Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

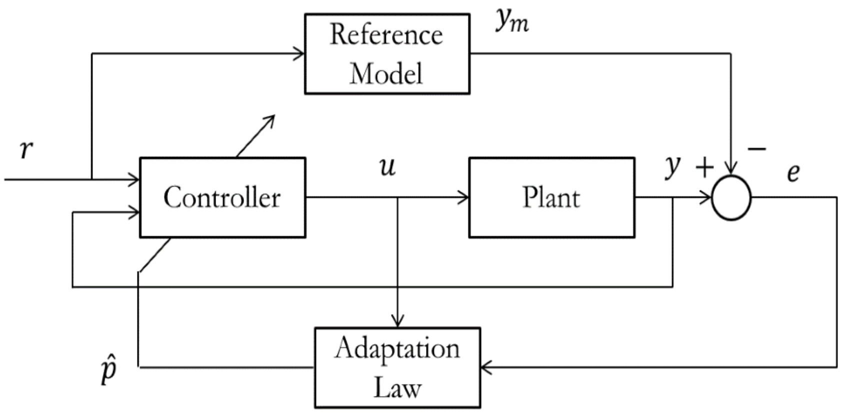
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Προσαρμοστικός, Σθεναρός και Ιεραρχικός Έλεγχος

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο – Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας – 02121208



ΑΘΗΝΑ,

2023

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Άσκηση – 1η

(α) Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα πρώτης τάξης:

$$\dot{x} = ax + bu, x(0) = 0$$

Όπου οι παράμετροι του συστήματος είναι άγνωστοι με το $b > 0$. Θα σχεδιαστεί ένα ευθύ MRAC σχήμα όπου θα σταθεροποιεί το παραπάνω plant με τη εύρεση των κατάλληλων παραμέτρων και να συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική τιμή. Έστω ότι έχουμε το παρακάτω επιθυμητό μοντέλο αναφοράς:

$$\dot{x}_m = -a_m x_m, \qquad a_m > 0$$

Για την σταθεροποίηση του παραπάνω συστήματος θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος ανάδρασης $u = -kx$. Τώρα θα χωρίσουμε την ανάλυση σε δύο μέρη, έτσι ώστε να βρούμε και τις περιοχές σύγκλισης των κερδών.

Έστω ότι έχουμε γνωστές τις παραμέτρους α, b. Τότε θα βρούμε το ιδανικό κέρδος k^* για το οποίο τοποθετείται ο πόλος του συστήματος στην θέση $-\alpha_m$. Το κέρδος που προκύπτει θα είναι το εξής:

$$\dot{x} = ax - bk^* x = (a - bk^*)x$$

$$\Rightarrow a - bk^* = -a_m$$

$$\Rightarrow k^* = \frac{a + a_m}{b}$$

Έτσι το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι ολικά εκθετικά ευσταθές και θα τείνει στο μηδέν, ανεξαρτήτως αρχικής συνθήκης.

Τώρα θα ελέγξουμε την περίπτωση που οι παράμετροι του συστήματος είναι άγνωστοι. Θα προσθαφαιρέσουμε τον όρο bk^*x από το πραγματικό σύστημα. Έτσι θα προκύψει ότι:

$$\dot{x} = ax + bu + bk^*x - bk^*x = (a - bk^*)x + b(u + k^*x)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -a_m x + b(u + k^*x)$$

Το επόμενο βήμα είναι να επιλέξουμε και την αρχική συνθήκη για το μοντέλο αναφοράς, $x_m(0) = 0$. Έτσι θα ισχύει ότι το $x_m(t) = 0 \; \forall \; t \geq 0$. Οπότε, τώρα θα σχεδιάσουμε το μοντέλο εκτίμησης για την κατάσταση x. Για την είσοδο $u = -kx$ θα προκύψει ότι:

$$\dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x} + b(u + kx), \hat{x}(0) = x_m(0) = 0$$

Έτσι το μοντέλο εκτίμησης θα είναι τέτοιο ώστε το $\hat{x}(t) = 0, \forall\, t \geq 0$. Επομένως, τώρα θα ορίσουμε το σφάλμα εκτίμησης της κατάστασης $e = x - \hat{x} = x - x_m = x$. Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε την σχέση του συστήματος ως συνάρτηση του σφάλματος

$$\tilde{k} = k - k^*$$

$$\dot{\tilde{k}} = \dot{k}$$

για να βγάλουμε τον προσαρμοστικό νόμο. Οπότε, θα προκύψει η σχέση:

$$\dot{x} = -a_m x - b\tilde{k}x$$

Με βάση αυτή την σχέση θα ορίσουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση Lyapunov.

$$V(x, \tilde{k}) = \frac{x^2}{2} + b\frac{\tilde{k}^2}{2\gamma}$$

Η παρούσα συνάρτηση είναι θετική και ακτινικά μη φραγμένη καθώς τα $b, \gamma > 0$ έτσι ώστε να ισχύουν τα θεωρήματα ευστάθειας. Το επόμενο βήμα είναι να παραγωγίσουμε την συνάρτηση για να βρούμε τον προσαρμοστικό νόμο:

$$\dot{V}(x, \tilde{k}) = e\dot{e} + b\frac{\tilde{k}\dot{k}}{\gamma} = x\dot{x} + b\frac{\tilde{k}\dot{k}}{\gamma} = -a_m x^2 + b\left(\frac{\dot{k}}{\gamma} - x^2\right)$$

Επιλέγοντας τον νόμο προσαρμογής ως:

$$\dot{k} = \gamma x^2$$

η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov θα γίνει:

$$\dot{V}(e, \tilde{k}) = -a_m x^2 \leq 0$$

Καθώς η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη, τότε συμπεραίνουμε πως η συνάρτηση V θα είναι φθίνουσα. Επειδή είναι θετική και φθίνουσα θα έχει ένα άνω όριο V_∞. Έτσι, έχουμε ότι η $V \in \mathcal{L}_\infty$ και κατ' επέκταση $x, \tilde{k} \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, παρατηρούμε πως και το $\dot{x} \in \mathcal{L}_\infty$ ως άθροισμα φραγμένων συναρτήσεων. Από αυτό το πόρισμα θα προκύψει ότι τα $u, k \in \mathcal{L}_\infty$. Συνεπώς, όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα και έτσι το σύστημα θα είναι ευσταθές. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty < V(0)$$

Οπότε, ολοκληρώνουμε την παράγωγο και θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

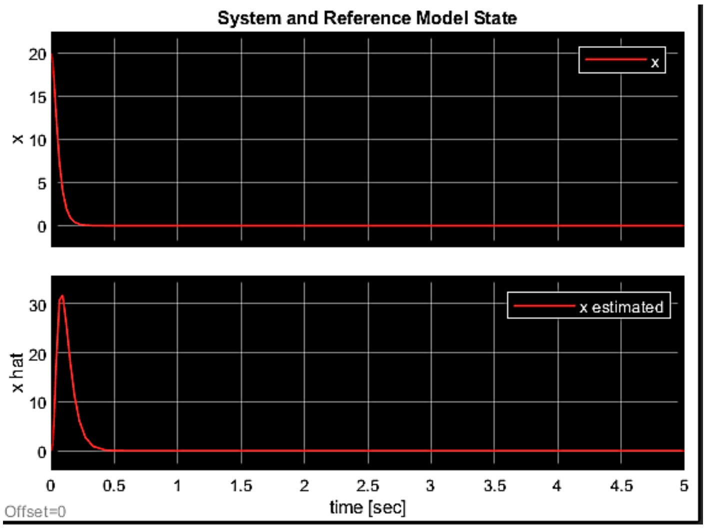
$$\int_0^\infty \dot{V}(e, \tilde{k})dt = V_\infty - V(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty a_m x^2 dt = V(0) - V_\infty$$

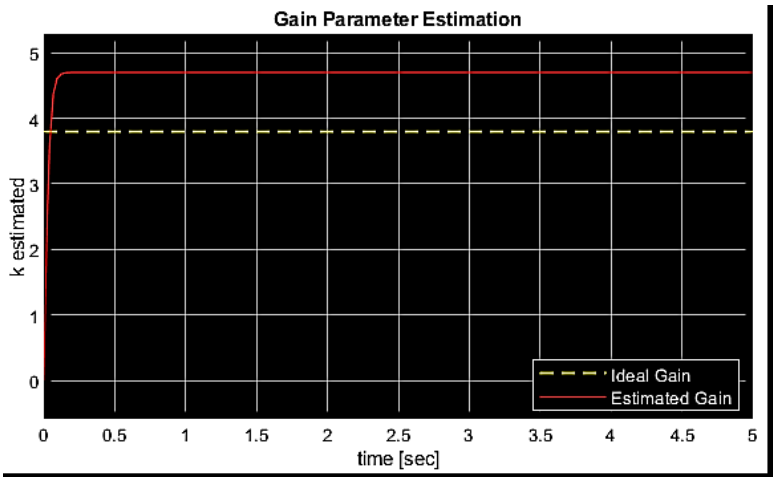
$$\Rightarrow \int_0^\infty x^2 dt = \frac{V(0) - V_\infty}{a_m}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $x \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Άρα, καθώς ισχύει $\dot{x} \in \mathcal{L}_\infty$ και $x \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, τότε από το λήμμα *Barabalat* προκύπτει ότι το $x \to 0$.

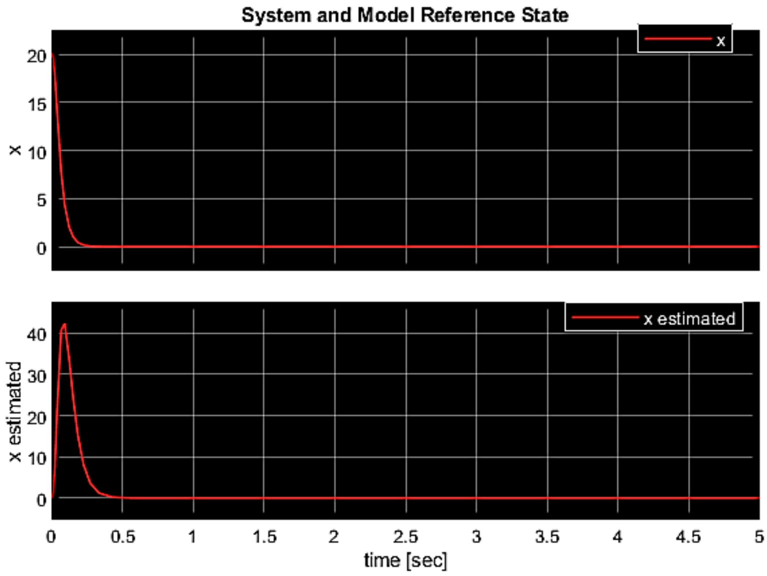
(β) Προσομοιώνοντας το παραπάνω σχήμα διαπιστώθηκε πως η κατάσταση του συστήματος καταφέρνει να σταθεροποιηθεί στο σημείο $x = 0$, ανεξάρτητα από το μοντέλο αναφοράς. Επίσης, αναμενόμενο ήταν το κέρδος να μην συγκλίνει στην ιδανική τιμή, ενώ σε αλλαγή της σταθεράς α παρατηρήθηκε διαφορετική τιμή με ίδια αρχική συνθήκη. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο προσομοιώσεων.



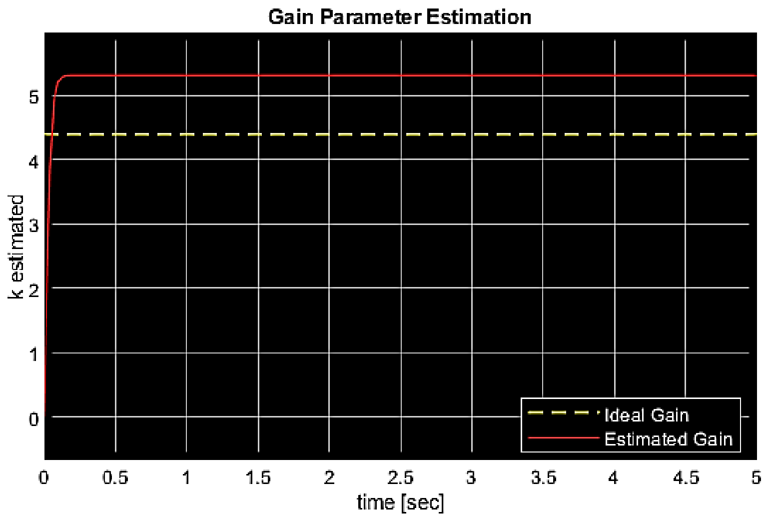
Σχήμα 1. Καταστάσεις x, x_m για $\alpha = -1$.



Σχήμα 2. Εκτίμηση κέρδους ελεγκτή για $\alpha = -1$.



Σχήμα 3. Καταστάσεις x, x_m για $\alpha = 2$.



Σχήμα 4. Εκτίμηση κέρδους ελεγκτή για $\alpha = 2$.

Άσκηση – 2η

Έχουμε το δυναμικό σύστημα πρώτης τάξης του συστήματος γκαζιού ταχύτητας

$$V = \frac{b}{s+a}\theta + d$$

όπου η V είναι η ταχύτητα του οχήματος, θ η γωνία του γκαζιού και d μια διαταραχή του σταθερού φορτίου. Έχουμε ότι οι παράμετροι του συστήματος a, b είναι άγνωστες με το $b > 0$. Επίσης, έχουμε και το μοντέλο αναφοράς

$$V_m = \frac{0.5}{s+0.5}V_s$$

(α) Έστω ότι έχουμε τις παραμέτρους του συστήματος a, b, d γνωστές. Θα σχεδιάσουμε έναν MRC ελεγκτή που θα ικανοποιεί τις παραπάνω προδιαγραφές. Μεταφέρουμε αρχικά τις παραπάνω σχέσεις στον χώρο κατάστασης. Επομένως,

$$\dot{V} = -aV + b\theta + d$$

$$\dot{V}_m = -0.5V_m + 0.5V_s$$

Για την σωστή παρακολούθηση της εξόδου του συστήματος αναφοράς θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος ανάδρασης $\theta = -k^*V + l^*V_s + u^*$. Οπότε, το σύστημα κλειστού βρόχου θα γίνει:

$$\dot{V} = -aV + b\theta + d = -aV + b(-k^*V + l^*V_s + u^*) + d$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -(\alpha + bk^*)V + bl^*V_s + (bu^* + d)$$

Με βάση το μοντέλο αναφοράς και την σχέση κλειστού βρόχου μπορούν να προσδιορισθούν τα κέρδη k^*, l^*, u^* ώστε το πραγματικό σύστημα να διαθέτει όμοια συνάρτηση μεταφοράς με το σύστημα αναφοράς. Έτσι, θα προκύψει ότι:

$$a + bk^* = 0.5$$

$$\Rightarrow k^* = \frac{0.5 - a}{b}$$

$$bl^* = 0.5$$

$$\Rightarrow l^* = \frac{0.5}{b}$$

$$bu^* + d = 0$$

$$\Rightarrow u^* = -\frac{d}{b}$$

(β) Τώρα που έχουμε άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος, ο νόμος ελέγχου θα μετατραπεί στον $\theta = -kV + lV_s + u$, όπου τα k, l, u θα είναι οι εκτιμήσεις των πραγματικών κερδών του προηγούμενου ερωτήματος. Για την εύρεση αυτών των παραμέτρων θα γίνει προσθαφαίρεση του όρου $b(-k^*V + l^*V_s + u^*)$ στο σύστημα. Έτσι, θα προκύψει η εξής μορφή:

$$\dot{V} = \alpha v + b\theta + d - bk^*V + bl^*V_s + bu^* + bk^*V - bl^*V_s - bu^*$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -0.5V + 0.5V_s + b(\theta - k^*V - l^*V_s - u^*)$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το σφάλμα μεταξύ του πραγματικού μοντέλου και του μοντέλου αναφοράς ως $e = V - V_m$. Έτσι θα έχουμε την εξής εξίσωση σφάλματος:

$$\dot{e} = \dot{V} - \dot{V}_m = -0.5V + 0.5V_s + b(\theta - k^*V - l^*V_s - u^*) + 0.5V_m - 0.5V_s$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -0.5e + b(\theta - k^*V - l^*V_s - u^*)$$

Τώρα θα σχεδιαστεί ένα μοντέλο εκτίμησης για το σφάλμα $\hat{e} = \hat{V} - V_m$. Με την εφαρμογή της εισόδου $\theta = -kV + lV_s + u$ θα προκύψει η εξής σχέση για το σφάλμα:

$$\dot{\hat{e}} = -0.5\,\hat{e} + b(\theta + kV - lV_s - u) = -0.5\hat{e}, \qquad \hat{e}(0) = 0$$

Συνεπώς, το μοντέλο εκτίμησης θα είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $\hat{e}(t) = 0, \forall\, t \geq 0$. Έτσι δεν θα χρειαστεί υλοποίηση ενός συστήματος εκτίμησης για το σφάλμα. Κατ' επέκταση προκύπτει πως το σφάλμα θα είναι απλά ένα σφάλμα παρακολούθησης. Ας ορίσουμε τώρα τα σφάλματα των κερδών.

$$\tilde{k} = k - k^*$$

$$\tilde{l} = l - l^*$$

$$\tilde{u} = u - u^*$$

Οπότε, η δυναμική του σφάλματος θα γίνει ως εξής:

$$\dot{e} = -0.5e + b(-\tilde{k}V + \tilde{l}V_s + \tilde{u})$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια συνάρτηση Lyapunov η οποία θα παράξει τους προσαρμοστικούς νόμους για να είναι ευσταθές το σύστημα. Καθώς έχουμε ότι το $b > 0$, τότε η συνάρτηση που θα ορίσουμε θα είναι:

$$V(e, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{u}) = \frac{e^2}{2} + b\left(\frac{\tilde{k}^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{l}^2}{2\gamma_2} + \frac{\tilde{u}^2}{2\gamma_3}\right)$$

Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση θα είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη, καθώς τα $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$. Γνωρίζοντας πως ισχύουν τα

$$\dot{\tilde{k}} = \dot{k}$$

$$\dot{\tilde{l}} = \dot{l}$$

$$\dot{\tilde{u}} = \dot{u}$$

θα παραγωγίσουμε την συνάρτηση για την εύρεση των προσαρμοστικών νόμων. Έτσι θα έχουμε ότι:

$$\dot{V}\left(e,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{u}\right) = e\dot{e} + b\left(\frac{\tilde{k}\dot{k}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}\,\dot{l}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{u}\dot{u}}{\gamma_3}\right)$$

$$\dot{V}\left(e,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{u}\right) = -0.5e^2 + b\tilde{k}\left(\frac{\dot{k}}{\gamma_1} - eV\right) + b\tilde{l}\left(\frac{\dot{l}}{\gamma_2} + eV_s\right) + b\tilde{u}\left(\frac{\dot{u}}{\gamma_3} + e\right)$$

Συνεπώς, με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων:

$$\frac{\dot{k}}{\gamma_1} - eV = 0 \Rightarrow \dot{k} = \gamma_1 eV$$

$$\frac{\dot{l}}{\gamma_2} + eV_s = 0 \Rightarrow \dot{l} = -\gamma_2 eV_s$$

$$\frac{\dot{u}}{\gamma_3} + e = 0 \Rightarrow \dot{u} = -\gamma_3 e$$

η παράγωγος θα γίνει:

$$\dot{V}\left(e,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{u}\right) = -0.5e^2 \leq 0$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει πως η συνάρτηση V είναι φθίνουσα. Επειδή είναι και θετική, τότε $V \in \mathcal{L}_\infty$ και επιπλέον $e, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{u} \in \mathcal{L}_\infty$. Με βάση αυτά θα προκύψει από την εξίσωση του σφάλματος πως τα $\dot{e}, \dot{k}, \dot{l}, \dot{u} \in \mathcal{L}_\infty$ ως άθροισμα – γινόμενο φραγμένων συναρτήσεων. Επίσης, θα προκύψει ότι ισχύει $k, l, u \in \mathcal{L}_\infty$. Επίσης, διαπιστώνουμε πως και τα $V_m, V_s \in \mathcal{L}_\infty$ από τον ορισμό του σφάλματος και του μοντέλου αναφοράς και κατ' επέκταση ισχύει $V, \theta \in \mathcal{L}_\infty$. Οπότε όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα και το σύστημα γενικά θα είναι ευσταθές. Τέλος, γνωρίζουμε πως η παράγωγους της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ημιορισμένη και η συνάρτηση είναι θετική. Οπότε, θα προκύψει πως είναι φραγμένη με άνω όριο το

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty < V(0)$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας την σχέση της παραγώγου θα προκύψει:

$$\int_0^\infty \dot{V}\left(e,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{u}\right)dt = V_\infty - V(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty 0.5e^2 dt = V(0) - V_\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^2 dt = 2(V(0) - V_\infty)$$

Οπότε θα προκύψει ότι το $e \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Έτσι, από το λήμμα *Barbalat* θα έχουμε ότι το $e \to 0$ ασυμπτωτικά. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται εδώ καθώς διαπιστώνουμε πως οι προσαρμοστικοί νόμοι δεν εγγυούνται σύγκλιση των κερδών στις επιθυμητές τιμές του ερωτήματος α. Η σύγκλιση για να επιτευχθεί και το σφάλμα να μηδενίζεται, θα πρέπει το σήμα αναφοράς στο σύστημα να είναι PE. Καθώς τα σήματα αυτά είναι ικανά πλούσια τάξης $n = 3$, τότε θα έχουμε και εκθετική σύγκλιση του e στο μηδέν.

(γ) Τώρα που έχουμε άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος, ο νόμος ελέγχου θα μετατραπεί στον $\theta = -kV + lV_s + u$, όπου τα k, l, u θα είναι οι εκτιμήσεις των ιδανικών κερδών του προηγούμενου ερωτήματος. Έχουμε να σχεδιάσουμε έναν indirect MRAC καθώς χρειάζεται να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος και όχι τα κέρδη. Συνεπώς, οι σχέσεις που περιγράφουν τα ιδανικά κέρδη θα τροποποιηθούν με τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων.

$$k(t) = \frac{0.5 - \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)}$$

$$l(t) = \frac{0.5}{\hat{b}(t)}$$

$$u(t) = -\frac{\hat{d}(t)}{\hat{b}(t)}$$

Τώρα, θα βρούμε τους προσαρμοστικούς νόμους για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος. Έτσι, θα τροποποιήσουμε το ελεγχόμενο σύστημα στην μορφή *SSPM* ως εξής:

$$\dot{V} = -aV + b\theta + d \Rightarrow \dot{V} = -0.5V + (0.5 - a)V + b\theta + d$$

Το μοντέλο εκτίμησης του παραπάνω συστήματος θα προκύψει με την αντικατάσταση των μεγεθών α, b, d με χρήση των παραπάνω εκτιμήσεων. Επομένως θα ισχύει ότι

$$\dot{\hat{V}} = -0.5\,\hat{V} + (0.5 - \hat{a})V\hat{b}\theta + \hat{d}$$

Ως είσοδο ελέγχου έχουμε την σχέση $\theta = -kV + lV_s + u$ και σε συνδυασμό με τις σχέσεις που δίνουν τα κέρδη του ελεγκτή, τότε το μοντέλο εκτίμησης θα γίνει:

$$\dot{\hat{V}} = -0.5\,\hat{V} + 0.5V_s$$

Επιλέγουμε την αρχική συνθήκη $\hat{V}(0) = V_m(0)$ για να έχουμε ταύτιση των δύο μοντέλων $\forall\, t \geq 0$. Επομένως, ορίζοντας το σφάλμα παρακολούθησης θα προκύψει ότι είναι ίδιο με το σφάλμα παρακολούθησης, καθώς $\varepsilon = v - \tilde{V} = V - V_m = e$. Χρησιμοποιώντας τα σφάλματα των εκτιμήσεων:

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$$

$$\tilde{b} = \hat{b} - b$$

$$\tilde{d} = \hat{d} - d$$

προκύπτει η εξής δυναμική του σφάλματος:

$$\dot{e} = \dot{V} - \dot{V}_m = -0.5e + \tilde{\alpha}V - \tilde{b}\theta - \tilde{d}$$

Για να βρούμε τους προσαρμοστικούς νόμους θα ορίσουμε την εξής συνάρτηση Lyapunov η οποία θα είναι θετική και ακτινικά μη φραγμένη. Οπότε, ισχύει ότι:

$$V(e, \tilde{\alpha}, \tilde{b}, \tilde{d}) = \frac{e^2}{2} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{b}^2}{2\gamma_2} + \frac{\tilde{d}^2}{2\gamma_3}$$

όπου τα $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$. Γνωρίζοντας πως ισχύουν τα

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \dot{\alpha}$$

$$\dot{\tilde{b}} = \dot{b}$$

$$\dot{\tilde{d}} = \dot{d}$$

θα παραγωγίσουμε την συνάρτηση ως εξής:

$$\dot{V}(e, \tilde{\alpha}, \tilde{b}, \tilde{d}) = e\dot{e} + \frac{\tilde{\alpha}\dot{\hat{\alpha}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\hat{b}}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{d}\dot{\hat{d}}}{\gamma_3}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(e, \tilde{\alpha}, \tilde{b}, \tilde{d}) = -0.5e^2 + \tilde{\alpha}\left(\frac{\dot{\hat{\alpha}}}{\gamma_1} + eV\right) + \tilde{b}\left(\frac{\dot{\hat{b}}}{\gamma_2} - e\theta\right) + \tilde{d}\left(\frac{\dot{\hat{d}}}{\gamma_3} - e\right)$$

Επομένως, οι προσαρμοστικοί νόμοι που θα προκύψουν θα είναι:

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_1 eV$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 e\theta$$

$$\dot{\hat{d}} = \gamma_3 e$$

και κατ' επέκταση θα ισχύει ότι η παράγωγος θα είναι αρνητικά ημιορισμένη διότι:

$$\dot{V}(e,\tilde{a},\tilde{b},\tilde{d}) = -0.5e^2 \leq 0$$

Έτσι, θα προκύψει ότι η συνάρτηση V θα είναι φθίνουσα και θετική με αποτέλεσμα η $V \in \mathcal{L}_\infty$. Από τον ορισμό της συνάρτησης θα προκύψει επίσης ότι $e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{d} \in \mathcal{L}_\infty$. Επίσης, θα ισχύει ότι $\hat{a}, \hat{b}, \hat{d} \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, από τον ορισμό του σφάλματος και μοντέλου αναφοράς ισχύει $V_m, V_s \in \mathcal{L}_\infty$. Τέλος, γνωρίζουμε πως η παράγωγους της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ημιορισμένη και η συνάρτηση είναι θετική. Οπότε, θα προκύψει πως είναι φραγμένη με άνω όριο το

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty < V(0)$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας την σχέση της παραγώγου θα προκύψει:

$$\int_0^\infty \dot{V}(e,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{u})dt = V_\infty - V(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty 0.5e^2 dt = V(0) - V_\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^2 dt = 2(V(0) - V_\infty)$$

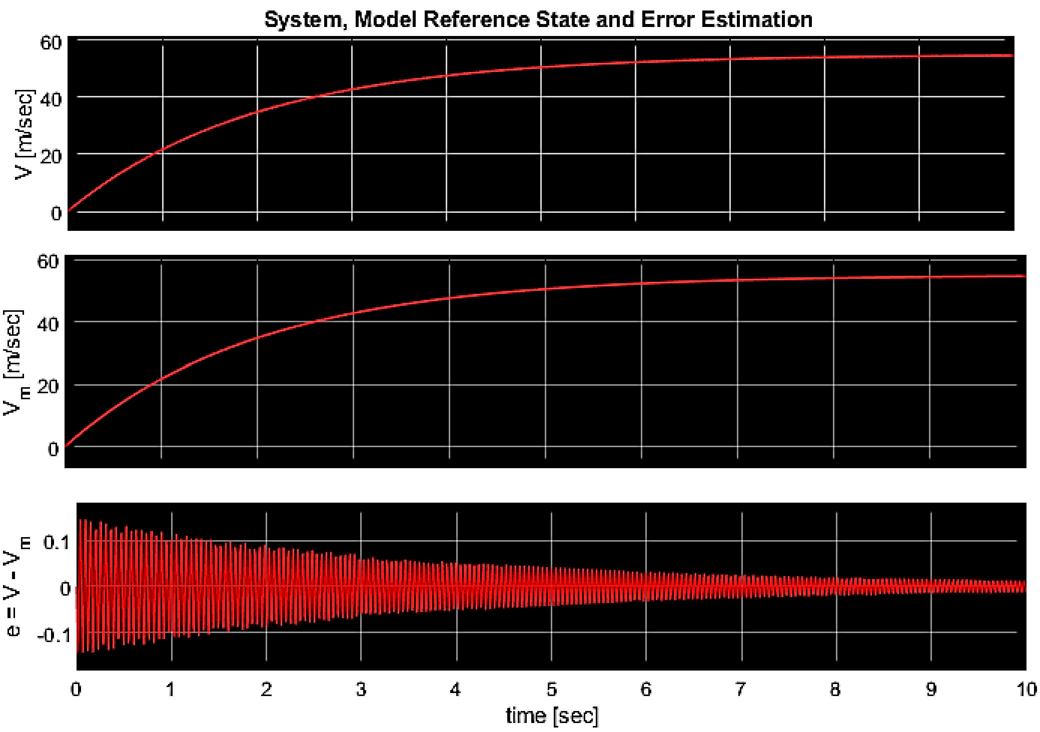
Οπότε θα προκύψει ότι το $e \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Ωστόσο, θα πρέπει να σιγουρέψουμε πως και η είσοδος θ πρέπει να είναι φράγμα το οποίο συνεπάγεται πως τα $k, l, u \in \mathcal{L}_\infty$. Από τον ορισμό των κερδών του ερωτήματος α παρατηρούμε πως στο κέρδος u υπάρχει διαίρεση της παραμέτρου $\hat{b}$. Επομένως, θα πρέπει να τροποποιηθεί ο προσαρμοστικός νόμος ελέγχου έτσι ώστε να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής. Οπότε μία ικανή λύση είναι η χρήση της προβολής στο σύστημα. Έτσι, με την επιλογή μιας θετικής σταθεράς $b_m > 0$ σχετικά μικρής, θα προκύψει ο εξής νέος νόμος:

$$\dot{\hat{b}} = \Pr(\gamma_2 e\theta) = \begin{cases} \gamma_2 e\theta, Αν\ (\hat{b} > b_m)\ ή\ (\hat{b} = b_m\ και\ e\theta \geq 0) \\ 0, \quad αλλιώς \end{cases}$$

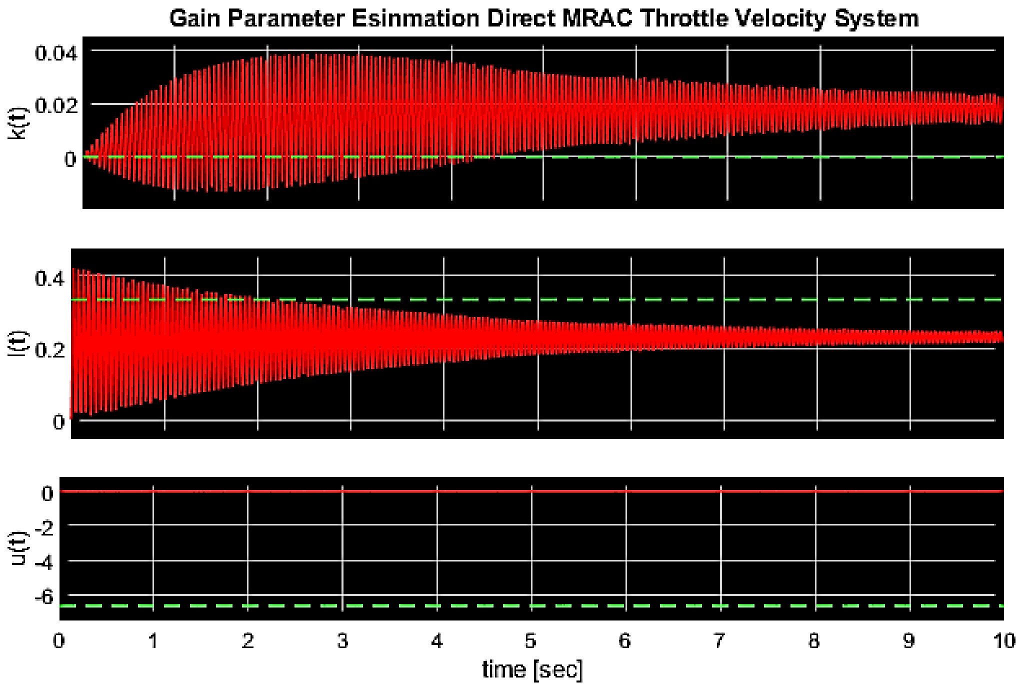
Η τροποποίηση του προσαρμοστικού νόμου δεν επηρεάζει τις ιδιότητες σύγκλισης της συνάρτησης Lyapunov, αλλά τις βελτιώνει στα άκρα του κυρτού συνόλου, με την προϋπόθεση η αρχική εκτίμηση να βρίσκεται εντός του συνόλου. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει ότι το $b(0) \geq b_m$. Έτσι θα έχουμε ότι τα $k, l, u, \theta \in \mathcal{L}_\infty$ και από την δυναμική του σφάλματος θα ισχύει $\dot{\hat{a}}, \dot{\hat{b}}, \dot{\hat{d}}, \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα έχουμε ότι όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα. Οπότε, καθώς έχουμε ότι το $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ και $e \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, τότε από το λήμμα *Barbalat* το σφάλμα $e \to 0$ ασυμπτωτικά. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται εδώ καθώς διαπιστώνουμε πως οι προσαρμοστικοί νόμοι δεν εγγυούνται σύγκλιση των κερδών στις επιθυμητές τιμές του ερωτήματος α. Η σύγκλιση για να επιτευχθεί και το σφάλμα να μηδενίζεται, θα πρέπει το σήμα αναφοράς στο σύστημα να είναι PE. Καθώς τα σήματα αυτά είναι ικανά πλούσια τάξης $n = 3$, τότε θα έχουμε και εκθετική σύγκλιση του e στο μηδέν.

(δ) Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις των ελεγκτών των ερωτημάτων (β) και (γ). Παρατηρούμε πως και ο άμεσος και ο έμμεσος προσαρμοστικός ελεγκτή καταφέρνουν τον στόχο ελέγχου τους τέθηκε, καθώς έχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος.

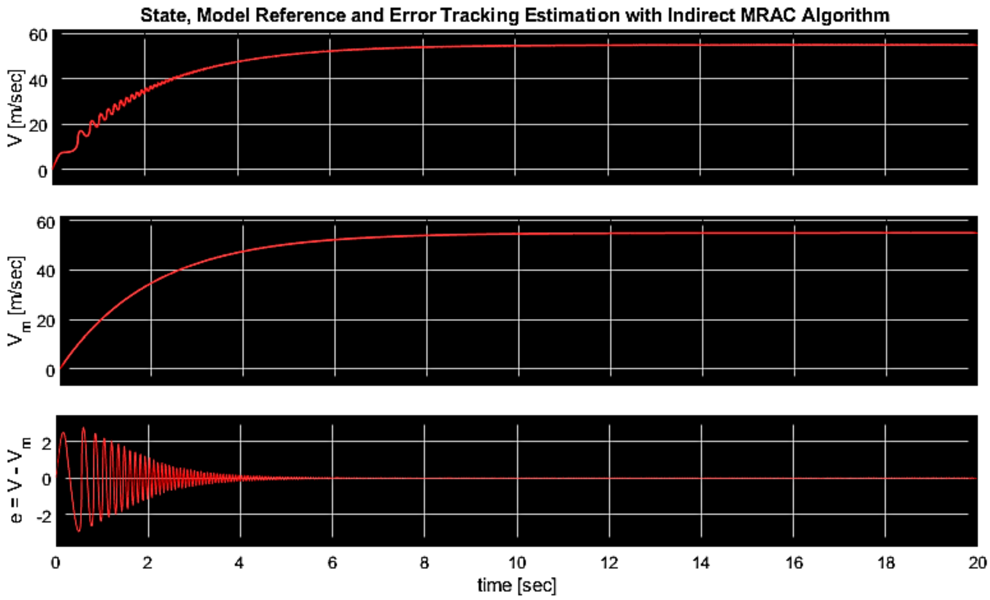
(i) Για επιλογή των παραμέτρων $\alpha = 0.5, b = 1.5 \; και \; d = 10$, προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα και των δύο μεθόδων ελέγχου:



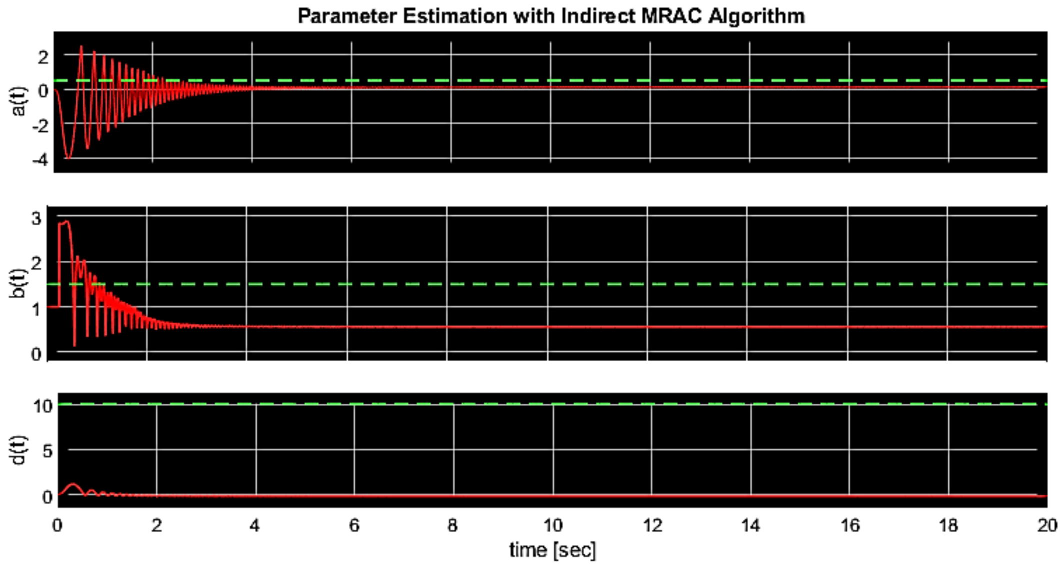
Σχήμα 5. Καταστάσεις V, V_m και το σφάλμα παρακολούθησης $e = V - V_m$ άμεσου MRAC.



Σχήμα 6. Εκτίμηση κερδών ελεγκτή άμεσου MRAC.

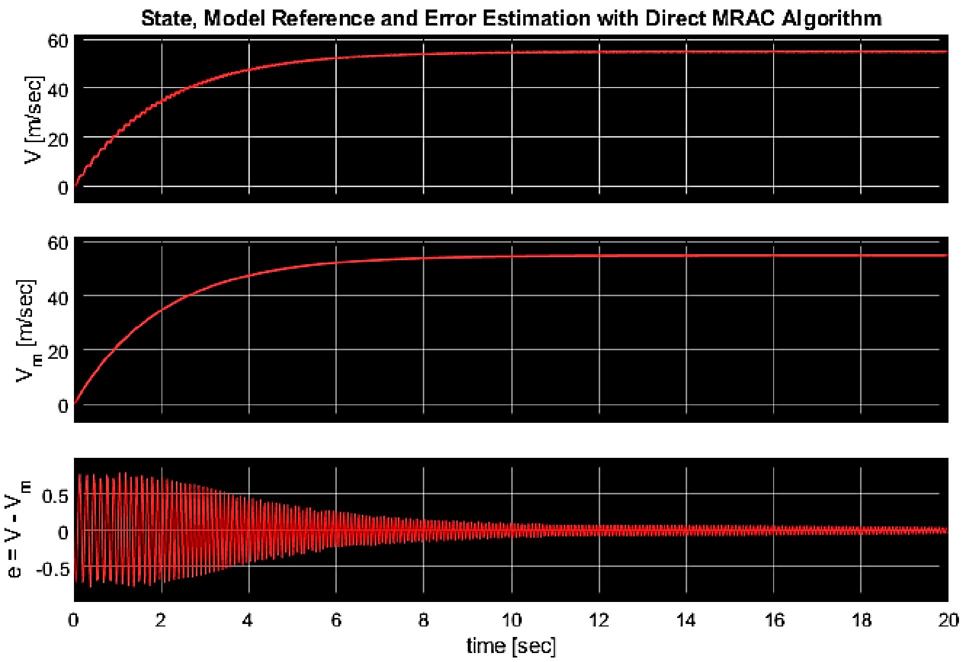


Σχήμα 7. Καταστάσεις V, V_m και το σφάλμα παρακολούθησης $e = V - V_m$ έμμεσου MRAC.

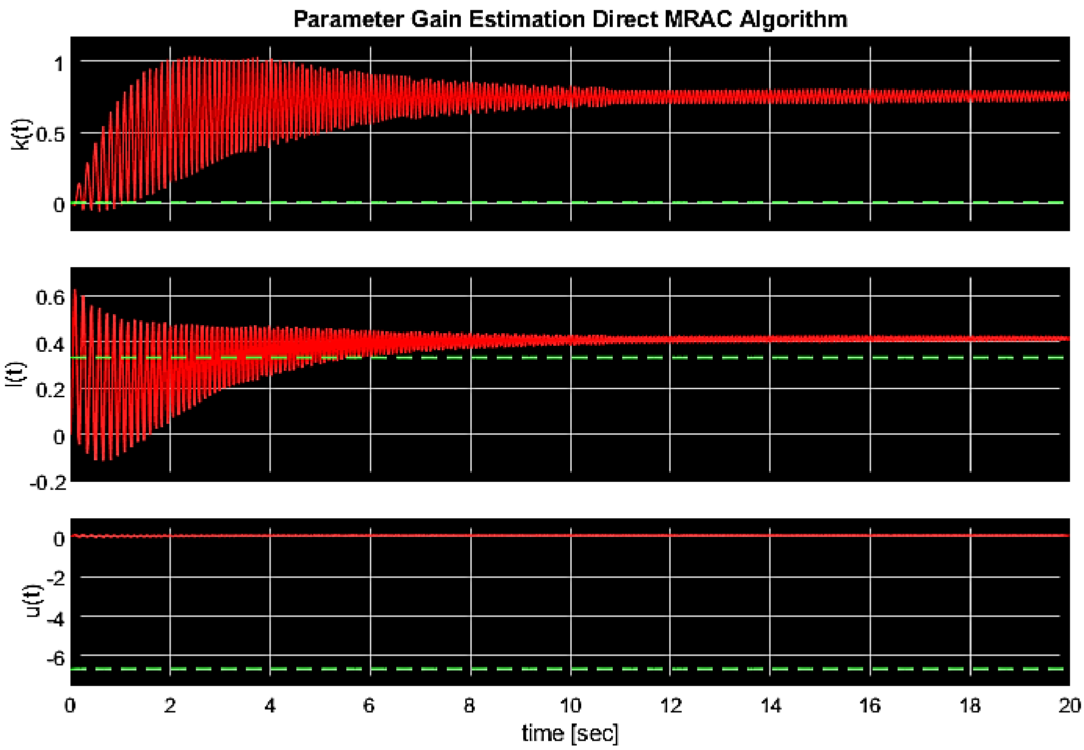


Σχήμα 8. Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος με τον ελεγκτή έμμεσου MRAC.

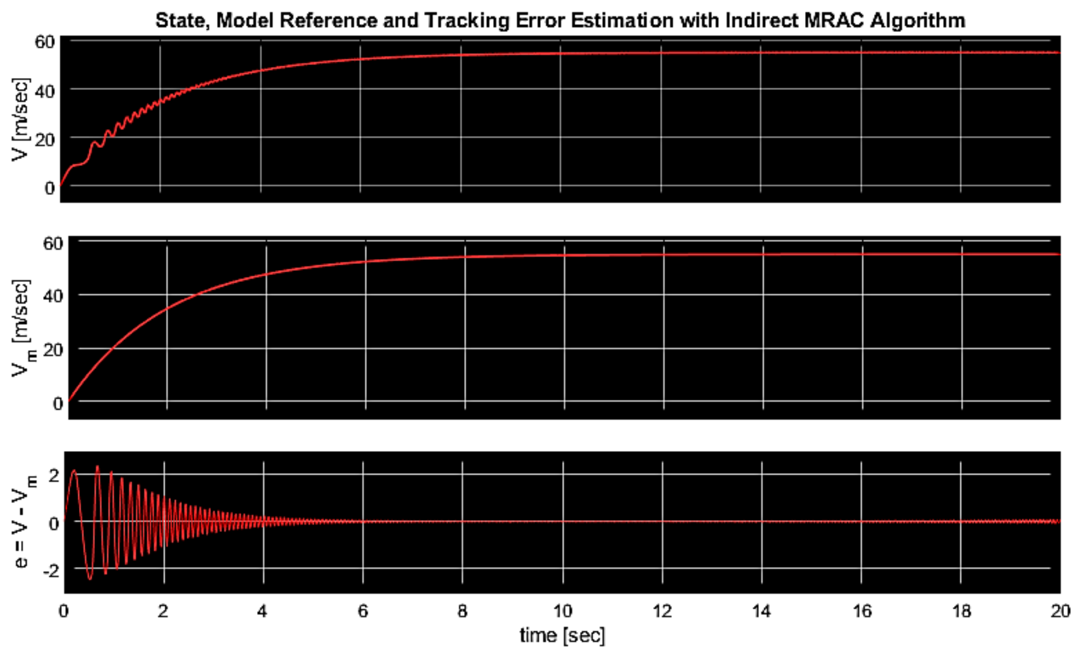
(ii) Για επιλογή των παραμέτρων $\alpha = 0.5 + \frac{0.04}{1+V}, b = 1.5\ \kappa\alpha\iota\ d = 0.2 + \sin(0.02t)$, προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα και των δύο μεθόδων ελέγχου:



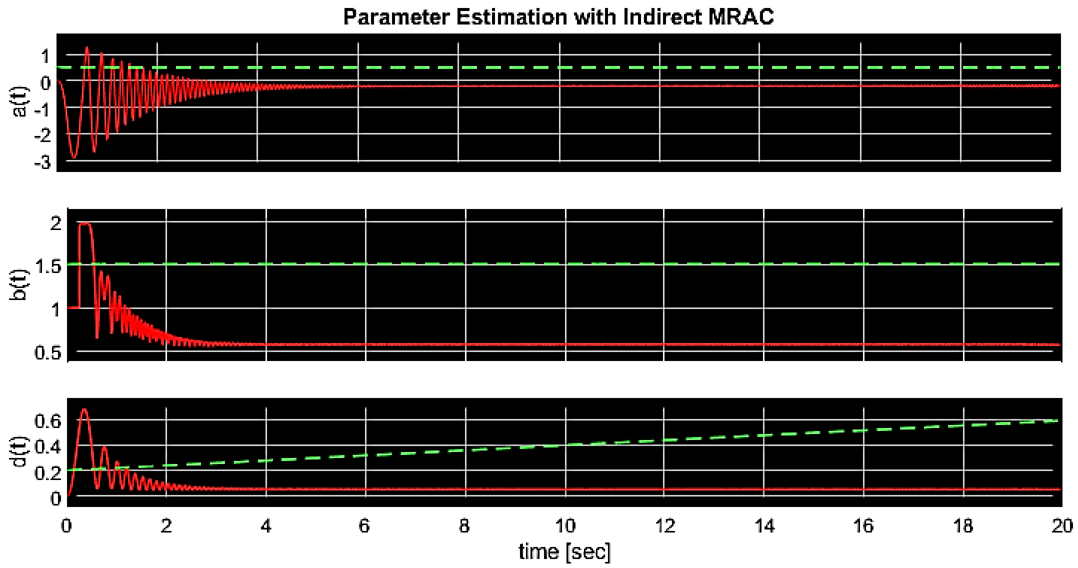
Σχήμα 9. Καταστάσεις V, V_m και το σφάλμα παρακολούθησης $e = V - V_m$ άμεσου MRAC.



Σχήμα 10. Εκτίμηση κερδών ελεγκτή άμεσου MRAC



Σχήμα 11. Καταστάσεις V, V_m και το σφάλμα παρακολούθησης $e = V - V_m$ έμμεσου MRAC.



Σχήμα 12. Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος με τον ελεγκτή έμμεσου.

Αυτό που παρατηρούμε και από τις δύο μεθόδους προσαρμοστικού ελέγχου είναι πως δεν έχουμε ούτε σύγκλιση των κερδών στις ιδανικές τιμές, ούτε των παραμέτρων στις ιδανικές τιμές του συστήματος. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς η είσοδος $r = 55$ που επιβάλουμε στο σύστημα δεν είναι περιέχει συχνότητες. Συνεπώς, δεν θα έχουμε εκθετική σύγκλιση του σφάλματος παρακολούθησης στο μηδέν. Αντίστοιχα και τα σφάλματα των παραμέτρων δεν θα έχουν εκθετική σύγκλιση στο μηδέν.

Άσκηση – 3η

Έχουμε το σύστημα δεύτερης τάξης:

$$y_p = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u_p$$

όπου οι παράμετροι a_0, a_1, b_0, b_1 είναι άγνωστοι και επιπλέον ισχύει ότι τα $b_0, b_1 > 0$. Επιπλέον, έχουμε και το μοντέλο αναφοράς

$$y_m = \frac{4}{s+5} r$$

(α) Έστω ότι οι παράμετροι του συστήματος είναι γνωστοί. Τότε θα σχεδιάσουμε έναν *MRC* κανόνα για τον οποίο θα έχουμε ευστάθεια στο σύστημα κλειστού βρόχου και θα ισχύει $y_p \to y_m$ όταν το $t \to \infty$. Επομένως, για να ξεκινήσουμε την σχεδίαση του *MRC* ελεγκτή, θα πρέπει να ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις. Αυτές περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω:

I. Το πολυώνυμο του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς του ελεγχόμενου συστήματος να είναι *monic* και *Hurwitz*, ενώ το πρόσημο του κέρδους υψηλών συχνοτήτων είναι γνωστό.
II. Ο σχετικός βαθμός του πραγματικού συστήματος και μοντέλου αναφοράς πρέπει να είναι γνωστός και κοινός.
III. Είναι γνωστό ένα άνω φράγμα της τάξης του συστήματος.
IV. Το μοντέλο αναφοράς αποτελείται από *monic* και *Hurwitz* πολυώνυμα, με τον βαθμό του παρονομαστή να είναι κάτω από το γνωστό άνω φράγμα.

Καθώς γνωρίζουμε πως τα $b_0, b_1 > 0$, τότε το πολυώνυμο του αριθμητή είναι *monic* και *Hurwitz*. Συνεπώς θα ισχύουν και οι υπόλοιπες προδιαγραφές του συστήματος. Επιπλέον, ο σχετικός βαθμός μεταξύ του πραγματικού μοντέλου και του μοντέλου αναφοράς είναι $n^* = 1$. Οπότε θα ορίσουμε ένα φίλτρο πρώτης τάξης $\Lambda(s) = s + \lambda$, με το $\lambda > 0$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ο αριθμητής του μοντέλου αναφοράς είναι $Z_m(s) = 1$, καθώς το $k_m = 4$. Αυτό αποτελεί προϋπόθεση για το φίλτρο, καθώς θα πρέπει να έχει την μορφή:

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

Επομένως, με βάση την τάξη θα ορίσουμε τον εξής ελεγκτή για το σύστημα:

$$u_p = \theta_1^* \frac{1}{s+\lambda} u_p + \theta_2^* \frac{1}{s+\lambda} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* r$$

Αντικαθιστώντας τον παραπάνω νόμο στην συνάρτηση μεταφοράς, θα βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου. Επομένως, έχουμε ότι:

$$y_p = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \left(\theta_1^* \frac{1}{s+\lambda} u_p + \theta_2^* \frac{1}{s+\lambda} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* r \right)$$

$$= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \theta_1^* \frac{1}{s+\lambda} u_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \theta_2^* \frac{1}{s+\lambda} y_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \theta_3^* y_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} c_0^* r$$

$$= \theta_1^* \frac{1}{s+\lambda} y_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \theta_2^* \frac{1}{s+\lambda} y_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \theta_3^* y_p + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} c_0^* r$$

$$\Rightarrow \left(1 - \theta_1^* \frac{1}{s+\lambda} - \theta_2^* \frac{b_1 s + b_0}{(s^2 + a_1 s + a_0)(s+\lambda)} - \theta_3^* \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}\right) y_p = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} c_0^* r$$

$$\Rightarrow \frac{y_p}{r} = \frac{k_p c_0^*(s+b)(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)(s+\lambda-\theta_1^*) - k_p(s+b)(\theta_2^*+\theta_3^*(s+\lambda))}$$

όπου το $k_p = b_1$ και το $b = b_0/b_1$. Το επόμενο βήμα είναι να εξισωθεί η παραγόμενη συνάρτηση μεταφοράς με αυτή του μοντέλου αναφοράς. Έτσι, θα βρεθούν οι παράμετροι του συστήματος και να σχεδιαστεί ο *MRC* ελεγκτής. Οπότε έχουμε ότι:

$$\frac{y_p}{r} = \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} = \frac{y_m}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^* k_p(s+b)(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)(s+\lambda-\theta_1^*) - k_p(s+b)\big(\theta_2^*+\theta_3^*(s+\lambda)\big)} = \frac{4}{s+5}$$

Από αυτή την σχέση θα προκύψει ότι:

$$c_0^* k_p = k_m = 4 \Rightarrow c_0^* = \frac{4}{b_1}$$

$$(s^2+a_1 s+a_0)(s+\lambda-\theta_1^*) - k_p(s+b)\left(\theta_2^*+\theta_3^*(s+\lambda)\right) = (s+b)(s+\lambda)(s+5)$$

$$\Rightarrow \big(a_1+\lambda-\theta_1^*-k_p\theta_3^*\big)s^2 + \big(a_0+a_1(\lambda-\theta_1^*)-k_p(\theta_2^*+\theta_3^*\lambda)\big)s + a_0(\lambda-\theta_1^*) - k_p b(\theta_2^*+\theta_3^*\lambda)$$
$$= (b+\lambda+5)s^2 + (5\lambda+5b+\lambda b)s + 5\lambda b$$

Πρόκυψε η παραπάνω ισότητα πολυωνύμων. Οπότε το επόμενο βήμα είναι να εξισώσουμε τις παραμέτρους, έτσι ώστε να βρούμε τα θ_i^*. Επομένως ισχύει ότι:

$$a_1+\lambda-\theta_1^*-k_p\theta_3^* = b+\lambda+5$$

$$a_0+a_1(\lambda-\theta_1^*)-k_p(\theta_2^*+\theta_3^*\lambda) = 5\lambda+5b+\lambda b$$

$$a_0(\lambda-\theta_1^*)-k_p b(\theta_2^*+\theta_3^*\lambda) = 5\lambda b$$

Λύνοντας τις σχέσεις ως προς τα θ_i^* σε μητρωική μορφή θα προκύψει το εξής σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -k_p(\lambda+b) \\ -a_0 & -k_p b & -k_p b\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+5-a_1 \\ 5\lambda+5b+\lambda b-a_0-a_1\lambda \\ 5\lambda b-\alpha_0\lambda \end{bmatrix}$$

Για να προκύψει λύση στο παραπάνω σύστημα θα πρέπει να εξετάσουμε την ορίζουσα του πίνακα A. Επομένως, έχουμε ότι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -k_p(\lambda+b) \\ -a_0 & -k_p b & -k_p b\lambda \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -k_p & -k_p(\lambda+b) \\ -k_p b & -k_p b\lambda \end{vmatrix} - k_p \begin{vmatrix} -a_1 & -k_p \\ -a_0 & -k_p b \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = k_p^2(b^2 + a_0 - a_1 b)$$

Για να έχουμε μοναδική λύση στο σύστημα θα πρέπει να ισχύει ότι το $b^2 - a_1 b + a_0 \neq 0$. Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι το $s = -b$ θα αποτελεί και πόλο και μηδενικό του αρχικού συστήματος και η λύση του προβλήματος MRC δεν θα είναι μοναδική. Όταν όμως δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε το πρόβλημα του MRC μπορεί να επιλυθεί με μοναδική λύση, η οποία είναι:

$$c_0^* = \frac{4}{b_1}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -k_p(\lambda + b) \\ -a_0 & -k_p b & -k_p b\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b + 5 - a_1 \\ 5\lambda + 5b + \lambda b - a_0 - a_1\lambda \\ 5\lambda b - \alpha_0\lambda \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας τα θ_i^*, c_0^* από την παραπάνω σχέση, θα μπορέσει να υλοποιηθεί ο ελεγκτής ως εξής:

$$\dot{\omega}_1 = -\lambda\omega_1 + u_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -\lambda\omega_2 + y_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$u_p = \theta_1^*\omega_1 + \theta_2^*\omega_2 + \theta_3^* y_p + c_0^* r, \quad \omega_1(0) = 0$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε πως οι παράμετροι του συστήματος είναι άγνωστοι με τα $b_i > 0$. Συνεπώς, θα σχεδιάσουμε ένα $MRAC$ σχήμα ώστε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος. Καθώς έχουμε σχετικό βαθμό $n^* = 1$, τότε, θα αναλύσουμε το παραπάνω state space model, ώστε να αποδειχθεί ο προσαρμοστικός νόμος. Επομένως, έχουμε το σύστημα και τον νόμο ελέγχου:

$$\dot{\omega}_1 = -\lambda\omega_1 + u_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -\lambda\omega_2 + y_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$u_p = {\theta^*}^T\omega, \quad \omega_1(0) = 0$$

όπου $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, c_0^*]^T$ και $\omega = \left[\omega_1, \omega_2, y_p, r\right]^T$. Έτσι, θα ορίσουμε το γενικό σχήμα

$$\dot{Y}_c = A_0 Y_c + B_c u_p$$

$$y_p = C_c^T Y_c$$

$$u_p = u^T \omega$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\dot{Y}_c = A_c Y_c + B_c c_0^* r + B_c\big(u_p - {\theta^*}^T \omega\big), \quad Y_c(0) = Y_0$$

$$y_p = C_c^T Y_c$$

Έτσι, θα ορίσουμε τα δύο σφάλματα $e = Y_c - Y_m$ και $e_1 = y_p - y_m$, όπου το Y_m αποτελεί την nominal κατάσταση του μοντέλου αναφοράς. Συνεπώς το σφάλμα παρακολούθησης που θα προκύψει θα είναι:

$$\dot{e} = A_c \dot{e} + B_c\big(u_p - {\theta^*}^T \omega\big), \quad e(0) = e_0$$

$$e_1 = C_c^T e$$

Έχουμε ότι:

$$e_1 = W_m(s)\rho^*\big(u_p - {\theta^*}^T \omega\big) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} \frac{1}{c_0^*} \left(u_p - {\theta^*}^T \omega\right)$$

Παρατηρούμε πως προκύπτει ένα bilinear SPM. Παίρνοντας την εκτίμηση

$$\hat{e}_1 = W_m(s)\rho\big(u_p - \theta^T \omega\big) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} c_0^* \left(u_p - \theta^T \omega\right)$$

Μπορούμε να λάβουμε το εξής σύστημα:

$$\dot{e} = A_c \dot{e} + \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega, \quad e(0) = e_0$$

$$e_1 = C_c^T e$$

Επειδή το $W_m(s)$ είναι SPR και ο πίνακας A_c ευσταθής, τότε μπορούμε να ορίσουμε την εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V\big(\tilde{\theta}, e\big) = \frac{e^T P_c e}{2} + \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*|$$

όπου ο πίνακας $\Gamma = \Gamma^T = diag\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\} > 0$ και ο πίνακας $P_c = P_c^T > 0$ ο οποίος ικανοποιεί τις εξής αλγεβρικές σχέσεις:

$$P_c A_c + A_c^T P_c = -q q^T - v_c L_c$$

$$P_C = \bar{B}_c C_c$$

όπου το q είναι ένα διάνυσμα και ο πίνακας $L_c = L_c^T > 0$ και η $v_c > 0$ είναι μια μικρή σταθερά, που έχουν οριστεί από το λήμμα ΜΚΥ. Έτσι, η παράγωγος θα γίνει:

$$\dot{V}(\tilde{\theta},e) = -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e^T P_c \overline{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*|$$

$$\dot{V}(\tilde{\theta},e) = -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e + e_1 |\rho^*| sgn(\rho^*) \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*|$$

Για να οριστεί ο προσαρμοστικός νόμος θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$e_1 |\rho^*| sgn(\rho^*) \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*| = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*| = -e_1 |\rho^*| sgn(\rho^*) \tilde{\theta}^T \omega$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\Gamma e_1 \omega sgn(\rho^*)$$

Έτσι θα προκύψει η εξής μορφή της παραγώγου

$$\dot{V}(\tilde{\theta},e) = -\frac{e^T q q^T e}{2} - \frac{v_c}{2} e^T L_c e \leq 0$$

Συνεπώς, αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι η συνάρτηση V είναι θετική, φθίνουσα και ακτινικά μη φραγμένη. Επομένως, θα ισχύει ότι $V \in \mathcal{L}_\infty$ και κατ' επέκταση $e, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$. Επειδή το $e = Y_c - Y_m$ και το $Y_m \in \mathcal{L}_\infty$, τότε και η $Y_c \in \mathcal{L}_\infty$. Αυτό θα σημαίνει πως και τα σήματα $x_p, y_p, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}_\infty$. Επειδή έχουμε το $u_p = \theta^T \omega$ και τα $\theta, \omega \in \mathcal{L}_\infty$, τότε και το $u_p \in \mathcal{L}_\infty$. Έτσι, όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα. Το επόμενο βήμα είναι να δούμε πως το σφάλμα παρακολούθησης $e_1 = y_p - y_m \to 0$ όταν το $t \to \infty$. Καθώς η συνάρτηση V είναι φθίνουσα με αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο, τότε θα έχουμε ότι ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = V_\infty < V(0)$$

Οπότε, εάν ολοκληρώσουμε την σχέση της παραγώγου, θα πάρουμε ότι:

$$\int_0^\infty \dot{V}(\tilde{\theta},e) dt = V_\infty - V(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (e^T q q^T e + v_c e^T L_c e) dt = 2(V(0) - V_\infty)$$

Εάν το $qq^T = Q = Q^T > 0$,τότε μπορούμε να φράξουμε την παραπάνω σχέση με τις ελάχιστες ιδιοτιμές των πινάκων που προκύπτουν. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty (e^T q q^T e + v_c e^T L_c e) dt \geq \int_0^\infty \left(|e|^2 \lambda_{min}(Q) + v_c |e|^2 \lambda_{min}(L_c) \right) dt$$

$$= \left(\lambda_{min}(Q) + v_c\lambda_{min}(L_c)\right)\int_0^\infty |e|^2 dt$$

Επομένως, θα έχουμε ότι ισχύει:

$$2(V(0) - V_\infty) \geq \left(\lambda_{min}(Q) + v_c\lambda_{min}(L_c)\right)\int_0^\infty |e|^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |e|^2 dt \leq \frac{2(V(0) - V_\infty)}{\lambda_{min}(Q) + v_c\lambda_{min}(L_c)}$$

Συνεπώς, αυτό που αποδείξαμε είναι ότι το $e \in \mathcal{L}_2$ και επιπλέον θα ισχύει ότι $e_1 \in \mathcal{L}_2$. Καθώς γνωρίζουμε ότι τα $\theta, \omega, e \in \mathcal{L}_\infty$,τότε θα έχουμε ότι και τα $\dot{e}, \dot{e}_1 \in \mathcal{L}_\infty$. Καθώς έχουμε ότι το $e_1 \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ και $\dot{e}_1 \in \mathcal{L}_\infty$, τότε από το λήμμα *Barbalat* τότε θα έχουμε ότι το $e_1 \to 0$ καθώς το $t \to \infty$.

Επομένως για το παρών σύστημα θα έχουμε τον *MRAC* που έχει το ακόλουθο σχήμα:

$$\dot{\omega}_1 = -\lambda\omega_1 + u_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -\lambda\omega_2 + y_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$u_p = \theta^{*T}\omega, \quad \omega_1(0) = 0$$

με τον προσαρμοστικό νόμο

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_1 \omega sgn\left(\frac{k_p}{k_m}\right)$$

Καθώς το $\frac{k_p}{k_m} = \frac{b_1}{4} > 0$, τότε, ο προσαρμοστικός νόμος θα γίνει:

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_1 \omega$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{c}_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} e_1 \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ y_p \\ r \end{bmatrix}$$

Οπότε, οι προσαρμοστικοί νόμοι για τις παραμέτρους του συστήματος θα είναι:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e_1 \omega_1$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2 e_1 \omega_2$$

$$\dot{\theta}_3 = -\gamma_3 e_1 y_p$$

$$\dot{c}_0 = -\gamma_4 e_1 r$$

Άρα, αυτό που διαπιστώνεται από τον παραπάνω νόμο είναι ότι :

I. Όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα και το σφάλμα e_1 συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 0 για κάθε είσοδο αναφοράς $r \in \mathcal{L}_\infty$.

II. Αν το σήμα αναφοράς είναι ικανά πλούσιο τάξης $2n$, $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$ και τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή του ελεγχόμενου συστήματος δεν διαθέτουν κοινούς όρους, τότε το σφάλμα $|\tilde{\theta}| = |\theta - \theta^*|$ και το σφάλμα e_1 συγκλίνουν εκθετικά στο 0.

(γ) Έχουμε τις τιμές $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, b_1 = 1 \; \kappa\alpha\iota \; b_0 > 0$. Οπότε το σύστημα θα γίνει:

$$y_p = \frac{s + b_0}{s^2 - 1} u_p$$

Οπότε, αντικαθιστούμε και τις τιμές στις σχέσεις του ερωτήματος (α). Άρα, θα έχουμε:

$$c_0^* = k_p = 4$$

$$(s^2 - 1)(s + \lambda - \theta_1^*) - (s + b)\big(\theta_2^* + \theta_3^*(s + \lambda)\big) = (s + b)(s + \lambda)(s + 5)$$

$$\Rightarrow \; (\lambda - \theta_1^* - \theta_3^*)s^2 + (-1 - (\theta_2^* + \theta_3^*\lambda))s - (\lambda - \theta_1^*) - b(\theta_2^* + \theta_3^*\lambda)$$
$$= (b + \lambda + 5)s^2 + (5\lambda + 5b + \lambda b)s + 5\lambda b$$

Άρα θα έχουμε ότι ισχύει:

$$\theta_1^* + \theta_3^* = b + 5$$

$$\theta_2^* + \theta_3^*\lambda = -5\lambda - 5b - \lambda b - 1$$

$$\theta_1^* - b\theta_2^* + b\lambda\theta_3^* = 5\lambda b + \lambda$$

Από το παραπάνω σύστημα θα προκύψει η εξής λύση:

$$\theta_1^* = \lambda - b$$

$$\theta_2^* = \lambda^2 - 1$$

$$\theta_3^* = -\lambda - 5$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε πως έχουμε τον άμεσο προσδιορισμό των τριών παραμέτρων θ_2, θ_3, c_0. Επιλέγουμε ως τιμή του $\lambda = 1$ και θα προκύψει το εξής πιο απλοποιημένο σχήμα ελέγχου.

$$\dot{\omega}_1 = -\omega_1 + u_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -\omega_2 + y_p, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$u_p = \theta_1 \omega_1 - 6y_p + 4r$$

Τέλος, η μόνη παράμετρος που χρειάζεται εκτίμηση είναι το κέρδος θ_1. Παρόμοια ο προσαρμοστικός νόμος θα είναι:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e_1 \omega_1$$

Συμπερασματικά, παρατηρούμε πως οι απαιτήσεις της εισόδου να είναι ένα ικανά πλούσιο σήμα τάξης 4 μειώνεται σε ένα σήμα ικανά πλούσιο τάξης 1. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως πλέον έχουμε να εκτιμήσουμε μόνο μια παράμετρο, την b_0.

Άσκηση – 4η

Έχουμε το εξής σύστημα:

$$y_p = \frac{b}{s+a} u_p$$

όπου το $b \geq 1$ και μαζί με την παράμετρο a είναι άγνωστες. Επίσης, έχουμε και το μοντέλο αναφοράς

$$y_m = \frac{10}{s+10} r$$

(α) Θα σχεδιάσουμε έναν ευθύ MRAC προσαρμοστικό νόμο με τον αλγόριθμο σύγκλισης. Έστω ότι οι παράμετροι το συστήματος είναι γνωστές. Τότε, εκφράζοντας τα παραπάνω συστήματα στον χώρο κατάστασης θα έχουμε ότι:

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$\dot{x}_m = -10x_m + 10r$$

Για να σχεδιαστεί ο ευθύς προσαρμοστικός νόμος, τότε θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος ανάδρασης $u = k^* x + l^* r$. Τότε, το σύστημα κλειστού βρόχου δίνεται από την σχέση:

$$\dot{x} = -ax + b(k^* x + l^* r)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -(a - bk^*)x + bl^* r$$

Οπότε, τώρα θα προσδιορισθούν τα ιδανικά κέρδη έτσι ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει όμοια συνάρτηση μεταφοράς με το μοντέλο αναφοράς. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\alpha - bk^* = 10 \Rightarrow k^* = \frac{a-10}{b}$$

$$bl^* = 10 \Rightarrow l^* = \frac{10}{b}$$

Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι παράμετροι του συστήματος είναι άγνωστες. Τότε ο νόμος ελέγχου θα γίνει $u = -kx + lr$ όπου τα k, l είναι οι εκτιμήσεις των ιδανικών κερδών. Για την εύρεση των παραμέτρων, θα γίνει η προσθαφαίρεση του όρου $b(-k^*x + l^*r)$. Οπότε, το σύστημα θα πάρει την μορφή:

$$\dot{x} = -ax + bu + b(-k^*x + l^*r) - b(-k^*x + l^*r)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -10x + 10r + b(u - k^*x - l^*r)$$

Ορίζουμε το σφάλμα ανάμεσα στο πραγματικό και το επιθυμητό μοντέλο ως $e = x - x_m$ και προκύπτει η εξίσωση του σφάλματος

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m = -10e + b(u + k^*x - l^*r)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση του σφάλματος θα προκύψει η εξής σχέση:

$$e = \frac{1}{s+10} b(u - k^*x - l^*r) = \frac{10}{s+10}\frac{b}{10} \ (u - k^*x - l^*r)$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει ένα φίλτρο με πόλο στο -10. Επίσης, παρατηρούμε ότι το προκύπτει ένα διγραμμικό δυναμικό παραμετρικό μοντέλο (*B- DPM*), με $\theta^{*T} = [k^*, l^*], \rho = \frac{b}{10}, \varphi = [x, r]^T, z = e, W(s) = W_m(s) = \frac{10}{s+10}$ και το u. Χρησιμοποιώντας όμως την σχέση $l^* = \frac{10}{b}$, τότε η μορφή του παραπάνω μοντέλου θα γίνει ως:

$$\frac{10}{s+10} u = \frac{10}{b} e + k^* \frac{10}{s+10} x + l^* \frac{10}{s+10} r = l^* e + k^* \frac{10}{s+10} x + l^* x_m$$

Αντικαθιστούμε το σφάλμα με τον ορισμό του και θα προκύψει το τελικό στατικό παραμετρικό μοντέλο:

$$\frac{10}{s+10} u = k^* \frac{10}{s+10} x + l^* x = [k^* \quad l^*] \begin{bmatrix} \frac{10}{s+10} x \\ x \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, με αυτή την έκφραση που καταλήξαμε, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους κλασσικούς προσαρμοστικούς νόμους στο σχήμα μας. Ορίζουμε τα εξής:

$$z = \frac{10}{s+10}u$$

$$\theta^* = [k^* \quad l^*]^T$$

$$\varphi = \left[\frac{10}{s+10}x \quad x\right]^T$$

έτσι ώστε να προκύψει η μορφή του στατικού παραμετρικού μοντέλου (SPM). Οι νόμοι προσαρμοστικού ελέγχου θα βασιστούν πάνω σε αυτά τα μοντέλα. Επίσης, για να είναι ευσταθές το σύστημα, θα πρέπει να γνωρίζουμε το κάτω όριο της παραμέτρου l^* καθώς και το πρόσημο. Για τον αλγόριθμο gradient θα χρησιμοποιηθεί η εξής συνάρτηση κόστους.

$$J(\theta) = \frac{\varepsilon m_s^2}{2} = \frac{z - \theta^T\varphi}{2m_s^2}$$

Επομένως, θα προκύψει ο εξής προσαρμοστικό νόμος:

$$\dot{\theta} = \Gamma\varepsilon\varphi$$

όπου ο πίνακας $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Καθώς γνωρίζουμε ότι το $b \geq 1$, τότε, μπορούμε να βρούμε τα όρια του κέρδους l^*. Επειδή έχουμε ως reference value του b το 10, δεν θα πρέπει να ξεπεραστεί αυτή η τιμή για l^* έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες ευστάθειας. Έτσι, θα πρέπει το $0 < l^* \leq 10$. Επομένως, θα γίνε η χρήση του τελεστή προβολής για την εκτίμηση αυτού του κέρδους, έτσι ώστε η πρόβλεψη l να βρίσκεται πάντα εντός των ορίων του κυρτού συνόλου που ορίζεται. Ως κάτω όριο του l θα χρησιμοποιηθεί η τιμή $b_0 = 0.1$. Έτσι, με τον πίνακα $\Gamma = diag\{\gamma_1, \gamma_2\}$ θα προκύψουν οι εξής προσαρμοστικοί νόμοι:

$$\dot{k} = \gamma_1\varepsilon\frac{10}{s+10}x$$

$$\dot{l} = \Pr(\gamma_2\varepsilon x) = \begin{cases} \gamma_2\varepsilon x, & A\nu\ (b_0 < l < 10)\ \acute{\eta}\ (l = b_0\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon x \geq 0)\ \acute{\eta}\ (l = 10\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon x \leq 0) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Οπότε, συγκεντρωτικά θα έχουμε τον εξής ελεγκτή που θα υλοποιεί όλη την παραπάνω διαδικασία στον χώρο κατάστασης:

$$u = -kx + lr$$

$$\dot{\omega}_1 = -10\omega_1 + 10u, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -10\omega_2 + 10x, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{\omega_1 - k\omega_2 - lx}{1 + \omega_2^2 + x^2}$$

$$\dot{k} = \gamma_1 \varepsilon \omega_2$$

$$\dot{l} = \Pr(\gamma_2 \varepsilon x) = \begin{cases} \gamma_2 \varepsilon x, & A\nu\ (b_0 < l < 10)\ \text{ή}\ (l = b_0\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon x \geq 0)\ \text{ή}\ (l = 10\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon x \leq 0) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Συνεπώς, με βάση τον αλγόριθμο κλίσης θα προκύψουν οι εξής ιδιότητες:

I. Τα σήματα $k, l \in \mathcal{L}_\infty$.
II. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s^2,\ \dot{k}, \dot{l} \in \mathcal{L}_\infty$.

Με βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων, συμπεραίνεται πως ο παρών αλγόριθμος θα λειτουργήσει σωστά. Επιπλέον, προκύπτει πως ο αλγόριθμος κλίσης δεν τροποποιείται εντός του κυρτού συνόλου προβολής και διατηρούνται οι ιδιότητες της συνάρτησης Lyapunov. Ωστόσο, η παραπάνω διαδικασία δεν μας εξασφαλίζει πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου να είναι φραγμένα, ούτε ότι το $e \to 0$. Όμως, θα πρέπει να αποδείξουμε πως όλα τα σήματα πρέπει να είναι φραγμένα για να αποδειχθεί ο νόμος ελέγχου πως θα είναι φραγμένος και επιπλέον να ισχύει:

I. Όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα και το σφάλμα e_1 συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 0 για κάθε είσοδο αναφοράς $r \in \mathcal{L}_\infty$.
II. Αν το σήμα αναφοράς είναι ικανά πλούσιο τάξης $2n$, $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$ και τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή του ελεγχόμενου συστήματος δεν διαθέτουν κοινούς όρους, τότε το σφάλμα $|\tilde{\theta}| = |\theta - \theta^*|$ και το σφάλμα e_1 συγκλίνουν εκθετικά στο 0.

Η απόδειξη αυτού θα γίνει σύμφωνα με τις ιδιότητες της $\mathcal{L}_{2\delta}$ νόρμας, με το σήμα κανονικοποίησης να είναι το $m_s^2 = 1 + \|x\|_{2\delta}^2 + \|u\|_{2\delta}^2$, το λήμμα *Barbalat* και την ανισότητα *Bellman – Gronwall*. Η απόδειξη της παραπάνω διαδικασίας και η ευστάθεια του συστήματος είναι ικανά για να είναι φραγμένος ο νόμος ελέγχου. Έτσι, το παραπάνω σύστημα ελέγχου θα είναι ευσταθές και το σφάλμα θα συγκλίνει στο 0.

(β) Η διαδικασία της ανάλυσης είναι ίδια με το προηγούμενο ερώτημα, ωστόσο η διαφορά αποτελεί στον προσαρμοστικό νόμο ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος των ελάχιστων τετραγώνων. Θα τροποποιηθεί η συνάρτηση κόστους του συστήματος με την εξής:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\varphi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} dt + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T P^{-1}(0)(\theta - \theta_0)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την συνάρτηση κόστους θα προκύψει ο εξής προσαρμοστικό νόμος:

$$\dot{\theta} = P\varepsilon\varphi$$

$$\dot{P} = -P\frac{\varphi\varphi^T}{m_s^2}P$$

Ωστόσο, στον παρών αλγόριθμο υπάρχει πρόβλημα την ελαχιστοποίηση των ιδιοτιμών του πίνακα P. Έτσι, ο παραπάνω νόμος θα τροποποιηθεί και θα χρησιμοποιηθεί ο *Covariance Resetting*. Οι προσαρμοστικοί νόμοι θα γίνουν οι εξής:

$$\dot{\theta} = P\varepsilon\varphi$$

$$\dot{P} = -P\frac{\varphi\varphi^T}{m_s^2}P, \;\; P(t_r^+) = P(0) = p_0 I$$

Με τον χρόνο t_r^+ να ισχύει ότι $\lambda_{min}(P) \leq p_1$. Οι τιμές των p_0, p_1 είναι θετικές σταθερές όπου το $p_0 > p_1$. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να οριστούν οι νόμοι για το κάθε κέρδος. Αντί για κέρδος Γ έχουμε τον πίνακα P που λειτουργεί σαν κέρδος. Η διαφορά είναι πως ο αλγόριθμος ελάχιστων τετραγώνων δεν επιτρέπει την χρήση ενός διαγώνιου πίνακα που να αποζεύξει τις εκτιμήσεις. Οπότε, με την χρήση της ιδιότητας της συμμετρίας του πίνακα P, μπορούμε να βρούμε τους δύο προσαρμοστικούς νόμους. Άρα ισχύει ότι:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \varepsilon\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{10}{s+10}x \\ x \end{bmatrix}$$

$$\dot{k} = \varepsilon \left(P_1 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_2 x \right)$$

$$\dot{l} = \varepsilon \left(P_2 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_3 x \right)$$

Επομένως, με την χρήση της προβολής θα προκύψει ότι:

$$\dot{l} = \Pr\left(\varepsilon \left(P_2 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_3 x \right) \right)$$

$$\dot{l} = \begin{cases} \varepsilon \left(P_2 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_3 x \right), Αν \; (b_0 < l < 10) \text{ ή } \left(l = b_0 \; και \; \varepsilon \left(P_2 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_3 x \right) \geq 0 \right) \text{ ή } \left(l = 10 \; και \; \varepsilon \left(P_2 \left(\frac{10}{s+10} \right) x + P_3 x \right) \leq 0 \right) \\ 0, \quad αλλιώς \end{cases}$$

Η προβολή θα επηρεάσει και τον νόμο προσαρμογής για τον πίνακα P. Έτσι, αυτός θα γίνει ο εξής:

$$\dot{P} = \Pr\left(-P\frac{\varphi\varphi^T}{m_s^2}P\right)$$

$$\dot{P} = \begin{cases} -P\frac{\varphi\varphi^T}{m_s^2}P, Αν\ (b_0 < l < 10) \text{ ή } \left(l = b_0\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \geq 0\right) \text{ ή } \left(l = 10\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \leq 0\right), \\ 0, \qquad αλλιώς \end{cases}$$

$$P(t_r^+) = P(0) = p_0 I$$

Συνοψίζοντας, ο ελεγκτής και η υλοποίηση του στον χώρο κατάσταση θα είναι:

$$u = -kx + lr$$

$$\dot{\omega}_1 = -10\omega_1 + 10u, \ \ \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = -10\omega_2 + 10u, \ \ \omega_1(0) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{\omega_1 - k\omega_2 - lx}{1 + \omega_2^2 + x^2}$$

$$\dot{k} = \varepsilon\ \left(P_1\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_2x\right)$$

$$\dot{l} = \begin{cases} \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right), Αν\ (b_0 < l < 10) \text{ή} \left(l = b_0\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \geq 0\right) \text{ή} \left(l = 10\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \leq 0\right) \\ 0, \qquad αλλιώς \end{cases}$$

$$\dot{P} = \begin{cases} -P\frac{\varphi\varphi^T}{m_s^2}P, Αν\ (b_0 < l < 10) \text{ ή } \left(l = b_0\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \geq 0\right) \text{ή} \left(l = 10\ και\ \varepsilon\ \left(P_2\left(\frac{10}{s+10}\right)x + P_3x\right) \leq 0\right), \\ 0, \qquad αλλιώς \end{cases}$$

$$P(t_r^+) = P(0) = p_0 I$$

Συνεπώς, με βάση τον αλγόριθμο ελάχιστων τετραγώνων θα προκύψουν οι εξής ιδιότητες:

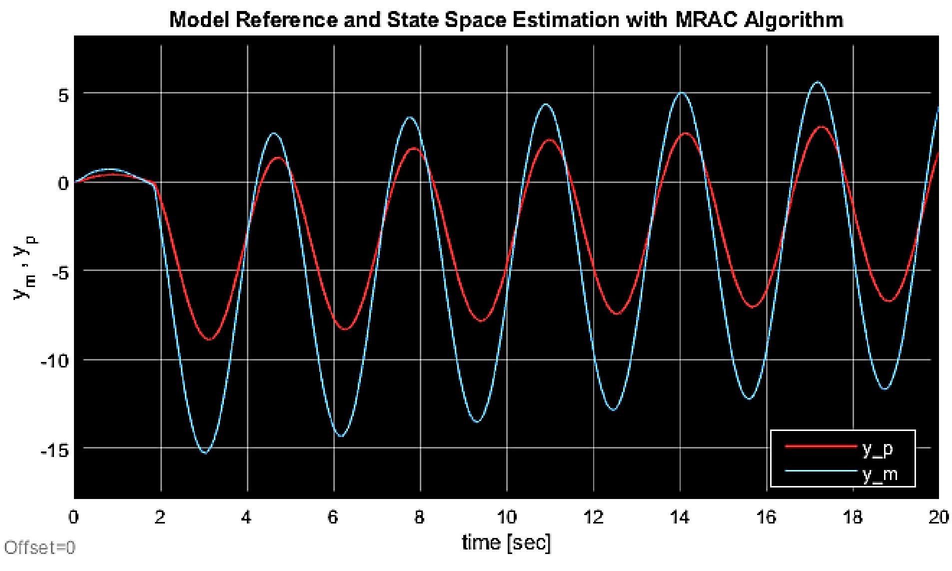
I. Τα σήματα $k, l \in \mathcal{L}_\infty$.
II. Τα σήματα $\varepsilon, \varepsilon m_s^2,\ \dot{k}, \dot{l} \in \mathcal{L}_\infty$.

Με βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων, συμπεραίνεται πως ο παρών αλγόριθμος θα λειτουργήσει σωστά. Επιπλέον, προκύπτει πως ο αλγόριθμος κλίσης δεν τροποποιείται εντός του κυρτού συνόλου προβολής και διατηρούνται οι ιδιότητες της συνάρτησης Lyapunov. Ωστόσο, η παραπάνω διαδικασία δεν μας εξασφαλίζει πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου να είναι φραγμένα, ούτε ότι το $e \to 0$. Όμως, θα πρέπει να αποδείξουμε πως όλα τα σήματα πρέπει να είναι φραγμένα για να αποδειχθεί ο νόμος ελέγχου πως θα είναι φραγμένος και επιπλέον να ισχύει:

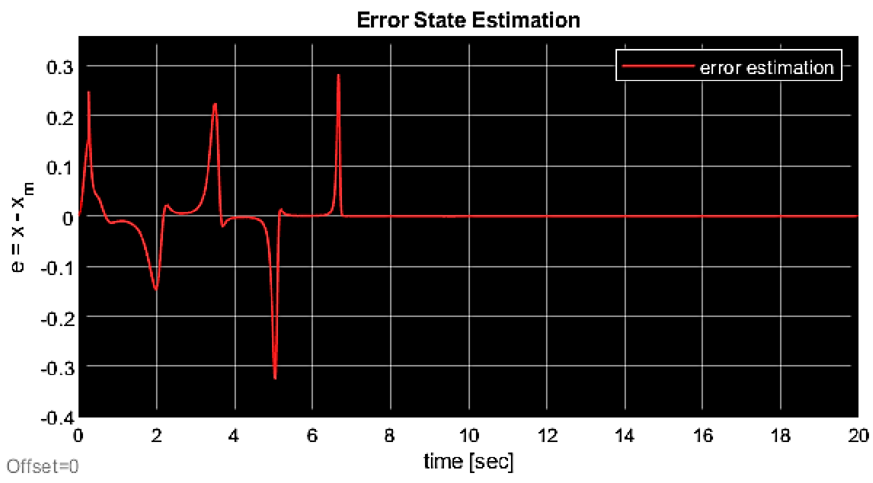
I. Όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα και το σφάλμα e_1 συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 0 για κάθε είσοδο αναφοράς $r \in \mathcal{L}_\infty$.

II. Αν το σήμα αναφοράς είναι ικανά πλούσιο τάξης $2n$, $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$ και τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή του ελεγχόμενου συστήματος δεν διαθέτουν κοινούς όρους, τότε το σφάλμα $|\tilde{\theta}| = |\theta - \theta^*|$ και το σφάλμα e_1 συγκλίνουν εκθετικά στο 0.

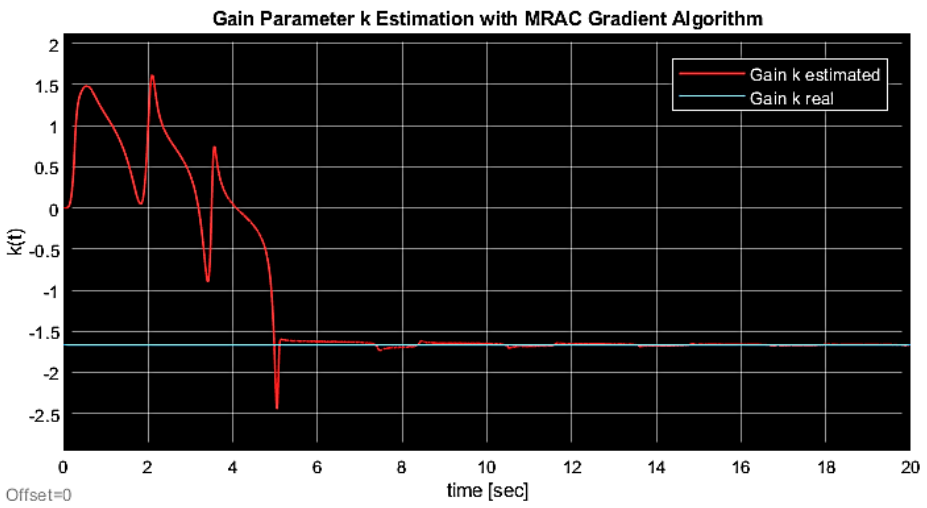
(γ) Η προσομοίωση και των δύο συστημάτων έγινε στον χώρο κατάστασης. Και στα δύο συστήματα εισάγεται ένα σήμα αναφοράς το οποίο είναι ημιτονοειδές με πλάτος 1 και συχνότητα $\omega = 4$. Το σήμα αυτό αποτελεί ικανά πλούσιο έτσι ώστε να έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων στην περιοχή των ιδανικών τιμών. Σε πρώτο βήμα επιλέχθηκε για το κέρδος $l(0) = 1$, καθώς ο συντελεστής της προβολής θα το μηδένιζε το κέρδος, χωρίς να υπήρχε απόκριση. Επίσης, για την προβολή επιλέχθηκε η $b_0 = 0.1$ ως κάτω όριο του κέρδους. Αυτό που θα παρατηρήσουμε από τις προσομοιώσεις είναι πως κέρδος l παραμένει εντός του συνόλου προβολής, χωρίς να ξεφεύγει.



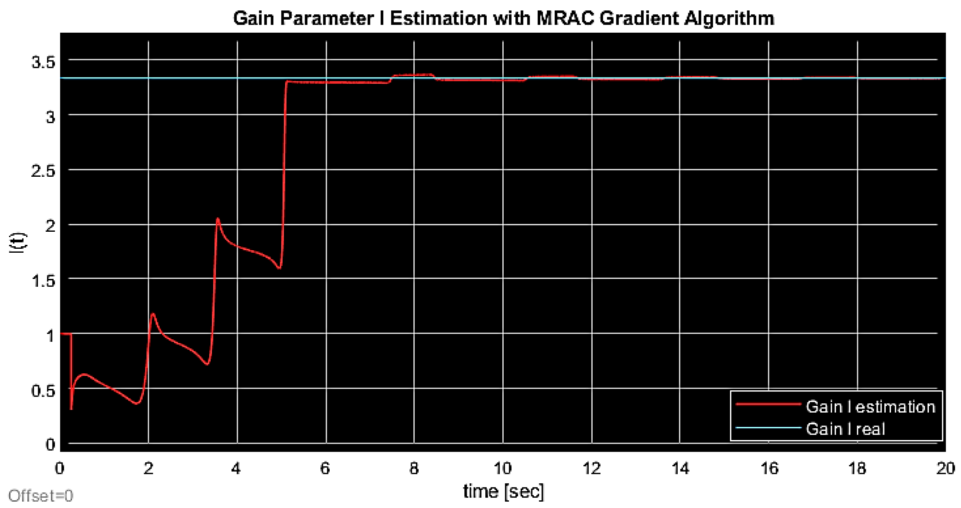
Σχήμα 13. Καταστάσεις μοντέλου αναφοράς και πραγματικού συστήματος με τον αλγόριθμο MRAC – Gradient.



Σχήμα 14. Εκτίμηση Σφάλματος με τον αλγόριθμο MRAC – Gradient.

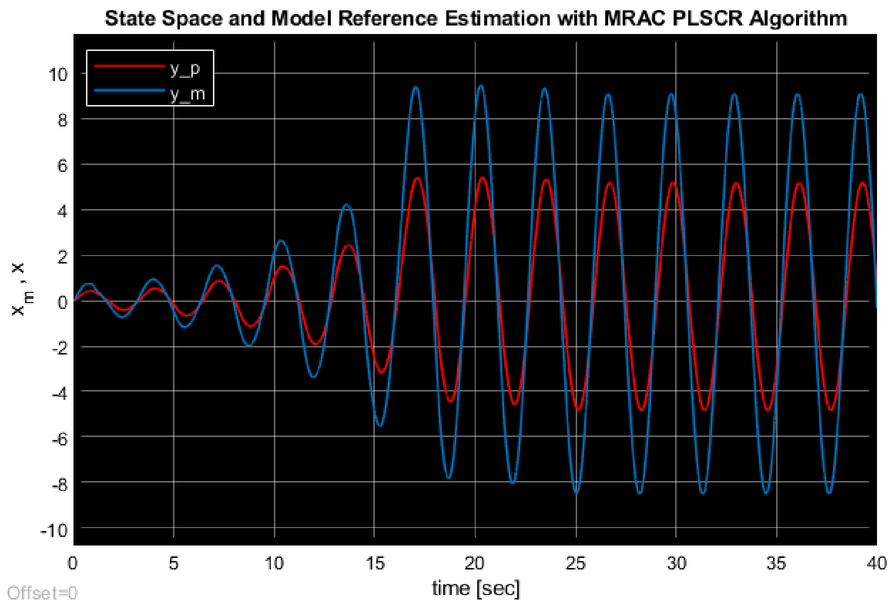


Σχήμα 15. Εκτίμηση κέρδους k με τον αλγόριθμο MRAC – Gradient.

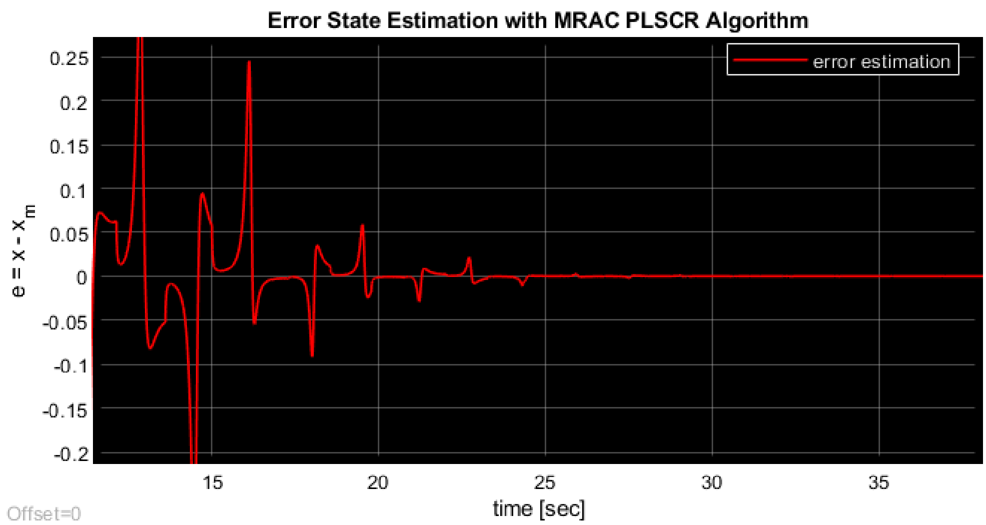


Σχήμα 16. Εκτίμηση κέρδους l με τον αλγόριθμο MRAC – Gradient.

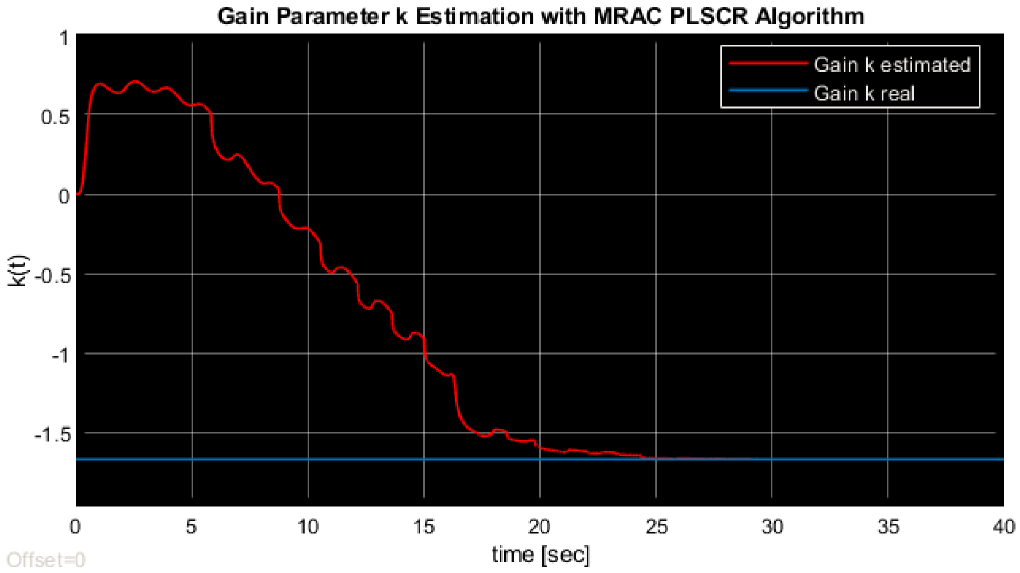
Για την προσομοίωση του δεύτερου αλγορίθμου, επιλέχθηκαν οι τιμές $p_0 = 60$ και $p_1 = 1$. Εδώ, επίσης παρατηρούμε σύγκλιση των κερδών στις πραγματικές τους τιμές. Επιπλέον, μπορούμε να διακρίνουμε και την τροποποίηση της ελάχιστης ιδιοτιμής του πίνακα P. Με την πάροδο του χρόνου αυξομειώνεται, χωρίς να μηδενίζεται και να πέφτουμε σε αστάθεια. Επιπλέον, Και οι τιμές του πίνακα P, αλλά και το κέρδος του l παραμένουν εντός του συνόλου προβολής, χωρίς να ξεφεύγουν από αυτό.



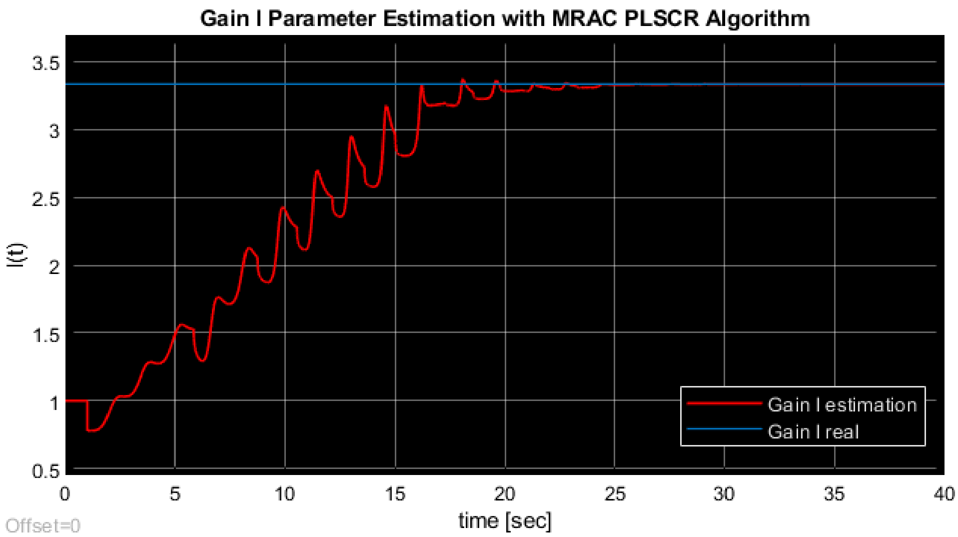
Σχήμα 17. Καταστάσεις μοντέλου αναφοράς και πραγματικού συστήματος με τον αλγόριθμο MRAC – Pure Least Squares Covariance Resetting.



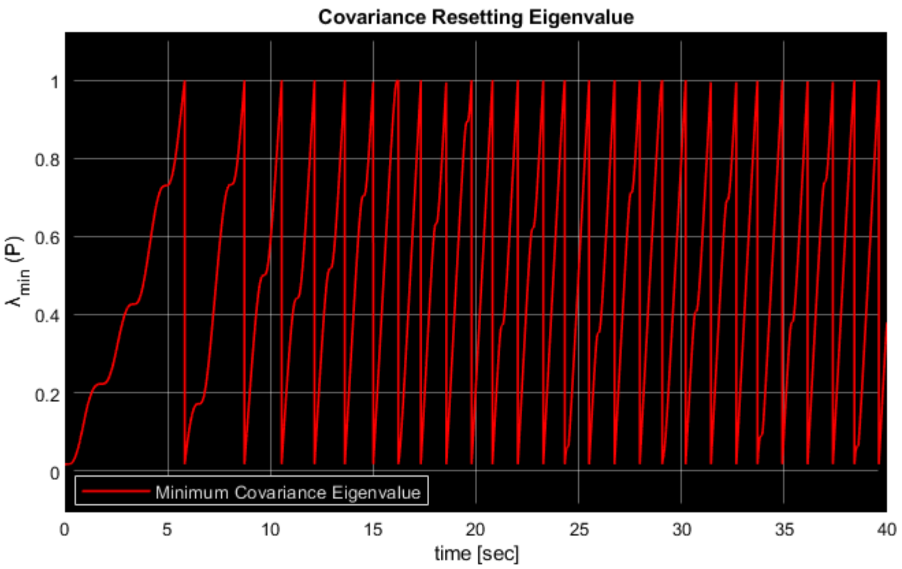
Σχήμα 18. Εκτίμηση Σφάλματος με τον αλγόριθμο MRAC – Pure Least Squares Covariance Resetting.



Σχήμα 19. Εκτίμηση κέρδους k με τον αλγόριθμο MRAC – Pure Least Squares Covariance Resetting.



Σχήμα 20. Εκτίμηση κέρδους l με τον αλγόριθμο MRAC – Pure Least Squares Covariance Resetting.



Σχήμα 21. Διακύμανση ελάχιστης ιδιοτιμής του πίνακα P.

Στο διάγραμμα της ελάχιστης ιδιοτιμής παρατηρούμε ότι όντως ισχύει η ανισότητα η οποία θέσαμε στην θεωρητική μελέτη. Επίσης, παρατηρούμε ότι όταν φτάσει το όριο η ιδιοτιμή, τότε γίνεται το resetting έτσι ώστε να μην βρεθεί το σύστημα σε αστάθεια ή/και να μην συγκλίνουν οι παράμετροι στις πραγματικές τους τιμές.

Βιβλιογραφία

[1] P. Ioannou, B. Fidan, *Adaptive Control Tutorial*, SIAM Advances in Design and Control, 2006.

[2] P. Ioannou, J. Sun, *Robust Adaptive Control*, First Edition, Dover Publications, 2012.

[3] K. J. Astrom, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Second Edition, Dover Publications, 2008.

[4] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, A. Karimi, *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*, Second Edition, Communications and Control Engineering, Springer, 2011.