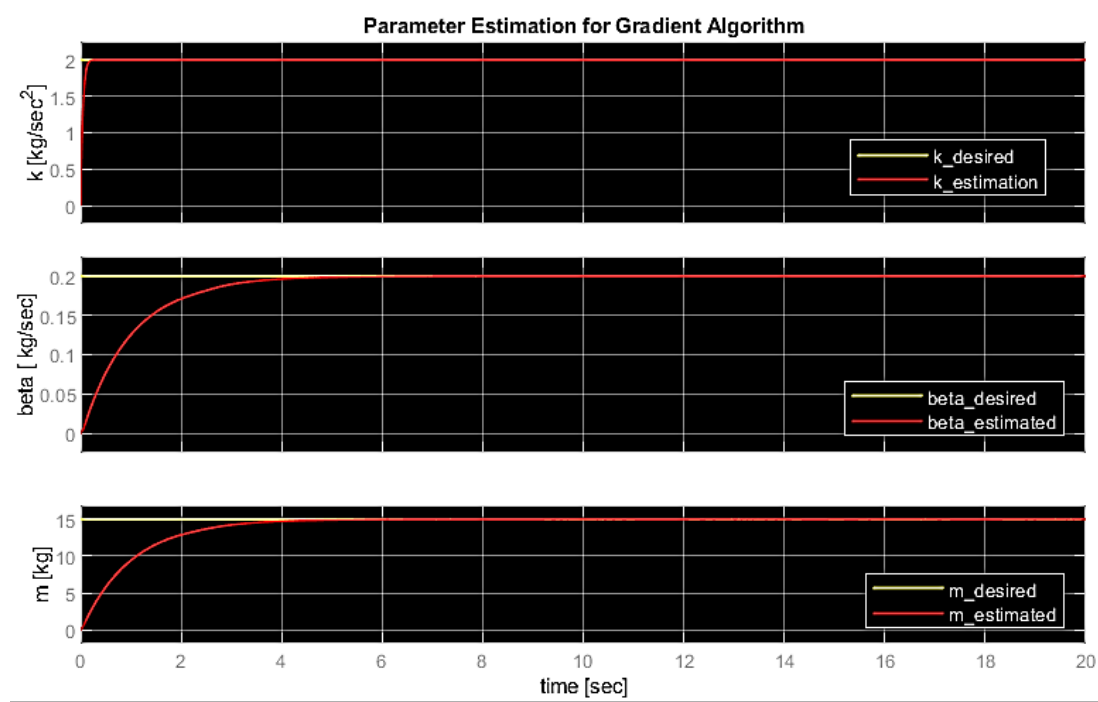
$$k \geq 0.1$$

$$m \geq 10$$

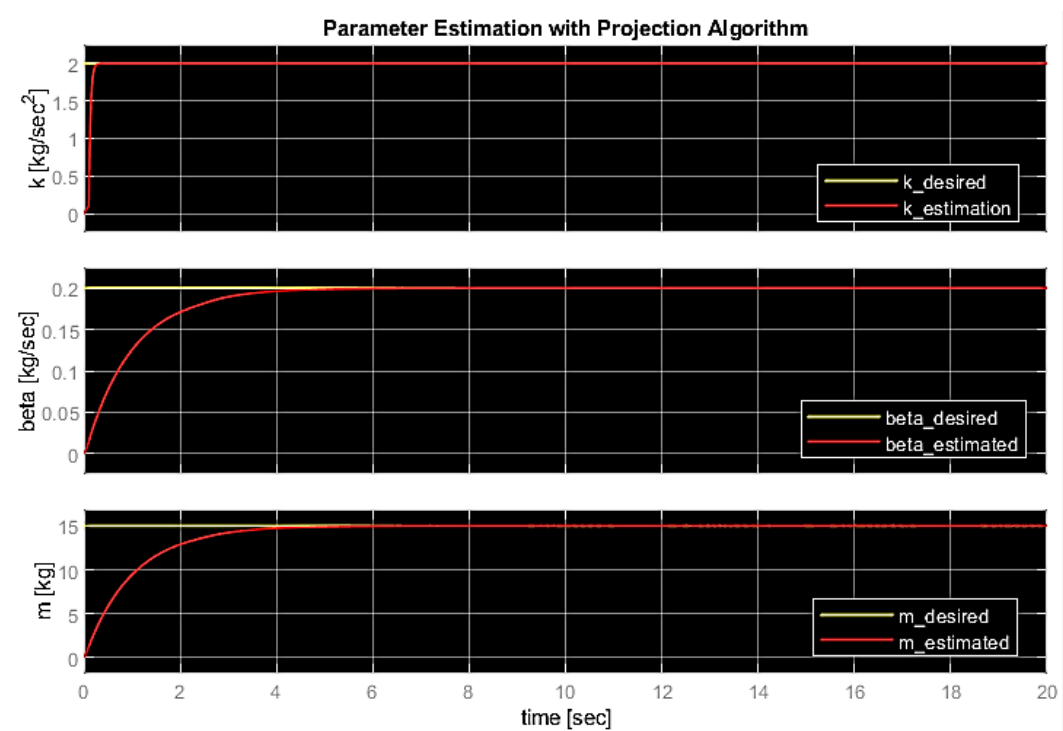
μπορούμε να τροποποιήσουμε το σχήμα των παραπάνω νόμων ώστε να προκύψει η προβολή. Η προβολή αυτό που θα κάνει είναι να διατηρεί τις τιμές των παραμέτρων εντός ενός πεδίου ώστε να μην αποκλίνουν οι εκτιμήσεις από τις πραγματικές τιμές. Έτσι, οι νόμοι αυτοί θα γίνουν:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= \Pr(\gamma_1 \varepsilon_1 \varphi_1) = \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon_1 \varphi_1, & \text{Αν } (\hat{k} > 0.1) \text{ ή } (\hat{k} = 0.1 \text{ και } \gamma_1 \varepsilon_1 \varphi_1 \geq 0) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ \dot{\hat{m}} &= \Pr\left(\gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2\right) = \begin{cases} \gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2, & \text{Αν } (\hat{m} > 10) \text{ ή } \left(\hat{m} = 10 \text{ και } \gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s^2}{\Lambda(s)} y_2 \geq 0\right) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ \dot{\hat{\beta}} &= \Pr\left(\gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s}{\Lambda(s)} y_2\right) \\ \dot{\hat{\beta}} &= \begin{cases} \gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s}{\Lambda(s)} y_2, & \text{Αν } (0 < \hat{\beta} < 1) \text{ ή } \left(\hat{\beta} = 0 \text{ και } \gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s}{\Lambda(s)} y_2 \geq 0\right) \text{ ή } \left(\hat{\beta} = 1 \text{ και } \gamma_2 \varepsilon_2 \frac{s}{\Lambda(s)} y_2 \leq 0\right) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}\end{aligned}$$

(δ) Καθώς φτιάχτηκαν τα παραπάνω μοντέλα αναγνώρισης, μπορούμε να τα προσομοιώσουμε για να δούμε οι παράμετροι θα συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Και οι δύο αλγόριθμοι διαθέτουν κοινές αρχικές συνθήκες, έτσι ώστε να μπορέσουν να συγκριθούν. Μάλιστα αυτές ανήκουν εντός συνόλου προβολής. Έτσι, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στα επόμενα δύο σχήματα.



Σχήμα 12. Εκτιμήσεις παραμέτρων με τον αλγόριθμο κλίσης.



Σχήμα 13. Εκτιμήσεις παραμέτρων με τον αλγόριθμο προβολής.

Και στους δύο αλγόριθμους παρατηρούμε πως η απόκριση των παραμέτρων είναι παρόμοια. Επίσης, έχουμε σύγκλιση στις πραγματικές τους τιμές.

Άσκηση – 5^η

(α) Έχουμε ένα σύστημα της μορφής

$$y = e^{-\tau s} \frac{b}{(s-a)(\mu s+1)} u$$

που έχουν περιορισμό $0 < \tau, \mu \ll 1$ και είναι άγνωστοι όλοι οι παράμετροι του συστήματος. Καθώς θέλουμε να εκτιμήσουμε online τις παραμέτρους a, b , τότε θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο προσαρμογής *SPM*. Επομένως, για να τα εκτιμήσουμε θα πρέπει να τροποποιήσουμε την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς και να παραλείψουμε την μη μοντελοποιημένη δυναμική του συστήματος μαζί με την χρονική καθυστέρηση. Επομένως, θα έχουμε το εξής σύστημα:

$$y = \frac{b}{s-a} u \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{y} - ay = bu$$

Έχουμε ένα σύστημα πρώτης τάξης, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το φίλτρο $\Lambda(s) = s + \lambda$. Οπότε η μορφή του θα γίνει:

$$\begin{aligned} \frac{s}{s+\lambda} y - a \frac{1}{s+\lambda} y &= b \frac{1}{s+\lambda} u \\ \Rightarrow \frac{s}{\Lambda(s)} y &= [a \quad b] \begin{bmatrix} \frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, με βάσει την τελική μορφή του παραμετροποιημένου μοντέλου ορίζουμε τις ποσότητες $z = \frac{s}{\Lambda(s)} y$, $\theta^* = [a \quad b]^T$ και $\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$. Οπότε το αρχικό σύστημα με την μη μοντελοποιημένη δυναμική θα έχει παραμετρική μορφή:

$$z = \theta^{*T} \varphi + \frac{b}{s+\lambda} \left(\frac{e^{-\tau s}}{\mu s+1} - 1 \right) u$$

Η τελική μορφή του παραμετροποιημένου μοντέλου που προκύπτει είναι της μορφής:

$$z = \theta^{*T} \varphi + \eta$$

όπου η συνάρτηση $\eta(s)$ αποτελεί την αβεβαιότητα του συστήματος. Στην περίπτωση του παραπάνω συστήματος περιγράφει μία συνάρτηση μεταφοράς της μορφής:

$$\eta = \Delta_u(s) u$$

(β) Με την χρήση κάποιου εύρωστου νόμου θα προσπαθήσουμε να βρούμε νόμους προσαρμογής, έτσι ώστε να μην επηρεάζεται από την μη μοντελοποιημένη δυναμική η. Ωστόσο, πριν την εύρεση του νόμου θα πρέπει να προσδιορίσουμε ένα σήμα κανονικοποίησης για τα διανύσματα φ, η και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί κάποιος αλγόριθμος ταυτοποίησης. Για την εύρεση του σήματος θα κάνουμε την χρήση της $\mathcal{L}_{2\delta}$ νόρμας και την δυναμική κανονικοποίηση.

Επειδή έχουμε ότι η συνάρτηση $\Delta_u(s)$ είναι μία αυστηρά κανονική συνάρτηση διότι το

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta_u(s) = 0$$

και αναλυτική στο $\text{Re}\{s\} \geq -\frac{\delta_0}{2}$ για την παράμετρο $\delta_0 < \min\left(2\lambda, \frac{2}{\mu}\right)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δυναμική κανονικοποίηση, με την οποία θα φράξει την συνάρτηση η από πάνω. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να πούμε πως η παράμετρος $\delta_0 \in (0, 2\lambda)$ καθώς το $\mu \ll 1$. Έτσι, μπορούμε να πούμε πως το $\lambda < \frac{1}{\mu}$. Μια αξιόπιστη τιμή για το $\delta_0 = \frac{\lambda}{2}$. Επομένως, τώρα μπορούμε να βρούμε ένα σήμα κανονικοποίησης. Οπότε, θα ορίσουμε αρχικά την ποσότητα

$$n_d = \|u\|_{2\delta_0}^2$$

και εν συνεχεία μπορούμε να δούμε πως η παραπάνω νόρμα θα παραχθεί από την διαφορική εξίσωση:

$$\dot{n}_d = -\delta_0 n_d + u^2, n_d(0) = 0$$

Έτσι, θα λάβουμε το κανονικοποιημένο σήμα που έχει μορφή:

$$m_s^2 = 1 + n_d$$

Το παραπάνω σήμα θα φράξει την ποσότητα $\frac{n}{m_s}$ σύμφωνα με την ανίσωση :

$$\frac{|\eta|}{m_s} \leq \|\Delta_u(s)\|_{2\delta_0}$$

Ωστόσο, το πρόβλημα το οποίο προκύπτει είναι πως το κανονικοποιημένο σήμα που ορίστηκε προηγουμένως, παίρνει υπόψιν του μόνο τα σφάλματα μοντελοποίησης. Έτσι, αυτό που θα πρέπει να γίνει είναι να προστεθεί στο σήμα ακόμα ένας όρος ο οποίος θα λαμβάνει υπόψιν και διάνυσμα φ . Έτσι, θα έχουμε το νέο κομμάτι με τύπο $n_s^2 = \varphi^T \varphi$ και κατ' επέκταση το τελικό σήμα κανονικοποίησης θα είναι:

$$m_s^2 = 1 + \varphi^T \varphi + n_d$$

$$\dot{n}_d = -\delta_0 n_d + u^2, n_d(0) = 0$$

Το αποτέλεσμα που θα έχει το παραπάνω σήμα είναι πως θα υπάρχουν βελτιωμένες εύρωστες ιδιότητες για τον προσαρμοστικό νόμο. Συνεπώς θα έχουμε ότι ισχύει $\frac{n}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$.

Καθώς ορίσαμε το σήμα κανονικοποίησης, το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε κάποιον εύρωστο νόμο ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι a, b . Έχουμε αρχικά το σφάλμα παραμετροποίησης $\varepsilon = \frac{z - \theta^T \varphi}{m_s^2}$. Ορίζουμε και τον πίνακα $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Καθώς το σύστημα έχει τάξη $n = 2$, τότε θα ορίσουμε τον $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ με τα $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Εν συνεχεία, θα διαλέξουμε έναν εύρωστο νόμο προσαρμογής. Ο νόμος προσαρμογής που επιλέχθηκε είναι ο **Static σ - Modification**, καθώς θα θέλουμε να περιορίσουμε τις υψηλές συχνότητες στο σύστημα. Έτσι, θα γνωρίζουμε πως το διάνυσμα παραμέτρων δεν θα μπορεί να ξεπεράσει το όριο M_0 . Η τιμή αυτή θα επιλεχθεί με βάση την σχεδίαση. Γενικά, ο τύπος της μεθόδου θα είναι:

$$\dot{\theta} = \Gamma \varepsilon \varphi - \sigma_\ell \Gamma \theta$$

Συνεπώς, για την εκτίμηση των παραμέτρων θα προκύψουν οι νόμοι:

$$\dot{\hat{a}} = \gamma_1 \left(\varepsilon \frac{1}{s + \lambda} y - \sigma_\ell \hat{a} \right)$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 \left(\varepsilon \frac{1}{s + \lambda} u - \sigma_\ell \hat{b} \right)$$

Οπότε, με τον παραπάνω αλγόριθμο θα έχουμε εξασφαλίσει τα εξής ζητήματα:

- I. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \theta, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$.
- II. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{S} \left(\sigma_\ell + \frac{\eta^2}{m_s^2} \right)$
- III. Στην περίπτωση απουσία του σφάλματος μοντελοποίησης, δηλ. $\eta = 0$, τότε οι ιδιότητες του παραπάνω προσαρμοστικού νόμου είναι ίδιες με αυτές του μη τροποποιημένου μοντέλου εκτίμησης, δηλ. $\sigma_\ell = 0$.
- IV. Αν το $\frac{\varphi}{m_s}$ είναι PE με σταθερά $a_0 > 0$, τότε το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$ θα συγκλίνει εκθετικά γρήγορα μέσα στο σύνολο

$$D_s = \{ \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid |\tilde{\theta}| \leq c(\sigma_0 + \bar{\eta}) \}$$

$$\text{όπου το } c \geq 0 \text{ είναι μια σταθερά και το } \bar{\eta} = \sup_t \left(\frac{|\eta(t)|}{m_s(t)} \right)$$

Αυτό που θα πρέπει να ξέρουμε με σιγουριά είναι πως η ιδιότητα (IV) θα πρέπει να ικανοποιηθεί. Συνεπώς, για να ισχύει η συνθήκη PE, θα πρέπει το σήμα εισόδου να

διαθέτει μία διακριτή συχνότητα, διότι το σύστημα είναι τάξης $n = 2$. Το πρόβλημα με αυτό προκύπτει από το γεγονός πως η συχνότητα αυτή θα πρέπει να είναι χαμηλή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι λόγω των πολύ μικρών παραμέτρων $\tau, \mu \ll 1$, η μη μοντελοποιημένη δυναμική εμφανίζεται ως διαταραχή στο σύστημα και μάλιστα επιδρά στις υψηλές συχνότητες. Έτσι, θα πρέπει να επιλεχθούν χαμηλές συχνότητες στα σήματα εισόδου για να μην διεγείρονται οι μη μοντελοποιημένες δυναμικές. Για να το επιχειρήσουμε αυτό, θα πρέπει να βρούμε αυτά τα ω τα οποία κάνουν όσο πιο δυνατόν μικρότερο το μέτρο $|D_u(j\omega)|$. Επομένως ισχύει ότι:

$$|D_u(j\omega)| = \left| \frac{b}{j\omega + \lambda} \right| \left| \frac{e^{-\tau j\omega}}{\mu j\omega + 1} - 1 \right| = \frac{|b|}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \frac{\sqrt{(\cos(\tau\omega) - 1)^2 + (\sin(\tau\omega) + \mu\omega)^2}}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow |D_u(j\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \sqrt{1 + \frac{1 + 2(\mu\omega \sin(\tau\omega) - \cos(\tau\omega))}{\mu^2\omega^2 + 1}}$$

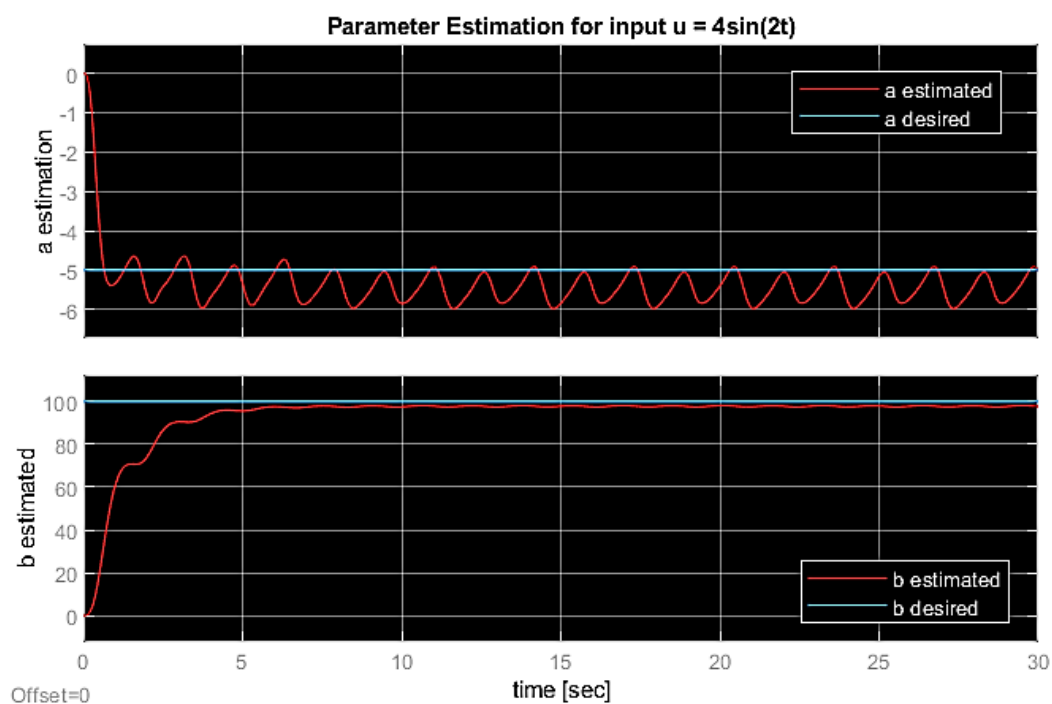
Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μία συχνότητα η οποία θα ικανοποιεί την συνθήκη ΡΕ και θα ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα και το πλάτος $|D_u(j\omega)|$. Επομένως, θα τροποποιήσουμε την παραπάνω έκφραση με την προσέγγιση $e^{-\tau j\omega} \approx 1 - \tau j\omega$. Οπότε, το μέτρο της παραπάνω ποσότητας θα γίνει προσεγγιστικά ως εξής:

$$|D_u(j\omega)| \approx \left| \frac{b}{j\omega + \lambda} \right| \left| \frac{1 - \tau j\omega}{\mu j\omega + 1} - 1 \right| = \frac{|b|}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \frac{|\tau - \mu|\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}$$

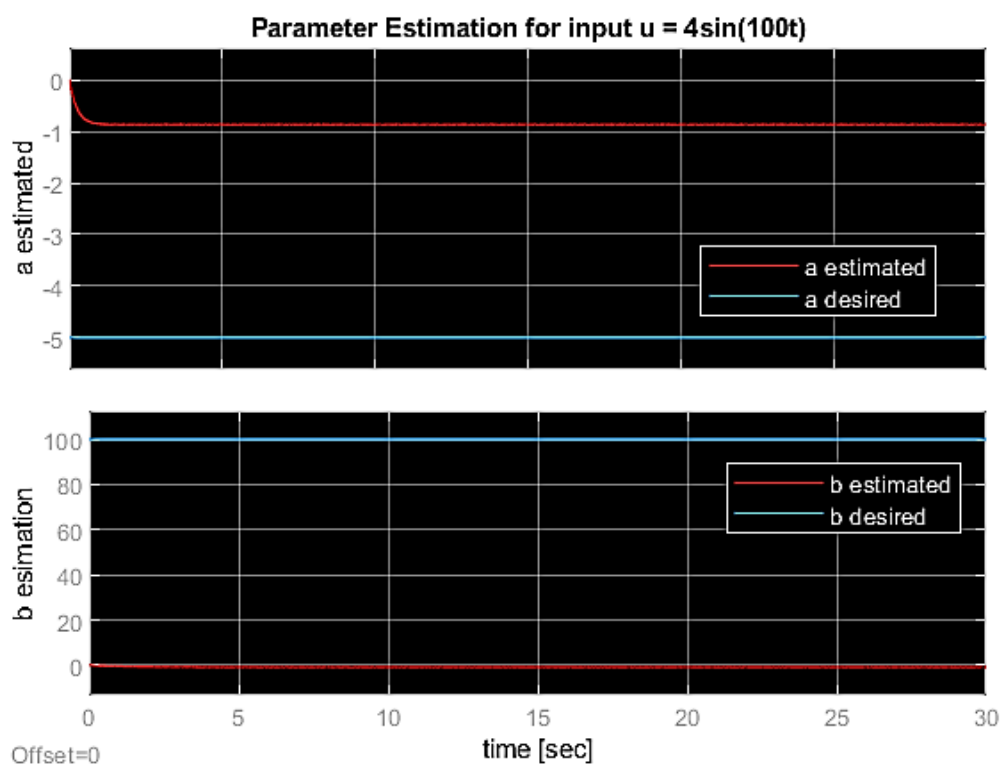
$$\Rightarrow |D_u(j\omega)| \approx \frac{|b|}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \frac{|\tau - \mu|}{\sqrt{\mu^2 + \frac{1}{\omega^2}}}$$

Συνεπώς, αυτό που παρατηρούμε είναι πως το δεύτερο κομμάτι του πλάτους θα αυξάνεται όσο μεγαλώνει η γωνιακή συχνότητα της εισόδου. Οπότε, η επιλογή των συχνοτήτων θα πρέπει να είναι μικρές έτσι ώστε και η αβεβαιότητα να τείνει στο 0.

(γ) Η προσομοίωση του εύρωστου αλγόριθμου έγινε με την χρήση δύο διαφορετικών εισόδων διαφορετικών συχνοτήτων. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ως είσοδο το σήμα $u(t) = 4 \sin(2t)$. Παρατηρούμε πως έχουμε μια ικανοποιητική σύγκλιση των παραμέτρων κοντά στις πραγματικές τιμές. Στην δεύτερη περίπτωση το σύστημα προσομοιώνεται με την είσοδο $u(t) = 2 \sin(100t)$. Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι παράμετροι δεν συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως το σύστημα περιέχει μη μοντελοποιημένες δυναμικές οι οποίες λειτουργούν σε υψηλές συχνότητες.



Σχήμα 14. Εκτίμηση παραμέτρων με τον αλγόριθμο *Fixed σ - Modification* για χαμηλή ω .



Σχήμα 15. Εκτίμηση παραμέτρων με τον αλγόριθμο *Fixed σ - Modification* για υψηλή ω .

Άσκηση – 6^η

(α) Έχουμε το σύστημα της μορφής:

$$z = \theta^* u + \eta$$

$$\eta = \Delta(s)u$$

όπου τα u και y είναι διαθέσιμα για μέτρηση. Επιπλέον, έχουμε ότι το $\Delta(s)$ είναι μία κανονική και αναλυτική συνάρτηση μεταφοράς στο $\text{Re}\{s\} \geq -0.5$. Για να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο **Switching σ - Modification**, θα πρέπει αρχικά να βρούμε ένα SPM μοντέλο για το στατικό μέρος της σχέσης και στη συνέχεια να βρούμε ένα κανονικοποιημένο σήμα το οποίο θα φράσει τις μη μοντελοποιημένες δυναμικές. Έτσι, θα ορίσουμε αρχικά ένα φίλτρο πρώτης τάξης $\Lambda(s) = s + \lambda$, με το $\lambda > 0$. Έτσι, το παραμετρικό μοντέλο που θα προκύψει θα είναι:

$$\frac{1}{s + \lambda} y = \theta^* \frac{1}{s + \lambda} u + \frac{\Delta(s)}{s + \lambda} u$$

Επομένως, τώρα μπορούμε να ορίσουμε την $\Delta_u(s) = \frac{\Delta(s)}{s + \lambda}$ ως μια αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς η οποία θα είναι αναλυτική στο $\text{Re}\{s\} \geq -\min(0.5, \lambda)$. Οπότε, τώρα μπορούμε να βρούμε ένα σήμα κανονικοποίησης για το παραπάνω σύστημα και να παραχθεί και ο προσαρμοστικός νόμος. Έχουμε τα σήματα $z = \frac{1}{s + \lambda} y$, $\varphi = \frac{1}{s + \lambda} u$ και τον στατικό παραμετρικό νόμο με διαταραχή. Για την εύρεση του σήματος θα κάνουμε την χρήση της $\mathcal{L}_{2\delta}$ νόρμας και την δυναμική κανονικοποίηση. Έτσι, θα ορίσουμε το σήμα δυναμικής κανονικοποίησης ως:

$$m_s^2 = 1 + n_d$$

$$\dot{n}_d = -\delta_0 + u^2, n_d(0) = 0$$

Το παραπάνω σήμα θα φράξει την ποσότητα $\frac{n}{m_s}$ σύμφωνα με την ανίσωση :

$$\frac{|\eta|}{m_s} \leq \|\Delta_u(s)\|_{2\delta_0}$$

Ωστόσο, το πρόβλημα το οποίο προκύπτει είναι πως το κανονικοποιημένο σήμα που ορίστηκε προηγουμένως, παίρνει υπόψιν του μόνο τα σφάλματα μοντελοποίησης. Έτσι, αυτό που θα πρέπει να γίνει είναι να προστεθεί στο σήμα ακόμα ένας όρος ο οποίος θα λαμβάνει υπόψιν και διάνυσμα φ . Έτσι, θα έχουμε το νέο κομμάτι με τύπο $n_s^2 = \varphi^2$ και κατ' επέκταση το τελικό σήμα κανονικοποίησης θα είναι:

$$m_s^2 = 1 + \varphi^2 + n_d$$

$$\dot{n}_d = -\delta_0 n_d + u^2, n_d(0) = 0$$

όπου το $\delta_0 \in (0, \min(1, 2\lambda)]$. Καθώς το $\lambda > 0.5$, τότε μία καλή επιλογή είναι $\delta_0 = 1$. Το αποτέλεσμα που θα έχει το παραπάνω σήμα είναι πως θα υπάρχουν βελτιωμένες εύρωστες ιδιότητες για τον προσαρμοστικό νόμο. Συνεπώς θα έχουμε ότι ισχύει $\frac{\eta}{m_s}, \frac{u}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$. Έχουμε φτιάξει το σήμα κανονικοποίησης. Το επόμενο βήμα είναι ορίσουμε τον προσαρμοστικό νόμο. Το πρώτο βήμα είναι να φτιάξουμε τον ιδεατό προσαρμοστικό νόμο για την παράμετρο θ και εν συνεχεία να προστεθεί ο νόμος εύρωστης προσαρμογής. Επομένως έχουμε ότι ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{z - \theta\varphi}{m_s^2}$$

$$\dot{\theta} = \gamma\varepsilon\varphi = \gamma \frac{z - \theta\varphi}{m_s^2} \varphi$$

με το $\gamma > 0$. Με την χρήση του αλγορίθμου switching modification ο παραπάνω νόμος θα επεκταθεί και θα γίνει:

$$\dot{\theta} = \gamma\varepsilon\varphi - \sigma_\ell(\theta)\gamma\theta$$

όπου θα έχουμε

$$\sigma_\ell(\theta) = \sigma_\ell = \begin{cases} 0, & \text{Αν } |\theta| \leq M_0 \\ \left(\frac{|\theta|}{M_0} - 1\right)^{q_0} \sigma_0, & \text{Αν } M_0 < |\theta| \leq 2M_0 \\ \sigma_0, & \text{Αν } |\theta| > 2M_0 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $q_0 \geq 1$ και οι παράμετροι M_0, σ_0 είναι σχεδιαστικές με τους περιορισμούς $M_0 > |\theta^*|$ και $\sigma_0 > 0$. Οπότε, με τον παραπάνω αλγόριθμο θα έχουμε εξασφαλίσει τα εξής ζητήματα:

- I. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \theta, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$.
- II. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{S}\left(\frac{\eta^2}{m_s^2}\right)$
- III. Στην περίπτωση απουσία του σφάλματος μοντελοποίησης, δηλ. $\eta = 0$, τότε οι ιδιότητες του παραπάνω προσαρμοστικού νόμου είναι ίδιες με αυτές του μη τροποποιημένου μοντέλου εκτίμησης, δηλ. $\sigma_\ell = 0$.
- IV. Αν το $\frac{\varphi}{m_s}$ είναι PE με σταθερά $a_0 > 0$, τότε
 - a. Το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$ θα συγκλίνει εκθετικά γρήγορα μέσα στο σύνολο

$$D_s = \{ \tilde{\theta} \mid |\tilde{\theta}| \leq c(\sigma_0 + \bar{\eta}) \}$$

όπου το $c \geq 0$ είναι μια σταθερά.

- b. Υπάρχει μια σταθερά $\bar{\eta}^* > 0$ τέτοια ώστε για το $\bar{\eta} < \bar{\eta}^*$, το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$ να συγκλίνει εκθετικά εντός του συνόλου

$$\bar{D}_s = \{ \tilde{\theta} \mid |\tilde{\theta}| \leq c\bar{\eta} \}.$$

$$\text{όπου το } \bar{\eta} = \sup_t \left(\frac{|\eta(t)|}{m_s(t)} \right)$$

(β) Η εύρωστη τροποποίηση του παραπάνω νόμου θα γίνει με την προβολή. Έχουμε το προσαρμοστικό μοντέλο:

$$z = \frac{1}{s + \lambda} y = \theta^* \varphi + \eta$$

με τον νόμο κλίσης να είναι $\dot{\theta} = \gamma \varepsilon \varphi$. Οπότε, η τροποποίηση θα γίνει ως:

$$\dot{\theta} = \Pr(\gamma \varepsilon \varphi) = \begin{cases} \gamma \varepsilon \varphi, & \text{Αν } (|\theta| < M_0) \text{ ή } (|\theta| = M_0 \text{ και } \varepsilon \varphi \leq 0) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου για την εύρεση της προβολής χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση περιορισμού $g(\theta) = \theta^2 - M_0^2 \leq 0$, η οποία ορίζει το κυρτό σύνολο στο οποίο προβάλλεται η μεταβλητή θ . Επίσης, για την σωστή λειτουργία της $|\theta(0)| \leq M_0$. Οπότε, το αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου είναι ότι:

- I. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \theta, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$.
- II. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{S} \left(\frac{\eta^2}{m_s^2} \right)$
- III. Στην περίπτωση απουσία του σφάλματος μοντελοποίησης, δηλ. $\eta = 0$, η τροποποίηση προσφέρει παρόμοια αποτελέσματα με αυτά του ιδανικού νόμου. Δηλαδή $\varepsilon, \varepsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2$.
- IV. Αν το $\frac{\varphi}{m_s}$ είναι PE με σταθερά $a_0 > 0$, τότε
 - a. Το σφάλμα $\tilde{\theta}$ συγκλίνει εκθετικά στο σύνολο :

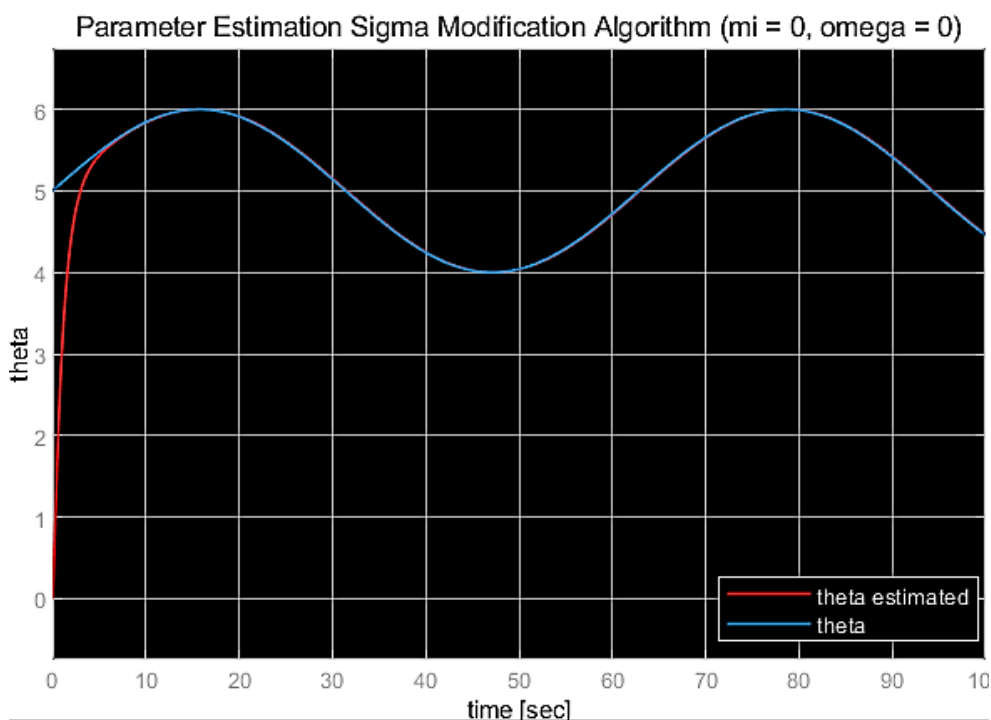
$$D_p = \{ \tilde{\theta} \mid |\tilde{\theta}| \leq c(f_0 + \bar{\eta}) \}$$

όπου το $\bar{\eta} = \sup_t \left(\frac{|\eta(t)|}{m_s(t)} \right)$, $f_0, c > 0$ να είναι σχεδιαστικές παράμετροι.

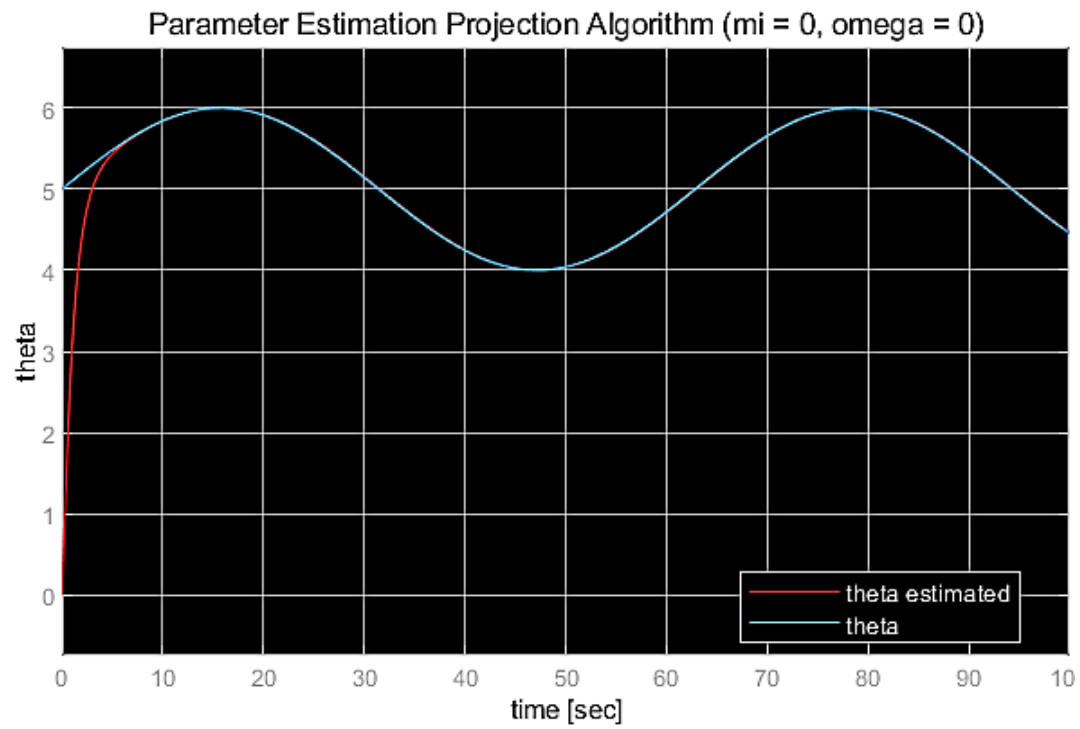
- b. Υπάρχει μια σταθερά $\bar{\eta}^* > 0$ τέτοια ώστε για το $\bar{\eta} < \bar{\eta}^*$, το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\theta}$ να συγκλίνει εκθετικά εντός του συνόλου

$$\bar{D}_s = \{ \tilde{\theta} \mid |\tilde{\theta}| \leq c\bar{\eta} \}$$

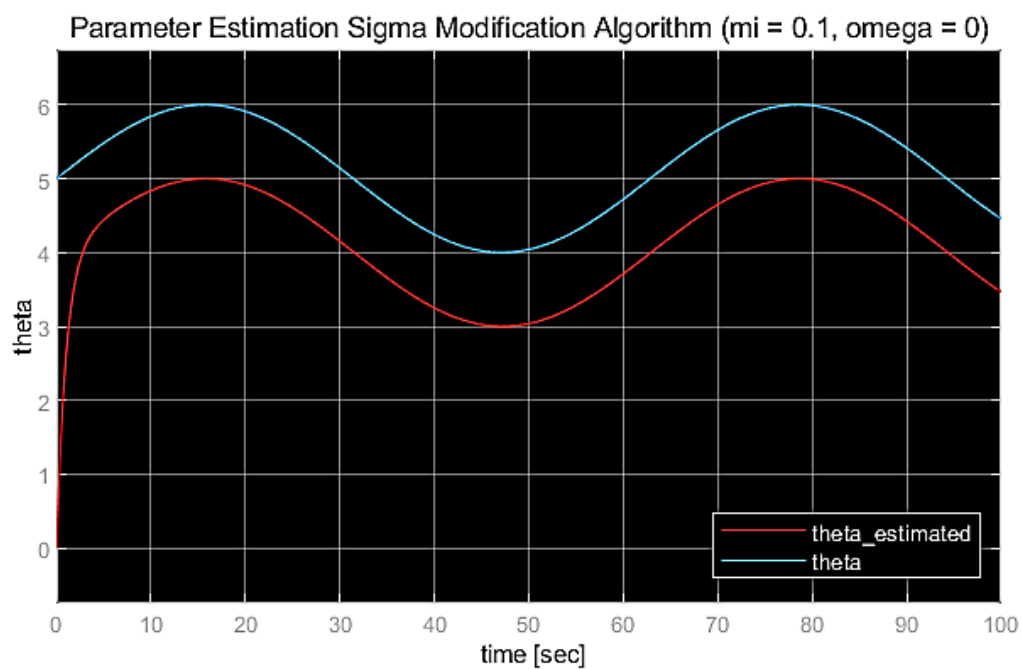
(γ) Για την προσομοίωση των παραπάνω αλγορίθμων χρησιμοποιήθηκε η τιμή $M_0 = 6$. Η συγκεκριμένη τιμή χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση των διαταραχών στο σύστημα. Επίσης, για το φίλτρο έγινε η επιλογή του $\lambda = 1$. Οι μεταβλητές της σ **Modification** επιλέχθηκαν μετά από πολλές προσομοιώσεις. Συγκεκριμένα η $q_0 = 2$ και η $\sigma_0 = 3$. Αυτές οι τιμές βοήθησαν ώστε να κρατηθούν πολύ μικρά τα κέρδη του συστήματος γενικά. Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των αλγορίθμων. Στις περισσότερες προσομοιώσεις παρατηρούμε πως ο συνδυασμός των (μ, ω) δεν επηρεάζει τόσο πολύ την σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τιμές, Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις παρατηρούμε τις διαταραχές που προκαλούνται από τις μη μοντελοποιημένες δυναμικές. Αυτές παρατηρούνται όσο αυξάνεται η γωνιακή συχνότητα ω της εισόδου. Ωστόσο, λόγω των περιορισμών που έχουν οι προσαρμοστικοί νόμοι δεν επηρεάζεται δραματικά η εκτίμηση όσο θα ήταν το αναμενόμενο. Άλλο ένα πλεονέκτημα αποτελεί η συνάρτηση ταυτοποίησης. Η συχνότητα της συνάρτησης δημιουργεί ταλαντώσεις γύρω από την πρόβλεψη ή/και διαφορά φάσης της πρόβλεψης θ^* .



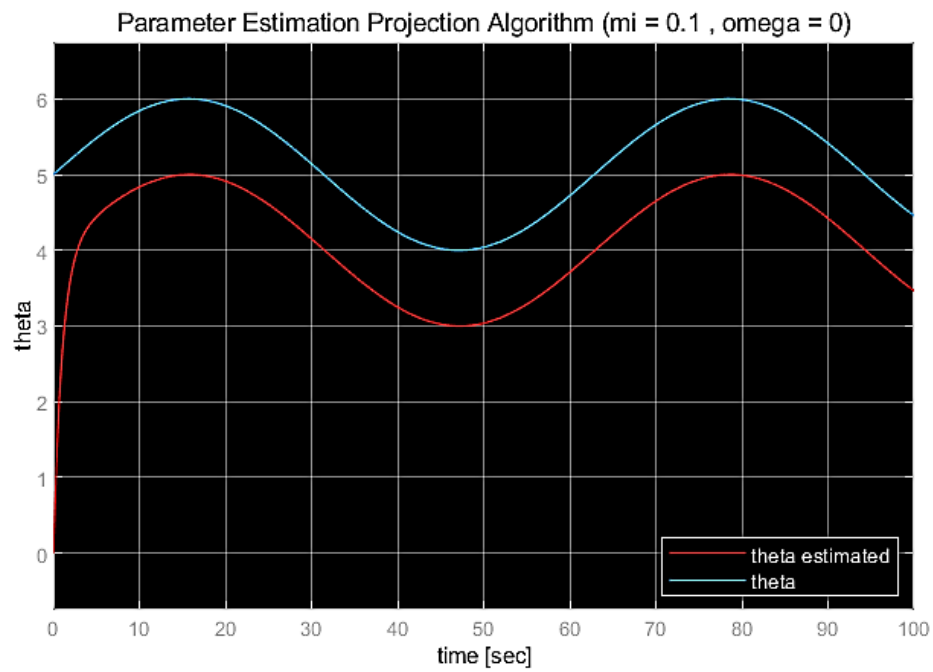
Σχήμα 16. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0$ και $\omega = 0$).



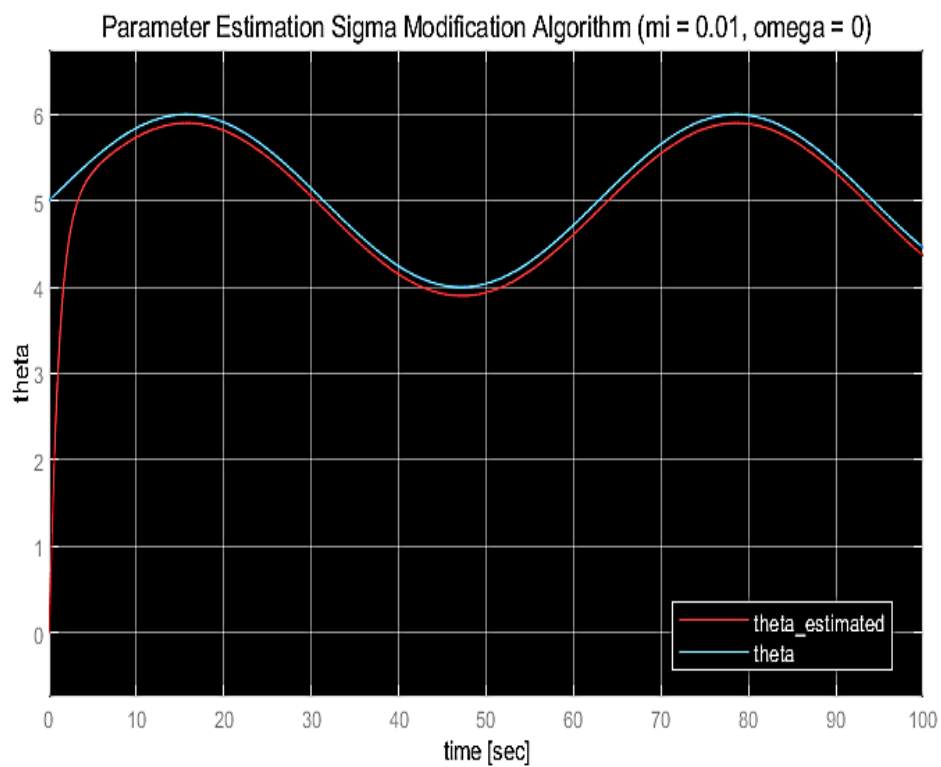
Σχήμα 17. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0$ και $\omega = 0$).



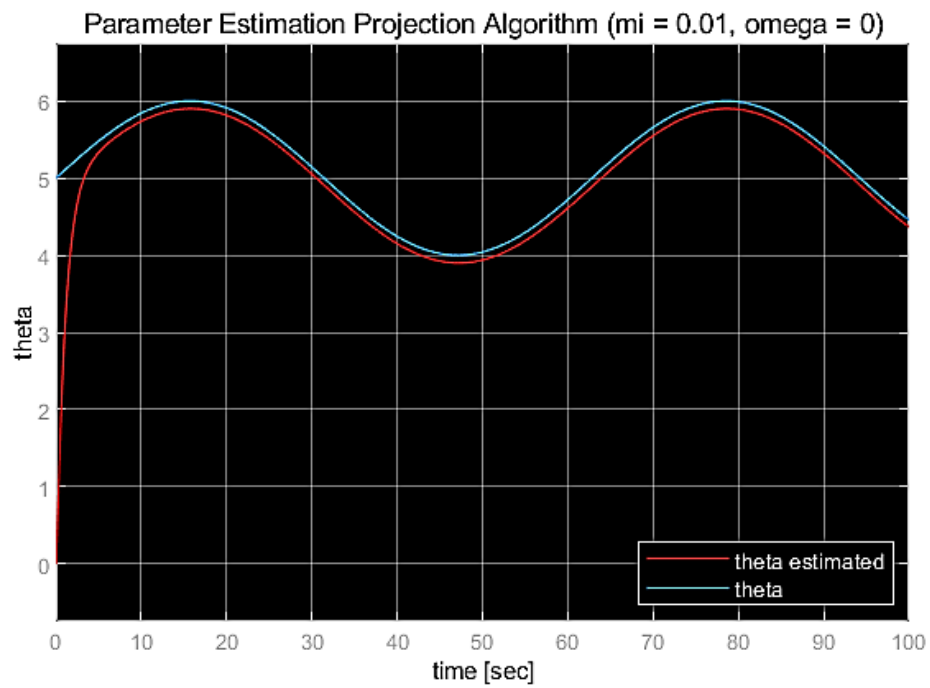
Σχήμα 18. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.1$ και $\omega = 0$).



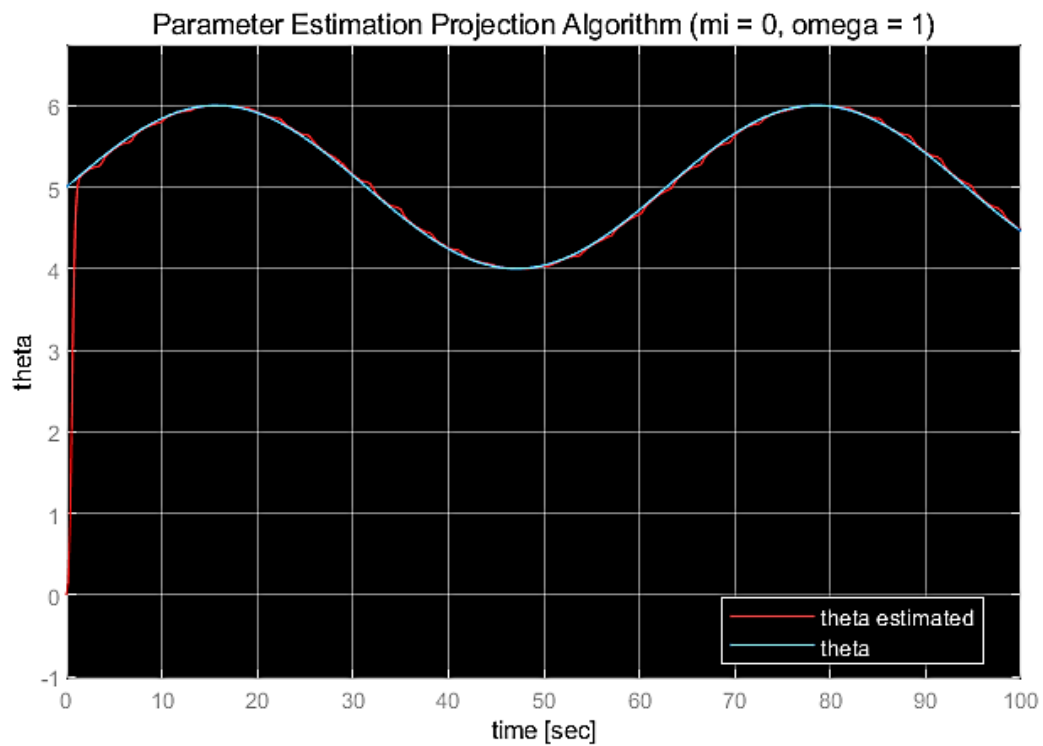
Σχήμα 19. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0.1$ και $\omega = 0$).



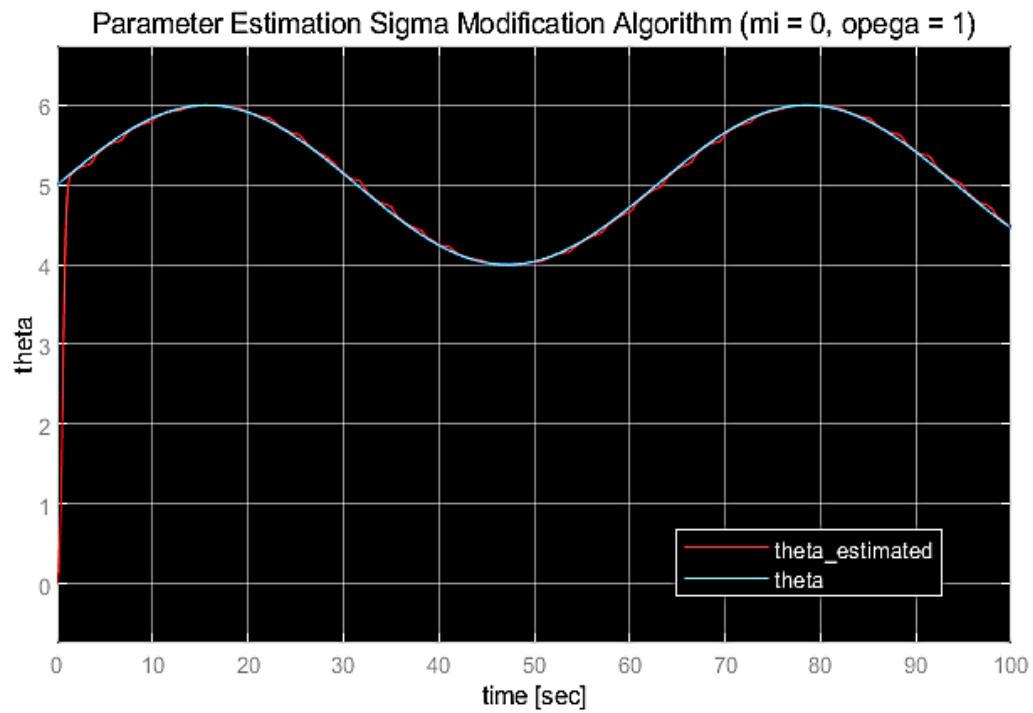
Σχήμα 20. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.01$ και $\omega = 0$).



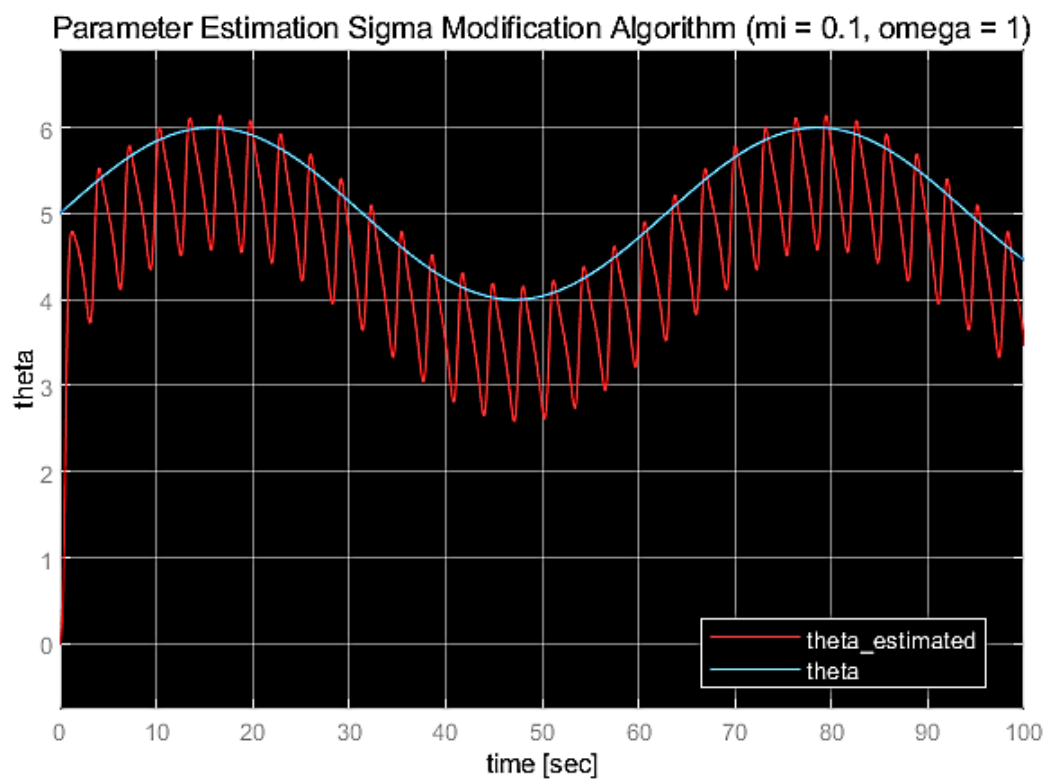
Σχήμα 21. Εκτίμηση παραμέτρων με Προβολή ($\mu = 0.01$ και $\omega = 0$).



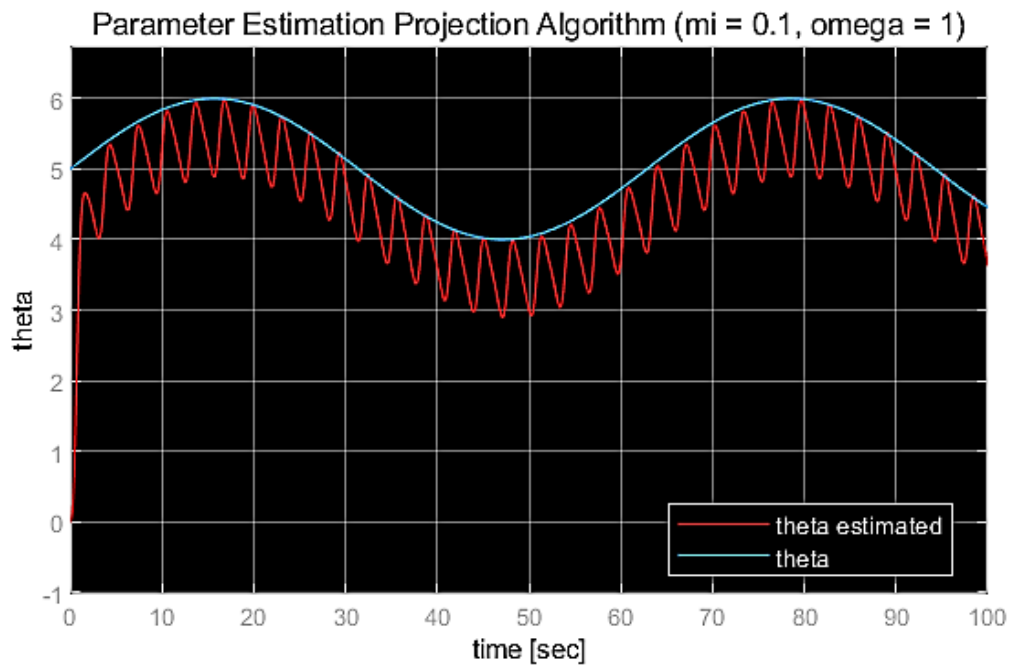
Σχήμα 22. Εκτίμηση παραμέτρων με Προβολή ($\mu = 0$ και $\omega = 1$).



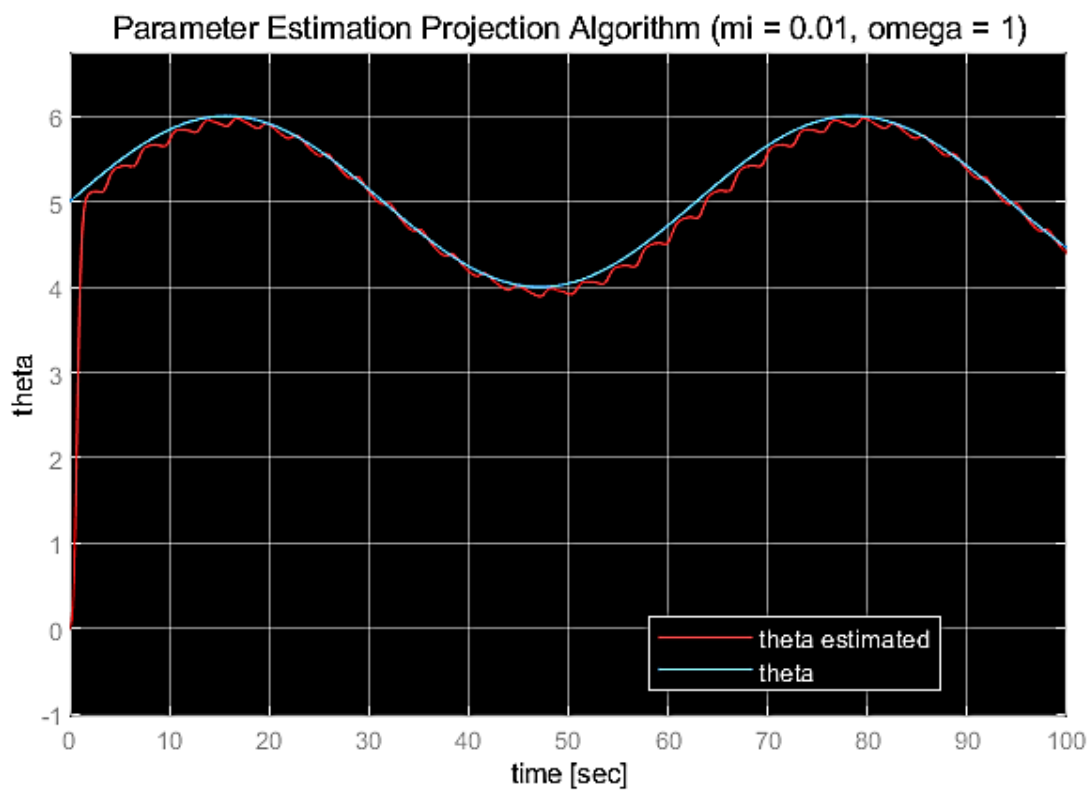
Σχήμα 23. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0$ και $\omega = 1$).



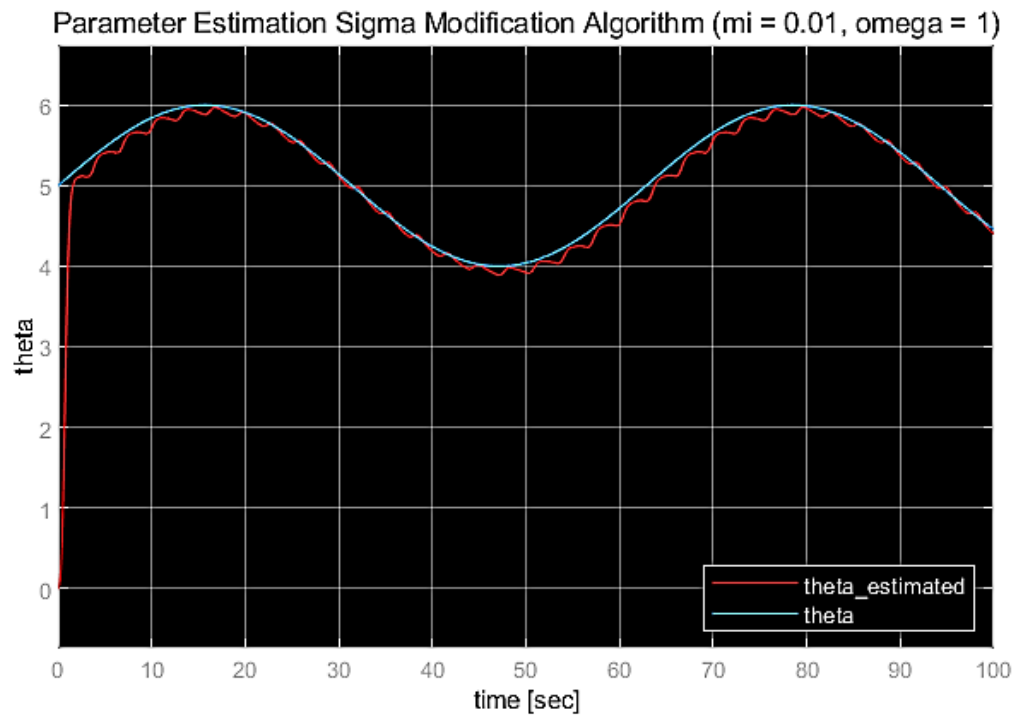
Σχήμα 24. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.1$ και $\omega = 1$).



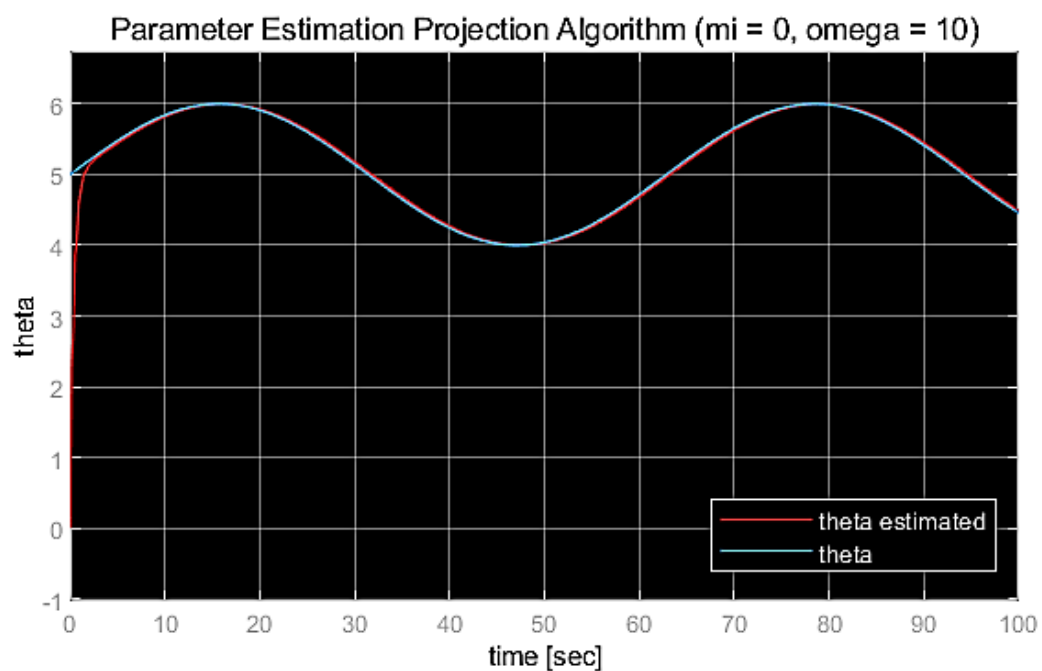
Σχήμα 25. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0.1$ και $\omega = 1$).



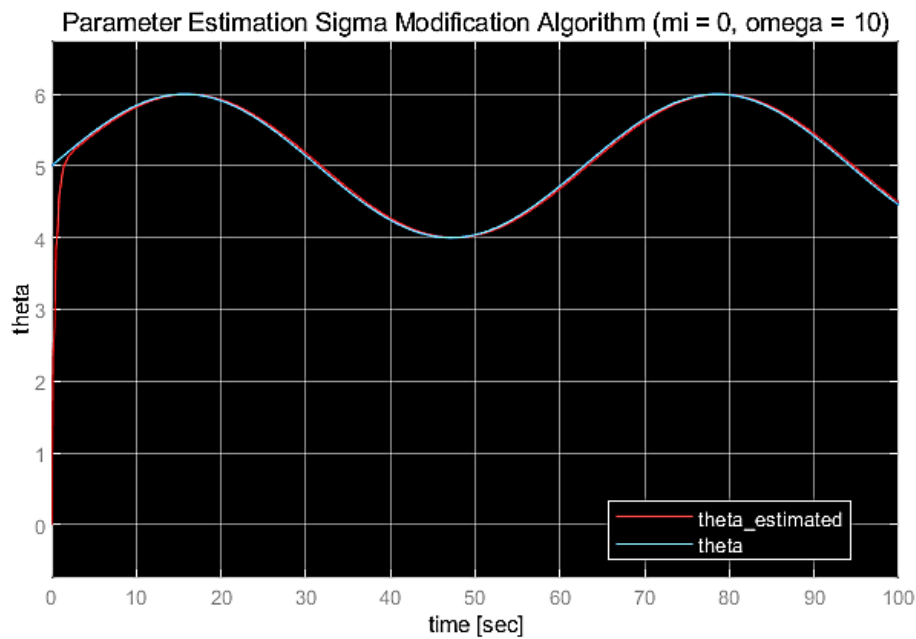
Σχήμα 26. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0.01$ και $\omega = 1$).



Σχήμα 27. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.01$ και $\omega = 1$).

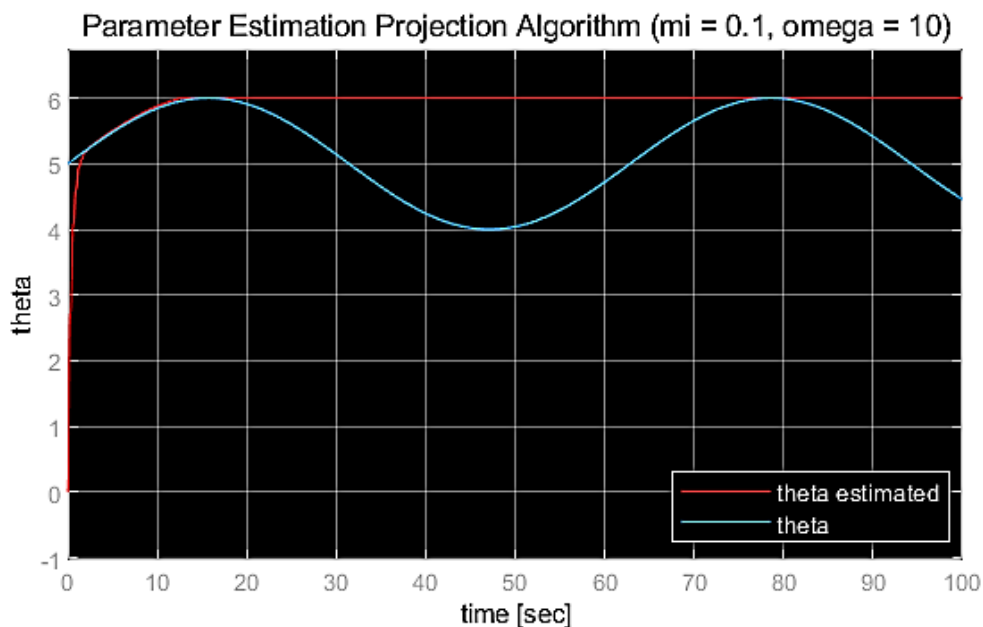


Σχήμα 28. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0$ και $\omega = 10$).

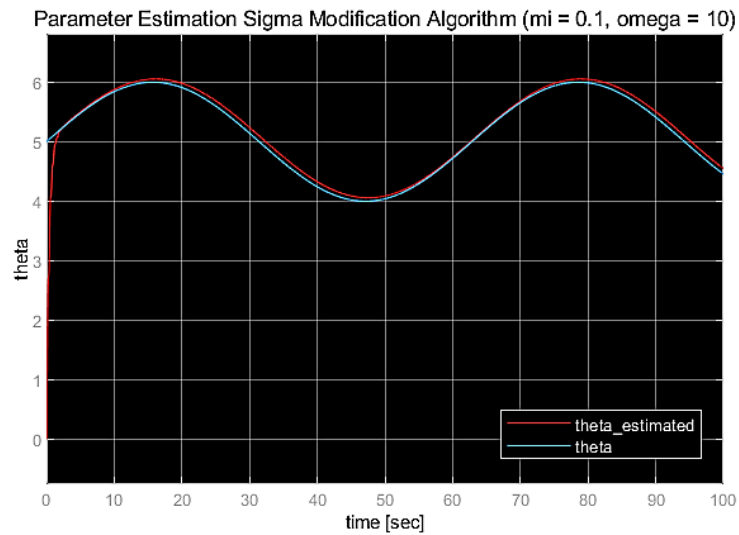
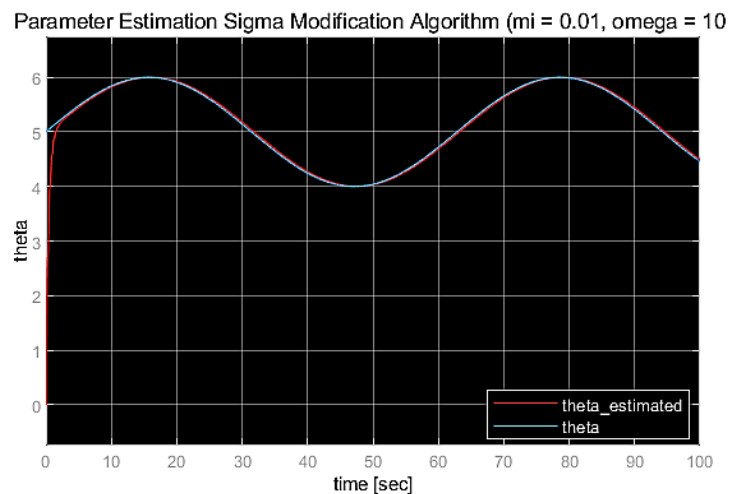
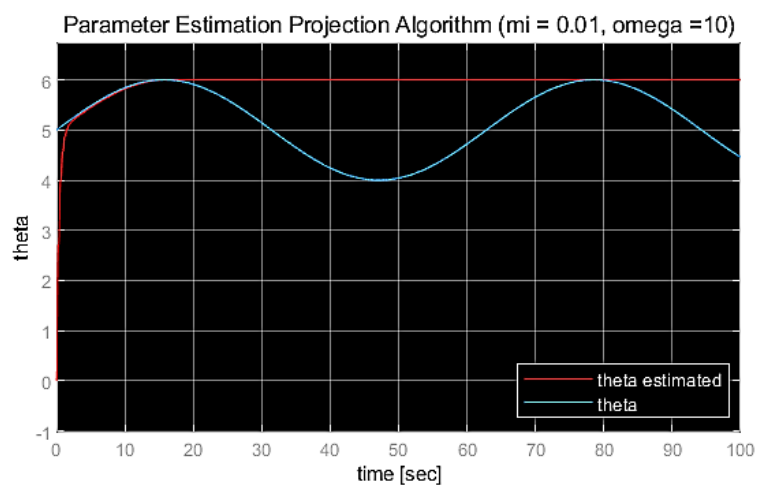


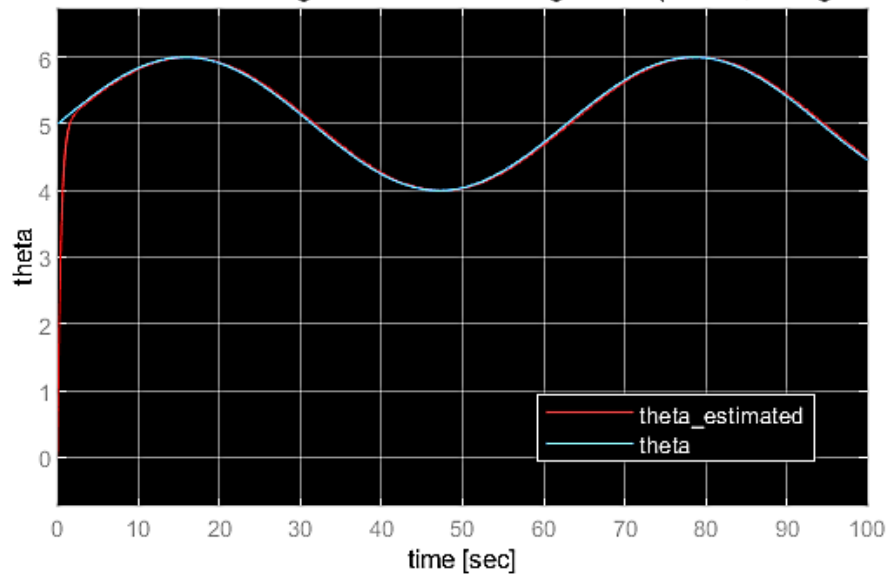
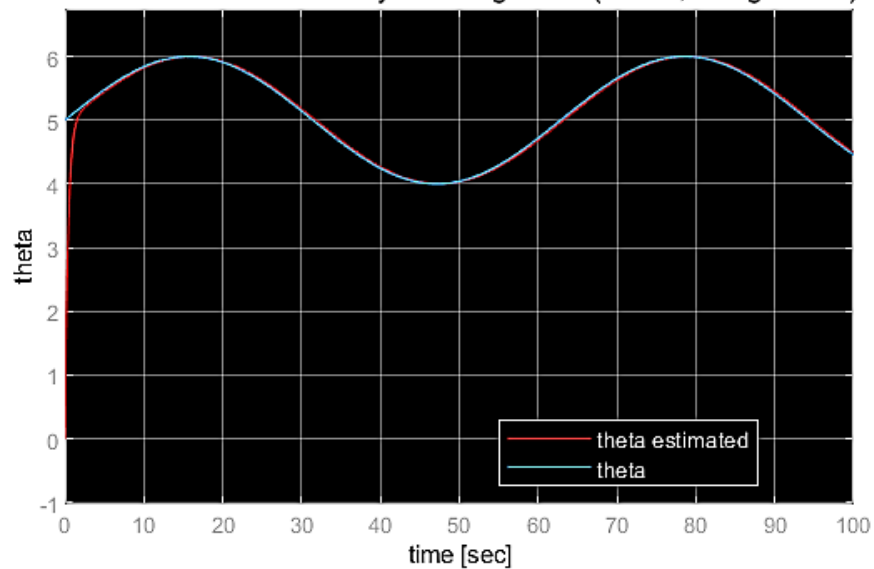
Σχήμα 29. Εκτίμηση παραμέτρων με σ Modification ($\mu = 0$ και $\omega = 10$).

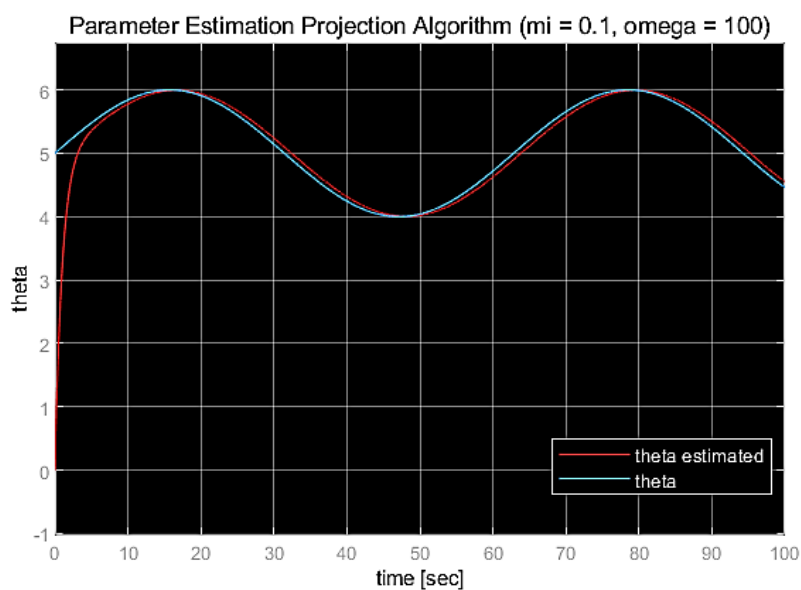
Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε την διαφορά μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων. Παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος της προβολής εγκλωβίζεται από το M_0 εντός του συνόλου προβολής ακαριαία. Ενώ αντίθετα, ο αλγόριθμος **σ Modification** επιτρέπει στην εκτίμηση να μην εγκλωβίζεται καθώς αλλάζει ανάλογα με τον συντελεστή $\sigma(|\theta|)$. Έτσι ο αλγόριθμος μπορεί να συνεχίσει να μέχρι να τερματίσει η διαδικασία αναγνώρισης.



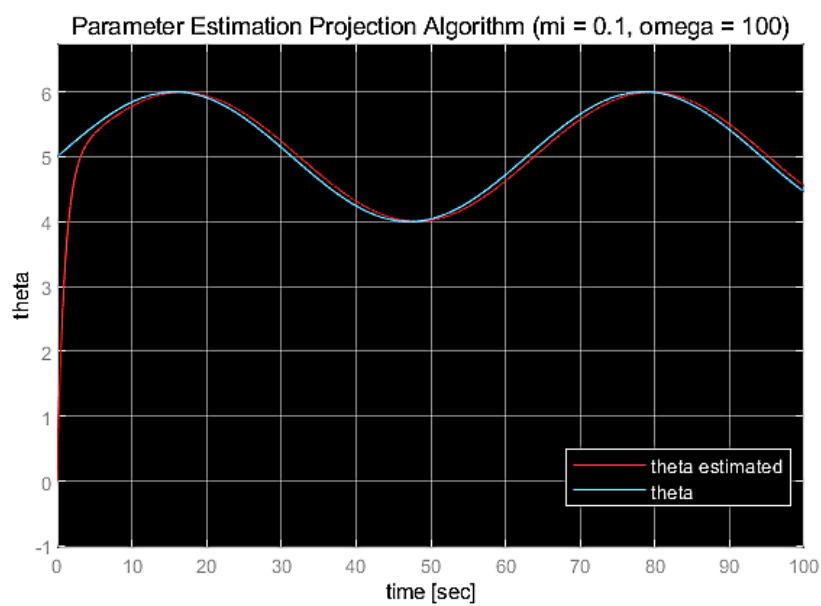
Σχήμα 30. Εκτίμηση παραμέτρων με Προβολή ($\mu = 0.1$ και $\omega = 10$).

Σχήμα 31. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.1$ και $\omega = 10$).Σχήμα 32. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.01$ και $\omega = 10$).Σχήμα 33. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0.01$ και $\omega = 10$).

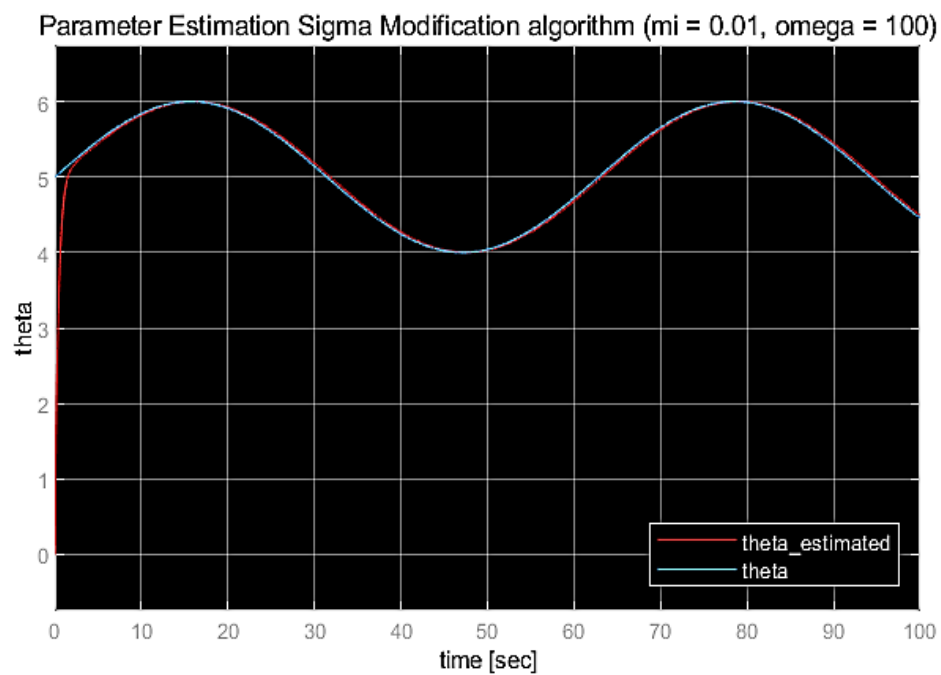
Parameter Estimation Sigma Modification Algorithm ($\mu_i = 0$, $\omega = 100$)Σχήμα 34. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0$ και $\omega = 100$).Parameter Estimation Projection Algorithm ($\mu_i = 0$, $\omega = 100$)Σχήμα 35. Εκτίμηση παραμέτρου με Προβολή ($\mu = 0$ και $\omega = 100$).



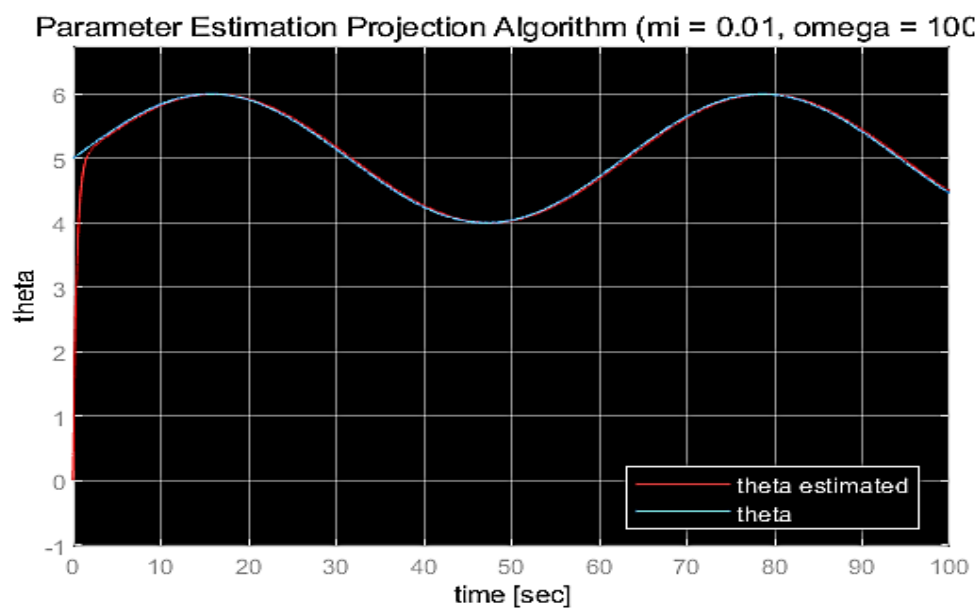
Σχήμα 36. Εκτίμηση παραμέτρων με Προβολή ($\mu = 0.1$ και $\omega = 100$).



Σχήμα 37. Εκτίμηση παραμέτρων με σ Modification ($\mu = 0.1$ και $\omega = 100$).



Σχήμα 38. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.01$ και $\omega = 100$).



Σχήμα 39. Εκτίμηση παραμέτρου με σ Modification ($\mu = 0.01$ και $\omega = 100$).

Βιβλιογραφία

- [1] P. Ioannou, B. Fidan, *Adaptive Control Tutorial*, SIAM Advances in Design and Control, 2006.
- [2] P. Ioannou, J. Sun, *Robust Adaptive Control*, First Edition, Dover Publications, 2012.
- [3] K. J. Astrom, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Second Edition, Dover Publications, 2008.
- [4] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, A. Karimi, *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*, Second Edition, Communications and Control Engineering, Springer, 2011.